

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Universität Mannheim

vorgelegt von
Dipl.-Inform. Markus Roggenbach
aus Wolfsburg

Mannheim, 1998

Dekan: Professor Dr. Reinhard Männer, Universität Mannheim
Referentin: Professor Dr. Mila Majster-Cederbaum, Universität Mannheim
Korreferent: Professor Dr. Franz Stetter, Universität Mannheim

Tag der mündlichen Prüfung: 07. Oktober 1998

Danksagung

Bei aller Eigenständigkeit beim Erstellen und Verfassen dieser Arbeit bin ich immer wieder auf die Unterstützung lieber Mitmenschen angewiesen gewesen – und habe sie zu meinem großen Glück auch erfahren dürfen. Alle Personen hier aufzuführen, die in meinen Augen einen Beitrag zu dieser Arbeit geleistet haben, würde zu weit führen. Doch ist es mir ein freudiges Anliegen, mich zu bedanken bei

Frau Professor Dr. M. MAJSTER-CEDERBAUM für die Anregung des Dissertationsthemas sowie viele fachliche Diskussionen.

Herrn Professor Dr. F. STETTER für die Übernahme des Zweitgutachtens.

WIEKE BENJES für eine wundervolle gemeinsame Zeit beim Promovieren – sie ist und bleibt meine Lieblingskollegin.

THOMAS WORSCH für seine verlässliche Unterstützung aus der Ferne.

TRUNG DO für die gute Nachbarschaft zwischen C002 und C001.

JÜRGEN JAAP für einen stets gewährleisteten Rechnerbetrieb.

BETTINA ENGELEN und FRANK SALGER für ihre freundliche Kollegialität und Geduld, mit mir (in ihren Augen) auch abstruse fachlichen Fragen zu diskutieren.

WIEKE BENJES, BETTINA ENGELEN, SVEN HELMER, FRANK SALGER, THOMAS WORSCH und GABRIEL ZACHMANN für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	3
1 Einführung	5
2 Modelle parallelen Rechnens	7
2.1 Transitionssysteme	8
2.2 Synchronisationsbäume und Hoare-Sprachen	11
2.3 Ereignisstrukturen	12
2.3.1 Ereignisstrukturen	13
2.3.2 Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge	16
2.4 Transitionssysteme mit Unabhängigkeit	19
2.5 Bisimulation auf Linear-Time Modellen	21
3 Abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation	23
3.1 Musterbeispiele: Interleaving Bisimulation auf Ereignisstrukturen . . .	24
3.2 AM-Bisimulation	26
3.2.1 Eine erste Interpretation des Begriffes AM-Bisimulation	28
3.2.2 Elementare Eigenschaften von AM-Bisimulation	31
3.2.3 Modellieren der Musterbeispiele	33
3.3 \mathbb{P} -Bisimulation	34
3.4 Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation	37
3.5 Ein erster Vergleich der abstrakten Charakterisierungen	41
4 Zusammenhänge zwischen den abstrakten Charakterisierungen	44
4.1 Der Operator $T_{path-\mathbb{P}}$	44
4.2 Verbindende Operatoren	48
4.3 Interpretation der Theoreme 4.2 und 4.7	59
4.4 Synopse der abstrakten Charakterisierungen	61
5 Bisimulation auf Modellen parallelen Rechnens	63
5.1 Transitionssysteme	63
5.1.1 Bisimulation	64
5.1.2 Trace-Äquivalenz	67
5.1.3 Modellierung weiterer Bisimulationsbegriffe	68
5.2 Synchronisationsbäume	68
5.3 Ereignisstrukturen	69

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

5.3.1	Definition von Bisimulationen	70
5.3.2	Modellierungen mit AM-Bisimulation	75
5.3.3	Modellierungen mit \mathbb{P} - und Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation	82
5.3.4	Zusammenfassung der Modellierungen	96
5.4	Transitionssysteme mit Unabhängigkeit	97
6	Zusammenfassung	99
	Index	100
	Literatur	104

Abbildungsverzeichnis

1	Klassifikation der branching-time Modelle.	7
2	Ein Transitionssystem zur Modellierung von $a b$ bzw. $(a.b) + (b.a)$. . .	9
3	Ein Transitionssystem zur Modellierung von $rec X = a.X$	9
4	Ein Synchronisationsbaum zur Modellierung von $a b$ bzw. $(a.b) + (b.a)$. . .	11
5	Ein Synchronisationsbaum zur Modellierung von $rec X = a.X$	11
6	Eine Ereignisstruktur zur Modellierung von $(a.b) + (b.a)$	14
7	Eine Ereignisstruktur zur Modellierung von $a b$	14
8	Eine Ereignisstruktur zur Modellierung von $rec X = a.X$	14
9	Klassifikation der linear-time Modelle.	21
10	Interleaving bisimulare Ereignisstrukturen \mathcal{E} und \mathcal{F}	24
11	Transitionssysteme $T_{int}(\mathcal{E})$ und $T_{int}(\mathcal{F})$ zu den Ereignisstrukturen aus Abbildung 10.	25
12	Zwei nicht interleaving bisimulare Ereignisstrukturen \mathcal{G} und \mathcal{H}	25
13	Definition von Homomorphismen zwischen Coalgebren.	26
14	Die „inverse“ Coalgebra zum Transitionssystem \mathcal{T} aus Abbildung 2. . .	27
15	Definition von F - bzw. AM-Bisimulation.	27
16	Interpretation von AM-Bisimulation: \mathcal{S}_1 und \mathcal{T}_1	29
17	Interpretation von AM-Bisimulation: \mathcal{S}_2 und \mathcal{T}_2	29
18	Interpretation von AM-Bisimulation: \mathcal{S}_3 und \mathcal{T}_3	29
19	Eine AM-Bisimulation zwischen $T_{int}(\mathcal{E})$ und $T_{int}(\mathcal{F})$ aus Abbildung 11. . .	33
20	\mathbb{P} -Bisimulation: Illustration des Begriffs \mathbb{P} -offen.	34
21	\mathbb{P} -Bisimulation: Transitivität mittels Pullbacks.	35
22	Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation.	37
23	Vorwärts-rückwärts Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation.	38
24	\mathbb{P} -Bisimulation: Pfad-Übertragung.	42
25	Definition der Transitionen für den Operator $T_{path-\mathbb{P}}$	45
26	Die Struktur von $T_{path-\mathbf{Bran}}(\mathcal{S})$ für das Transitionssystem \mathcal{S} aus Ab- bildung 4.	45
27	Illustration zu Beispiel 4.4: Morphismen und Objekte, die $T_{path-\mathbb{P}}(P)$ zugrunde liegen.	54
28	Simulationen zwischen Transitionssystemen.	54
29	Zusammenhänge zwischen den abstrakten Charakterisierungen von Bi- simulation.	62
30	Pomset bisimulare Ereignisstrukturen.	78

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

31	Step bisimulare Ereignisstrukturen \mathcal{E} und \mathcal{F}	91
32	Transitionssysteme $T_{step}(\mathcal{E})$ und $T_{step}(\mathcal{F})$ zu den Ereignisstrukturen aus Abbildung 31.	92
33	Eine AM-Bisimulation zwischen $T_{step}(\mathcal{E})$ und $T_{step}(\mathcal{F})$ aus Abbildung 32.	93
34	T_{pom} , T_{whp} und T_{hp} sind keine Funktoren.	94
35	Modellierungen von Bisimulationen auf Ereignisstrukturen.	96

1 Einführung

Bisimulation wurde von Milner [Mil80] und Park [Par81] auf Transitionssystemen eingeführt, um Prozesse zu identifizieren, die aus Sicht eines externen Beobachters nicht zu unterscheiden sind. Für die Prozeßalgebra CCS [Mil80, Mil89] erlangt dieser Begriff zentrale Bedeutung: Mit Bisimulation als Konzept von Gleichheit werden algebraische Gesetze zwischen Prozeßtermen hergeleitet. Die Lösung von rekursiven Prozeßgleichungen ist eindeutig bis auf Bisimulation, d.h. der Begriff der Bisimulation ist notwendig, um unendliches Verhalten von Prozessen zu beschreiben. Zur Verifikation von Prozessen findet ein abgewandelter Begriff Verwendung, die schwache Bisimulation, welche die „silent action“ τ besonders berücksichtigt.

Ausgehend von diesen Ideen finden sich in der Literatur neue Bisimulationsbegriffe auf Transitionssystemen [DNMV90, Mil92]. Auch auf andere Modelle wird der ursprüngliche Bisimulationsbegriff übertragen, wie z.B. auf Petri-Netze [GV87, NW95], Ereignisstrukturen [GG89, GKP92], Transitionssysteme mit Unabhängigkeit [JNW94, MN92]. In den zuletzt genannten Modellen ist es – im Gegensatz zu Transitionssystemen – möglich, Nebenläufigkeit (true concurrency) auszudrücken. Angesichts dieser größeren Ausdrucksstärke stellt sich die Frage neu, welches Verhalten eines Prozesses beobachtbar ist. Gewissermaßen ist diese Frage akademisch, denn die Modelle sind theoretische Konzepte. Eine bessere Formulierung ist daher: Welches Verhalten soll beobachtbar sein? Dazu sind unterschiedliche Auffassungen formuliert worden, so unter anderem, daß ein externer Beobachter einzelne Aktionen, Multimengen von Aktionen, Aktionsmengen mit kausaler Abhängigkeit oder einzelne Aktionen gemeinsam mit der gesamten Vergangenheit eines Systems protokollieren kann. Diese Auffassungen führen zu einer Vielzahl von Bisimulationsbegriffen, deren Definition von der Syntax her der ursprünglichen Definition von Bisimulation zumeist ähnlich sieht. Daraus erwächst die Fragestellung: Was haben die neuen Bisimulationen mit dem ursprünglichen Begriff zu tun, gibt es mehr als einen nur syntaktischen Zusammenhang zwischen ihnen, läßt sich ein gemeinsamer Überbegriff, eine abstrakte Charakterisierung finden?

In der Literatur finden sich verschiedene Ansätze für eine abstrakte Charakterisierung von Bisimulation: [DDNM93] verwenden spezielle Bäume, [Mal95] arbeitet mit Methoden der Algebra, [AM89] und [JNW94] hingegen nutzen Begriffe der Kategorientheorie. Wir werden in dieser Arbeit die Ansätze von [AM89] und [JNW94] miteinander vergleichen. Zum einen suchen wir nach direkten Zusammenhängen zwischen den abstrakten Charakterisierungen. Zum anderen fragen wir uns, ob sich kon-

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

krete Bisimulationen auf unterschiedlichen Modellen parallelen Rechnens mittels der abstrakten Charakterisierungen darstellen lassen.

Beide Vergleiche lassen den Schluß zu, daß die Charakterisierung von [AM89] von den untersuchten Konzepten das umfassendste ist. Von daher beantworten wir die Frage, was eine Bisimulation ist, mit dem Begriff der AM-Bisimulation: Eine Bisimulation zwischen zwei Objekten ist ein Transitionssystem, welches das beobachtbare „Verhalten“ wiedergibt, das beiden Objekten gemeinsam ist.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: In Kapitel 2 führen wir verschiedene Modelle parallelen Rechnens wie Transitionssysteme, Synchronisationsbäume, Ereignisstrukturen und Transitionssysteme mit Unabhängigkeit ein. Die abstrakten Charakterisierungen von Bisimulation erfordern es, die Modelle jeweils als Kategorien anzusehen. Die Beschränkung auf branching time Modelle liegt in dem Untersuchungsgegenstand Bisimulation begründet, wie wir in Abschnitt 2.5 kurz diskutieren werden.

Die verschiedenen abstrakten Charakterisierungen werden in Kapitel 3 definiert. Den Begriff der (vorwärts-rückwärts) AM-Bisimulation entwickeln wir als Spezialfall der F -Bisimulation aus [AM89], die Definition von \mathbb{P} -Bisimulation und (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation entnehmen wir [JNW94]. Die abstrakten Charakterisierungen illustrieren wir jeweils anhand eines Musterbeispiels und ziehen in Abschnitt 3.5 einen ersten, informellen Vergleich zwischen ihnen.

Zusammenhänge zwischen den abstrakten Charakterisierungen sind Thema des 4. Kapitels. Anhand verschiedener Operatoren beweisen wir Äquivalenzaussagen zwischen (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation und (vorwärts-rückwärts) AM-Bisimulation. Unter Verwendung eines Resultats aus [JNW94] entwickeln wir schließlich ein Gesamtbild der Zusammenhänge zwischen allen drei abstrakten Charakterisierungen.

Die Ergebnisse aus Kapitel 4 finden Anwendung in Kapitel 5: Hier modellieren wir konkrete Bisimulationen mit den abstrakten Charakterisierungen. Eine solche Untersuchung kann naturgemäß keine Vollständigkeit erreichen, wir beschränken uns auf ausgewählte Beispiele. Einen Schwerpunkt bilden dabei Ereignisstrukturen, entsprechend der Vielzahl von Bisimulationen, die in der Literatur zu diesem Modell zu finden sind.

2 Modelle parallelen Rechnens

Thema dieser Arbeit ist ein Vergleich *abstrakter* Charakterisierungen von Bisimulation. Dabei soll auch untersucht werden, inwiefern sich im Rahmen dieser Charakterisierungen *konkrete* Bisimulationsbegriffe darstellen lassen, wie sie von verschiedenen Autoren wie [GV87, GG89, DNMV90, ABS91, LG91, GKP92, Mil92, Vog93] auf unterschiedlichen *Modellen parallelen Rechnens* eingeführt wurden. Solche Modelle stellen wir in diesem Kapitel vor.

Modelle parallelen Rechnens lassen sich durch die Begriffspaare *branching-time/linear-time*, *system/behaviour* und *true-concurrency/interleaving* klassifizieren, siehe z.B. [SNW96]. In *branching-time Modellen* kann der Zeitpunkt einer nichtdeterministischen Entscheidung dargestellt werden, d.h. die Prozesse¹ $a.(b+c)$ und $(a.b)+(a.c)$ werden unterschiedlich modelliert, linear-time Modelle hingegen lassen diese Differenzierung nicht zu. In *system Modellen* gibt es den Begriff des (System)Zustands, während behaviour Modelle von dieser Information abstrahieren, d.h. in system Modellen kann der Prozeß $rec X = a.X$ durch ein endliches Objekt modelliert werden, während in behaviour Modellen hierfür ein unendliches Objekt erforderlich ist. *True-concurrency Modelle* schließlich unterscheiden die Konzepte Parallelität und Nichtdeterminismus, d.h. die Prozesse $a||b$ und $(a.b)+(b.a)$ werden verschieden modelliert, während sie in interleaving Modellen durch dasselbe Objekt repräsentiert werden.

	system	behaviour
interleaving	Transitionssysteme	Synchronisationsbäume
true-concurrency	Transitionssysteme mit Unabhängigkeit	Ereignisstrukturen

Abbildung 1: Klassifikation der *branching-time Modelle*.

In diesem Kapitel stellen wir die *branching-time Modelle* Transitionssysteme, Synchronisationsbäume, Ereignisstrukturen und Transitionssysteme mit Unabhängigkeit vor. Abbildung 1 zeigt die Klassifikation dieser Modelle in das Spektrum *system/behaviour* und *true-concurrency/interleaving*. Aus jedem *branching-time Modell* erhalten wir durch Einschränken auf eine geeignete Teilklasse ein *linear-time*

¹Wir folgen hier der gängigen Konvention und verwenden in einer intuitiv zu verstehenden Prozeßsprache „||“ als Paralleloperator, „+“ für Nichtdeterminismus, „.“ als Präfixoperator, „a“, „b“, „c“, ... als Namen für atomare Aktionen, „ $rec X.P(X)$ “ für Rekursion und schreiben Klammern, um keine Bindungsregeln aufstellen zu müssen.

Modell. In der Darstellung der Modelle folgen wir [SNW96], für die Definition von Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge greifen wir auf [JNW94] zurück.

Für die abstrakten Charakterisierungen von Bisimulation von [JNW94] ist es erforderlich, (kleine) Kategorien der oben angesprochenen Modelle für paralleles Rechnen zu betrachten. Der Anforderung *klein* genügen wir, indem die Zustände bzw. Ereignisse eines Objektes der jeweiligen Kategorie aus einer „universellen“ Menge U gewählt werden. Morphismen repräsentieren „Simulationen“ zwischen den Objekten einer Kategorie. Wir führen sie stets ohne Umbenennung von Aktionsnamen ein, d.h. die hier vorgestellten Kategorien sind Fasern der in [SNW96, JNW94] angegebenen Kategorien.

Die Beschränkung auf branching-time Modelle ergibt sich naturgemäß aus dem Untersuchungsgegenstand „Bisimulation“: Auf linear-time Modellen fallen Bisimulationbegriffe häufig mit einem anderen Äquivalenzbegriff wie einer Trace-Äquivalenz oder gar der Gleichheit zusammen, wie wir an einigen ausgewählten Beispielen in Abschnitt 2.5 sehen werden. Zudem lassen sich linear-time Modelle zumindest formal als Spezialfall von branching-time Modellen auffassen: [SNW96] führt die linear-time Modelle deterministische Transitionssysteme, Hoare-Sprachen, deterministische Transitionssysteme mit Unabhängigkeit und deterministische Ereignisstrukturen jeweils als volle Unterkategorie eines branching-time Modells ein. Da wir Bisimulationen ohnehin auf diesen umfassenderen Kategorien betrachten, erübrigt sich ein gesondertes Studium von Bisimulation auf den linear-time Modellen.

2.1 Transitionssysteme

Transitionssysteme sind ein branching-time Modell für paralleles Rechnen, welches den Begriff eines Systemzustands kennt, d.h. vom Typ `system` ist, sowie Nichtdeterminismus und Parallelität nicht unterscheidet, d.h. ein interleaving Modell ist. Die Einschränkung auf die Klasse der deterministischen Transitionssysteme ergibt ein linear-time Modell mit der Klassifikation `system` und `interleaving`.

Definition 2.1 (Transitionssystem, Kategorie \mathbf{T}_{Akt})

1. Ein Transitionssystem $\mathcal{T} = (S, s, \Leftrightarrow)$ über einer Menge von Aktionen Akt besteht aus

S , einer Menge von Zuständen,

$s \in S$, einem Anfangszustand, und

$\Leftrightarrow \subseteq S \times Akt \times S$, einer Übergangsrelation.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

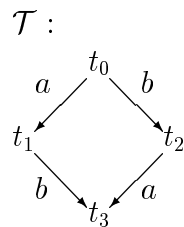


Abbildung 2: Ein Transitionssystem zur Modellierung von $a||b$ bzw. $(a.b) + (b.a)$.



Abbildung 3: Ein Transitionssystem zur Modellierung von $rec X = a.X$.

$(t, a, t') \in \Leftrightarrow$ heißt Transition. Für (t, a, t') schreiben wir auch: $t \xrightarrow{a} t'$.

2. Ein Transitionssystem ohne Anfangszustand $\mathcal{T} = (S, \Leftrightarrow)$ über einer Menge von Aktionen Akt besteht aus

S , einer Menge von Zuständen, und
 $\Leftrightarrow \subseteq S \times Akt \times S$, einer Übergangsrelation.

3. Es sei U eine „universelle“ Menge von Zuständen. Die Kategorie \mathbf{T}_{Akt} von Transitionssystemen hat als Objekte Transitionssysteme $\mathcal{T} = (S, s, \Leftrightarrow)$ über Akt mit $S \subseteq U$. Es seien $\mathcal{T}_1 = (S_1, s_1, \Leftrightarrow_1)$ und $\mathcal{T}_2 = (S_2, s_2, \Leftrightarrow_2)$ Objekte aus \mathbf{T}_{Akt} . Ein Morphismus $\sigma \in Hom_{\mathbf{T}_{Akt}}(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ ist eine (totale) Funktion $\sigma : S_1 \rightarrow S_2$, welche den folgenden Bedingungen genügt:

(a) $\sigma(s_1) = s_2$, und

(b) $\forall t, t' \in S_1, a \in Akt : t \xrightarrow{a}_1 t' \Rightarrow \sigma(t) \xrightarrow{a}_2 \sigma(t')$.

Beispiel 2.2 (Modellieren der Beispielprozesse)

Abbildung 2 zeigt das Transitionssystem

$$\mathcal{T} = (\{t_0, t_1, t_2, t_3\}, t_0, \{(t_0, a, t_1), (t_0, b, t_2), (t_1, b, t_3), (t_2, a, t_3)\})$$

über einer Aktionsmenge Akt mit $\{a, b\} \subseteq Akt$, welches die Prozesse $a||b$ bzw. $a.b + b.a$ modelliert. Ein Transitionssystem zur Modellierung des Prozesses $rec X = a.X$ zeigt

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Abbildung 3. Die Anfangszustände der Transitionssysteme sind in den Abbildungen nicht besonders gekennzeichnet.

Ein Transitionssystem heißt *deterministisch*, wenn gilt: gibt es in \mathcal{T} Transitionen $t \xrightarrow{a} t'$ und $t \xrightarrow{a} t''$, so folgt $t' = t''$. Die Transitionssysteme in Abbildung 2 und 3 sind beide deterministisch.

Es sei $\mathcal{T} = (S, s, \xrightarrow{\quad})$ ein Transitionssystem über einer Menge von Aktionen Akt . Mit $\xrightarrow{\quad}^*$ bezeichnen wir den reflexiven, transitiven Abschluß von $\xrightarrow{\quad}$ und schreiben auch $t \xrightarrow{w}^* t'$ für $t \xrightarrow{a_1} t_1 \xrightarrow{a_2} t_2 \xrightarrow{a_3} \dots \xrightarrow{a_n} t'$, $w = a_1 a_2 \dots a_n$, bzw. $t \xrightarrow{\epsilon}^* t$, $w = \epsilon$. Die *Sprache* eines Transitionssystems ist definiert als

$$Lan(\mathcal{T}) := \{w \in Akt^* \mid s \xrightarrow{w}^* t, t \in S\}.$$

Transitionssysteme \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 heißen *trace-äquivalent* [Hoa85], wenn

$$Lan(\mathcal{T}_1) = Lan(\mathcal{T}_2).$$

Definition 2.3 (Bisimulation)

Zwei Transitionssysteme $\mathcal{T}_1 = (S_1, s_1, \xrightarrow{\quad})$ und $\mathcal{T}_2 = (S_2, s_2, \xrightarrow{\quad})$ über einer Aktionsmenge Akt heißen *bisimilar* [Mil89], in Zeichen

$$\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2,$$

wenn es eine Relation $R \subseteq S_1 \times S_2$ gibt mit $(s_1, s_2) \in R$, so daß für alle $(t_1, t_2) \in R, a \in Akt$ gilt:

1. falls es in \mathcal{T}_1 eine Transition $t_1 \xrightarrow{a} t'_1$ gibt, so gibt es in \mathcal{T}_2 eine Transition $t_2 \xrightarrow{a} t'_2$ wobei $(t'_1, t'_2) \in R$ und
2. falls es in \mathcal{T}_2 eine Transition $t_2 \xrightarrow{a} t'_2$ gibt, so gibt es in \mathcal{T}_1 eine Transition $t_1 \xrightarrow{a} t'_1$ wobei $(t'_1, t'_2) \in R$.

Die Relation R heißt *Bisimulation*.

Mit **Bran** bezeichnen wir die volle Unterkategorie von \mathbf{T}_{Akt} , deren Objekte unverzweigte, endliche Transitionssysteme $\mathcal{T} = (S, s, \xrightarrow{\quad})$ sind, d.h. S ist endlich, für alle $t \in S$ gilt: $s \xrightarrow{\quad}^* t$ und $\xrightarrow{\quad}^*$ ist eine Totalordnung auf S .

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

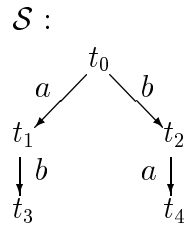


Abbildung 4: Ein Synchronisationsbaum zur Modellierung von $a||b$ bzw. $(a.b) + (b.a)$.

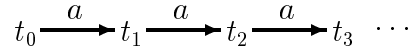


Abbildung 5: Ein Synchronisationsbaum zur Modellierung von $\text{rec } X = a.X$.

2.2 Synchronisationsbäume und Hoare-Sprachen

Synchronisationsbäume sind ein branching-time Modell für paralleles Rechnen, welches keinen Systemzustand kennt, d.h. vom Typ behaviour ist, sowie Nichtdeterminismus und Parallelität nicht unterscheidet, d.h. ein interleaving Modell ist. Hoare-Sprachen, die sich als Teilklasse der Synchronisationsbäume auffassen lassen, sind ein linear-time Modell mit der Klassifikation behaviour und interleaving.

Definition 2.4 (Synchronisationsbaum, Kategorie \mathbf{S}_{Akt})

1. Ein Synchronisationsbaum $\mathcal{S} = (S, s, \Leftrightarrow)$ über einer Menge von Aktionen Akt ist ein azyklisches Transitionssystem, in dem gilt:

(a) alle Zustände sind erreichbar und

(b) falls es in \mathcal{S} Transitionen $t' \xrightarrow{a} t$ und $t'' \xrightarrow{b} t$ gibt, so folgt $t' = t''$ und $a = b$.

2. Die Kategorie \mathbf{S}_{Akt} von Synchronisationsbäumen bezeichnet die volle Unterkategorie von \mathbf{T}_{Akt} , deren Objekte die Synchronisationsbäume über Akt sind.

Wenn wir in Definition 2.4 den Begriff „Zustand“ verwenden, geschieht dies, um Synchronisationsbäume formal als spezielle Transitionssysteme auffassen zu können. Da Synchronisationsbäume azyklisch sind, kann in ihnen das Konzept eines Systemzustands, der allein durch die zukünftigen möglichen Verhaltensweisen des Systems gekennzeichnet ist, nicht ausgedrückt werden, vergleiche z.B. die Modellierung des Prozesses $\text{rec } X = a.X$ in Beispiel 2.5.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Beispiel 2.5 (Modellieren der Beispielprozesse)

Abbildung 4 zeigt den Synchronisationsbaum

$$\mathcal{S} = (\{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4\}, t_0, \{(t_0, a, t_1), (t_0, b, t_2), (t_1, b, t_3), (t_2, a, t_4)\})$$

über einer Aktionsmenge Akt mit $\{a, b\} \subseteq Akt$, welcher die Prozesse $a||b$ bzw. $a.b+b.a$ modelliert. Im Gegensatz zu dem Transitionssystem aus Beispiel 2.2 sind hier zwei Endzustände erforderlich.

Einen Synchronisationsbaum zur Modellierung des Prozesses $rec X = a.X$. zeigt Abbildung 5. Im Fall von Synchronisationsbäumen sind zur Darstellung dieses Prozesses unendlich viele Zustände erforderlich.

Die Synchronisationsbäume in den Abbildungen 4 und 5 sind beide deterministisch.

Eine *Hoare-Sprache* über einer Menge von Aktionen Akt ist eine Menge \mathcal{H} , die folgenden Bedingungen genügt:

1. $\emptyset \neq \mathcal{H} \subseteq Akt^*$ und
2. gibt es in \mathcal{H} ein Element der Form wa , $a \in Akt$, so folgt $w \in \mathcal{H}$.

Einer Hoare-Sprache \mathcal{H} läßt sich ein Synchronisationsbaum $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} := (\mathcal{H}, \epsilon, \Leftrightarrow)$ zuordnen, wobei

$$w \xrightarrow{a} w' : \Leftrightarrow wa = w'.$$

$\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ ist stets deterministisch. Für $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ gilt: $Lan(\mathcal{S}_{\mathcal{H}}) = \mathcal{H}$.

2.3 Ereignisstrukturen

Ereignisstrukturen sind ein branching-time Modell für paralleles Rechnen, welches keinen Systemzustand kennt, d.h. vom Typ behaviour ist, sowie Nichtdeterminismus und Parallelität unterscheidet, d.h. ein true-concurrency Modell ist. Die Einschränkung auf die Klasse der deterministischen Ereignisstrukturen ergibt ein linear-time Modell mit der Klassifikation behaviour und true-concurrency.

Im Rahmen dieser Arbeit betrachten wir in der Regel *Ereignisstrukturen* (prime event structures), jedoch wird es beim Studium der sogenannten history-preserving Bisimulation erforderlich sein, auf die umfassendere Klasse der *Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge* (event structures with consistency relation) zurückzugreifen.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

2.3.1 Ereignisstrukturen

Definition 2.6 (Ereignisstruktur, Kategorie \mathbf{E}_{Akt})

1. Eine Ereignisstruktur $\mathcal{E} = (E, \leq, \sharp, l)$ über einer Menge von Aktionen Akt besteht aus

E , einer Menge von Ereignissen,

$\leq \subseteq E \times E$, einer Halbordnung, die als Flußrelation bezeichnet wird,

$\sharp \subseteq E \times E$, einer irreflexiven, symmetrischen Konfliktrelation, und

$l : E \rightarrow Akt$, einer (totalen) Markierungsfunktion,

die folgenden Bedingungen genügen:

(a) $\forall e \in E : \downarrow e := \{e' \in E \mid e' \leq e\}$ ist endlich (Prinzip der endlichen Ursachen) und

(b) $\forall d, e, f \in E : d \leq e \wedge d \sharp f \Rightarrow e \sharp f$ (Prinzip der Konfliktvererbung).

2. Eine Konfiguration einer Ereignisstruktur $\mathcal{E} = (E, \leq, \sharp, l)$ ist eine endliche, linksabgeschlossene, konfliktfreie Menge $X \subseteq E$. $Konf(\mathcal{E})$ bezeichnet die Menge aller Konfigurationen von \mathcal{E} .

3. Es sei U eine „universelle“ Menge von Ereignissen. Die Kategorie \mathbf{E}_{Akt} von Ereignisstrukturen hat als Objekte Ereignisstrukturen $\mathcal{E} = (E, \leq, \sharp, l)$ über Akt mit $E \subseteq U$. Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \leq_1, \sharp_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \leq_2, \sharp_2, l_2)$ Objekte aus \mathbf{E}_{Akt} . Ein Morphismus $\eta \in Hom_{\mathbf{E}_{Akt}}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ ist eine (totale) Funktion $\eta : E_1 \rightarrow E_2$, welche den folgenden Bedingungen genügt:

(a) $\forall e \in E_1 : (l_2 \circ \eta)(e) = l_1(e)$.

(b) $\forall X \in Konf(\mathcal{E}_1) : \eta(X) := \{\eta(e) \mid e \in X\} \in Konf(\mathcal{E}_2)$.

(c) $\forall X \in Konf(\mathcal{E}_1) \forall e, e' \in X : \eta(e) = \eta(e') \Rightarrow e = e'$.

Beispiel 2.7 (Modellieren der Beispielprozesse)

Abbildung 6 zeigt die Ereignisstruktur

$$\mathcal{E} := (\{e_1, e_2, e_3, e_4\}, \leq, \sharp, l)$$

über einer Aktionsmenge Akt mit $\{a, b\} \subseteq Akt$, wobei \leq die von der Relation $e_1 < e_2, e_3 < e_4$ erzeugte Halbordnung ist, \sharp der Abschluß der Relation $\{(e_1, e_3)\}$ unter Symmetrie und dem Prinzip der Konfliktvererbung, und $l(e_1) = l(e_4) := a, l(e_2) =$

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

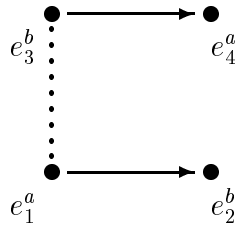


Abbildung 6: Eine Ereignisstruktur zur Modellierung von $(a.b) + (b.a)$.



Abbildung 7: Eine Ereignisstruktur zur Modellierung von $a||b$.

$l(e_3) := b$. Entsprechend dieser Beschreibung von \mathcal{E} zeigt Abbildung 6 von \leq und $\#$ nur die erzeugenden Relationen – im Fall der Flußrelation durch einen Pfeil, im Fall der Konfliktrelation durch eine Folge von Punkten. Die Ereignisstruktur \mathcal{E} modelliert den Prozeß $(a.b) + (b.a)$.

Abbildung 7 zeigt eine Modellierung von $a||b$ als Ereignisstruktur. In Abbildung 8 ist zu sehen, daß zum Modellieren des Prozesses $rec X = a.X$ unendlich viele Ereignisse notwendig sind.

Eine Ereignisstruktur $\mathcal{E} = (E, \leq, \#, l)$ heißt *endlich*, wenn die Menge E ihrer Ereignisse endlich ist. Eine Konfiguration X einer Ereignisstruktur $\mathcal{E} = (E, \leq, \#, l)$ läßt sich als *markierte, partiell geordnete Menge* auffassen, die wir auch als *Lposet* bezeichnen. Dabei übernimmt X Flußrelation und Markierungsfunktion von $\mathcal{E} : X = (X, \leq \cap (X \times X), \emptyset, l|_X)$. Ereignisse $e_1, e_2 \in E$ heißen *unabhängig*, wenn sie weder bezüglich \leq noch über $\#$ in Relation miteinander stehen.

Es sei $X = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \in \text{Konf}(\mathcal{E})$ Konfiguration einer Ereignisstruktur \mathcal{E} . Ein Folge $e_1 e_2 \dots e_n$ heißt *Derivation von X* , wenn es Konfigurationen $X_0, X_1, \dots, X_n \in$

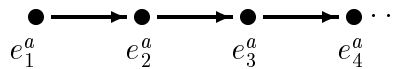


Abbildung 8: Eine Ereignisstruktur zur Modellierung von $rec X = a.X$.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

$Konf(\mathcal{E})$ gibt mit $X_0 = \emptyset$, $X_n = X$ und $X_i \setminus X_{i-1} = \{e_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Es sei $e_1 e_2 \dots e_n$ Derivation einer Konfiguration X , $f_1 f_2 \dots f_n$ Derivation einer Konfiguration Y . Wir sagen, daß diese Derivationen äquivalent sind, in Zeichen

$$e_1 e_2 \dots e_n \sim f_1 f_2 \dots f_n,$$

wenn es einen Isomorphismus $\sigma : X \rightarrow Y$ gibt mit

$$\eta(e_1 e_2 \dots e_n) := \eta(e_1) \eta(e_2) \dots \eta(e_n) = f_1 f_2 \dots f_n.$$

Die Menge $Der(X)$ enthält alle Äquivalenzklassen $[e_1 e_2 \dots e_n]$ von Derivationen einer Konfiguration X ,

$$Der_{Akt} := \bigcup_{X \in Conf(\mathcal{E}), \mathcal{E} \in \mathbf{E}_{Akt}} Der(X)$$

ist die Menge aller Äquivalenzklassen von Derivationen, die es zu Ereignisstrukturen aus \mathbf{E}_{Akt} gibt.

Einer Ereignisstruktur $\mathcal{E} = (E, \leq, \sharp, l)$ über einer Aktionsmenge Akt läßt sich ein Transitionssystem $T_{int}(\mathcal{E}) := (Konf(\mathcal{E}), \emptyset, \Leftrightarrow)$ über Akt zuordnen, wobei

$$X \xrightarrow{e} X' : \Leftrightarrow \exists e \in E : X' = X \cup \{e\}, l(e) = a.$$

Gilt $Lan(T_{int}(\mathcal{E})) = Lan(T_{int}(\mathcal{F}))$ für Ereignisstrukturen \mathcal{E} und \mathcal{F} , so heißen sie *trace-äquivalent*. Falls $T_{int}(\mathcal{E}) \sim T_{int}(\mathcal{F})$, so sind \mathcal{E} und \mathcal{F} *interleaving bisimilar*.

Eine Ereignisstruktur \mathcal{E} ist

deterministisch, wenn $T_{int}(\mathcal{E})$ deterministisch ist.

ohne auto-concurrency, wenn für alle $X, Y, Z \in Konf(\mathcal{E})$, $a \in Akt$ gilt:

aus $X \xrightarrow{a} Z$ und $Y \xrightarrow{a} Z$ folgt $X = Y$.

endlich verzweigt, wenn für alle $X \in Konf(\mathcal{E})$ die Menge $\{X' \mid \exists a \in Akt : X \xrightarrow{a} X'\}$ endlich ist.

Mit **Lin** bezeichnen wir die volle Unterkategorie von \mathbf{E}_{Akt} , deren Objekte konfliktfreie Ereignisstrukturen (E, \leq, \emptyset, l) sind, wobei E eine endliche Menge und die Flußrelation \leq eine Totalordnung ist.

Es seien $\mathcal{E} = (E, \leq_E, \emptyset, l_E)$, $\mathcal{M} = (M, \leq_M, \emptyset, l_M)$ endliche Ereignisstrukturen mit $E \cap M = \emptyset$ und $\leq_M = \{(m, m) \mid m \in M\}$. Mit $\mathcal{F} := \mathcal{E}; \mathcal{M}$ bezeichnen wir die Ereignisstruktur $(E \cup M, \leq_F, \emptyset, l_E \cup l_M)$, wobei $e \leq_F f$ gdw. $e = f$ oder $(e \in E$ und $f \in M)$ oder $e \leq_E f$. Eine Ereignisstruktur

$$\mathcal{S} := \mathcal{M}_1; \mathcal{M}_2; \dots; \mathcal{M}_n, \quad n \geq 0,$$

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

heißt *Schritt*, wobei $\mathcal{M}_i = (M_i, \leq_{M_i}, \emptyset, l_i)$ Ereignisstrukturen sind, M_i endliche, paarweise disjunkte Mengen und $\leq_{M_i} = \{(m, m) \mid m \in M_i\}$. Einem Ereignis e einer Ereignisstruktur \mathcal{E} ordnen wir seine Tiefe zu vermöge

$$\text{Tiefe}_{\mathcal{E}}(e) := \begin{cases} 1 & ; \downarrow\{e\} = \{e\} \\ 1 + \max\{\text{Tiefe}_{\mathcal{E}}(f) \mid f \in \downarrow\{e\}, f \neq e\} & ; \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sei $\mathcal{S} := \mathcal{M}_1; \mathcal{M}_2; \dots; \mathcal{M}_n$ ein Schritt, wobei alle \mathcal{M}_i verschieden von der leeren Ereignisstruktur sind. Dann gilt für die Ereignisse e von \mathcal{S} : $e \in \mathcal{M}_i \iff \text{Tiefe}_{\mathcal{S}}(e) = i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, d.h. die Repräsentation eines Schrittes mit nicht-leeren Ereignisstrukturen ist eindeutig bestimmt. **Step** ist die volle Unterkategorie von \mathbf{E}_{Akt} , deren Objekte Schritte sind.

Pos bezeichnet die volle Unterkategorie von \mathbf{E}_{Akt} , deren Objekte endliche, konfliktfreie Ereignisstrukturen sind. Eine *partiell geordnete Multimenge* $[\mathcal{E}]$, kurz *Pomset* genannt, ist die Isomorphieklasse einer Ereignisstruktur aus **Pos**. **[Pos]** bezeichnet die Menge aller Pomsets.

2.3.2 Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge

Definition 2.8 (Ereignisstruktur mit Konsistenzmenge, Kategorie \mathbf{EK}_{Akt})

1. Eine Ereignisstruktur mit Konsistenzmenge $\mathcal{E} = (E, \leq, Km, l)$ über einer Menge von Aktionen *Akt* besteht aus

E , einer Menge von Ereignissen,

$\leq \subseteq E \times E$, einer Halbordnung, die als Flußrelation bezeichnet wird,

$Km \subseteq \{X \subseteq E \mid X \text{ endlich}\}$, einer Konsistenzmenge, und

$l : E \rightarrow \text{Akt}$, einer (totalen) Markierungsfunktion,

die folgenden Bedingungen genügen:

(a) $\forall e \in E : \downarrow e := \{e' \in E \mid e' \leq e\}$ ist endlich (Prinzip der endlichen Ursachen),

(b) $\forall e \in E : \{e\} \in Km$,

(c) $\forall K \in Km : L \subseteq K \Rightarrow L \in Km$,

(d) $\forall K \in Km \forall e, f \in E : f \in K \wedge e \leq f \Rightarrow K \cup \{e\} \in Km$.

2. Eine Konfiguration einer Ereignisstruktur mit Konsistenzmenge $\mathcal{E} = (E, \leq, Km, l)$ ist eine linksabgeschlossene Menge $X \subseteq E$, für deren endliche Teilmengen

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

$K \subseteq_{\text{endl}} X$ gilt: $K \in \text{Km}$. $\text{Konf}(\mathcal{E})$ bezeichnet die Menge aller Konfigurationen von \mathcal{E} , mit $\text{Konf}_{\text{endl}}(\mathcal{E})$ wird die Menge aller endlichen Konfigurationen von \mathcal{E} bezeichnet.

3. Es sei U eine „universelle“ Menge von Ereignissen. Die Kategorie \mathbf{EK}_{Akt} von Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge hat als Objekte Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge $\mathcal{E} = (E, \leq, \text{Km}, l)$ über Akt mit $E \subseteq U$. Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \leq_1, \text{Km}_1, l_1)$, $\mathcal{E}_2 = (E_2, \leq_2, \text{Km}_2, l_2)$ Objekte aus \mathbf{EK}_{Akt} . Ein Morphismus $\eta \in \text{Hom}_{\mathbf{EK}_{\text{Akt}}}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ ist eine (totale) Funktion $\eta : E_1 \rightarrow E_2$, welche den folgenden Bedingungen genügt:

- (a) $\forall e \in E_1 : (l_2 \circ \eta)(e) = l_1(e)$.
- (b) $\forall X \in \text{Konf}(\mathcal{E}_1) : \eta(X) := \{\eta(e) \mid e \in X\} \in \text{Konf}(\mathcal{E}_2)$.
- (c) $\forall X \in \text{Konf}(\mathcal{E}_1) \forall e, e' \in X : \eta(e) = \eta(e') \Rightarrow e = e'$.

Bei Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge werden, im Gegensatz zu Ereignisstrukturen, auch unendliche Konfigurationen betrachtet. Doch schon endliche Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge sind ausdrucksstärker:

Beispiel 2.9 (Ausdrucksstärke von Ereignisstrukturen)

Um den Unterschied zwischen Ereignisstrukturen und Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge zu illustrieren, betrachten wir eine Ereignismenge $E := \{e, f, g\}$, eine Halbordnung $\leq := \{(e, e), (f, f), (g, g)\}$ und eine beliebige Markierungsfunktion l . Wählen wir

$$\text{Km} := \{\emptyset, \{e\}, \{f\}, \{g\}, \{e, f\}, \{e, g\}, \{f, g\}\},$$

so sind unter anderem die Mengen $\{e, f\}$, $\{e, g\}$, und $\{f, g\}$ Konfigurationen der Ereignisstruktur mit Konsistenzmenge $\mathcal{E} := (E, \leq, \text{Km}, l)$, während die Menge $\{e, f, g\}$ keine Konfiguration ist.

Eine solche Menge von Konfigurationen kann mit einer Ereignisstruktur $\mathcal{E}' := (E, \leq, \sharp, l)$ nicht generiert werden, wenn wir nur die Konsistenzrelation Km gegen eine Konfliktrelation \sharp austauschen: Damit die Menge $\{e, f, g\}$ keine Konfiguration von \mathcal{E}' ist, muß es einen Konflikt zwischen den Ereignissen geben. Gelte o.b.d.A. $e \sharp f$. Dann gilt zwar $\{e, f, g\} \notin \text{Konf}(\mathcal{E})$, aber es gilt auch $\{e, f\} \notin \text{Konf}(\mathcal{E})$.

Jede Ereignisstruktur kann als Ereignisstruktur mit Konsistenzmenge aufgefaßt werden. Bei diesem Übersetzungsprozeß bleiben die Morphismen erhalten:

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Lemma 2.10 (Umformen von Ereignisstrukturen)

1. Es sei $\mathcal{E} = (E, \leq, \sharp, l)$ eine Ereignisstruktur, definiere $\mathcal{E}' := (E, \leq, Km, l)$ als Ereignisstruktur mit Konsistenzmenge, wobei

$$Km := \{K \subseteq E \mid K \text{ endlich, } \forall e, f \in K : \neg(e \sharp f)\}.$$

Dann gilt: $Konf(\mathcal{E}) = Konf_{endl}(\mathcal{E}')$.

2. Es seien $\mathcal{E} = (E, \leq_E, \sharp_E, l_E)$, $\mathcal{F} = (F, \leq_F, \sharp_F, l_F)$ zwei Ereignisstrukturen, \mathcal{E}' und \mathcal{F}' die ihnen nach 1. zugeordneten Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge. Dann gilt:

$$Hom_{\mathbf{E}_{Akt}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = Hom_{\mathbf{EK}_{Akt}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}').$$

Beweis:

zu 1.: Zunächst beweisen wir, daß \mathcal{E}' eine Ereignisstruktur mit Konsistenzmenge ist.

Da \sharp irreflexiv ist, gilt für alle $e \in E : \{e\} \in Km$. Ist $K \in Km$, so ist K nach Definition von Km endlich und konfliktfrei. Dies gilt ebenso für jede Teilmenge $L \subseteq K$, d.h. wir erhalten für jede Teilmenge L von $K : L \in Km$. Gelte schließlich $K \in Km$, $f \in K$ und $e \leq f$. Angenommen, $K \cup \{e\} \notin Km$. Dann gibt es ein Element $g \in K$ mit $e \sharp g$. Wegen $e \leq f$ folgt daraus $f \sharp g$ in der Ereignisstruktur \mathcal{E} . Damit erhalten wir $K \notin Km$ – Widerspruch zur Voraussetzung.

Nun betrachten wir die Aussagen über die Konfigurationen von \mathcal{E} bzw. \mathcal{E}' . Es sei $X \in Konf(\mathcal{E})$ eine Konfiguration. Dann ist X eine endliche, linksabgeschlossene Menge. Weiterhin gilt für jede Teilmenge $K \subseteq X$, daß sie konfliktfrei ist und damit $K \in Km$ gilt. Somit erhalten wir $X \in Konf_{endl}(\mathcal{E}')$.

Es sei $X \in Konf_{endl}(\mathcal{E}')$ eine Konfiguration. Dann ist X endlich und linksabgeschlossen. Um zu beweisen, daß X konfliktfrei ist, betrachten wir Ereignisse $e, f \in X$. Dann gilt: $\{e, f\} \subseteq X$ und damit $\{e, f\} \in Km$. Nach Definition von Km erhalten wir: $\neg(e \sharp f)$ – also gilt $X \in Konf(\mathcal{E})$.

zu 2.: Wir zeigen nur „ \subseteq “ – da nach 1. die endlichen Konfigurationen von \mathcal{E}' und \mathcal{F}' gerade die Konfigurationen von \mathcal{E} bzw. \mathcal{F} sind, gilt die andere Inklusion offensichtlich.

Es sei $\eta \in Hom_{\mathbf{E}_{Akt}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ ein Morphismus, $X \in Konf(\mathcal{E}')$ eine Konfiguration der Ereignisstruktur mit Konsistenzmenge \mathcal{E}' .

zu Bedingung (b): Die Menge $\eta(X) \subseteq F$ ist linksabgeschlossen: Sei $f \in \eta(X)$, gelte für ein $f' \in F : f' \leq_F f$. In X gibt es ein Ereignis e mit $\eta(e) = f$. Die

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Menge $\downarrow e$ ist endlich und linksabgeschlossen. Da auch X linksabgeschlossen ist, gilt $\downarrow e \subseteq X$. Daraus folgt $\downarrow e \in Km_{\mathcal{E}'}$ und nach Definition von $Km_{\mathcal{E}'}$ erhalten wir: $\downarrow e$ ist konfliktfrei und somit eine Konfiguration von \mathcal{E} . Somit gilt $\eta(\downarrow e) \in Konf(\mathcal{F})$, insbesondere ist $\eta(\downarrow e)$ linksabgeschlossen. Wegen $f \in \eta(\downarrow e)$ gilt: $f' \in \eta(\downarrow e) \subseteq \eta(X)$.

Es sei $K \subseteq_{endl} \eta(X)$, es seien $f_1, f_2 \in K$. Dann gibt es Ereignisse $e_1, e_2 \in X$ mit $\eta(e_1) = f_1$ und $\eta(e_2) = f_2$. $\downarrow e_1 \cup \downarrow e_2$ ist endlich und linksabgeschlossen. Wegen $\downarrow e_1 \cup \downarrow e_2 \subseteq X$ folgt $(\downarrow e_1 \cup \downarrow e_2) \in Km_{\mathcal{E}'}$ und ist demnach konfliktfrei. Demzufolge ist $\eta(\downarrow e_1 \cup \downarrow e_2) \in Konf(\mathcal{F})$. Daraus folgt insbesondere $\neg(e_1 \# f)$ und damit $K \in Km_{\mathcal{F}'}$.

zu Bedingung (c): Es seien $e_1, e_2 \in X$ mit $\eta(e_1) = \eta(e_2)$. Die Menge $\downarrow e_1 \cup \downarrow e_2$ ist eine Konfiguration der Ereignisstruktur \mathcal{E} . Daher folgt aus $\eta(e_1) = \eta(e_2)$ die Gleichheit $e_1 = e_2$. ■

PosK bezeichnet die volle Unterkategorie von \mathbf{EK}_{Akt} , deren Objekte endliche Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge $\mathcal{E} = (E, \leq, Km, l)$ sind, wobei $Km = \mathcal{P}(E)$ die Potenzmenge von E ist. Da eine Ereignisstruktur $\mathcal{E} = (E, \leq, \emptyset, l)$ aus **Pos** eine leere Konfliktrelation hat, hat die ihr nach Lemma 2.10 zugeordnete Ereignisstruktur \mathcal{E}' als Konsistenzmenge die Potenzmenge von E . Demnach enthalten die Kategorien **PosK** und **Pos** – abgesehen von dem formalen Unterschied zwischen ihrer Definition mit Konfliktrelation bzw. Konsistenzmenge – dieselben Objekte. Nach Lemma 2.10, Teil 2, stimmen sie auch in Bezug auf die Morphismen überein.

2.4 Transitionssysteme mit Unabhängigkeit

Transitionssysteme mit Unabhängigkeit sind ein branching-time Modell für paralleles Rechnen, welches den Begriff eines Systemzustands kennt, d.h. vom Typ system ist, sowie Nichtdeterminismus und Parallelität unterscheidet, d.h. ein true-concurrency Modell ist. Die Einschränkung auf die Klasse der deterministischen Transitionssysteme mit Unabhängigkeit ergibt ein linear-time Modell mit der Klassifikation system und true-concurrency.

Definition 2.11 (Transitionssystem mit Unabhängigkeit, Kategorie \mathbf{TU}_{Akt})

1. Ein Transitionssystem mit Unabhängigkeit $\mathcal{U} = (S, s, \Leftrightarrow, I)$ über einer Menge von Aktionen Akt besteht aus

(S, s, \Leftrightarrow) , einem Transitionssystem über einer Menge von Aktionen Akt ,
und

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

$I \subseteq (\Leftrightarrow \times \Leftrightarrow)$, einer irreflexiven, symmetrischen Unabhängigkeitsrelation,

die folgenden Bedingungen genügen, wobei

$$(t, a, t') \prec (t'', a, u) : \iff \exists b \in \text{Akt} : (t, a, t')I(t, b, t'') \wedge \\ (t, a, t')I(t', b, u) \wedge \\ (t, b, t'')I(t'', a, u),$$

und \sim die kleinste Äquivalenzrelation ist, so daß $\prec \subseteq \sim$:

- (a) $(t, a, t') \sim (t, a, t'') \Rightarrow t' = t''$,
- (b) $(t, a, t')I(t, b, t'') \Rightarrow \exists u : (t, a, t')I(t', b, u) \wedge (t, b, t'')I(t'', a, u)$,
- (c) $(t, a, t')I(t', b, u) \Rightarrow \exists t'' : (t, a, t')I(t, b, t'') \wedge (t, b, t'')I(t'', a, u)$ und
- (d) $(t, a, t') \sim (u, a, u')I(w, b, w') \Rightarrow (t, a, t')I(w, b, w')$.

2. Es sei U eine „universelle“ Menge von Zuständen. Die Kategorie \mathbf{TU}_{Akt} von Transitionssystemen mit Unabhängigkeit hat als Objekte Transitionssysteme mit Unabhängigkeit $\mathcal{U} = (S, s, \Leftrightarrow, I)$ über Akt mit $S \subseteq U$. Es seien $\mathcal{U}_1 = (S_1, s_1, \Leftrightarrow_1, I_1)$ und $\mathcal{U}_2 = (S_2, s_2, \Leftrightarrow_2, I_2)$ Objekte aus \mathbf{TU}_{Akt} . Ein Morphismus $\sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{TU}_{\text{Akt}}}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$ ist eine (totale) Funktion $\sigma : S_1 \rightarrow S_2$, welche den folgenden Bedingungen genügt:

- (a) $\sigma(s_1) = s_2$,
- (b) $\forall t, t' \in S_1, a \in \text{Akt} : t \xrightarrow{a}_1 t' \Rightarrow \sigma(t) \xrightarrow{a}_2 \sigma(t')$ und
- (c) $\forall t, t', u, u' \in S_1, a, b \in \text{Akt} :$
 $(t, a, t')I(u, b, u') \Rightarrow (\sigma(t), a, \sigma(t'))I(\sigma(u), b, \sigma(u'))$,

d.h. ein Morphismus zwischen \mathcal{U}_1 und \mathcal{U}_2 in \mathbf{TU}_{Akt} ist ein Morphismus zwischen den zugrundeliegenden Transitionssystemen $(S_1, s_1, \Leftrightarrow_1)$ und $(S_2, s_2, \Leftrightarrow_2)$ in \mathbf{T}_{Akt} , welcher zusätzlich der Bedingung (c) genügt.

Beispiel 2.12 (Modellieren der Beispielprozesse)

Abbildung 2 zeigt ein Transitionssystem über einer Aktionsmenge Akt mit $\{a, b\} \subseteq \text{Akt}$, welches mit der Unabhängigkeitsrelation $I_1 := \emptyset$ den Prozeß $a.b + b.a$ und mit der Unabhängigkeitsrelation

$$I_2 := \{ (t_0 \xrightarrow{a} t_1)I(t_0 \xrightarrow{b} t_2), (t_0 \xrightarrow{b} t_2)I(t_0 \xrightarrow{a} t_1), \\ (t_0 \xrightarrow{a} t_1)I(t_1 \xrightarrow{b} t_3), (t_1 \xrightarrow{b} t_3)I(t_0 \xrightarrow{a} t_1), \\ (t_0 \xrightarrow{b} t_2)I(t_2 \xrightarrow{a} t_3), (t_2 \xrightarrow{a} t_3)I(t_0 \xrightarrow{b} t_2) \}$$

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

	system	behaviour
interleaving	deterministische Transitionssysteme	Hoare-Sprachen
true-concurrency	deterministische Transitionssysteme mit Unabhängigkeit	deterministische Ereignisstrukturen

Abbildung 9: Klassifikation der linear-time Modelle.

den Prozeß $a||b$ als Transitionssystem mit Unabhängigkeit modelliert. Das Transitionssystem aus Abbildung 3 ergänzt um die Unabhängigkeitsrelation $I := \emptyset$ ist eine Modellierung des Prozesses $\text{rec } X = a.X$ als Transitionssystem mit Unabhängigkeit.

Ein Transitionssystem mit Unabhängigkeit heißt *deterministisch*, wenn sein zugrundeliegendes Transitionssystem deterministisch ist.

2.5 Bisimulation auf Linear-Time Modellen

In den vorangegangenen Abschnitten wurden als linear-time Modelle deterministische Transitionssysteme, Hoare-Sprachen, deterministische Ereignisstrukturen und deterministische Transitionssysteme mit Unabhängigkeit vorgestellt. Die Klassifikation dieser Modelle in das Spektrum system/behaviour und true-concurrency/interleaving zeigt zusammenfassend Abbildung 9.

Für den in Definition 2.3 eingeführten Begriff der Bisimulation gilt auf der Klasse der deterministischen Transitionssysteme:

Theorem 2.13 (Bisimulation auf deterministischen Transitionssystemen)

Für deterministische Transitionssysteme $\mathcal{T}_1 = (S_1, s_1, \Leftrightarrow)$ und $\mathcal{T}_2 = (S_2, s_2, \Leftrightarrow)$ über einer Menge von Aktionen Akt gilt:

$$\text{Lan}(\mathcal{T}_1) = \text{Lan}(\mathcal{T}_2) \iff \mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2.$$

Beweis:

„ \Rightarrow “: Definiere $R := \{(t_1, t_2) \in S_1 \times S_2 \mid \exists w \in \text{Lan}(\mathcal{T}_1) = \text{Lan}(\mathcal{T}_2) : s_1 \xrightarrow{w}^* t_1, s_2 \xrightarrow{w}^* t_2\}$. Wegen $\epsilon \in \text{Lan}(\mathcal{T}_1) = \text{Lan}(\mathcal{T}_2)$ gilt $(s_1, s_2) \in R$. Sei $(t_1, t_2) \in R$, gelte $t_1 \xrightarrow{a} t'_1$. Dann existiert ein Wort w mit $s_1 \xrightarrow{w}^* t_1$ und $s_2 \xrightarrow{w}^* t_2$. Daraus folgen $s_1 \xrightarrow{wa}^* t'_1$ und $s_2 \xrightarrow{wa}^* t'_2$ und wir erhalten $(t'_1, t'_2) \in R$. Da \mathcal{T}_2 deterministisch ist, gilt zudem $t_2 \xrightarrow{a} t'_2$.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

„ \Leftarrow “: Es sei $w \in Lan(\mathcal{T}_1)$. Wir zeigen mit vollständiger Induktion über die Wortlänge: $w \in Lan(\mathcal{T}_2)$ und $\exists(t_1, t_2) \in R : s_1 \xrightarrow{w}^* t_1 \wedge s_2 \xrightarrow{w}^* t_2$.

Aus $|w| = 0$ folgt $w = \epsilon$. Nach Definition gilt $s_1 \xrightarrow{\epsilon}^* s_1$, $s_2 \xrightarrow{\epsilon}^* s_2$ und $(s_1, s_2) \in R$. Falls $|w| = n + 1$, so existieren $v \in Lan(\mathcal{T}_1)$, $a \in Akt$ mit $w = va$. Nach Induktionsvoraussetzung erhalten wir: $v \in Lan(\mathcal{T}_2)$, und $\exists(t_1, t_2) \in R : s_1 \xrightarrow{v}^* t_1 \wedge s_2 \xrightarrow{v}^* t_2$. Da \mathcal{T}_1 deterministisch ist, gilt $t_1 \xrightarrow{a}^* t'_1$. Daraus folgt, daß es in \mathcal{T}_2 eine Transition $t_2 \xrightarrow{a}^* t'_2$, so daß $(t'_1, t'_2) \in R$. Wir erhalten $s_2 \xrightarrow{va}^* t'_2$ und damit $w = va \in Lan(\mathcal{T}_2)$. ■

Mit Theorem 2.13 folgt für die linear-time Modelle Hoare-Sprachen und deterministische Ereignisstrukturen:

Korollar 2.14 (Bisimulation auf linear time Modellen)

1. Für Hoare-Sprachen $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ gilt: $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 \iff \mathcal{S}_{\mathcal{H}_1} \sim \mathcal{S}_{\mathcal{H}_2}$.
2. Für deterministische Transitionssysteme stimmen die Begriffe Trace-Äquivalenz und Bisimulation überein.
3. Für deterministische Ereignisstrukturen stimmen die Begriffe Trace-Äquivalenz und interleaving-Bisimulation überein.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

3 Abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation

In diesem Kapitel stellen wir drei verschiedene, abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation vor: AM-Bisimulation [AM89], \mathbb{P} -Bisimulation [JNW94] und Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation [JNW94]. Anhand von zwei Musterbeispielen illustrieren wir diese drei Charakterisierungen und ziehen im letzten Abschnitt dieses Kapitels einen ersten Vergleich zwischen ihnen.

Die oben genannten Charakterisierungen greifen jeweils auf die Sprache der Kategorientheorie zurück. Dadurch können sie den zunächst von [Par81, Mil89] auf speziellen Transitionssystemen eingeführten Begriff der Bisimulation unabhängig von einem konkreten Modell parallelen Rechnens formulieren. Der so gewonnene abstrakte Standpunkt kann unterschiedlichen Gewinn nach sich ziehen: Einerseits lassen sich aus einer abstrakten Charakterisierung heraus leicht „neue“ Bisimulationen auf Modellen parallelen Rechnens einführen. Andererseits bietet eine abstrakte Charakterisierung eine einheitliche Sicht auf verschiedene konkrete Bisimulationsbegriffe. Ein Gütekriterium für eine abstrakte Charakterisierung ist demnach, ob sie viele bekannte Bisimulationsbegriffe modellieren kann. Dieser Frage werden wir in Kapitel 5 nachgehen.

Peter Aczel und Nax Mender fassen in [AM89] Bisimulation als eine Coalgebra zu einem Endofunktor auf der Kategorie **Class** auf. Mit dieser Verallgemeinerung des ursprünglichen Begriffs von Milner weisen sie für eine Klasse von Endofunktoren die Existenz von finalen Coalgebren nach. Insbesondere betrachten sie dabei den Endofunktor \mathcal{P} auf der Kategorie **Class**. Sie schreiben: *The final coalgebras for \mathcal{P} give the full models for $ZFC^- + AFA$, a version of axiomatic set theory in which the Foundation Axiom, FA , is replaced by a dual Anti-Foundation Axiom, AFA , which expresses the existence of many non-well-founded sets.* Der Zusammenhang von Bisimulation und finalen Coalgebren wird z.B. in [Acz94, RT92] genutzt, um sogenannte finale Semantiken zu studieren. Wir definieren in Abschnitt 3.2 den Begriff der (vorwärts-rückwärts) *AM-Bisimulation*. Dabei beschränken wir uns auf den Endofunktor $\mathcal{P}(L \times _)$ auf der Kategorie **Set**. Im Verlauf dieser Arbeit wird sich erweisen, daß diese Definition genügt, um verschiedenste Bisimulationsbegriffe auf Modellen parallelen Rechnens zu modellieren.

André Joyal, Mogens Nielsen und Glynn Winskel verwenden bei ihrer abstrakten Charakterisierung von Bisimulation [JNW94] eine Kategorie \mathbb{M} von Modellen und eine darin ausgezeichnete Unterkategorie \mathbb{P} von Pfad-Objekten. Zwei Objekte X_1 und X_2 von \mathbb{M} heißen *\mathbb{P} -bisimilar*, wenn es ein Objekt X aus \mathbb{M} und sogenannte \mathbb{P} -offene

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

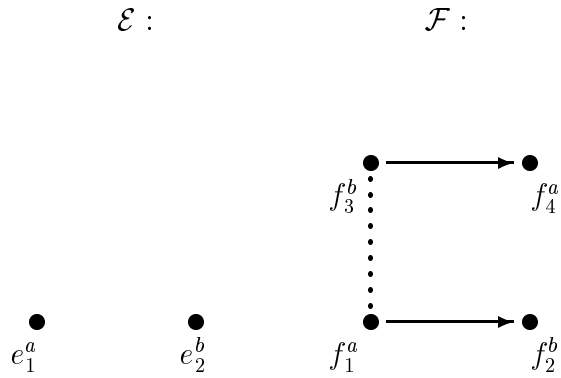


Abbildung 10: Interleaving bisimulare Ereignisstrukturen \mathcal{E} und \mathcal{F} .

Morphismen $f_i : X \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$, gibt. Diese Definition ist eine Fortsetzung des abschließend in [WN95] formulierten Programms, Standardbegriffe der Semantik von Prozeßalgebren ausschließlich mit kategorientheoretischen Methoden zu erfassen.

Der Begriff der (*vorwärts-rückwärts*) *Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation* stammt ebenfalls aus [JNW94]. Auch bei seiner Definition wird eine Kategorie \mathbb{M} von Modellen und eine darin ausgezeichnete Unterkategorie \mathbb{P} von Pfad-Objekten verwendet. Zusätzlich wird vorausgesetzt, daß \mathbb{M} und \mathbb{P} ein gemeinsames initiales Objekt besitzen. Zwei Objekte X_1 und X_2 von \mathbb{M} heißen Pfad- \mathbb{P} -bisimular, wenn es eine Menge von Morphismen-Paaren gibt, die gewissen Abschlußigenschaften genügt. Der Begriff der Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation stellt in [JNW94] eine Alternative zur \mathbb{P} -Bisimulation dar, die durch ihre enge Verbindung zu einer erweiterten Hennessy-Milner Logik motiviert wird. Die Begriffe Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation und \mathbb{P} -Bisimulation sind – bei gleicher Wahl der Kategorie \mathbb{P} – in der Regel nicht äquivalent.

3.1 Musterbeispiele: Interleaving Bisimulation auf Ereignisstrukturen

Die verschiedenen abstrakten Charakterisierungen von Bisimulation sollen jeweils anhand von zwei Musterbeispielen erläutert und in Abschnitt 3.5 einem ersten Vergleich unterzogen werden. Dazu wählen wir als konkreten Bisimulationsbegriff die in Abschnitt 2.3 eingeführte interleaving Bisimulation auf Ereignisstrukturen. Das erste Musterbeispiel zeigt interleaving bisimulare Ereignisstrukturen, das zweite hingegen zeigt Ereignisstrukturen, die nicht interleaving-bisimular sind.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

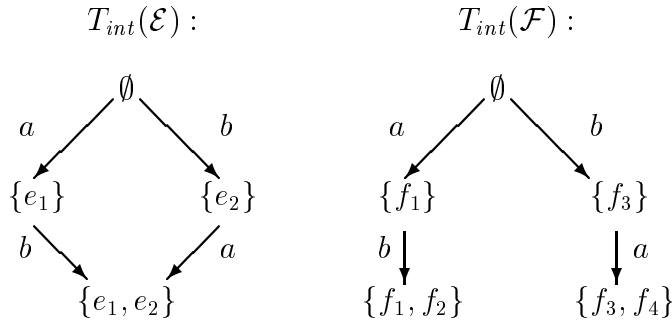


Abbildung 11: Transitionssysteme $T_{int}(\mathcal{E})$ und $T_{int}(\mathcal{F})$ zu den Ereignisstrukturen aus Abbildung 10.



Abbildung 12: Zwei nicht interleaving bisimulare Ereignisstrukturen \mathcal{G} und \mathcal{H} .

Beispiel 3.1 (interleaving bisimulare Ereignisstrukturen)

Es seien \mathcal{E} und \mathcal{F} die Ereignisstrukturen aus Abbildung 10. Abbildung 11 zeigt die Transitionssysteme $T_{int}(\mathcal{E})$ bzw. $T_{int}(\mathcal{F})$. Die Relation

$$R := \{(\emptyset, \emptyset), (\{e_1\}, \{f_1\}), (\{e_2\}, \{f_3\}), (\{e_1, e_2\}, \{f_1, f_2\}), (\{e_1, e_2\}, \{f_3, f_4\})\}$$

ist eine Bisimulation zwischen $T_{int}(\mathcal{E})$ und $T_{int}(\mathcal{F})$, demnach sind die Ereignisstrukturen \mathcal{E} und \mathcal{F} interleaving bisimilar.

Beispiel 3.2 (nicht interleaving bisimulare Ereignisstrukturen)

Es seien \mathcal{G} und \mathcal{H} die Ereignisstrukturen aus Abbildung 12. \mathcal{G} hat die Konfigurationen \emptyset und $\{g_1\}$, \mathcal{H} hat die Konfigurationen \emptyset , $\{h_1\}$ und $\{h_1, h_2\}$. \mathcal{G} und \mathcal{H} sind nicht interleaving bisimilar: Angenommen, R wäre ein Bisimulation zwischen $T_{int}(\mathcal{G})$ und $T_{int}(\mathcal{H})$. Dann enthält R das Paar (\emptyset, \emptyset) . Da es in $T_{int}(\mathcal{G})$ eine Transition $\emptyset \xrightarrow{a} \{g_1\}$ gibt, liegt das Paar $(\{g_1\}, \{h_1\})$ in R . Von $\{h_1\}$ aus gibt es eine mit b markierte Transition, von $\{g_1\}$ geht jedoch keine Transition aus – also ist R keine Bisimulation.

Wie wir in den folgenden Abschnitten sehen werden, lassen sich beide Beispiele in allen drei verschiedenen abstrakten Charakterisierungen von Bisimulation nachvollziehen. Korollar 5.17 in Abschnitt 5.3 wird zeigen, daß alle drei abstrakten Cha-

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\sigma} & B \\
\downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\
FA & \xrightarrow{F\sigma} & FB
\end{array}$$

Abbildung 13: Definition von Homomorphismen zwischen Coalgebren.

rakterisierungen von Bisimulation in der Lage sind, interleaving Bisimulation zu modellieren.

3.2 AM-Bisimulation

In diesem Abschnitt führen wir zunächst den Begriff der Coalgebra zu einem Endofunktor F ein und diskutieren den Zusammenhang zwischen Coalgebren und Transitionssystemen ohne Anfangszustand. Relativ zu einem Endofunktor F definieren wir den Begriff der F -Bisimulation und spezialisieren diese Definition zur (vorwärts-rückwärts) AM-Bisimulation. Wir studieren einige Eigenschaften von (vorwärts-rückwärts) AM-Bisimulation und modellieren abschließend die Musterbeispiele aus Abschnitt 3.1 als AM-Bisimulation.

Eine *Coalgebra* zu einem Endofunktor F auf einer Kategorie \mathbb{C} ist ein Paar (A, α) , bestehend aus einem Objekt A der Kategorie \mathbb{C} und einem Morphismus $\alpha : A \rightarrow FA$. Ein Morphismus $\sigma : A \rightarrow B$ in \mathbb{C} heißt *Homomorphismus* zwischen Coalgebren (A, α) und (B, β) , wenn $\beta \circ \sigma = (F\sigma) \circ \alpha$ gilt, vergleiche Abbildung 13. Coalgebren und Homomorphismen bilden wiederum eine Kategorie, die wir mit \mathbb{C}_F bezeichnen.

Beispiel 3.3 (Transitionssysteme und Coalgebren)

Es sei Akt eine Menge von Aktionen. Wir betrachten die Coalgebren zu dem Endofunktor $F := \mathcal{P}(\text{Akt} \times _)$ auf der Kategorie der Mengen \mathbf{Set} , wobei \mathcal{P} den Potenzmengen-Operator bezeichnet.

1. Jeder Coalgebra (A, α) in der Kategorie \mathbf{Set}_F entspricht ein Transitionssystem ohne Anfangszustand $\mathcal{T}_{(A, \alpha)} = (A, \Leftrightarrow)$ und umgekehrt:

A ist die Menge der Zustände von $\mathcal{T}_{(A, \alpha)}$.

$x \xrightarrow{a} y$ ist eine Transition in $\mathcal{T}_{(A, \alpha)}$ gdw. $(a, y) \in \alpha(x) \subseteq \text{Akt} \times A$.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

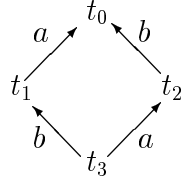


Abbildung 14: Die „inverse“ Coalgebra zum Transitionssystem \mathcal{T} aus Abbildung 2.

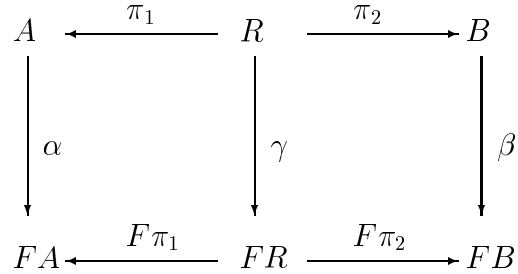


Abbildung 15: Definition von F - bzw. AM-Bisimulation.

2. Jeder Coalgebra (A, α) in der Kategorie \mathbf{Set}_F ordnen wir ihre „inverse“ Coalgebra (A, α^-) zu, deren erste Komponente die Menge A , deren zweite Komponente die zu α „inverse“ Abbildung $\alpha^- : A \rightarrow \mathcal{P}(\text{Akt} \times A)$ ist mit

$$(a, x) \in \alpha^-(y) : \iff (a, y) \in \alpha(x).$$

Abbildung 14 zeigt die Coalgebra (A, α^-) zu dem Transitionssystem aus Abbildung 2.

Definition 3.4 (F -Bisimulation, (vorwärts-rückwärts) AM-Bisimulation)

1. Es sei F ein Endofunktor auf der Kategorie \mathbf{Set} .

Eine Coalgebra (R, γ) heißt F -Bisimulation [AM89] zwischen Coalgebren (A, α) und (B, β) , wenn $R \subseteq A \times B$ und die Projektionen $\pi_1 : (R, \gamma) \rightarrow (A, \alpha)$ und $\pi_2 : (R, \gamma) \rightarrow (B, \beta)$ von R auf A beziehungsweise B Homomorphismen sind, d.h. das Diagramm in Abbildung 15 kommutiert.

2. Es sei $F := \mathcal{P}(\text{Akt} \times _)$ der Endofunktor auf \mathbf{Set} aus Beispiel 3.3.

(a) Eine AM-Bisimulation ist eine F -Bisimulation zu diesem speziellen Funktor.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

- (b) Eine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation zwischen Coalgebren (A, α) und (B, β) ist eine AM-Bisimulation (R, γ) , für die zusätzlich gilt: (R, γ^-) ist eine AM-Bisimulation zwischen Coalgebren (A, α^-) und (B, β^-) .

Bemerkung 3.5 (Coalgebren und Transitionssysteme)

Da wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit unter einer Coalgebra in der Regel ein Objekt aus \mathbf{Set}_F verstehen werden, wobei $F = \mathcal{P}(\text{Akt} \times _)$, unterscheiden wir in Zukunft nicht weiter zwischen den Begriffen Coalgebra und Transitionssystem ohne Anfangszustand.

Lemma 3.6 (Charakterisierung von Homomorphismen)

In der Kategorie \mathbf{Set}_F zu dem Funktor $F = \mathcal{P}(\text{Akt} \times _)$ ist eine Abbildung $\sigma : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus zwischen Coalgebren (A, α) und (B, β) gdw. für die Transitionssysteme $T_{(A, \alpha)}$ und $T_{(B, \beta)}$ gilt:

- (i) Wenn es eine Transition $x \xleftrightarrow{a} y$ in $T_{(A, \alpha)}$ gibt, dann ist $\sigma(x) \xleftrightarrow{a} \sigma(y)$ ein Transition in $T_{(B, \beta)}$ und
- (ii) wenn es eine Transition $r \xleftrightarrow{a} s$ in $T_{(B, \beta)}$ gibt und einen Zustand $x \in A$ mit $r = \sigma(x)$, dann gibt es einen Zustand $y \in A$ mit $s = \sigma(y)$, so daß $x \xleftrightarrow{a} y$ eine Transition in $T_{(A, \alpha)}$ ist.

Beweis: Es sei σ ein Homomorphismus. Abbildung 13 zeigt das kommutierende Diagramm. Es sei $x \xleftrightarrow{a} y$ eine Transition in $T_{(A, \alpha)}$. Daraus folgt $(a, y) \in \alpha(x)$. Da $(F\sigma) \circ \alpha = \beta \circ \sigma$ erhalten wir $(a, \sigma(y)) \in \beta(\sigma(x))$ und damit $\sigma(x) \xleftrightarrow{a} \sigma(y)$ in $T_{(B, \beta)}$. Gibt es hingegen eine Transition $r \xleftrightarrow{a} s$ in $T_{(B, \beta)}$, wobei $r = \sigma(x)$ für ein $x \in A$, dann erhalten wir $(a, s) \in (\beta \circ \sigma)(x)$. Demnach gilt $(a, s) \in ((Ff) \circ \alpha)(x)$. Also existiert ein $y \in A$ mit $s = f(y)$ und $(a, y) \in \alpha(x)$, und wir erhalten: $x \xleftrightarrow{a} y$ in $T_{(A, \alpha)}$.

Es sei nun $\sigma : A \rightarrow B$ eine Abbildung, die den Bedingungen (i) und (ii) genügt. Wenn $(a, z) \in ((F\sigma) \circ \alpha)(x)$ dann gibt es ein $y \in A$ mit $\sigma(y) = z$ und $(a, y) \in \alpha(x)$. Daher erhalten wir $x \xleftrightarrow{a} y$ in $T_{(A, \alpha)}$ und mit Bedingung (i) folgt $\sigma(x) \xleftrightarrow{a} \sigma(y)$ in $T_{(B, \beta)}$. Dies ist äquivalent zu $(a, \sigma(y)) = (a, z) \in \beta(\sigma(x))$. Betrachten wir umgekehrt $(a, s) \in (\beta \circ \sigma)(x)$, dann erhalten wir $r \xleftrightarrow{a} s$ in $T_{(B, \beta)}$ und $r = \sigma(x)$ für ein $r \in B$. Daher existiert nach Bedingung (ii) ein $y \in A$ mit $\sigma(y) = s$ und $x \xleftrightarrow{a} y$ in $T_{(A, \alpha)}$. Demzufolge gilt $(a, \sigma(y)) = (a, s) \in (F\sigma \circ \alpha)(x)$. ■

3.2.1 Eine erste Interpretation des Begriffes AM-Bisimulation

Die Existenz einer AM-Bisimulation zwischen zwei Transitionssystemen besagt ohne zusätzliche Forderungen wenig: $(R, \gamma) = (\emptyset, \emptyset)$ ist eine AM-Bisimulation zwischen

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

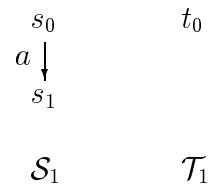


Abbildung 16: Interpretation von AM-Bisimulation: \mathcal{S}_1 und \mathcal{T}_1 .

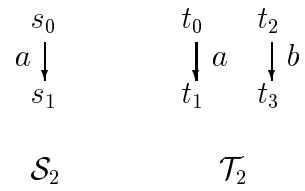


Abbildung 17: Interpretation von AM-Bisimulation: \mathcal{S}_2 und \mathcal{T}_2 .

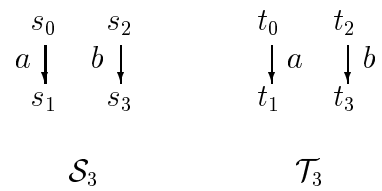


Abbildung 18: Interpretation von AM-Bisimulation: \mathcal{S}_3 und \mathcal{T}_3 .

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

zwei beliebigen Transitionssystemen. Um einen konkreten Bisimulationsbegriff als AM-Bisimulation zu modellieren, werden wir daher in der Regel fordern, daß die Menge R der Coalgebra (R, γ) ein ausgezeichnetes Paar von Zuständen enthält, z.B. die Anfangszustände der Transitionssysteme. Anhand der Transitionssysteme der Abbildungen 16, 17 und 18 wollen wir zeigen, wie unterschiedlich der „Informationsgehalt“ einer AM-Bisimulation sein kann:

$(R, \gamma) := (\{(s_1, t_0)\}, \emptyset)$ ist eine AM-Bisimulation zwischen den Transitionssystemen \mathcal{S}_1 und \mathcal{T}_1 aus Abbildung 16. Ihre Aussage ist: „Beide Transitionssysteme enthalten Endzustände.“

Für die Transitionssysteme \mathcal{S}_2 und \mathcal{T}_2 aus Abbildung 17 läßt sich als AM-Bisimulation (R, γ) die Menge $R := (\{(s_0, t_0), (s_1, t_1)\})$ zusammen mit $\gamma(s_0, t_0) := \{(a, s_1, t_1)\}$ als Morphismus wählen. Hier erhalten wir die Aussage: „Wählt man s_0 und t_0 als Anfangszustände, so verhalten sich die beiden Transitionssysteme \mathcal{S}_2 und \mathcal{T}_2 gleich.“ Dasselbe gilt bei Wahl von s_1 und t_1 als Anfangszustände.

Im Fall der Transitionssysteme \mathcal{S}_3 und \mathcal{T}_3 aus Abbildung 18 können wir (R, γ) als AM-Bisimulation wählen, wobei

- $R := \{(s_0, t_0), (s_1, t_1), (s_2, t_2), (s_3, t_3)\}$ und
- $\gamma(s_0, t_0) := \{(a, s_1, t_1)\}$, $\gamma(s_2, t_2) := \{(b, s_3, t_3)\}$.

Diese AM-Bisimulation läßt sich wie folgt interpretieren: „Wählt man einen beliebigen Zustand s als Anfangszustand von \mathcal{S}_3 , dann gibt es einen Zustand t in \mathcal{T}_3 , so daß sich bei Wahl von t als Anfangszustand von \mathcal{T}_3 die beiden Transitionssysteme gleich verhalten. Dieselbe Aussage gilt, wenn zunächst ein Anfangszustand in \mathcal{T}_3 gewählt wird.“

Die Transitionssysteme in den Abbildungen 16, 17 und 18 zeigen, daß eine AM-Bisimulation gerade die Transitionen enthält, die beiden Coalgebren „gemeinsam“ sind. Mit dieser Sichtweise läßt sich auch die Beobachtung erklären, daß (\emptyset, \emptyset) eine AM-Bisimulation zwischen zwei beliebigen Coalgebren ist: Natürlich gilt, daß die Transitionen, welche in der leeren Menge enthalten sind, beliebigen Coalgebren gemeinsam sind. Wie die Diskussion der Transitionssysteme aus Abbildung 18 gezeigt hat, ist die Frage nach dem „gemeinsamen Teil“ beider Transitionssysteme unabhängig von einem Konzept von „Erreichbarkeit“.

Die Frage, ob zwei Transitionssysteme einen „gemeinsamen Bestandteil“ aufweisen, ist äquivalent zu der Frage, ob es eine AM-Bisimulation zwischen diesen Transitionssystemen gibt, welche diesen Bestandteil „enthält“. Solch ein „Bestandteil“ kann wiederum ein Transitionssystem sein. Wir führen hier nur zwei Beispiele an:

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

1. Gibt es für jeden Zustand s eines Transitionssystemes $\mathcal{S} = (S, \Leftrightarrow)$ einen Zustand t in einem Transitionssystem \mathcal{T} , so daß sich \mathcal{T} ausgehend von t genauso verhält wie \mathcal{S} ausgehend von s ? Diese Frage läßt sich mittels AM-Bisimulation wie folgt formulieren: Gibt es eine AM-Bisimulation (R, γ) , so daß die Projektion π_1 auf S surjektiv ist?
2. Das erste Problem läßt sich auch auf solche Zustände eines Transitionssystemes beschränken, die von einem ausgezeichneten Zustand s_0 erreichbar sind. Dies führt auf die Frage: Gibt es für jeden Zustand s eines Transitionssystemes $\mathcal{S} = (S, \Leftrightarrow)$, der von s_0 erreichbar ist, einen Zustand t in \mathcal{T} , so daß \mathcal{T} ausgehend von t sich genauso verhält wie \mathcal{S} ausgehend von s ? Auch diese Problemstellung läßt sich mittels AM-Bisimulation ausdrücken: Gibt es eine AM-Bisimulation (R, γ) , so daß für die Projektion π_1 auf S gilt: $s_0 \in \pi_1(R)$?

Die angeführten Fragen betreffen „Simulationen“: Wir stellen die Frage, ob \mathcal{T} einen bestimmten Teil des Verhaltens von \mathcal{S} zeigen kann. Um „Bisimulationen“ zu beschreiben müssen wir die Bedingungen symmetrisch formulieren. Im zweiten Beispiel könnten wir unter der Annahme, daß \mathcal{S} und \mathcal{T} Zustände s_0 bzw. t_0 aufweisen, formulieren: Gibt es eine AM-Bisimulation (R, γ) mit $s_0 \in \pi_1(R)$ und $t_0 \in \pi_2(R)$? Eine andere, schärfere Formulierung ist: Gibt es eine AM-Bisimulation (R, γ) mit $(s_0, t_0) \in R$? Die letzte Formulierung werden wir verwenden, um verschiedene konkrete Bisimulationsbegriffe als AM-Bisimulation zu modellieren.

3.2.2 Elementare Eigenschaften von AM-Bisimulation

Im Rahmen dieser Arbeit sind wir an AM-Bisimulationen interessiert, die ein ausgezeichnetes Paar von Zuständen enthalten. Dazu gehen wir davon aus, daß jede Coalgebra (A, α) einen ausgezeichneten Zustand $z_{(A, \alpha)}$ enthält. Auch unter der zusätzlichen Bedingung, daß eine AM-Bisimulation zwischen Coalgebren (A, α) und (B, β) das Paar $(z_{(A, \alpha)}, z_{(B, \beta)})$ enthält, ist die Relation „(vorwärts-rückwärts) AM-bisimilar“ auf der Kategorie \mathbf{Set}_F eine Äquivalenzrelation: Sie ist reflexiv, denn zu einer Coalgebra (A, α) ist (R, γ) mit $R := A \times A$ und $(l, a', a') \in \gamma(a, a) : \iff (l, a') \in \alpha(a)$ eine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation zwischen (A, α) und (A, α) mit $(x, x) \in R$, wobei x ein beliebiges Element aus A ist. Die Relation ist symmetrisch, denn wenn (R, γ) eine (vorwärts-rückwärts) AM-Bisimulation zwischen Coalgebren (A, α) und (B, β) mit $(x, y) \in R$ ist, so ist $(\hat{R}, \hat{\gamma})$ mit

$$\hat{R} := \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \text{ und}$$

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

$$(l, b', a') \in \hat{\gamma}(b, a) : \iff (l, a', b') \in \gamma(a, b)$$

eine (vorwärts-rückwärts) AM-Bisimulation zwischen (B, β) und (A, α) mit $(y, x) \in \hat{R}$. Daß sie transitiv ist, zeigt folgende Konstruktion: Sind (A_1, α_1) , (A_2, α_2) , (A_3, α_3) Coalgebren, (R_1, γ_1) und (R_2, γ_2) (vorwärts-rückwärts) AM-Bisimulationen zwischen (A_1, α_1) und (A_2, α_2) mit $(x, y) \in R_1$ bzw. zwischen (A_2, α_2) und (A_3, α_3) mit $(y, z) \in R_2$, dann ist (R, γ) mit

$$R := \{(r, t) \in A_1 \times A_3 \mid \exists s \in A_2 : (r, s) \in R_1, (s, t) \in R_2\} \text{ und}$$

$$(l, r', t') \in \gamma(r, t) : \iff \exists s', s \in A_2 : (l, r', s') \in \gamma_1(r, s), (l, s', t') \in \gamma_2(s, t)$$

eine (vorwärts-rückwärts) AM-Bisimulation zwischen (A_1, α_1) und (A_3, α_3) , wobei $(x, z) \in R$ gilt.

Für das Modellieren konkreter Bisimulationen als AM-Bisimulation werden wir für die Abbildung γ häufig das „Produkt“ der Abbildungen α und β verwenden. Das hat zur Folge, daß unabhängig von der Wahl der Menge R die Inklusionen $(F\pi_1 \circ \gamma) \subseteq (\alpha \circ \pi_1)$ (vergl. Abbildung 15) erfüllt ist. AM-Bisimulationen genügen stets einem Teil der zusätzlichen Anforderungen, die an eine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation gestellt werden. Diese beiden Aussagen fassen wir im folgenden Lemma zusammen:

Lemma 3.7 (Produktkonstruktion, vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation)

Es seien (A, α) , (B, β) Coalgebren.

1. *Es sei $R \subseteq A \times B$. Definiere $\gamma : R \rightarrow FR$ vermöge*

$$\forall (x, y), (x', y') \in R : (a, x', y') \in \gamma(x, y) : \iff (a, x') \in \alpha(x), (a, y') \in \beta(y).$$

Dann gilt für alle $(x, y) \in R$:

$$(F\pi_1 \circ \gamma)(x, y) \subseteq (\alpha \circ \pi_1)(x, y) \text{ und } (F\pi_2 \circ \gamma)(x, y) \subseteq (\beta \circ \pi_2)(x, y).$$

2. *Eine AM-Bisimulation (R, γ) zwischen (A, α) und (B, β) ist eine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation, gdw. für alle $(x', y') \in R$ gilt:*

$$\begin{aligned} (\alpha^- \circ \pi_1)(x', y') &\subseteq (F\pi_1 \circ \gamma^-)(x', y') \text{ und} \\ (\beta^- \circ \pi_1)(x', y') &\subseteq (F\pi_2 \circ \gamma^-)(x', y'). \end{aligned}$$

Beweis: Es sei $(x, y) \in R$. Gelte $(a, x') \in (F\pi_1 \circ \gamma)(x, y)$. Dann existiert $y' \in B$, so daß $(x', y') \in R$ und $(a, x', y') \in \gamma(x, y)$. Nach Definition von γ folgt daraus $(a, x') \in \alpha(x)$ und wir erhalten $(a, x') \in (\alpha \circ \pi_1)(x, y)$.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

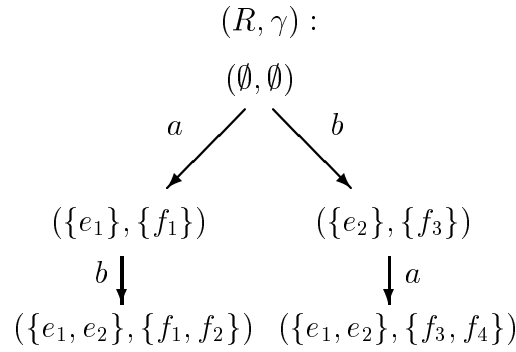


Abbildung 19: Eine AM-Bisimulation zwischen $T_{int}(\mathcal{E})$ und $T_{int}(\mathcal{F})$ aus Abbildung 11.

Wir zeigen, daß für alle $(x', y') \in R$ gilt: $(F\pi_1 \circ \gamma^-)(x', y') \subseteq (\alpha^- \circ \pi_1)(x', y')$. Es sei $(a, x) \in (F\pi_1 \circ \gamma^-)(x', y')$. Dann gibt es ein $y \in B$ mit $(a, x, y) \in \gamma^-(x', y')$. Nach Definition von γ^- folgt daraus $(a, x', y') \in \gamma(x, y)$ und wir erhalten $(a, x') \in (F\pi_1 \circ \gamma)(x, y)$. Da (R, γ) nach Voraussetzung eine AM-Bisimulation ist, gilt $(a, x') \in (\alpha \circ \pi_1)(x, y)$. Daraus schließen wir $(a, x') \in \alpha(x)$ und $(a, x) \in \alpha^-(x') = (\alpha^- \circ \pi_1)(x', y')$. ■

3.2.3 Modellieren der Musterbeispiele

AM-Bisimulation ist zunächst eine Begriffsbildung auf Transitionssystemen ohne Anfangszustand. Um einen konkreten Bisimulationsbegriff auf Ereignisstrukturen wie z.B. die interleaving Bisimulation als AM-Bisimulation zu modellieren, müssen Ereignisstrukturen in geeignete Transitionssysteme überführt werden. Parameter sind die Zustandsmenge der Transitionssysteme, die Aktionsmenge Akt , über der die Transitionssysteme definiert werden, sowie die Definition der Übergangsrelation. Im Rahmen dieser Arbeit werden wir als Zustände stets Konfigurationen von Ereignisstrukturen verwenden – alternative Definitionen diskutieren wir in [MCR98]. Im konkreten Fall der interleaving Bisimulation greifen wir auf den Operator T_{int} aus Abschnitt 2.3 zurück. Weiterhin fordern wir, daß eine AM-Bisimulation (R, γ) die Anfangszustände der Transitionssysteme miteinander in Relation setzen soll, d.h. $(\emptyset, \emptyset) \in R$.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

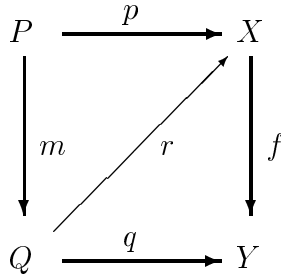


Abbildung 20: \mathbb{P} -Bisimulation: Illustration des Begriffs \mathbb{P} -offen.

Modellierung von Beispiel 3.1:

Abbildung 11 zeigt die Transitionssysteme $T_{int}(\mathcal{E})$ und $T_{int}(\mathcal{F})$ zu den Ereignisstrukturen aus Abbildung 10, in Abbildung 19 findet sich eine AM-Bisimulation (R, γ) zwischen $T_{int}(\mathcal{E})$ und $T_{int}(\mathcal{F})$ mit $(\emptyset, \emptyset) \in R$.

Modellierung von Beispiel 3.2:

Es seien \mathcal{G} und \mathcal{H} die Ereignisstrukturen aus Abbildung 12. Angenommen, es gäbe eine AM-Bisimulation (R, γ) zwischen $T_{int}(\mathcal{G})$ und $T_{int}(\mathcal{H})$ mit $(\emptyset, \emptyset) \in R$. Dann gibt es in (R, γ) eine Transition $(\emptyset, \emptyset) \xrightarrow{a} (\{g_1\}, \{h_1\})$. Da in $T_{int}(\mathcal{G})$ die Konfiguration $\{g_1\}$ Endzustand ist, kann es in (R, γ) keine Transition von $(\{g_1\}, \{h_1\})$ aus geben. In $T_{int}(\mathcal{H})$ gibt es jedoch eine Transition $\{h_1\} \xrightarrow{b} \{h_2\}$. Also ist (R, γ) keine AM-Bisimulation.

3.3 \mathbb{P} -Bisimulation

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff der \mathbb{P} -Bisimulation ein, nennen eine hinreichende Bedingung dafür, daß \mathbb{P} -Bisimulation eine Äquivalenzrelation ist, und studieren \mathbb{P} -Bisimulation an den Musterbeispielen aus Abschnitt 3.1.

Definition 3.8 (\mathbb{P} -offene Morphismen, \mathbb{P} -Bisimulation)

Es sei \mathbb{M} eine Kategorie von Modellen, \mathbb{P} eine darin ausgezeichnete Unterkategorie von sogenannten Pfad-Objekten.

1. Es sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus in \mathbb{M} .

f heißt \mathbb{P} -offen [JNW94] gdw. für alle Objekte P, Q aus \mathbb{P} , für alle Morphismen $m : P \rightarrow Q$ in \mathbb{P} und alle Morphismen $p : P \rightarrow X, q : Q \rightarrow Y$ gilt: falls

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

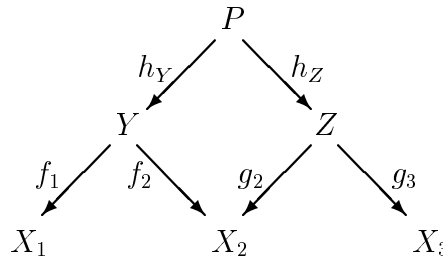


Abbildung 21: \mathbb{P} -Bisimulation: Transitivität mittels Pullbacks.

$q \circ m = f \circ p$, dann gibt es einen Morphismus $r : Q \rightarrow X$ mit $r \circ m = p$ und $f \circ r = q$. Abbildung 20 illustriert diese Definition.

2. Zwei Objekte X_1 und X_2 der Kategorie \mathbb{M} heißen \mathbb{P} -bisimilar [JNW94], wenn es ein Objekt X aus \mathbb{M} und \mathbb{P} -offene Morphismen $f_i : X \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$, gibt.

Bemerkung 3.9 (Beispiele \mathbb{P} -offener Morphismen)

1. Die Identitäts-Morphismen id_X sind \mathbb{P} -offen, die Komposition \mathbb{P} -offener Morphismen ist wieder \mathbb{P} -offen; d.h. die Objekte aus \mathbb{M} bilden mit den \mathbb{P} -offenen Morphismen eine Kategorie.
2. Pullbacks von \mathbb{P} -offenen Morphismen sind \mathbb{P} -offen.

Von einem Bisimulationsbegriff wird erwartet, daß er eine Äquivalenzrelation ist. Bei \mathbb{P} -Bisimulation ist dies im Allgemeinen nicht der Fall: \mathbb{P} -Bisimulation ist reflexiv, weil die Identitäts-Morphismen \mathbb{P} -offen sind, die Symmetrie folgt direkt aus der Definition. Um die Transitivität zu gewährleisten, fordern [JNW94], daß die Kategorie \mathbb{M} Pullbacks besitzt: Sind Objekte X_1, X_2 und X_2, X_3 jeweils \mathbb{P} -bisimilar, so gibt es Objekte Y, Z und \mathbb{P} -offene Morphismen $f_i : Y \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$, und $g_j : Z \rightarrow X_j$, $j = 2, 3$. Besitzt nun die Kategorie \mathbb{M} Pullbacks, so gibt es zu den Morphismen $f_2 : Y \rightarrow X_2$ und $g_2 : Z \rightarrow X_2$ ein Objekt P und Morphismen $h_Y : P \rightarrow Y$, $h_Z : P \rightarrow Z$, siehe Abbildung 21. Nach Bemerkung 3.9 sind die Morphismen h_Y, h_Z und damit auch $f_1 \circ h_Y : P \rightarrow X_1$, $g_3 \circ h_Z : P \rightarrow X_3$ \mathbb{P} -offen, d.h. X_1 und X_3 sind \mathbb{P} -bisimilar. Die in Kapitel 2 eingeführten Kategorien \mathbf{T}_{Akt} , \mathbf{S}_{Akt} , \mathbf{E}_{Akt} , \mathbf{EK}_{Akt} und \mathbf{TU}_{Akt} besitzen Pullbacks [JNW94], d.h. \mathbb{P} -Bisimulationen auf diesen Kategorien sind Äquivalenzrelationen.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Modellierung von Beispiel 3.1:

Wir wollen zeigen, daß in der Kategorie \mathbf{E}_{Akt} die Ereignisstrukturen \mathcal{E} und \mathcal{F} aus Abbildung 10 \mathbb{P} -bisimilar sind. Dazu wählen wir $\mathbb{P}=\mathbf{Lin}$, vergleiche Abschnitt 2.3, als Kategorie von Pfad-Objekten. Als Objekt X – in den Bezeichnungen von Definition 3.8 – dient die Ereignisstruktur \mathcal{F} und wir behaupten, daß die Morphismen

$$g_1 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}, \text{ wobei } g_1(f_1) = g_1(f_4) := e_1 \text{ und } g_1(f_2) = g_1(f_3) := e_2, \text{ sowie}$$

$$g_2 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, g_2 := id_{\mathcal{F}} \text{ die Identität auf } \mathcal{F},$$

Lin-offen sind.

Nach Bemerkung 3.9 ist g_2 **Lin**-offen. Um zu beweisen, daß auch g_1 **Lin**-offen ist, betrachten wir das kommutierende Diagramm aus Abbildung 20, wobei $X = \mathcal{F}$, $Y = \mathcal{E}$ und sowohl P als auch Q beliebige Objekte aus **Lin** sind. Da Konfigurationen von \mathcal{E} aus maximal zwei Elementen bestehen, können auch die Pfad-Objekte P und Q höchstens zwei Ereignisse aufweisen. Wir betrachten hier nur einen ausgewählten Fall zur Illustration – die Äquivalenz zwischen interleaving Bisimulation und **Lin**-Bisimulation wird Theorem 5.16 zeigen. Es sei P eine Ereignisstruktur mit einem Ereignis e , welches mit a markiert ist. Daraus folgt $p(e) = f_1$. Für das Pfadobjekt Q unterschieden wir:

- Falls Q die leere Ereignisstruktur ist, so gibt es keinen Morphismus von P nach Q .
- Besteht Q nur aus einem Ereignis \hat{e} , so muß dieses mit a markiert sein. In diesem Fall gelten $m(e) = \hat{e}$ und $q(\hat{e}) = e_1$. Die Definition $r(\hat{e}) := f_1$ ergibt den geforderten Morphismus.
- Besteht Q hingegen aus zwei Ereignis \hat{e}_1 und \hat{e}_2 , so ist \hat{e}_1 mit a und \hat{e}_2 mit b markiert und es gilt $\hat{e}_1 \leq_Q \hat{e}_2$. Für die Morphismen erhalten wir in diesem Fall: $m(e) = \hat{e}_1$, $q(\hat{e}_1) = e_1$ und $q(\hat{e}_2) = e_2$. Indem wir $r(\hat{e}_1) := f_1$ und $r(\hat{e}_2) := f_2$ setzen, erhalten wir den gewünschten Morphismus.

Die Ereignisstruktur $X = \mathcal{F}$ von der \mathbb{P} -Bisimulation ist isomorph zu der Ereignisstruktur, die man aus der AM-Bisimulation (R, γ) aus Abbildung 19 erhält, wenn diese zunächst zu einem Synchronisationsbaum abgewickelt und anschließend in eine Ereignisstruktur überführt wird. Im Beweis von Theorem 5.16 werden wir auf diesen Zusammenhang zurückgreifen.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

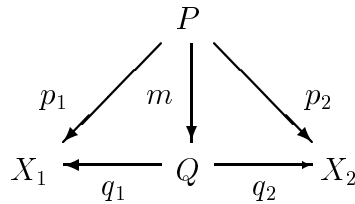


Abbildung 22: Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation.

Modellierung von Beispiel 3.2:

Nun betrachten wir die Ereignisstrukturen \mathcal{G} und \mathcal{H} aus Abbildung 12. Wir wollen zeigen, daß \mathcal{G} und \mathcal{H} nicht **Lin**-bisimilar sind. Damit es Morphismen von einer Ereignisstruktur X sowohl nach \mathcal{G} als auch nach \mathcal{H} geben kann, darf X nur Konfigurationen mit maximal einem Ereignis besitzen, welches mit a markiert ist. Unter dieser Bedingung unterscheiden wir zwei Fälle: X ist die leere Ereignisstruktur oder X enthält mindestens ein Ereignis.

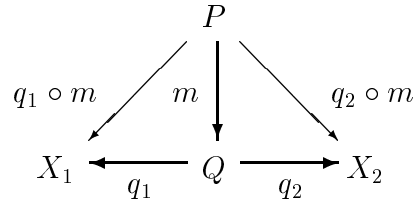
Falls X die leere Ereignisstruktur ist, erhalten wir: Der eindeutig bestimmte Morphismus $\iota_{\mathcal{G}} : X \rightarrow \mathcal{G}$ ist nicht **Lin**-offen. Um dies zu beweisen wählen wir $P = X$, $Q = \mathcal{G}$, $p = id_X$, $q = id_{\mathcal{G}}$ und $m = \iota_{\mathcal{G}}$ für das Diagramm aus Abbildung 20. Offenkundig gilt $id_{\mathcal{G}} \circ \iota_{\mathcal{G}} = \iota_{\mathcal{G}} \circ id_X$, aber es gibt keinen Morphismus von \mathcal{G} nach X .

Falls X nicht die leere Ereignisstruktur ist, gibt es ein Ereignis x in X , welches mit a markiert ist. Wir behaupten, daß es keinen **Lin**-offenen Morphismus $f : X \rightarrow \mathcal{H}$ gibt. Wir wissen: Für jeden Morphismus $f : X \rightarrow \mathcal{H}$ gilt $f(x) = h_1$. Nun wählen wir $P = \mathcal{G}$, $Q = \mathcal{H}$, $Y = \mathcal{H}$ für das Diagramm aus Abbildung 20. Als Morphismen wählen wir $p(g_1) := x$, $m(g_1) := h_1$ und $q := id_{\mathcal{H}}$. Offenkundig gilt $q \circ m = f \circ p$, aber es gibt keinen Morphismus von $Q = \mathcal{H}$ nach X .

3.4 Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation

In diesem Abschnitt führen wir die Begriffe Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation und vorwärts-rückwärts Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation ein und studieren sie an dem Musterbeispiel aus Abschnitt 3.1.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Abbildung 23: Vorwärts-rückwärts Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation.**Definition 3.10 ((vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation)**

Es sei \mathbb{M} eine Kategorie von Modellen, \mathbb{P} eine darin ausgezeichnete kleine Unterkategorie von sogenannten Pfad-Objekten, I ein gemeinsames initiales Objekt von \mathbb{P} und \mathbb{M} .

1. Ein Pfad [JNW94] ist ein Morphismus $p : P \rightarrow X$ von einem Objekt P aus \mathbb{P} zu einem Objekt X aus \mathbb{M} , das Objekt P heißt Ursprung des Pfades p .
2. Zwei Objekte X_1 und X_2 aus \mathbb{M} heißen Pfad- \mathbb{P} -bisimilar [JNW94], wenn es eine Menge R aus Paaren von Pfaden (p_1, p_2) mit gemeinsamen Ursprung P gibt, d.h. $p_1 : P \rightarrow X_1$ ist ein Pfad nach X_1 und $p_2 : P \rightarrow X_2$ ist ein Pfad nach X_2 , die folgenden Bedingungen genügt:

(o) $(\iota_1, \iota_2) \in R$, wobei $\iota_1 : I \rightarrow X_1$ und $\iota_2 : I \rightarrow X_2$ die eindeutig bestimmten Pfade vom initialen Objekt I in die Objekte X_1 bzw. X_2 sind,

und für alle $(p_1, p_2) \in R$ und alle $m : P \rightarrow Q$, wobei m ein Morphismus und Q ein Objekt in \mathbb{P} sind, gilt:

(i) Wenn es einen Pfad $q_1 : Q \rightarrow X_1$ gibt mit $q_1 \circ m = p_1$, dann gibt es auch einen Pfad $q_2 : Q \rightarrow X_2$, so daß $q_2 \circ m = p_2$ und $(q_1, q_2) \in R$ (vergleiche Abbildung 22), und

(ii) wenn es einen Pfad $q_2 : Q \rightarrow X_2$ gibt mit $q_2 \circ m = p_2$, dann gibt es auch einen Pfad $q_1 : Q \rightarrow X_1$, so daß $q_1 \circ m = p_1$ und $(q_1, q_2) \in R$.

3. Zwei Objekte X_1 und X_2 aus \mathbb{M} heißen vorwärts-rückwärts Pfad- \mathbb{P} -bisimilar [JNW94], wenn sie Pfad- \mathbb{P} -bisimilar sind und die Relation R zusätzlich folgende Bedingung erfüllt:

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

(iii) Für alle $(q_1, q_2) \in R$, wobei $q_1 : Q \rightarrow X_1$ und $q_2 : Q \rightarrow X_2$, gilt: gibt es einen Morphismus $m : P \rightarrow Q$ in \mathbb{P} , so folgt $(q_1 \circ m, q_2 \circ m) \in R$ (vergleiche Abbildung 23).

Die Menge R bezeichnen wir als (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation zwischen den Objekten X_1 und X_2 .

Offenbar ist die Relation (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -bisimilar auf der Kategorie der Modelle eine Äquivalenzrelation: sie ist reflexiv, da für ein Objekt X die Menge $R := \{(p, p) \mid \exists P \in \mathbb{P} : p \in \text{Hom}(P, X)\}$ eine (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation ist. Sie ist symmetrisch, denn wenn R eine (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation zwischen Objekten X_1 und X_2 ist, so ist $R^{-1} := \{(p_2, p_1) \mid (p_1, p_2) \in R\}$ eine (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation zwischen X_2 und X_1 . Schließlich ist sie transitiv: es seien R_1 und R_2 (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -Bisimulationen zwischen Objekten X_1 und X_2 bzw. X_2 und X_3 . Dann ist $R := \{(p_1, p_3) \mid \exists p_2 : (p_1, p_2) \in R_1, (p_2, p_3) \in R_2\}$ eine (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation zwischen X_1 und X_3 .

Durch entsprechende Wahl einer Pfad-Kategorie \mathbb{P} ist es möglich, die in Kapitel 2 eingeführten Kategorien von Modellen parallelen Rechnens mit dem Begriff einer (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation auszustatten: Da wir die Zustände bzw. Ereignisse der Objekte der jeweiligen Kategorien aus einer „universellen“ Menge gewählt haben, sind die Kategorien \mathbf{T}_{Akt} , \mathbf{S}_{Akt} , \mathbf{E}_{Akt} , \mathbf{EK}_{Akt} und \mathbf{TU}_{Akt} – und damit auch ihre Unterkategorien – stets klein. In \mathbf{T}_{Akt} und \mathbf{S}_{Akt} ist $\mathcal{T} := (\{s\}, s, \emptyset)$, d.h. ein Transitionssystem mit nur einem Zustand s und einer leeren Übergangsrelation, ein initiales Objekt. Fügen wir noch eine leere Unabhängigkeitsrelation hinzu, erhalten wir mit $\mathcal{U} := (\{s\}, s, \emptyset, \emptyset)$ ein initiales Objekt in \mathbf{TU}_{Akt} . In den Kategorien \mathbf{E}_{Akt} und \mathbf{EK}_{Akt} ist das initiale Objekt die leere Ereignisstruktur.

Modellierung von Beispiel 3.1:

Zunächst modellieren wir die interleaving Bisimulation zwischen den Ereignisstrukturen \mathcal{E} und \mathcal{F} aus Abbildung 10 als Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation. Dazu wählen wir – wie im Fall der \mathbb{P} -Bisimulation – \mathbf{Lin} als Pfad-Kategorie in \mathbf{E}_{Akt} . Die leere Ereignisstruktur $(\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$ ist gemeinsames initiales Objekt von \mathbf{Lin} und \mathbf{E}_{Akt} .

Um eine Pfad- \mathbf{Lin} -Bisimulation R zwischen \mathcal{E} und \mathcal{F} anzugeben, müssen wir alle Pfadobjekte P mit der Eigenschaft $\text{Hom}_{\mathbf{E}_{Akt}}(P, \mathcal{E}) \neq \emptyset$ oder $\text{Hom}_{\mathbf{E}_{Akt}}(P, \mathcal{F}) \neq \emptyset$ betrachten: Es sei $p : P \rightarrow \mathcal{E}$ ein Pfad von P nach \mathcal{E} . Vom initialen Objekt I aus

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

gibt es Morphismen $\iota_{\mathcal{E}} : I \rightarrow \mathcal{E}$, $\iota_{\mathcal{F}} : I \rightarrow \mathcal{F}$ und $\iota_P : I \rightarrow P$. Da $\iota_{\mathcal{E}} : I \rightarrow \mathcal{E}$ eindeutig bestimmt ist, erhalten wir $p \circ \iota_P = \iota_{\mathcal{E}}$. Da nach Bedingung (o) das Paar $(\iota_{\mathcal{E}}, \iota_{\mathcal{F}})$ in R enthalten ist, folgt mit Bedingung (i): $(p, q) \in R$ für einen Morphismus $q : P \rightarrow \mathcal{F}$. Daraus folgt: Liegt das Pfadobjekt P in einer Isomorphieklasse von \mathbb{P} mit unendlich vielen Objekten, so besteht die Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation R aus unendlich vielen Paaren von Pfaden.

Da die Ereignisstrukturen \mathcal{E} und \mathcal{F} nur Konfigurationen mit maximal zwei Ereignissen aufweisen, kann der Ursprung eines Pfades nach \mathcal{E} bzw. \mathcal{F} entweder das initiale Objekt I sein, oder er ist in einer der folgenden Mengen \mathcal{S}_a , \mathcal{S}_b , \mathcal{S}_{ab} bzw. \mathcal{S}_{ba} enthalten:

\mathcal{S}_a bezeichne die Menge aller Ereignisstrukturen in **Lin**, die aus einem Ereignis bestehen, welches mit a markiert ist.

\mathcal{S}_b bezeichne die Menge aller Ereignisstrukturen in **Lin**, die aus einem Ereignis bestehen, welches mit b markiert ist.

\mathcal{S}_{ab} bezeichne die Menge aller Ereignisstrukturen in **Lin**, die aus zwei Ereignissen bestehen, wobei das eine Ereignis mit a das andere mit b markiert ist und das mit a markierte Ereignis Vorgänger von dem mit b markierten Ereignis ist.

\mathcal{S}_{ba} bezeichne die Menge aller Ereignisstrukturen in **Lin**, die aus zwei Ereignissen bestehen, wobei das eine Ereignis mit a das andere mit b markiert ist und das mit b markierte Ereignis Vorgänger von dem mit a markierten Ereignis ist.

Mit Hilfe dieser Mengen definieren wir eine Pfad-**Lin**-Bisimulation zwischen \mathcal{E} und \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} R := & \{(p_1, p_2) \mid p_1 \in \text{Hom}_{\mathbf{E}_{Akt}}(I, \mathcal{E}), p_2 \in \text{Hom}_{\mathbf{E}_{Akt}}(I, \mathcal{F})\} \cup \\ & \{(p_1, p_2) \mid \exists P \in \mathcal{S}_a : p_1 \in \text{Hom}_{\mathbf{E}_{Akt}}(P, \mathcal{E}), p_2 \in \text{Hom}_{\mathbf{E}_{Akt}}(P, \mathcal{F})\} \cup \\ & \{(p_1, p_2) \mid \exists P \in \mathcal{S}_b : p_1 \in \text{Hom}_{\mathbf{E}_{Akt}}(P, \mathcal{E}), p_2 \in \text{Hom}_{\mathbf{E}_{Akt}}(P, \mathcal{F})\} \cup \\ & \{(p_1, p_2) \mid \exists P \in \mathcal{S}_{ab} : p_1 \in \text{Hom}_{\mathbf{E}_{Akt}}(P, \mathcal{E}), p_2 \in \text{Hom}_{\mathbf{E}_{Akt}}(P, \mathcal{F})\} \cup \\ & \{(p_1, p_2) \mid \exists P \in \mathcal{S}_{ba} : p_1 \in \text{Hom}_{\mathbf{E}_{Akt}}(P, \mathcal{E}), p_2 \in \text{Hom}_{\mathbf{E}_{Akt}}(P, \mathcal{F})\}. \end{aligned}$$

Bei Wahl der Kategorie **Lin** enthalten die Mengen $\text{Hom}_{\mathbf{E}_{Akt}}$ jeweils nur einen Morphismus. Den Beweis, daß R eine Pfad-**Lin**-Bisimulation ist, führen wir nur an einem Fall vor. Daß interleaving Bisimulation und Pfad-**Lin**-Bisimulation äquivalent sind, wird Korollar 5.17 zeigen.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Es sei P eine Ereignisstruktur aus S_a mit einem Ereignis e , das mit a markiert ist. Für die Morphismen $p_1 : P \rightarrow \mathcal{E}$, wobei $p_1(e) := e_1$, und $p_2 : P \rightarrow \mathcal{F}$, wobei $p_2(e) = f_1$, erhalten wir: $(p_1, p_2) \in R$. Gibt es eine Ereignisstruktur $Q \in \mathbf{Lin}$ und Morphismen $m : P \rightarrow Q$ und $q_1 : Q \rightarrow \mathcal{E}$ mit $q_1 \circ m = p_1$, so ist Q entweder in S_a oder in S_{ab} enthalten. Im ersten Fall besteht Q aus einem Ereignis \hat{e} , das mit a markiert ist, und für die Morphismen gilt: $m(e) = \hat{e}$ und $q_1(\hat{e}) = e_1$. Für den Morphismus $q_2 : Q \rightarrow \mathcal{F}$ mit $q_2(\hat{e}) = f_1$ erhalten wir: $q_2 \circ m = p_2$ und $(q_1, q_2) \in R$. Es sei nun $Q \in S_{ab}$. In diesem Fall besteht Q aus zwei Ereignissen \hat{e}_1 und \hat{e}_2 , wobei \hat{e}_1 mit a , \hat{e}_2 mit b markiert ist. Der Morphismus m bildet e auf \hat{e}_1 ab, für q_1 gilt: $q_1(\hat{e}_1) = e_1$ und $q_1(\hat{e}_2) = e_2$. Für den Morphismus $q_2 : Q \rightarrow \mathcal{F}$ mit $q_2(\hat{e}_1) = f_1$ und $q_2(\hat{e}_2) = f_2$ erhalten wir: $q_2 \circ m = p_2$ und $(q_1, q_2) \in R$.

Modellierung von Beispiel 3.2:

Wir betrachten nun die beiden Ereignisstrukturen \mathcal{G} und \mathcal{H} aus Abbildung 12 und zeigen, daß es zwischen ihnen keine Pfad-**Lin**-Bisimulation gibt. Angenommen, R wäre eine Pfad-**Lin**-Bisimulation. Dann enthält R das Paar $(\iota_{\mathcal{G}}, \iota_{\mathcal{H}})$, wobei $\iota_{\mathcal{G}} : I \rightarrow \mathcal{G}$ und $\iota_{\mathcal{H}} : I \rightarrow \mathcal{H}$ die eindeutig bestimmen Morphismen vom initialen Objekt I nach \mathcal{G} bzw. \mathcal{H} sind. \mathcal{H} ist ein Pfadobjekt aus **Lin**, für die Identität $id_{\mathcal{H}}$ gilt: $id_{\mathcal{H}} \circ \iota_{\mathcal{H}} = \iota_{\mathcal{H}}$. Damit sind die Voraussetzungen von Bedingung (ii) erfüllt, es gibt aber keinen Morphismus von \mathcal{H} nach \mathcal{G} – also kann R die Abschlußeigenschaften nicht erfüllen.

3.5 Ein erster Vergleich der abstrakten Charakterisierungen

Anhand der Modellierungen der Musterbeispiele aus Abschnitt 3.1 wollen wir diskutieren, welche Antwort die drei abstrakten Charakterisierungen auf die Frage geben: „Was ist eine interleaving Bisimulation zwischen zwei Ereignisstrukturen?“ Am Ende dieses Abschnittes geben wir schließlich eine allgemeine Interpretation der drei Charakterisierungen.

AM-Bisimulation: Um eine AM-Bisimulation anzugeben, ordnen wir den Ereignisstrukturen \mathcal{E} und \mathcal{F} bzw. \mathcal{G} und \mathcal{H} zunächst mit dem Operator T_{int} eine operationale Semantik zu. Eine Bisimulation ist dann ein *Transitionssystem* (R, γ) mit einem „Verhalten“, das $T_{int}(\mathcal{E})$ und $T_{int}(\mathcal{F})$ resp. $T_{int}(\mathcal{G})$ und $T_{int}(\mathcal{H})$ gemeinsam ist. Die Bedingung $(\emptyset, \emptyset) \in R$ stellt hierbei sicher, daß alle erreichbaren Zustände der Transitionssysteme in Betracht gezogen werden, die wir mittels des Operators T_{int} erhalten. Im Fall der Ereignisstrukturen \mathcal{E} und \mathcal{F}

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

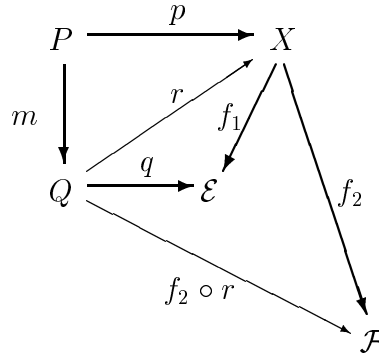


Abbildung 24: \mathbb{P} -Bisimulation: Pfad-Übertragung.

konnten wir ein solches Transitionssystem angeben. Bei den Ereignisstrukturen \mathcal{G} und \mathcal{H} haben wir die Annahme, daß ein solches Transitionssystem existiert, zum Widerspruch geführt.

\mathbb{P} -Bisimulation: Für die Ereignisstrukturen \mathcal{E} und \mathcal{F} aus Beispiel 3.1 besteht die \mathbb{P} -Bisimulation aus einer *Ereignisstruktur* X und zwei \mathbb{P} -*offenen Morphismen* $f_1 : X \rightarrow \mathcal{E}$ und $f_2 : X \rightarrow \mathcal{F}$. Über diese Konstruktion erhalten wir die Eigenschaft der Pfad-Übertragung (vergleiche Abbildung 24): Kann ein Pfad $p : P \rightarrow X$ zu einem Pfad $q : Q \rightarrow \mathcal{E}$ fortgesetzt werden, d.h. es gibt einen Morphismus $m : P \rightarrow Q$ mit $q \circ m = f_1 \circ p$, dann ist diese Fortsetzung mit demselben Morphismus m auch für die Ereignisstruktur \mathcal{F} möglich. Da f_1 \mathbb{P} -offen ist, existiert ein Morphismus $r : Q \rightarrow X$ mit $r \circ m = p$ und $q = f_1 \circ r$. Für den Morphismus $f_2 \circ r : Q \rightarrow \mathcal{F}$ gilt $(f_2 \circ r) \circ m = f_2 \circ p$. Die gleiche Konstruktion kann symmetrisch für Pfade nach \mathcal{F} durchgeführt werden. Die Ereignisstruktur X der \mathbb{P} -Bisimulation kann als das „Bild“ aller Pfad-Objekte aufgefaßt werden, von denen es einen Pfad in die Ereignisstrukturen \mathcal{E} und \mathcal{F} gibt. Die Eigenschaft \mathbb{P} -offen stellt sicher, daß jede Pfad-Fortsetzung von \mathcal{E} auch für \mathcal{F} möglich ist – und umgekehrt. Im Fall der Ereignisstrukturen \mathcal{G} und \mathcal{H} haben wir gezeigt, daß es für kein Objekt X möglich ist, die Bedingung der Pfad-Fortsetzung zu erfüllen.

Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation: Eine Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation zwischen zwei Ereignisstrukturen \mathcal{E} und \mathcal{F} ist eine *Menge von Pfad-Paaren* \hat{R} , die unter „Pfadfortsetzung“ abge-

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

geschlossen sind. Die Existenz eines ausgezeichneten, initialen Objekts stellt zusammen mit den Abschlußeigenschaften sicher, daß die Projektionen $\pi_1(\hat{R})$ und $\pi_2(\hat{R})$ alle Pfade $p_1 : P \rightarrow \mathcal{E}$ bzw. $p_2 : P \rightarrow \mathcal{F}$ von einem Pfadobjekt P enthalten. Diese Charakterisierung von Bisimulation verwendet Morphismen zwischen Pfad-Objekten in ähnlicher Weise, wie Transitionen in Milners ursprünglichen Definition von Bisimulation verwendet werden. Diese Beobachtung werden wir in Kapitel 4 nutzen, um mit Hilfe des Operators $T_{path-\mathbb{P}}$ einen Zusammenhang zwischen Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation und AM-Bisimulation herzuleiten.

Für die Ereignisstrukturen \mathcal{E} und \mathcal{F} haben wir mit Hilfe von Isomorphieklassen von Ereignisstrukturen eine Menge von Pfadpaaren angegeben, welche den Abschlußeigenschaften genügt. Der Beweis, daß \mathcal{G} und \mathcal{H} nicht Pfad-**Lin**-bisimilar sind, beruht darauf, daß für das Pfadobjekt \mathcal{H} die Eigenschaft $Hom_{\mathbf{E}_{Akt}}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) \subseteq \pi_2(\hat{R})$ nicht erfüllt werden kann.

Zusammenfassend können wir formulieren: Zwischen zwei Objekten X_1 und X_2 einer Kategorie von Modellen \mathbb{M} ist eine

AM-Bisimulation ein Transitionssystem, welches das operationale „Verhalten“ wiedergibt, das beiden Objekten gemeinsam ist.

\mathbb{P} -Bisimulation ein Objekt X der Kategorie \mathbb{M} , das Bild aller ihrer „gemeinsamen Pfadobjekte“ aus \mathbb{P} ist.

Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation eine Menge von Pfadpaaren, die unter „Pfadfortsetzung“ abgeschlossen ist.

4 Zusammenhänge zwischen den abstrakten Charakterisierungen

Nachdem wir im vorangegangenen Kapitel verschiedene abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation vorgestellt haben, ziehen wir nun einen theoretischen Vergleich zwischen ihnen. Dazu studieren wir zunächst einen speziellen Operator $T_{path-\mathbb{P}}$, der den Objekten einer Kategorie Transitionssysteme zuordnet. Mit Hilfe dieses Operators weisen wir eine erste Äquivalenz zwischen (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation und (vorwärts-rückwärts) AM-Bisimulation nach. Da diese Aussage nur für sehr abstrakte Transitionssysteme gültig ist, die Morphismen als Aktionen verwenden, definieren wir die Klasse der sogenannten verbindenden Operatoren. Diese ordnen den Objekten einer Kategorie Transitionssysteme über einer beliebigen Aktionsmenge zu, müssen dafür jedoch einer Reihe von Bedingungen genügen. Es erweist sich, daß der Operator $T_{path-\mathbb{P}}$ verbindend ist. Auch für verbindende Operatoren können wir eine Äquivalenz zwischen Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation und AM-Bisimulation zeigen. Diese beiden Ergebnisse lassen unterschiedliche Interpretationen zu: Zum einen können sie als Äquivalenzaussagen relativ zu Operatoren aufgefaßt werden. Zum anderen lassen sie sich unter der Zielsetzung betrachten, konkrete Bisimulationen mit den abstrakten Konzepten zu modellieren. Wir diskutieren beide Betrachtungsweisen. Mit Hilfe eines Resultats aus [JNW94] entwickeln wir schließlich ein Gesamtbild der Zusammenhänge zwischen allen drei abstrakten Charakterisierungen.

4.1 Der Operator $T_{path-\mathbb{P}}$

In diesem Abschnitt definieren wir einen Operator $T_{path-\mathbb{P}}$, welcher den Objekten einer Kategorie von Modellen \mathbb{M} in Abhängigkeit von einer Unterkategorie \mathbb{P} Transitionssysteme zuordnet. Am Beispiel eines Transitionssystems \mathcal{S} diskutieren wir die Struktur von $T_{path-\mathbb{P}}(\mathcal{S})$ und zeigen mit Hilfe des Operators $T_{path-\mathbb{P}}$, daß zu jeder (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation eine äquivalente (vorwärts-rückwärts) AM-Bisimulation existiert.

Definition 4.1 (Operator $T_{path-\mathbb{P}}$)

Es sei \mathbb{M} eine Kategorie von Modellen, \mathbb{P} eine darin ausgezeichnete kleine Unterkategorie von Pfadobjekten und I ein gemeinsames initiales Objekt von \mathbb{P} und \mathbb{M} . Es sei

$$L := \bigcup_{P, Q \in \mathbb{P}} \{(m, P, Q) \mid m \in Hom_{\mathbb{P}}(P, Q)\}$$

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

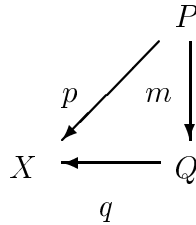


Abbildung 25: Definition der Transitionen für den Operator $T_{path-\mathbb{P}}$.

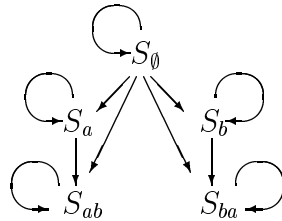


Abbildung 26: Die Struktur von $T_{path-\mathbf{Bran}}(\mathcal{S})$ für das Transitionssystem \mathcal{S} aus Abbildung 4.

eine Menge von Markierungen, es sei $F := \mathcal{P}(L \times _)$ der Endofunktor aus Beispiel 3.3. Der Operator $T_{path-\mathbb{P}}$ ordnet jedem Objekt X aus \mathbb{M} eine Coalgebra $T_{path-\mathbb{P}}(X) = (S, \sigma)$ aus \mathbf{Set}_F und einen ausgezeichneten Zustand $\iota \in S$ zu, wobei

$S := \{p : P \rightarrow X \mid P \in \mathbb{P}, p \in \mathit{Hom}_{\mathbb{M}}(P, X)\}$ die Menge aller Pfade nach X ist,

$(m, P, Q, q) \in \sigma(p) :\iff q \circ m = p$ (vergleiche Abbildung 25), und

$\iota := \iota_X : I \rightarrow X$ der eindeutig bestimmte Morphismus vom initialen Objekt I in das Objekt X ist.

Wir illustrieren den Operator $T_{path-\mathbb{P}}$ anhand des Transitionssystems \mathcal{S} aus Abbildung 4. Dementsprechend sei $\mathbb{M} = \mathbf{T}_{Akt}$, für die Pfadkategorie wählen wir $\mathbb{P} = \mathbf{Bran}$.

In einem ersten Schritt definieren wir Mengen von Pfadobjekten $P \in \mathbf{Bran}$ mit $\mathit{Hom}_{\mathbf{T}_{Akt}}(P, \mathcal{S}) \neq \emptyset$: Die Menge S_\emptyset beinhaltet alle Transitionssysteme aus \mathbf{Bran} , die einen Zustand aber keine Transitionen aufweisen. Die Menge S_a besteht aus allen

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Transitionssystemen aus **Bran**, die eine mit a markierte Transition aufweisen. Die Menge S_{ab} besteht aus allen Transitionssystemen aus **Bran**, die zwei Transitionen aufweisen, die erste mit a , die zweite mit b markiert. Die Mengen S_b und S_{ba} sind analog definiert. Die Zustände von $T_{path-\mathbf{Bran}}(\mathcal{S})$ sind die Pfade nach \mathcal{S} mit Ursprung $P \in (S_\emptyset \cup S_a \cup S_b \cup S_{ab} \cup S_{ba})$.

Abbildung 26 zeigt die Struktur des Transitionssystems $T_{path-\mathbf{Bran}}(\mathcal{S})$. Gibt es einen Pfeil zwischen zwei Mengen X und Y , wobei X und Y eine der Mengen $S_\emptyset, S_a, S_b, S_{ab}$ oder S_{ba} ist, so bedeutet dies: Für alle Pfade $p : P \rightarrow \mathcal{S}, q : Q \rightarrow \mathcal{S}$, wobei $P \in X$ und $Q \in Y$, gibt es eine Transition der Form $p \xrightarrow{(m, P, Q)} q$, wobei $m : P \rightarrow Q \in Hom_{\mathbf{Bran}}(P, Q)$. Die Struktur des Transitionssystems $T_{path-\mathbf{Bran}}(\mathcal{S})$ ist in diesem Beispiel besonders einfach, weil es von einem Pfadobjekt aus **Bran** in ein Transitionssystem aus \mathbf{T}_{Akt} höchstens einen Morphismus gibt. Für das Transitionssystem \mathcal{T} aus Abbildung 2 gilt: $T_{path-\mathbf{Bran}}(\mathcal{T}) = T_{path-\mathbf{Bran}}(\mathcal{S})$.

Theorem 4.2 (Äquivalenz mit Hilfe des Operators $T_{path-\mathbb{P}}$)

Es sei \mathbb{M} eine Kategorie von Modellen, \mathbb{P} eine darin ausgezeichnete kleine Unterkategorie von sogenannten Pfad-Objekten, I ein gemeinsames initiales Objekt von \mathbb{P} und \mathbb{M} . Dann gibt es einen Operator T , der jedem Objekt X aus \mathbb{M} eine Coalgebra und einen ausgezeichneten Zustand ι zuordnet, so daß gilt:

Objekte X_1, X_2 aus \mathbb{M} sind (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -bisimilar gdw. es eine (vorwärts-rückwärts) AM-Bisimulation (R, γ) zwischen $T(X_1)$ und $T(X_2)$ mit $(\iota_1, \iota_2) \in R$ gibt, wobei ι_1 und ι_2 die ausgezeichneten Zustände von $T(X_1)$ bzw. $T(X_2)$ sind.

Beweis: Wir wählen als Operator $T = T_{path-\mathbb{P}}$ aus Definition 4.1 und setzen $(A, \alpha) := T_{path-\mathbb{P}}(X_1), (B, \beta) := T_{path-\mathbb{P}}(X_2)$. $\iota_1 = \iota_{X_1} : I \rightarrow X_1$ und $\iota_2 = \iota_{X_2} : I \rightarrow X_2$ sind die eindeutig bestimmten Morphismen vom initialen Objekt I nach X_1 bzw. X_2 .

Es seien X_1 und X_2 Pfad- \mathbb{P} -bisimilar. Dann gibt es eine Menge R aus Paaren von Pfaden (p_1, p_2) mit gemeinsamen Ursprung $P \in \mathbb{P}$. Wir definieren eine Abbildung $\gamma : R \rightarrow FR$ und beweisen, daß (R, γ) eine AM-Bisimulation zwischen (A, α) und (B, β) ist.

Definiere für alle $(p_1, p_2), (q_1, q_2) \in R, p_i : P \rightarrow X_i, q_i : Q \rightarrow X_i, i = 1, 2, m \in Hom_{\mathbf{Bran}}(P, Q)$:

$$(m, P, Q, q_1, q_2) \in \gamma(p_1, p_2) : \iff (m, P, Q, q_1) \in \alpha(p_1), (m, P, Q, q_2) \in \beta(p_2).$$

Es sei $(m, P, Q, q_1) \in (\alpha \circ \pi_1)(p_1, p_2)$. Daraus erhalten wir $(m, P, Q, q_1) \in \alpha(p_1)$. Nach Definition von (A, α) gilt für die Morphismen: $q_1 \circ m = p_1$. Da $(p_1, p_2) \in R$ und

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

R eine Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation ist, folgt daraus, daß es einen Morphismus $q_2 : Q \rightarrow X_2$ mit $q_2 \circ m = p_2$ und $(q_1, q_2) \in R$ gibt. Dies führt zu $(m, P, Q, q_1, q_2) \in \gamma(p_1, p_2)$ und wir erhalten schließlich $(m, P, Q, q_1) \in (F\pi_1 \circ \gamma)(p_1, p_2)$. Die andere Inklusion gilt nach Lemma 3.7.

Es sei nun R eine vorwärts-rückwärts Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation zwischen X_1 und X_2 . Wir behaupten, daß die oben konstruierte Coalgebra (R, γ) eine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß $(\alpha^- \circ \pi_1) \subseteq (F\pi_1 \circ \gamma^-)$ – vergleiche Lemma 3.7.

Gelte $(m, P, Q, p_1) \in (\alpha^- \circ \pi_1)(q_1, q_2)$. Dann folgt $(m, P, Q, p_1) \in \alpha^-(q_1)$ und wir erhalten nach Definition von α^- , daß $(m, P, Q, q_1) \in \alpha(p_1)$. Nach Definition von (A, α) gilt: $q_1 \circ m = p_1$. Da $(q_1, q_2) \in R$ und R eine vorwärts-rückwärts Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation ist, gilt $(q_1 \circ m, q_2 \circ m) \in R$. Für den Pfad $q_2 \circ m : P \rightarrow X_2$ erhalten wir: $(m, P, Q, q_2) \in \beta(q_2 \circ m)$. Nach Definition von γ gilt daher $(m, P, Q, q_1, q_2) \in \gamma(q_1 \circ m, q_2 \circ m)$. Daraus folgt $(m, P, Q, q_1 \circ m, q_2 \circ m) \in \gamma^-(q_1, q_2)$, und wir erhalten schließlich mit der Gleichung $q_1 \circ m = p_1$, daß $(m, P, Q, p_1) \in (F\pi_1 \circ \gamma^-)(q_1, q_2)$.

Es sei nun (R, γ) eine AM-Bisimulation zwischen (A, α) und (B, β) mit $(\iota_1, \iota_2) \in R$. Da die Menge R Paare von Pfaden (p_1, p_2) enthalten kann, die einen unterschiedlichen Ursprung aufweisen, wählen wir eine Teilmenge von R als Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation:

$$R' := \{(p_1, p_2) \in R \mid \exists P \in \mathbb{P} : p_1 \in \text{Hom}_{\mathbb{M}}(P, X_1), p_2 \in \text{Hom}_{\mathbb{M}}(P, X_2)\}.$$

Offenkundig gilt $(\iota_1, \iota_2) \in R'$. Es sei $(p_1, p_2) \in R'$, es seien $m \in \text{Hom}_{\mathbb{P}}(P, Q)$ für ein Objekt Q aus \mathbb{P} und $q_1 : Q \rightarrow X_1$ ein Pfad mit $q_1 \circ m = p_1$. Daraus folgt $(p_1, p_2) \in R$ und $(m, P, Q, q_1) \in (\alpha \circ \pi_1)(p_1, p_2)$. Da (R, γ) eine AM-Bisimulation ist, gibt es einen Pfad $q_2 : Q \rightarrow X_2$ mit $(m, P, Q, q_1, q_2) \in \gamma(p_1, p_2)$. Damit gilt $(m, P, Q, q_2) \in \beta(p_2)$ und nach Definition von β erhalten wir $q_2 \circ m = p_2$. Da q_1 und q_2 denselben Ursprung haben und $(q_1, q_2) \in R$, gilt $(q_1, q_2) \in R'$.

Es sei nun (R, γ) eine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation. Wir behaupten, daß unter dieser Voraussetzung die oben angegebene Menge R' eine vorwärts-rückwärts Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation ist. Es sei $(q_1, q_2) \in R'$, d.h. q_1 und q_2 sind Pfade mit demselben Ursprung Q . Es sei $P \in \mathbb{P}$ ein Pfadobjekt, es gelte $m \in \text{Hom}_{\mathbb{P}}(P, Q)$. Für den Morphismus $q_1 \circ m$ von P nach X_1 erhalten wir nach Definition des Operators $T_{\text{path}-\mathbb{P}} : (m, P, Q, q_1) \in \alpha(q_1 \circ m)$. Daraus folgt

$$(m, P, Q, q_1 \circ m) \in \alpha^-(q_1) = (\alpha^- \circ \pi_1)(q_1, q_2) = (F\pi_1 \circ \gamma^-)(q_1, q_2).$$

Also gibt es einen Pfad $p_2 : P \rightarrow X_2$ mit $(m, P, Q, q_1 \circ m, p_2) \in \gamma^-(q_1, q_2)$. Da (R, γ) eine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation ist, können wir daraus $(m, P, Q, p_2) \in$

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

$\beta^-(q_2)$ und $(m, P, Q, q_2) \in \beta(p_2)$ folgern. Mit der Definition von $T_{path-\mathbb{P}}$ erhalten wir $q_2 \circ m = p_2$, und es gilt: $(q_1 \circ m, q_2 \circ m) \in R'$. ■

4.2 Verbindende Operatoren

Bislang haben wir uns in diesem Kapitel mit dem speziellen Operator $T_{path-\mathbb{P}}$ befaßt, welcher einen Zusammenhang zwischen AM-Bisimulation und Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation herstellt. Nun führen wir die Klasse der sogenannten verbindenden Operatoren mt ein. Wir zeigen, daß der Operator $T_{path-\mathbb{P}}$ verbindend ist, und beweisen für verbindende Operatoren eine weitere Äquivalenzaussage zwischen Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation und AM-Bisimulation. Anhand eines Beispiels weisen wir nach, daß sich diese Aussage ohne zusätzliche Anforderungen nicht auf die vorwärts-rückwärts Varianten dieser abstrakten Charakterisierungen von Bisimulation erweitern läßt.

Definition 4.3 (Verbindender Operator zwischen \mathbb{M} und \mathbf{T}_{Akt})

Es sei \mathbb{M} eine Kategorie von Modellen, \mathbb{P} eine darin ausgezeichnete kleine Unterkategorie von sogenannten Pfad-Objekten, I ein gemeinsames initiales Objekt von \mathbb{P} und \mathbb{M} . Es sei Akt eine geeignet gewählte Aktionsmenge, mt ein Operator, der jedem Objekt X aus \mathbb{M} ein Transitionssystem $mt X = (S, s, \Leftrightarrow)$ aus \mathbf{T}_{Akt} zuordnet. Der Operator mt heißt verbindend, wenn er den folgenden Bedingungen genügt:

B1: Der Operator mt läßt sich zu einem Funktor von \mathbb{M} nach \mathbf{T}_{Akt} erweitern.

B2: Für Objekte P aus \mathbb{P} gilt: In dem Transitionssystem $mt P = (S, s, \rightarrow)$ gibt es einen Zustand e , der von allen anderen Zuständen von $mt P$ erreichbar ist, d.h. $\forall x \in S : x \rightarrow^ e$. Wir bezeichnen diesen Zustand als den erreichbaren Zustand e von $mt P$.*

B3: Zu jeder Ableitung der Form $s_1 \xrightarrow{a_1} s_2 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} s_n$, $n \geq 1$, eines Transitionssystems aus \mathbf{T}_{Akt} mit Anfangszustand s_1 gibt es ein Objekt P aus \mathbb{P} , so daß $mt P$ eine Ableitung der Form $t_1 \xrightarrow{a_1} t_2 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} t_n$ aufweist. Dabei ist t_1 der Anfangszustand, t_n der erreichbare Zustand von $mt P$.

Für dieses Objekt P gilt weiterhin: Wenn ein Objekt X aus \mathbb{M} eine Ableitung

$$u_1 \xrightarrow{a_1} u_2 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} u_n$$

in seinem zugeordnetem Transitionssystem $mt X$ aufweist, wobei u_1 der Anfangszustand von $mt X$ ist, dann gibt es einen Morphismus $p : P \rightarrow X$ in \mathbb{M} mit $(mt p)(t_i) = u_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

B4: Wählt man $n = 1$ in Bedingung B3, so erfüllt das initiale Objekt I die dort angeführten Bedingungen.

B5: Es seien P und Q Objekte von \mathbb{P} , X ein Objekt von \mathbb{M} , $p : P \rightarrow X$, $q : Q \rightarrow X$ Morphismen in \mathbb{M} , $m : P \rightarrow Q$ ein Morphismus in \mathbb{P} . Es sei $t_1 \xrightarrow{a_1} t_2 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} t_n$ eine Ableitung in $mt P$, wobei t_1 der Anfangszustand, t_n ein erreichbarer Zustand von $mt P$ ist. Dann gilt:

$$q \circ m = p \iff \forall 1 \leq i \leq n : (mt q \circ mt m)(t_i) = (mt p)(t_i). \quad (1)$$

Die Bedingungen B1 bis B5 mögen auf den ersten Blick wenig einleuchtend erscheinen. Daher wollen wir sie zunächst kurz motivieren und in Beispiel 4.4 einen verbindenden Operator vorstellen, bevor wir mit ihrer Hilfe eine weitere Äquivalenz zwischen Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation und AM-Bisimulation nachweisen. In Kapitel 5 werden wir weitere verbindende Operatoren kennenlernen.

Die Definition von verbindenden Operatoren hat zum Ziel, einen weiteren Zusammenhang zwischen AM-Bisimulation und Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation herzustellen. Dazu müssen zwei verschiedene Konzepte miteinander in Beziehung gesetzt werden. AM-Bisimulation ist eine Äquivalenzrelation auf einer Kategorie von Modellen \mathbb{M} , welche mit Hilfe von Transitionssystemen aus \mathbf{T}_{Akt} über einer beliebigen Aktionsmenge Akt ausgedrückt wird². Dagegen verwendet Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation ausschließlich Begriffe innerhalb der Kategorie von Modellen \mathbb{M} , nämlich Morphismen ausgehend von Objekten einer Pfadkategorie \mathbb{P} . Die Bedingungen B1 bis B5 erlauben es, zwischen beiden Konzepten hin- und herzuwechseln.

zu B1: Eine Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation R ist eine Menge von Morphismenpaaren. Um die Morphismen der Kategorie \mathbb{M} in der Kategorie \mathbf{T}_{Akt} wiederfinden zu können, soll der Operator mt sich zu einem Funktor erweitern lassen. Da Morphismen in den in Kapitel 2 eingeführten Modellen parallelen Rechnens als Simulationen aufgefaßt werden können, läßt sich Bedingung B1 interpretieren als: Simulationen bleiben unter dem Operator mt erhalten.

zu B2: Diese Bedingung gewährleistet, daß „Berechnungen“ aus der abstrakten Welt der Kategorien \mathbb{M} und \mathbb{P} in „Berechnungen“ in der Kategorie der Transitionssysteme \mathbf{T}_{Akt} überführt werden.

²An dieser Stelle besteht ein wesentlicher Unterschied zu Theorem 4.2: Dort wird die Menge der Aktionen auf die Menge L aus Definition 4.1 fixiert.

In der abstrakten Welt der Kategorien \mathbb{M} und \mathbb{P} repräsentieren Pfadobjekte $P \in \mathbb{P}$ Berechnungen. Die Existenz eines Pfades $p : P \rightarrow X$ von P in ein Objekt X der Kategorie \mathbb{M} bedeutet – da die Morphismen in den von uns betrachteten Modellen parallelen Rechnens Simulationen repräsentieren – daß die Berechnung, welche durch das Objekt P repräsentiert wird, auch im Objekt X durchgeführt werden kann.

In einem Transitionssystem mtP , $P \in \mathbb{P}$, hingegen wird eine Berechnung durch eine Ableitung repräsentiert, welche vom Anfangszustand zu einem „End“-Zustand führt. Der Begriff des finalen Zustandes eines Transitionssystems, d.h. eines eindeutig bestimmten Zustands, der vom Anfangszustand erreichbar ist und von dem keine Transitionen mehr ausgehen, hat sich für unsere Untersuchung als zu streng erwiesen. Als Abschwächung verwenden wir hier erreichbare Zustände. Von erreichbaren Zuständen aus sieht ein Transitionssystem identisch aus: Es seien e_1 und e_2 erreichbare Zustände. Gibt es eine Ableitung $e_1 \Leftrightarrow^* e$ von e_1 zu einem Zustand e , so gibt es auch eine Ableitung von e_2 zu diesem Zustand, da e_1 auch von e_2 aus erreichbar ist: $e_2 \Leftrightarrow^* e_1 \Leftrightarrow^* e$. In diesem Sinn sind erreichbare Zustände äquivalent.

zu B3: Bislang haben wir Anforderungen gestellt, welche Eigenschaften der Kategorien \mathbb{M} und \mathbb{P} auf die Kategorie \mathbf{T}_{Akt} der Transitionssysteme übertragen. Nun wollen wir die umgekehrte Richtung betrachten. Dabei greifen wir auf die Eigenschaften B1 und B2 zurück.

Der erste Teil von B3 stellt sicher, daß „Berechnungen“ aus der Kategorie der Transitionssysteme \mathbf{T}_{Akt} in „Berechnungen“ der abstrakten Welt der Kategorien \mathbb{M} und \mathbb{P} überführt werden: jeder Ableitung, die in \mathbf{T}_{Akt} vorkommen kann, entspricht ein Pfadobjekt $P \in \mathbb{P}$. Der zweite Teil erweitert diese Sichtweise auf Morphismen: Sind in einem Pfadobjekt $P \in \mathbb{P}$ und in einem Objekt X aus \mathbb{M} unter mt dieselben Ableitungen zu beobachten, dann gibt es einen Morphismus von P nach X , der diese Ableitung respektiert.

zu B4: Hier wird sichergestellt, daß eine AM-Bisimulation das Paar (s_1, t_1) der Anfangszustände von mtX_1 und mtX_2 enthält, bzw. eine Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation das Paar (ι_1, ι_2) der Morphismen vom initialen Objekt nach X_1 und X_2 .

zu B5: Diese Bedingung erlaubt es, das Fortsetzen von Berechnungen in dem einen Modell auf das andere Modell zu übertragen. Da der Operator mt nach Bedingung B1 ein Funktor ist, ist die Implikation „ \Rightarrow “ in Formel (1) ohnehin erfüllt;

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

die Forderung besteht in der anderen Implikation.

Beispiel 4.4 ($T_{\text{path-}\mathbb{P}}$ ist ein verbindender Operator)

Wir zeigen, daß für jede kleine Unterkategorie \mathbb{P} von \mathbb{M} – insbesondere auch für $\mathbb{P} = \mathbb{M}$ – der Operator $T_{\text{path-}\mathbb{P}}$ aus Definition 4.1 verbindend ist. Dazu fassen wir die Coalgebren $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(X)$ als Objekte in \mathbf{T}_L auf, indem wir den ausgezeichneten Zustand ι als Anfangszustand wählen. Markierungen von Transitionen sind Tripel $(m, P, Q) \in L$, wobei L die in Definition 4.1 eingeführte Menge ist.

zu B1: Es seien X und Y Objekte aus \mathbb{M} , es sei $f \in \text{Hom}_{\mathbb{M}}(X, Y)$ ein Morphismus, P ein Objekt aus \mathbb{P} und $p : P \rightarrow X$ ein Zustand von $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(X)$. Wir setzen

$$T_{\text{path-}\mathbb{P}}(f)(p) := f \circ p$$

und behaupten, daß $T_{\text{path-}\mathbb{P}}$ ein Funktor ist.

Zunächst zeigen wir, daß $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(f)$ ein Morphismus in \mathbf{T}_L ist – zur Definition von L siehe Definition 4.1. $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(f)$ bildet den initialen Zustand $\iota_X : I \rightarrow X$ von $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(X)$ auf den initialen Zustand $\iota_Y : I \rightarrow Y$ von $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(Y)$ ab: $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(f)(\iota_X) = f \circ \iota_X = \iota_Y$, da es von I nur einen Morphismus nach Y gibt. Es sei $p \xrightarrow{(m, P, Q)} q$ eine Transition von $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(X)$. Nach Definition des Operators $T_{\text{path-}\mathbb{P}}$ wissen wir: $q \circ m = p$. Daraus folgt $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(f)(p) = f \circ p = f \circ q \circ m = (T_{\text{path-}\mathbb{P}}(f)(q)) \circ m$ and wir erhalten: $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(f)(p) \xrightarrow{(m, P, Q)} T_{\text{path-}\mathbb{P}}(f)(q)$ ist eine Transition in $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(Y)$.

Bezüglich der Identität id_X auf einem Objekt X von \mathbb{M} gilt: $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(\text{id}_X)(p) = \text{id}_X \circ p = p$, wobei $p : P \rightarrow X$ ein Zustand von $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(X)$ ist. Daraus folgt $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(\text{id}_X) = \text{id}_{T_{\text{path-}\mathbb{P}}(X)}$.

Für die Komposition von Morphismen $f \in \text{Hom}_{\mathbb{M}}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}_{\mathbb{M}}(Y, Z)$ erhalten wir: $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(g \circ f)(p) = g \circ f \circ p = (T_{\text{path-}\mathbb{P}}(g) \circ T_{\text{path-}\mathbb{P}}(f))(p)$, wobei $p : P \rightarrow X$ ein Zustand von $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(X)$ ist.

zu B2: Es sei P ein Objekt in \mathbb{P} . Als erreichbaren Zustand in $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(P)$ wählen wir die Identität id_P von P . Für alle Zustände $q : Q \rightarrow P$ von $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(P)$ gilt: $\text{id}_P \circ q = q$. Daher ist $q \xrightarrow{(q, Q, P)} \text{id}_P$ eine Transition in $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(P)$, d.h. id_P ist von jedem Zustand erreichbar.

zu B3: Es sei $s_1 \xrightarrow{a_1} s_2 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} s_n$, $n \geq 1$, eine Ableitung eines Transitionssystems in \mathbf{T}_L .

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Im Fall $n = 1$ wählen wir als Pfad-Objekt $P = I$. $\iota_I : I \rightarrow I$ ist sowohl Anfangszustand als auch erreichbarer Zustand in $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(I)$. Es sei X ein Objekt von \mathbb{M} mit einer Ableitung u_1 in $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(X)$, wobei u_1 der initiale Zustand von $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(X)$ ist. Dann gilt $u_1 = \iota_X : I \rightarrow X$. Für den Morphismus ι_X gilt weiterhin $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(\iota_X)(\iota_I) = \iota_X \circ \iota_I = \iota_X$.

Für den Fall $n > 1$ betrachten wir die Markierungen der oben angegebenen Ableitung. Da die Ableitung aus einem Objekt der Kategorie \mathbf{T}_L stammt, gilt:

1. $a_i = (m_i, P_i, P_{i+1})$, $1 \leq i \leq n \Leftrightarrow 1$, wobei

$$P_j \in \mathbb{P}, 1 \leq j \leq n,$$

$$m_i \in \text{Hom}_{\mathbb{P}}(P_i, P_{i+1}), 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow 1, \text{ und}$$
2. $P_1 = I$, $m_1 = \iota_{P_2} : I \rightarrow P_2$.

Als Objekt $P \in \mathbb{P}$ wählen wir $P := P_n$. Mit den Morphismen m_i können wir einige Zustände von $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(P)$ bestimmen:

Wir definieren $p_i := m_{n-1} \circ m_{n-2} \circ \dots \circ m_i : P_i \rightarrow P_n$ für $1 \leq i \leq n \Leftrightarrow 1$ und $p_n := \text{id}_{P_n}$. Da $P_1 = I$ folgt $p_1 = m_{n-1} \circ m_{n-2} \circ \dots \circ m_1 = \iota_P : I \rightarrow P_n$. Mit dieser Definition der Morphismen, d.h. Zustände, p_i erhalten wir: $p_i = p_{i+1} \circ m_i$ für alle $1 \leq i \leq n \Leftrightarrow 1$. Daraus folgt, daß

$$p_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{(\iota_{P_2}, I, P_2)} \\ \xleftrightarrow{\quad} \end{array} p_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{(m_2, P_2, P_3)} \\ \xleftrightarrow{\quad} \end{array} \dots \begin{array}{c} \xrightarrow{(m_{n-1}, P_{n-1}, P_n)} \\ \xleftrightarrow{\quad} \end{array} p_n$$

eine Ableitung in $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(P)$ ist mit p_1 als Anfangszustand und p_n als erreichbarem Zustand von $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(P)$. Abbildung 27 zeigt die Morphismen, welche diesem Teil des Transitionssystems $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(P)$ zugrunde liegen.

Es sei X ein Objekt aus \mathbb{M} mit einer Ableitung

$$u_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{(\iota_{P_2}, I, P_2)} \\ \xleftrightarrow{\quad} \end{array} u_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{(m_2, P_2, P_3)} \\ \xleftrightarrow{\quad} \end{array} \dots \begin{array}{c} \xrightarrow{(m_{n-1}, P_{n-1}, P_n)} \\ \xleftrightarrow{\quad} \end{array} u_n$$

in $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(X)$, wobei u_1 der Anfangszustand von $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(X)$ ist. Mit der Definition des Operators $T_{\text{path-}\mathbb{P}}$ erhalten wir:

1. $u_i \in \text{Hom}_{\mathbb{M}}(P_i, X)$, $1 \leq i \leq n$,
2. $u_1 = \iota_X : I \rightarrow X$ und
3. $u_i = u_{i+1} \circ m_i$, $1 \leq i \leq n \Leftrightarrow 1$.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Wir wählen für den gesuchten Morphismus $p : P \rightarrow X$ den Morphismus $u_n : P_n = P \rightarrow X$ aus der obigen Ableitung in $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(X)$.

Zu zeigen ist: $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(u_n)(p_i) = u_i$, $1 \leq i \leq n$.

Für $i = n$ erhalten wir: $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(u_n)(p_n) = u_n \circ p_n = u_n \circ \text{id}_{P_n} = u_n$. Falls $i < n$ ergibt sich mit der Definition der p_i durch die Morphismen m_i und die oben angeführte dritte Eigenschaft von $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(X)$:

$$\begin{aligned} T_{\text{path-}\mathbb{P}}(u_n)(p_i) &= u_n \circ p_i \\ &= u_n \circ m_{n-1} \circ \dots \circ m_i \\ &= u_{n-1} \circ m_{n-2} \circ \dots \circ m_i \\ &\quad \vdots \\ &= u_i. \end{aligned}$$

zu B4: siehe B3, Fall $n = 1$.

zu B5: Es seien P und Q Objekte von \mathbb{P} , X ein Objekt von \mathbb{M} , $p : P \rightarrow X$, $q : Q \rightarrow X$ Morphismen in \mathbb{M} , $m : P \rightarrow Q$ ein Morphismus in \mathbb{P} . Es sei $p_1 \xleftrightarrow{q_1} p_2 \xleftrightarrow{q_2} \dots \xleftrightarrow{q_{n-1}} p_n$ ein Ableitung in $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(P)$, wobei p_1 der Anfangszustand und p_n der erreichbare Zustand von $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(P)$ ist. Wie im Fall des Beweises für Bedingung B3 können wir auch hier einige Aussagen über die Struktur von $T_{\text{path-}\mathbb{P}}(P)$ machen:

1. $a_i = (m_i, P_i, P_{i+1})$, wobei $m_i \in \text{Hom}_{\mathbb{P}}(P_i, P_{i+1})$, $1 \leq i \leq n \Leftrightarrow 1$, für Objekte $P_j \in \mathbb{P}$, $1 \leq j \leq n$,
2. $p_j \in \text{Hom}_{\mathbb{M}}(P_j, P)$, $1 \leq j \leq n$,
3. $P_1 = I$ und $m_1 = \iota_{P_2} : I \rightarrow P_2$,
4. $P_n = P$ und $p_n = \text{id}_P$ und
5. $p_i = p_{i+1} \circ m_i$, $1 \leq i \leq n \Leftrightarrow 1$.

Es gelte $(T_{\text{path-}\mathbb{P}}(q) \circ T_{\text{path-}\mathbb{P}}(m))(p_i) = T_{\text{path-}\mathbb{P}}(p)(p_i)$ für $1 \leq i \leq n$. Für $i = n$ gilt $p_n = \text{id}_P$, und wir erhalten:

$$\begin{aligned} q \circ m &= q \circ m \circ \text{id}_P \\ &= q \circ m \circ p_n \\ &= (T_{\text{path-}\mathbb{P}}(q) \circ T_{\text{path-}\mathbb{P}}(m))(p_n) \\ &= T_{\text{path-}\mathbb{P}}(p)(p_n) \\ &= p \circ p_n \\ &= p. \end{aligned}$$

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

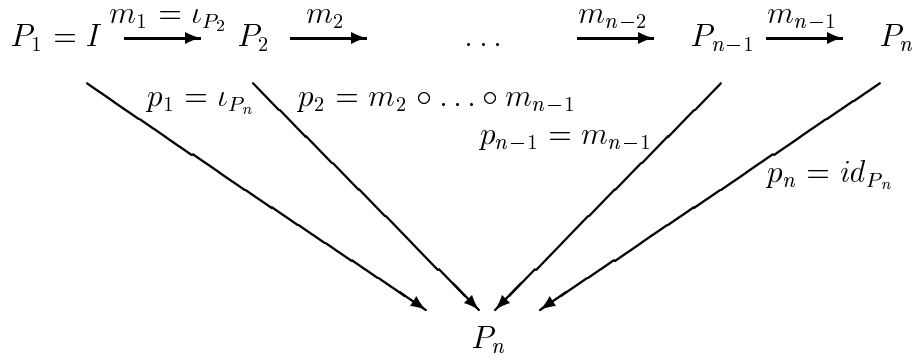


Abbildung 27: Illustration zu Beispiel 4.4: Morphismen und Objekte, die $T_{\text{path-}\mathbb{F}}(P)$ zugrunde liegen.

$$\mathcal{S} : s_0 \xrightarrow{a} s_1 \quad \mathcal{T} : t_0 \xrightarrow{a} t_1 \xrightarrow{b} t_2$$

Abbildung 28: Simulationen zwischen Transitionssystemen.

In Definition 3.4 haben wir den Begriff AM-Bisimulation auf der Kategorie \mathbf{Set}_F eingeführt. Diese Kategorie enthält nicht die erforderlichen Morphismen – vergleiche das folgende Beispiel 4.5 – um mit Hilfe von verbindenden Operatoren eine Äquivalenz zwischen AM-Bisimulation und Pfad- \mathbb{F} -Bisimulation zu etablieren. Daher verwenden wir die Kategorie \mathbf{T}_{Akt} als Verbindungsglied zwischen der Kategorie \mathbb{M} der Modelle und der Kategorie \mathbf{Set}_F der Coalgebren. Dazu ist es notwendig, den Begriff der (vorwärts-rückwärts) AM-Bisimulation auch auf der Kategorie \mathbf{T}_{Akt} zu definieren.

Beispiel 4.5 (Simulationen versus Morphismen in \mathbf{Set}_F)

Wir betrachten alle Morphismen in \mathbf{Set}_F von dem Transitionssystem \mathcal{S} in das Transitionssystem \mathcal{T} aus Abbildung 28: Zum einen ist – wie zwischen allen Coalgebren aus \mathbf{Set}_F – \emptyset ein Morphismus. Zum anderen ist $\sigma : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ mit $\sigma(s_1) := t_2$ ein Morphismus, nicht jedoch die Abbildung τ mit $\tau(t_0) := s_0$ und $\tau(t_1) := s_1$ – vergleiche Lemma 3.6. Als Simulation ist jedoch gerade τ interessant: Nur diese Abbildung drückt aus, daß jeder Ableitung in \mathcal{S} eine Ableitung in \mathcal{T} entspricht.

Definition 4.6 (AM-Bisimulation auf der Kategorie \mathbf{T}_{Akt})

Es seien $\mathcal{T}_1 = (S_1, s_1, \Leftrightarrow_1)$ und $\mathcal{T}_2 = (S_2, s_2, \Leftrightarrow_2)$ Transitionssysteme aus \mathbf{T}_{Akt} , (A, α) die Coalgebra mit $\mathcal{T}_{(A, \alpha)} = (S_1, \Leftrightarrow_1)$ und (B, β) die Coalgebra mit $\mathcal{T}_{(B, \beta)} = (S_2, \Leftrightarrow_2)$.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

- \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 sind AM-bisimilar gdw. es eine AM-Bisimulation (R, γ) zwischen (A, α) und (B, β) mit $(s_1, s_2) \in R$ gibt.
- \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 sind vorwärts-rückwärts AM-bisimilar gdw. es eine AM-Bisimulation (R, γ) zwischen (A, α) und (B, β) mit $(s_1, s_2) \in R$ gibt, so daß (R, γ^-) eine AM-Bisimulation zwischen (A, α^-) und (B, β^-) ist.

Da die Projektionen π_i von einer AM-Bisimulation (R, γ) in die Coalgebren (A, α) bzw. (B, β) sowohl in \mathbf{Set}_F als auch in \mathbf{T}_{Akt} Morphismen sind, ist es gleichgültig, ob wir eine AM-Bisimulation zwischen zwei Transitionssystemen in \mathbf{T}_{Akt} oder in \mathbf{Set}_F etablieren.

Theorem 4.7 (Äquivalenz im Fall verbindender Operatoren)

Es sei \mathbb{M} eine Kategorie von Modellen, \mathbb{P} eine darin ausgezeichnete kleine Unterkategorie von sogenannten Pfad-Objekten, I ein gemeinsames initiales Objekt von \mathbb{P} und \mathbb{M} und mt ein verbindender Operator, der jedem Objekt X aus \mathbb{M} ein Transitionssystem $mt X = (S, s, \Leftrightarrow)$ zuordnet. Dann gilt:

Objekte X_1 und X_2 aus \mathbb{M} sind Pfad- \mathbb{P} -bisimilar gdw. es eine AM-Bisimulation (R, γ) zwischen $mt X_1 = (S, s_1, \Leftrightarrow)$ und $mt X_2 = (T, t_1, \Leftrightarrow)$ mit $(s_1, t_1) \in R$ gibt.

Beweis: Es sei (R, γ) eine AM-Bisimulation zwischen $mt X_1 = (S, s_1, \Leftrightarrow)$ und $mt X_2 = (T, t_1, \Leftrightarrow)$ mit $(s_1, t_1) \in R$. Um eine Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation R' zwischen X_1 und X_2 anzugeben, betrachten wir in (R, γ) zunächst einen von (s_1, t_1) erreichbaren Zustand (s, t) . Zu jeder Ableitung von (s, t) der Form

$$(s_1, t_1) \xrightarrow{a_1} (s_2, t_2) \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} (s_n, t_n) = (s, t)$$

gibt es nach Bedingung B3 ein Objekt P aus \mathbb{P} , so daß es in $mt P$ eine Ableitung $u_1 \xrightarrow{a_1} u_2 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} u_n$ gibt. Mit Hilfe der Projektionen π_1 und π_2 erhalten wir aus der Ableitung von (s, t) Ableitungen $s_1 \xrightarrow{a_1} s_2 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} s_n$ und $t_1 \xrightarrow{a_1} t_2 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} t_n$ in $mt X_1$ bzw. $mt X_2$. Daraus folgt – ebenfalls mit Bedingung B3 – daß es Morphismen $p_i : P \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$, gibt mit $(mt p_1)(u_j) = s_j$ und $(mt p_2)(u_j) = t_j$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Es bezeichne $M(s, t)$ die Menge aller Morphismenpaare (p_1, p_2) , die auf die eben beschriebene Weise aus einem Zustand (s, t) aus (R, γ) gewonnen werden können. D.h. wir betrachten zunächst alle Ableitungen von (s, t) , weiterhin betrachten wir alle Objekte P aus \mathbb{P} , die zu einer dieser Ableitungen korrespondieren, und schließlich betrachten wir jedes Paar von Morphismen (p_1, p_2) , welches $mt P$ nach $mt X_1$

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

bzw. $mt X_2$ auf die beschriebene Weise einbettet. Wir behaupten, daß die Menge

$$R' := \bigcup_{(s,t) \in R, (s,t) \text{ erreichbar}} M(s,t)$$

eine Pfad-P-Bisimulation zwischen X_1 und X_2 ist.

Nach Bedingung B4 gilt: $mt I$ hat die Ableitung u_1 , wobei u_1 erreichbarer Zustand in $mt I$ ist. $mt X_1$ hat die Ableitung s_1 , $mt X_2$ hat die Ableitung t_1 . Also gibt es Morphismen $p_i : I \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$, mit $(mt p_1)(u_1) = s_1$, $(mt p_2)(u_1) = t_1$. Nach Voraussetzung gilt $(s_1, t_1) \in R$. Demnach erhalten wir $(p_1, p_2) \in R'$. Da es von I zu jedem Objekt nur einen Morphismus gibt, gilt $p_i = \iota_i$ und somit $(\iota_1, \iota_2) \in R'$, wobei ι_i die eindeutig bestimmten Morphismen von dem initialen Objekt I nach X_i sind, $i = 1, 2$.

Es sei $(p_1, p_2) \in R'$, P der gemeinsame Ursprung von p_1 und p_2 in \mathbb{P} , d.h. $p_1 : P \rightarrow X_1$ und $p_2 : P \rightarrow X_2$. Es seien weiterhin $m : P \rightarrow Q$ ein Morphismus und Q ein Objekt in \mathbb{P} sowie $q_1 : Q \rightarrow X_1$ ein Pfad in \mathbb{M} mit $q_1 \circ m = p_1$.

Aus der Definition von R' wissen wir, daß es folgende Ableitungen gibt:

$$\begin{aligned} \text{in } (R, \gamma) : & (s_1, t_1) \xleftrightarrow{a_1} (s_2, t_2) \xleftrightarrow{a_2} \dots \xleftrightarrow{a_{n-1}} (s_n, t_n), \\ \text{in } mt X_1 : & s_1 \xleftrightarrow{a_1} s_2 \xleftrightarrow{a_2} \dots \xleftrightarrow{a_{n-1}} s_n, \\ \text{in } mt X_2 : & t_1 \xleftrightarrow{a_1} t_2 \xleftrightarrow{a_2} \dots \xleftrightarrow{a_{n-1}} t_n \text{ und} \\ \text{in } mt P : & u_1 \xleftrightarrow{a_1} u_2 \xleftrightarrow{a_2} \dots \xleftrightarrow{a_{n-1}} u_n. \end{aligned}$$

Nach Definition von R' gelten $(mt p_1)(u_j) = s_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, und $(mt p_2)(u_j) = t_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Da $mt m$ ein Morphismus in \mathbf{T}_{Akt} ist, gibt es eine Ableitung

$$\text{in } mt Q : (mt m)(u_1) \xleftrightarrow{a_1} (mt m)(u_2) \xleftrightarrow{a_2} \dots \xleftrightarrow{a_{n-1}} (mt m)(u_n).$$

Nach Bedingung B2 gibt es einen erreichbaren Zustand e in $mt Q$ und daher eine Ableitung

$$\text{in } mt Q : (mt m)(u_n) \xleftrightarrow{a_n} v_{n+1} \xleftrightarrow{a_{n+1}} \dots \xleftrightarrow{a_{n+k-1}} v_{n+k} = e.$$

Durch Kombination dieser beiden Ableitungen in $mt Q$ erhalten wir unter dem Morphismus $mt q_1$ und Anwenden der Gleichung $p_1 = q_1 \circ m$ eine Ableitung

$$\text{in } mt X_1 : s_1 \xleftrightarrow{a_1} s_2 \xleftrightarrow{a_2} \dots \xleftrightarrow{a_{n-1}} s_n \xleftrightarrow{a_n} (mt q_1)(v_{n+1}) \xleftrightarrow{a_{n+1}} \dots \xleftrightarrow{a_{n+k-1}} (mt q_1)(v_{n+k}).$$

Da (R, γ) eine AM-Bisimulation ist, gibt es Ableitungen

$$\begin{aligned} \text{in } (R, \gamma) : & (s_n, t_n) \xleftrightarrow{a_n} ((mt q_1)(v_{n+1}), t_{n+1}) \xleftrightarrow{a_{n+1}} \dots \xleftrightarrow{a_{n+k-1}} ((mt q_1)(v_{n+k}), t_{n+k}) \\ \text{in } mt X_2 : & t_1 \xleftrightarrow{a_1} t_2 \xleftrightarrow{a_2} \dots \xleftrightarrow{a_{n-1}} t_n \xleftrightarrow{a_n} t_{n+1} \xleftrightarrow{a_{n+1}} \dots \xleftrightarrow{a_{n+k-1}} t_{n+k} \end{aligned}$$

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

für Zustände $t_{n+1}, \dots, t_{n+k} \in T$. Daher gibt es nach Bedingung B3 einen Morphismus $q_2 : Q \rightarrow X_2$ mit $((mt q_2) \circ (mt m))(u_j) = t_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ und $(mt q_2)(v_{n+j}) = t_{n+j}$, $j = 1, 2, \dots, k$. Daraus folgern wir mit Bedingung B5, daß $q_2 \circ m = p_2$. Nach Konstruktion gilt $(q_1, q_2) \in R'$.

Es sei R' eine Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation zwischen zwei Objekten X_1 und X_2 , es gelte $mt X_1 = (S, s_1, \Leftrightarrow_1)$ und $mt X_2 = (T, t_1, \Leftrightarrow_2)$, es seien (A, α) und (B, β) die Coalgebren mit $\mathcal{T}_{(A, \alpha)} = (S, \Leftrightarrow_1)$ und $\mathcal{T}_{(B, \beta)} = (T, \Leftrightarrow_2)$.

Es sei P ein Objekt aus \mathbb{P} , e der erreichbare Zustand in $mt P$, X ein Objekt aus \mathbb{M} und $p : P \rightarrow X$ ein Pfad. $erreich(p, P, X) := (mt p)(e)$ bezeichnet das Bild des erreichbaren Zustands des Transitionssystems $mt P$ unter dem Morphismus $mt p$.

Wir definieren

$$R := \{(s, t) \mid \exists P \in \mathbb{P}, (p_1, p_2) \in R' : \\ p_1 : P \rightarrow X_1, p_2 : P \rightarrow X_2, \\ s = erreich(p_1, P, X_1), t = erreich(p_2, P, X_2)\}.$$

Es seien $(s, t), (s', t') \in R$, es seien P, Q Objekte in \mathbb{P} , $(p_1, p_2), (q_1, q_2) \in R'$ mit $s = erreich(p_1, P, X_1), t = erreich(p_2, P, X_2), s' = erreich(q_1, Q, X_1)$, und $t' = erreich(q_2, Q, X_2)$. Wir definieren

$$(a, s', t') \in \gamma(s, t)$$

gdw. es einen Morphismus $m : P \rightarrow Q$ gibt, so daß

- $p_1 = q_1 \circ m$,
- $p_2 = q_2 \circ m$ und
- $(mt m)(e) \xrightarrow{\ell} f$ ist eine Transition in $mt Q$, wobei e der erreichbare Zustand von $mt P$ und f der erreichbare Zustand von $mt Q$ ist.

Wir behaupten, daß die Coalgebra (R, γ) ein AM-Bisimulation zwischen (A, α) und (B, β) mit $(s_1, t_1) \in R$ ist.

Die Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation R' enthält das Paar (ι_1, ι_2) , wobei $\iota_i : I \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$, die eindeutig bestimmten Morphismen vom initialen Objekt I nach X_1 bzw. X_2 sind. Nach Bedingung B4 hat $mt I$ eine Ableitung der Form u_1 , wobei u_1 Anfangszustand und erreichbarer Zustand ist. Weiterhin gibt es nach Bedingung B4 Morphismen $p_i : I \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$, mit $p_1(u_1) = s_1$ und $p_2(u_1) = t_1$. Da I initial ist, folgt daraus $p_i = \iota_i$, $i = 1, 2$, und wir erhalten $(erreich(\iota_1, I, X_1), erreich(\iota_2, I, X_2)) = (s_1, t_1) \in R$.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Es gelte $(a, s') \in (\alpha \circ \pi_1)(s, t)$. Da $(s, t) \in R$, gibt es ein Objekt $P \in \mathbb{P}$ und Morphismen $p_1 : P \rightarrow X_1$, $p_2 : P \rightarrow X_2$ mit $s = \text{erreich}(p_1, P, X_1)$, $t = \text{erreich}(p_2, P, X_2)$ und $(p_1, p_2) \in R'$. Es sei

$$\text{in } mt P : u_1 \xleftrightarrow{a_1} u_2 \xleftrightarrow{a_2} \dots \xleftrightarrow{a_{n-1}} u_n$$

eine Ableitung vom Anfangszustand u_1 zum erreichbaren Zustand u_n . Dann ist

$$\text{in } (A, \alpha) : (mt p_1)(u_1) \xleftrightarrow{a_1} (mt p_1)(u_2) \xleftrightarrow{a_2} \dots \xleftrightarrow{a_{n-1}} (mt p_1)(u_n) = s$$

eine Ableitung für s . Ergänzen wir diese Ableitung mit $(a, s') \in \alpha(s)$, so erhalten wir

$$\text{in } (A, \alpha) : (mt p_1)(u_1) \xleftrightarrow{a_1} (mt p_1)(u_2) \xleftrightarrow{a_2} \dots \xleftrightarrow{a_{n-1}} s \xleftrightarrow{a} s'.$$

Nach Bedingung B3 gibt es ein Objekt Q in \mathbb{P} , so daß

$$\text{in } mt Q : v_1 \xleftrightarrow{a_1} v_2 \xleftrightarrow{a_2} \dots \xleftrightarrow{a_{n-1}} v_n \xleftrightarrow{a} v_{n+1}$$

eine Ableitung ist, wobei v_1 der Anfangszustand, v_{n+1} der erreichbare Zustand von $mt Q$ ist. Weiterhin gibt es nach Bedingung B3 einen Morphismus $m : P \rightarrow Q$ mit $(mt m)(u_j) = v_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, sowie einen Morphismus $q_1 : Q \rightarrow X_1$ mit $(mt q_1)(v_j) = (mt p_1)(u_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, und $(mt q_1)(v_{n+1}) = s'$. Nach Bedingung B5 folgt daraus $q_1 \circ m = p_1$. Da R' eine Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation ist, gibt es einen Morphismus $q_2 : Q \rightarrow X_2$ mit $q_2 \circ m = p_2$ und $(q_1, q_2) \in R'$. Daraus folgt, daß $(\text{erreich}(q_1, P, X_1), \text{erreich}(q_2, Q, X_2)) \in R$, wobei $s' = \text{erreich}(q_1, Q, X_1)$, und $(a, s', \text{erreich}(q_2, Q, X_2)) \in \gamma(s, t)$. Somit erhalten wir $(a, s') \in (F\pi_1 \circ \gamma)(s, t)$.

Es gelte nun $(a, s') \in (F\pi_1 \circ \gamma)(s, t)$. Dann gibt es ein $t' \in B$ mit $(a, s', t') \in \gamma(s, t)$. Nach Definition von R und γ erhalten wir: es gibt Objekte P und Q in \mathbb{P} , Morphismen $p_1 : P \rightarrow X_1$, $q_1 : Q \rightarrow X_1$ und einen Morphismus $m : P \rightarrow Q$, für die gilt: $s = \text{erreich}(p_1, P, X_1)$, $s' = \text{erreich}(q_1, Q, X_1)$, $p_1 = q_1 \circ m$, $(mt m)(e) \xleftrightarrow{a} f$ ist eine Transition in $mt Q$, wobei e der erreichbare Zustand von $mt P$ und f der erreichbare Zustand von $mt Q$ ist. Daraus folgt, weil $mt q_1$ ein Morphismus in \mathbf{T}_{Akt} ist: $s = (mt p_1)(e) = (mt q_1)((mt m)(e)) \xleftrightarrow{a} (mt q_1)(f) = s'$ in (A, α) und damit $(a, s') \in (\alpha \circ \pi_1)(s, t)$. ■

Wie wir in Theorem 4.2 gesehen haben, gilt für den Operator $T_{path-\mathbb{P}}$, daß vorwärts-rückwärts Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation und vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation unter Verwendung von $T_{path-\mathbb{P}}$ äquivalent sind. Weil vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation jedoch im Allgemeinen ein stärker unterscheidendes Konzept als vorwärts-rückwärts Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation ist, kann Theorem 4.7 nicht auf diesen Fall erweitert werden:

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Beispiel 4.8 (vorwärts-rückwärts Bisimulationen)

Wir betrachten die Kategorie \mathbf{T}_{Akt} mit der Pfadkategorie \mathbf{Bran} und wählen als Operator mt die Identität Id auf \mathbf{T}_{Akt} . Zunächst zeigen wir, daß Id verbindend ist:

Zu B1: Id ist ein Funktor.

Zu B2: Die Transitionssysteme aus \mathbf{Bran} haben einen Endzustand, der von allen Zuständen aus erreichbar ist.

Zu B3: Eine Ableitung $s_1 \xrightarrow{a_1} s_2 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} s_n$, $n \geq 1$, kann als Objekt P in \mathbf{Bran} aufgefaßt werden. Gibt es eine Ableitung $u_1 \xrightarrow{a_1} u_2 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} u_n$ in einem Transitionssystem X , wobei u_1 der Anfangszustand von X ist, so ist $p: P \rightarrow X$ mit $p(s_i) := u_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, der gesuchte Morphismus.

Zu B4: Transitionssysteme der Form $(\{s\}, s, \emptyset)$ erfüllen Bedingung B3.

Zu B5: Ist erfüllt, da mt als Identität gewählt ist.

Anhand der Transitionssysteme \mathcal{S} aus Abbildung 4 und \mathcal{T} aus Abbildung 2 zeigen wir: \mathcal{S} und \mathcal{T} sind vorwärts-rückwärts Pfad-**Bran**-bisimilar, aber es gibt keine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation (R, γ) zwischen \mathcal{S} und \mathcal{T} mit $(s_0, t_0) \in R$.

Zur vorwärts-rückwärts Pfad-**Bran**-Bisimulation: Wie wir in Abschnitt 4.1 gesehen haben, sind die Transitionssysteme $T_{\text{path-Bran}}(\mathcal{T})$ und $T_{\text{path-Bran}}(\mathcal{S})$ identisch. Da vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation reflexiv ist, sind mit Theorem 4.2 \mathcal{S} und \mathcal{T} vorwärts-rückwärts Pfad-**Bran**-bisimilar.

Zur vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation: Angenommen, (R, γ) wäre eine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation zwischen \mathcal{S} und \mathcal{T} mit $(s_0, t_0) \in R$. Als AM-Bisimulation muß (R, γ) den Zustand (t_3, t_3) enthalten. Der Zustand t_3 kann in \mathcal{T} sowohl mit Markierung a als auch mit Markierung b erreicht werden, hingegen wird in \mathcal{S} der Zustand t_3 nur mit Markierung b erreicht. Also kann (R, γ) keine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation sein.

4.3 Interpretation der Theoreme 4.2 und 4.7

Da der Operator $T_{\text{path-}\mathbb{P}}$ verbindend ist, können wir die Theoreme 4.2 und 4.7 zusammensetzen und erhalten:

Korollar 4.9 (AM-Bisimulationen zu verschiedenen Operatoren)

Es sei \mathbb{M} eine Kategorie von Modellen, \mathbb{P} eine darin ausgezeichnete kleine Unterkategorie von sogenannten Pfad-Objekten, I ein gemeinsames initiales Objekt von \mathbb{P}

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

und \mathbb{M} und mt ein verbindender Operator, der jedem Objekt X aus \mathbb{M} ein Transitionssystem $mt(X) = (S, s, \Leftrightarrow)$ zuordnet. Es seien X_1 und X_2 Objekte aus \mathbb{M} . Dann gilt:

Zwischen $mt(X_1) = (S, s_1, \Leftrightarrow)$ und $mt(X_2) = (T, t_1, \Leftrightarrow)$ gibt es eine AM-Bisimulation (R, γ) mit $(s_1, t_1) \in R$ gdw. es eine AM-Bisimulation $(\hat{R}, \hat{\gamma})$ zwischen $T_{path-\mathbb{P}}(X_1)$ und $T_{path-\mathbb{P}}(X_2)$ mit $(\iota_{X_1}, \iota_{X_2}) \in \hat{R}$ gibt, wobei ι_{X_1}, ι_{X_2} die eindeutig bestimmten Morphismen vom initialen Objekt I nach X_1 bzw. X_2 sind.

Der enge Zusammenhang zwischen den Theoremen 4.2 und 4.7 und Korollar 4.9 läßt sich auf verschiedene Weise interpretieren. Zum einen handelt es sich um Äquivalenzaussagen zwischen *abstrakten* Charakterisierungen von Bisimulation. Zum anderen können sie in Bezug auf das Modellieren einer *konkreten* Bisimulation als AM-Bisimulation bzw. Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation betrachtet werden. Wir wollen beide Ansätze im folgenden kurz ausführen.

Betrachten wir die Ergebnisse als Äquivalenzaussagen zwischen *abstrakten* Charakterisierungen von Bisimulation, so ergeben sich *Strukturaussagen über Operatoren*. Dabei setzen wir stets voraus, daß von einer Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation gesprochen werden kann, d.h. es ist eine Kategorie \mathbb{M} von Modellen gewählt, es ist eine Pfadkategorie \mathbb{P} in \mathbb{M} ausgezeichnet, \mathbb{P} und \mathbb{M} haben ein gemeinsames initiales Objekt I . In diesem Rahmen besagt

Theorem 4.2: Es gibt einen Operator, so daß die Begriffe (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation und (vorwärts-rückwärts) AM-Bisimulation übereinstimmen.

Theorem 4.7: Für alle verbindenden Operatoren sind die Begriffe Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation und AM-Bisimulation äquivalent. Theorem 4.2 ist ein Spezialfall dieses Ergebnisses, da der Operator $T_{path-\mathbb{P}}$ verbindend ist.

Korollar 4.9: Die AM-Bisimulationen in einer Kategorie von Transitionssystemen über einer beliebigen Menge von Aktionen sind äquivalent, sofern sie jeweils über einen verbindenden Operator zu derselben Pfadkategorie \mathbb{P} zustande kommen.

Wählen wir hingegen einen *konkreten* Bisimulationsbegriff auf einem Modell parallelen Rechnens, so können wir die Theoreme als *Übersetzungsmöglichkeit von Modellierungen* auffassen. Das Modell muß hierzu zunächst *nicht* in Form einer Kategorie vorliegen. Die Übersetzungsrichtung verläuft bei

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Theorem 4.2 von (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation nach (vorwärts-rückwärts) AM-Bisimulation. Seine Aussage ist:

Läßt sich ein konkreter Bisimulationsbegriff als (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation darstellen, so erhalten wir über den Operator $T_{path-\mathbb{P}}$ stets eine Modellierung als (vorwärts-rückwärts) AM-Bisimulation.

Theorem 4.7 von AM-Bisimulation nach Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation. Seine Aussage ist:

Läßt sich ein konkreter Bisimulationsbegriff mit einem Operator mt als AM-Bisimulation darstellen *und* läßt sich das Modell parallelen Rechnens derart als Kategorie \mathbb{M} mit einer Unterkategorie \mathbb{P} auffassen, daß der Operator mt verbindend ist, so erhalten wir eine Modellierung als Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation.

Korollar 4.9 von einer AM-Bisimulation mit einem verbindenden Operator mt nach einer AM-Bisimulation mit dem Operator $T_{path-\mathbb{P}}$ und umgekehrt. Fest gewählt seien eine Kategorie \mathbb{M} von Modellen, eine Pfadkategorie \mathbb{P} und ein initiales Objekt I . Dann erhalten wir als Aussage:

Ein konkreter Bisimulationsbegriff kann mit einem *verbindenden* Operator mt unter Nutzung von \mathbb{P} in einer Kategorie von Transitionssystemen über einer beliebigen Menge von Aktionen als AM-Bisimulation genau dann modelliert werden, wenn der Operator $T_{path-\mathbb{P}}$ diesen konkreten Bisimulationsbegriff modelliert.

Im letzteren Sinn werden wir die Theoreme in Kapitel 5 einsetzen, um konkrete Bisimulationsbegriffe innerhalb der abstrakten Charakterisierungen darzustellen.

4.4 Synopse der abstrakten Charakterisierungen

In diesem Abschnitt erweitern wir unseren Vergleich von Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation und AM-Bisimulation um den Begriff der \mathbb{P} -Bisimulation. Dazu zitieren wir zunächst ein Resultat aus [JNW94]. Dieses führt mit den Theoremen 4.2, 4.7 und Beispiel 4.8 zu einem Gesamtbild der verschiedenen abstrakten Charakterisierungen von Bisimulation.

Theorem 4.10 (\mathbb{P} -Bisimulation und Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation, [JNW94])

1. *Es sei \mathbb{M} eine Kategorie von Modellen, \mathbb{P} eine darin ausgezeichnete kleine Unterkategorie von sogenannten Pfad-Objekten, I ein gemeinsames initiales Objekt von \mathbb{P} und \mathbb{M} . Besteht zwischen Objekten X_1 und X_2 der Kategorie \mathbb{M} eine \mathbb{P} -Bisimulation, so sind X_1 und X_2 vorwärts-rückwärts Pfad- \mathbb{P} -bisimilar.*

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{P}\text{-Bisimulation} & & \\
\Downarrow \text{ (Theorem 4.10)} & & \\
\text{vorwärts-rückwärts Pfad-}\mathbb{P}\text{-Bisimulation} & \Rightarrow & \text{Pfad-}\mathbb{P}\text{-Bisimulation} \\
\Downarrow \text{ (Theorem 4.2)} & & \Downarrow \text{ (Theorem 4.2)} \\
\text{vorwärts-rückwärts AM-Bisim. } T_{\text{path-}\mathbb{P}} & \Rightarrow & \text{AM-Bisim. } T_{\text{path-}\mathbb{P}} \\
\Downarrow \text{ (Beispiel 4.8)} & & \Downarrow \text{ (Theorem 4.7)} \\
\text{v.-r. AM-Bisim. verb. Op. } T \neq T_{\text{path-}\mathbb{P}} & \Rightarrow & \text{AM-Bisim. verb. Op. } T \neq T_{\text{path-}\mathbb{P}}
\end{array}$$

Abbildung 29: Zusammenhänge zwischen den abstrakten Charakterisierungen von Bisimulation.

2. Es sei \mathbb{M} die Unterkategorie der Rooted Presheaves in der Kategorie $[\mathbb{P}^{op}, \mathbf{Set}]$. Rooted Presheaves X_1 und X_2 sind vorwärts-rückwärts Pfad- \mathbb{P} -bisimilar gdw. sie \mathbb{P} -bisimilar sind.

Abbildung 29 zeigt zusammenfassend, wie die Begriffe \mathbb{P} -Bisimulation, (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation und (vorwärts-rückwärts) AM-Bisimulation zusammenhängen. Ganz oben in Abbildung 29 finden wir den Begriff der \mathbb{P} -Bisimulation. Theorem 4.10 beschreibt eine Äquivalenz zwischen \mathbb{P} -Bisimulation und vorwärts-rückwärts Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation. Nach Definition ist jede vorwärts-rückwärts Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation eine Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation, ebenso ist jede vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation eine AM-Bisimulation. Theorem 4.2 zeigt, daß bei Wahl geeigneter Transitionssysteme durch den Operator $T_{\text{path-}\mathbb{P}}$ jede (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation zu einer (vorwärts-rückwärts) AM-Bisimulation äquivalent ist. AM-Bisimulation unter Verwendung verbindender Operatoren zu \mathbb{P} und Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation sind nach Theorem 4.7 äquivalent. Aus Beispiel 4.8 wissen wir, daß es verbindende Operatoren zu einer Pfadkategorie \mathbb{P} gibt, für die vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation und vorwärts-rückwärts Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation nicht übereinstimmen. Daher schließen wir in der letzten Zeile den Operator $T_{\text{path-}\mathbb{P}}$ aus, obwohl er verbindend ist. Es ist ein offenes Problem, ob vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation zu einem verbindenden Operator stets vorwärts-rückwärts Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation impliziert.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

5 Bisimulation auf Modellen parallelen Rechnens

Im Aufbau dieses Kapitels folgen wir der Struktur von Kapitel 2. Dort haben wir die branching time Modelle Transitionssysteme, Synchronisationsbäume, Ereignisstrukturen und Transitionssysteme mit Unabhängigkeit vorgestellt. Für jedes dieser Modelle studieren wir nun, ob sich konkrete Bisimulationen auf ihm mit den in Kapitel 3 vorgestellten abstrakten Charakterisierungen darstellen lassen. Dabei können wir häufig auf die Resultate aus Kapitel 4 zurückgreifen, um aus einer erfolgreichen Modellierung mit einer abstrakten Charakterisierung eine Darstellung mit einer anderen Charakterisierung zu gewinnen. Dies demonstriert die Anwendbarkeit der dort vorgestellten Theoreme.

Auf Transitionssystemen scheinen die abstrakten Charakterisierungen gleich flexibel zu sein. Sowohl die ursprüngliche Definition von Bisimulation, vergl. Definition 2.3, als auch der Begriff der trace-Äquivalenz lassen sich darstellen. Auch weitere Bisimulationsbegriffe können modelliert werden, wie der Blick in die Literatur zeigt.

Für Synchronisationsbäume werden zumeist keine gesonderten Bisimulationsbegriffe eingeführt. Synchronisationsbäume werden – in Bezug auf den Begriff Bisimulation – als Spezialfall von Transitionssystemen angesehen. Wir zeigen, daß auf Synchronisationsbäumen die Begriffe AM-Bisimulation und vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation übereinstimmen.

Unterschiede zwischen den abstrakten Charakterisierungen deuten sich beim Modellieren von Bisimulationen auf Ereignisstrukturen an. Während wir die ausgewählten Bisimulationen stets als AM-Bisimulation darstellen können, gelingt dies mit \mathbb{P} -Bisimulation und Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation nicht immer.

Schließlich zeigen wir, daß der Begriff der shp-Bisimulation auf Transitionssystemen mit Unabhängigkeit mit allen drei Charakterisierung dargestellt werden kann.

5.1 Transitionssysteme

In diesem Abschnitt diskutieren wir, wie verschiedene Äquivalenzbegriffe auf Transitionssystemen mit Hilfe der abstrakten Charakterisierungen von Bisimulation aus Kapitel 3 dargestellt werden können. Wir zeigen, daß Milners Begriff von Bisimulation von allen drei Charakterisierungen modelliert werden kann. Für den Begriff der trace-Äquivalenz erzielen wir dasselbe Resultat. Hinweise auf weitere Modellierungen von Äquivalenzbegriffen auf Transitionssystemen in der Literatur beschließen den Abschnitt.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

5.1.1 Bisimulation

Milners Begriff von Bisimulation auf Transitionssystemen, wie wir ihn in Definition 2.3 eingeführt haben, war Ausgangspunkt für alle hier untersuchten abstrakten Charakterisierungen von Bisimulation. Von daher ist es nicht verwunderlich, daß sich diese konkrete Bisimulation in allen Charakterisierungen besonders einfach modellieren läßt. Wir beweisen zunächst, daß AM-Bisimulation und Bisimulation übereinstimmen, zeigen daraufhin die Äquivalenz von AM-Bisimulation und **Bran**-Bisimulation und stellen schließlich mit Hilfe der Theoreme aus Kapitel 4 eine Reihe von äquivalenten Charakterisierungen zusammen.

Theorem 5.1 (Bisimulation und AM-Bisimulation)

Transitionssysteme \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 sind bisimilar gdw. sie AM-bisimilar sind.

Beweis: Es seien $\mathcal{T}_1 = (S_1, s_1, \Leftrightarrow)$, $\mathcal{T}_2 = (S_2, s_2, \Leftrightarrow)$ Transitionssysteme über *Akt*, (A, α) und (B, β) die Coalgebren mit $\mathcal{T}_{(A, \alpha)} = (S_1, \Leftrightarrow)$ und $\mathcal{T}_{(B, \beta)} = (S_2, \Leftrightarrow)$.

Es sei R eine Bisimulation zwischen \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 . Wir definieren für alle (x, y) , $(x', y') \in R$, $a \in \text{Akt}$

$$(a, x', y') \in \gamma(x, y) : \iff (a, x') \in \alpha(x), (a, y') \in \beta(y)$$

und behaupten, daß (R, γ) eine AM-Bisimulation zwischen (A, α) und (B, β) ist. Es gelte $(a, x') \in (\alpha \circ \pi_1)(x, y)$. Daraus folgt $(a, x') \in \alpha(x)$ und $(x, y) \in R$. Da R eine Bisimulation ist, gibt es ein $y' \in B$ mit $(a, y') \in \beta(y)$ und $(x', y') \in R$. Damit erhalten wir $(a, x', y') \in \gamma(x, y)$ und schließlich $(a, x') \in (F\pi_1 \circ \gamma)(x, y)$. Nach Lemma 3.7 gilt auch die andere Inklusion.

Es sei nun (R, γ) eine AM-Bisimulation zwischen (A, α) und (B, β) mit $(s_1, s_2) \in R$. Wir behaupten, daß R eine Bisimulation zwischen \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 ist. Nach Voraussetzung gilt $(s_1, s_2) \in R$. Es sei $(x, y) \in R$, es gelte $x \xrightarrow{e} x'$ in \mathcal{T}_1 . Da π_1 ein Homomorphismus ist, folgt daraus mit Lemma 3.6, Teil (ii), daß $(x, y) \xrightarrow{e} (x', y')$ eine Transition in (R, γ) ist für ein $y' \in B$. Daraus folgt $(x, y') \in R$. Da π_2 ein Homomorphismus ist, impliziert dies mit Lemma 3.6, Teil (i), daß $y \xrightarrow{e} y'$ in (B, β) . ■

Um die Äquivalenz zwischen AM-Bisimulation und **Bran**-Bisimulation auf Transitionssystemen zu zeigen, studieren wir zunächst den Zusammenhang zwischen Homomorphismen und **Bran**-offenen Morphismen. Dabei verwenden wir eine Charakterisierung der **Bran**-offenen Morphismen aus [JNW94].

Lemma 5.2 (Bran-offene Morphismen und Morphismen in Set_F)

Es seien $\mathcal{T}_1 = (S_1, s_1, \Leftrightarrow)$, $\mathcal{T}_2 = (S_2, s_2, \Leftrightarrow)$ Transitionssysteme aus \mathbf{T}_{Akt} .

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

1. [JNW94] Ein Morphisms $\sigma : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ ist **Bran**-offen gdw. für alle erreichbaren Zustände $s \in S_1$ gilt: Gibt es eine Transition $\sigma(s) \xrightarrow{g} u$ in \mathcal{T}_2 , so existiert eine Transition $s \xrightarrow{g} t$ in \mathcal{T}_1 und $\sigma(t) = u$ für ein $t \in S_1$.
2. Es seien (A, α) und (B, β) die Coalgebren mit $\mathcal{T}_{(A, \alpha)} = (S_1, \Leftrightarrow)$ und $\mathcal{T}_{(B, \beta)} = (S_2, \Leftrightarrow)$. Die Homomorphismen σ mit $\sigma(s_1) = s_2$ zwischen (A, α) und (B, β) in \mathbf{Set}_F sind **Bran**-offene Morphismen zwischen \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 in \mathbf{T}_{Akt} .

Beweis: Es sei σ ein Homomorphismus. Nach Voraussetzung gilt $\sigma(s_1) = s_2$. Aus Lemma 3.6, Teil (i), folgt, daß σ ein Morphismus in \mathbf{T}_{Akt} ist, Teil (ii) impliziert, daß σ **Bran**-offen ist. ■

Die Begriffe **Bran**-Bisimulation und AM-Bisimulation sind äquivalent, wie wir in Theorem 5.4 zeigen werden. Doch eignet sich nicht jedes Transitionssystem \mathcal{T} , von dem **Bran**-offene Morphismen f_1, f_2 in Transitionssysteme $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ ausgehen, als AM-Bisimulation (R, γ) zwischen den entsprechenden Coalgebren.

Beispiel 5.3 (Unterschied zwischen Bran- und AM-Bisimulation)

Es bezeichne \mathcal{T}_1 ein Transitionssystem mit Zustandsmenge $\{x\}$ und einer Transition $x \xrightarrow{g} x$. Wir setzen $\mathcal{T}_2 := \mathcal{T}_1$. Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ bezeichne \mathcal{S}_n das Transitionssystem aus n Zuständen $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, Anfangszustand x_1 und Übergangsrelation $x_i \xrightarrow{g} x_{i+1}$, $i = 1 \dots n \Leftrightarrow 1$, $x_n \xrightarrow{g} x_1$. Die Transitionssysteme \mathcal{S}_n sind für alle $n > 0$ **Bran**-Bisimulationen zwischen \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 , für $n \geq 2$ sind sie jedoch keine AM-Bisimulation.

Theorem 5.4 (Bran-Bisimulation und AM-Bisimulation)

Transitionssysteme \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 aus \mathbf{T}_{Akt} sind **Bran**-bisimilar gdw. sie AM-bisimilar sind.

Beweis: Es seien $\mathcal{T}_1 = (S_1, s_1, \Leftrightarrow)$, $\mathcal{T}_2 = (S_2, s_2, \Leftrightarrow)$ Transitionssysteme aus \mathbf{T}_{Akt} . Es seien (A, α) und (B, β) die Coalgebren mit $\mathcal{T}_{(A, \alpha)} = (S_1, \Leftrightarrow)$ und $\mathcal{T}_{(B, \beta)} = (S_2, \Leftrightarrow)$.

Es sei (R, γ) eine AM-Bisimulation zwischen (A, α) und (B, β) mit $(s_1, s_2) \in R$. Die Projektionen π_1 und π_2 von (R, γ) nach (A, α) bzw. (B, β) sind Homomorphismen in \mathbf{Set}_F und daher nach Lemma 5.2 **Bran**-offene Morphismen zwischen $\mathcal{T} := (R, (s_1, s_2), \Leftrightarrow)$ und \mathcal{T}_1 bzw. \mathcal{T}_2 in \mathbf{T}_{Akt} .

Es sei $\mathcal{T} = (S, s, \Leftrightarrow)$ eine **Bran**-Bisimulation zwischen \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 , es seien $f_i : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_i$, $i = 1, 2$, die dazugehörigen **Bran**-offenen Morphismen. Wir behaupten, daß (R, γ) eine AM-Bisimulation zwischen (A, α) und (B, β) mit $(s_1, s_2) \in R$ ist, wobei

$$R := \{(f_1(u), f_2(u)) \mid u \in S \text{ erreichbar}\} \text{ und}$$

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

$$(a, f_1(v), f_2(v)) \in \gamma(f_1(u), f_2(u)) : \iff u \overset{a}{\iff} v \text{ in } \mathcal{T}.$$

Da die Abbildungen f_i Morphismen in \mathbf{T}_{Akt} sind, weisen die Projektionen π_1 und π_2 von (R, γ) nach (A, α) bzw. (B, β) die Eigenschaft (i) aus Lemma 3.6 auf. Mit Lemma 5.2 folgt auch Eigenschaft (ii). ■

Korollar 5.5 (Bisimulation auf Transitionssystemen)

Für Transitionssysteme \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 aus \mathbf{T}_{Akt} sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 sind bisimilar.
2. \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 sind AM-bisimilar.
3. \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 sind **Bran**-bisimilar.
4. \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 sind Pfad-**Bran**-bisimilar.
5. \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 sind vorwärts-rückwärts Pfad-**Bran**-bisimilar.
6. Es gibt eine AM-Bisimulation (R, γ) zwischen $T_{\text{path-Bran}}(\mathcal{T}_1)$ und $T_{\text{path-Bran}}(\mathcal{T}_2)$ mit $(\iota_1, \iota_2) \in R$.
7. Es gibt eine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation (R, γ) zwischen $T_{\text{path-Bran}}(\mathcal{T}_1)$ und $T_{\text{path-Bran}}(\mathcal{T}_2)$ mit $(\iota_1, \iota_2) \in R$.

Beweis:

- 1 \Leftrightarrow 2 : Theorem 5.1.
- 2 \Leftrightarrow 3 : Theorem 5.4.
- 3 \Rightarrow 5 : Theorem 4.10.
- 5 \Rightarrow 4 : nach Definition.
- 4 \Leftrightarrow 2 : Theorem 4.7 mit der Identität als verbindendem Operator, vergleiche Beispiel 4.8.
- 4 \Leftrightarrow 6 : Theorem 4.2.
- 5 \Leftrightarrow 7 : Theorem 4.2. ■

Korollar 5.6 (vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation)

Sind Transitionssysteme \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 aus \mathbf{T}_{Akt} vorwärts-rückwärts AM-bisimilar, so sind sie **Bran**-bisimilar. Die Umkehrung dieser Aussage gilt im allgemeinen nicht.

Beweis: Korollar 5.5 und Beispiel 4.8. ■

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

5.1.2 Trace-Äquivalenz

In diesem Abschnitt greifen wir den Begriff der trace-Äquivalenz noch einmal auf. Wie wir in Abschnitt 2.5 gesehen haben, stimmen trace-Äquivalenz und Bisimulation für deterministische Transitionssysteme überein. Diesen Zusammenhang wollen wir nutzen, um trace-Äquivalenz für Transitionssysteme mit den abstrakten Charakterisierungen von Bisimulation zu modellieren. Im Fall von AM-Bisimulation setzen wir diese Beobachtung um, indem wir einen Operator T_{det} einführen, welcher einem Transitionssystem ein „äquivalentes“ deterministisches Transitionssystem zuordnet. Für \mathbb{P} -Bisimulation und Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation hingegen definieren wir eine neue Kategorie von Transitionssystemen \mathbf{dT}_{Akt} . In dieser Kategorie sind die Morphismen zwischen zwei Transitionssystemen \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 gerade die Morphismen, die es in \mathbf{T}_{Akt} zwischen den deterministischen Transitionssystemen $T_{det}(\mathcal{T}_1)$ und $T_{det}(\mathcal{T}_2)$ gibt.

Definition 5.7 (Operator T_{det} , Kategorie \mathbf{dT}_{Akt})

1. Es sei $\mathcal{T} = (S, i, \Leftrightarrow)$ ein Transitionssystem über Akt. $T_{det}(\mathcal{T}) := (S_d, \{i\}, \Leftrightarrow_d)$ ordnet \mathcal{T} ein deterministisches Transitionssystem zu. Dazu definieren wir für nichtleere Mengen $X, Y \subseteq S$:

$$X \xrightarrow{g} Y : \iff Y = \{y \in S \mid \exists x \in X : x \xrightarrow{g} y\}.$$

Die Menge S_d ist definiert als die kleinste Teilmenge von $\mathcal{P}(S)$, die abgeschlossen ist unter:

- (i) $\{i\} \in S_d$ und
- (ii) falls $X \in S_d$ und $X \xrightarrow{g} Y$, dann gilt auch $Y \in S_d$.

Die Übergangsrelation von $T_{det}(\mathcal{T})$ definieren wir als $\Leftrightarrow_d := \Leftrightarrow \cap (S_d \times Akt \times S_d)$.

2. Es sei U eine „universelle“ Menge von Zuständen. Die Kategorie \mathbf{dT}_{Akt} [CN95] hat als Objekte Transitionssysteme $\mathcal{T} = (S, s, \Leftrightarrow)$ über Akt mit $S \subseteq U$.

Es seien $\mathcal{S} = (S, s_1, \Leftrightarrow)$ und $\mathcal{T} = (T, t_1, \Leftrightarrow)$ Objekte aus \mathbf{dT}_{Akt} . Ein Morphismus $\sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{dT}_{Akt}}(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ ist eine (totale) Funktion $\sigma : S_d \rightarrow T_d$, für die gilt: $\sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{T}_{Akt}}(T_{det}(\mathcal{S}), T_{det}(\mathcal{T}))$, d.h.:

- (a) $\sigma(\{s_1\}) = \{t_1\}$, und
- (b) $\forall X, X' \in S_d, a \in Akt : X \xrightarrow{a} X' \Rightarrow \sigma(X) \xrightarrow{a} \sigma(X')$.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Mit **dBran** bezeichnen wir die volle Unterkategorie von \mathbf{dT}_{Akt} , deren Objekte die Transitionssysteme von **Bran** sind, d.h. Transitionssysteme $\mathcal{T} = (S, s, \Leftrightarrow)$, in denen S endlich ist und für alle $t \in S$ gilt: $s \Leftrightarrow^* t$ und \Leftrightarrow^* ist eine Totalordnung auf S .

Korollar 5.8 (Trace-Äquivalenz auf Transitionssystemen)

Für Transitionssysteme \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 aus \mathbf{T}_{Akt} sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 sind trace-äquivalent.
2. \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 sind **dBran**-bisimilar.
3. $T_{det}(\mathcal{T}_1)$ und $T_{det}(\mathcal{T}_2)$ sind AM-bisimilar.
4. $T_{det}(\mathcal{T}_1)$ und $T_{det}(\mathcal{T}_2)$ sind Pfad-**Bran**-bisimilar.

Beweis: [CN95] zeigen die Äquivalenz von 1. und 2. Da für die Transitionssysteme \mathcal{T} und $T_{det}(\mathcal{T})$ gilt, daß $Lan(\mathcal{T}) = Lan(T_{det}(\mathcal{T}))$, und $T_{det}(\mathcal{T}_1)$ und $T_{det}(\mathcal{T}_2)$ deterministische Transitionssysteme sind, folgt die Äquivalenz von 1. und 3. aus den Theoremen 2.13 und 5.1. Korollar 5.5 beweist die Äquivalenz von 3. und 4. ■

5.1.3 Modellierung weiterer Bisimulationsbegriffe

In der Literatur sind weitere Modellierungen von Bisimulationsbegriffen auf Transitionssystemen zu finden. Für die von Milner eingeführte *schwache Bisimulation*, vergleiche [Mil89], welche die sogenannte stille Aktion τ in Transitionssystemen besonders behandelt, geben [CN95] eine Charakterisierung als \mathbb{P} -Bisimulation und [Acz94] als AM-Bisimulation. Den Begriff der *probabilistischen Bisimulation* auf der Klasse der probabilistischen Transitionssysteme modellieren [CN95] als \mathbb{P} -Bisimulation, [VR97] als F -Bisimulation.

5.2 Synchronisationsbäume

Wie wir in Beispiel 4.8 gesehen haben, sind vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation und AM-Bisimulation auf Transitionssystemen unterschiedliche Konzepte. Im Fall von Synchronisationsbäumen fallen die beiden Begriffe jedoch zusammen.

Theorem 5.9 (AM-Bisimulation auf Synchronisationsbäumen)

Sind Synchronisationsbäume \mathcal{S} und \mathcal{T} AM-bisimilar, so sind sie auch vorwärts-rückwärts AM-bisimilar.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Beweis: Es seien $\mathcal{S} = (S, s_0, \Leftrightarrow)$ und $\mathcal{T} = (T, t_0, \Leftrightarrow)$ Synchronisationsbäume über Akt , es seien (A, α) und (B, β) die Coalgebren mit $\mathcal{T}_{(A, \alpha)} = (S, \Leftrightarrow)$ und $\mathcal{T}_{(B, \beta)} = (T, \Leftrightarrow)$, es sei (R, γ) eine AM-Bisimulation zwischen (A, α) und (B, β) mit $(s_0, t_0) \in R$.

Unter Verwendung von (R, γ) definieren wir eine neue AM-Bisimulation $(\hat{R}, \hat{\gamma})$ zwischen (A, α) und (B, β) . Es sei

$$\begin{aligned} R_0 &:= \{s_0, t_0\}, \\ R_{i+1} &:= \{(s', t') \in R \mid \exists (s, t) \in R_i, \exists a \in Akt : s \xrightarrow{a} s', t \xrightarrow{a} t'\}, \quad i \geq 0, \\ \hat{R} &:= \bigcup_{i \geq 0} R_i. \end{aligned}$$

Für alle $(s', t'), (s, t) \in \hat{R}$ und alle Markierungen $a \in Akt$ definieren wir

$$(a, s', t') \in \hat{\gamma}(s, t) : \iff s \xrightarrow{a} s' \text{ in } (A, \alpha) \text{ und } t \xrightarrow{a} t' \text{ in } (B, \beta).$$

Offensichtlich gilt $\hat{R} \subseteq R$.

Zunächst weisen wir nach, daß auch $(\hat{R}, \hat{\gamma})$ eine AM-Bisimulation ist. Es gelte $(a, s') \in (\alpha \circ \pi_1)(s, t)$. Aus $(s, t) \in \hat{R}$ folgt $(s, t) \in R$. Da (R, γ) nach Voraussetzung eine AM-Bisimulation ist, erhalten wir $(a, s') \in (F\pi_1 \circ \gamma)(s, t)$. Daher gibt es ein $t' \in B$ mit der Eigenschaft $(a, s', t') \in \gamma(s, t)$. Also enthält (B, β) die Transition $t \xrightarrow{a} t'$. Daraus folgern wir $(s', t') \in \hat{R}$ und $(a, s', t') \in \hat{\gamma}(s, t)$ und erhalten schließlich $(a, s') \in (F\pi_1 \circ \hat{\gamma})(s, t)$. Es gelte nun $(a, s') \in (F\pi_1 \circ \hat{\gamma})(s, t)$. Nach Definition von $\hat{\gamma}$ folgt daraus unmittelbar $(a, s') \in \alpha(s)$. Demzufolge gilt $(a, s') \in (\alpha \circ \pi_1)(s, t)$.

Um zu zeigen, daß $(\hat{R}, \hat{\gamma})$ eine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation ist, sei $(a, s) \in (\alpha^- \circ \pi_1)(s', t')$. Daraus folgt, daß es eine Transition $s \xrightarrow{a} s'$ in \mathcal{S} gibt. Demnach ist $s' \neq s_0$ und nach Definition von \hat{R} wissen wir ebenso $t' \neq t_0$. Da \mathcal{T} ein Synchronisationsbaum ist, gibt es einen eindeutig bestimmten Vorgänger t von t' mit $t \xrightarrow{a} t'$. Ebenso gilt für \mathcal{S} , daß $s \xrightarrow{a} s'$ die einzige nach s' führende Transition ist. Andererseits wissen wir, daß $(s', t') \in \hat{R}$. Aus der Definition von \hat{R} folgt $a = a'$ und daher $(a, s', t') \in \hat{\gamma}(s, t)$. Damit erhalten wir $(a, s) \in (F\pi_1 \circ \hat{\gamma}^-)(s', t')$. Nach Lemma 3.7 ist auch die andere Inklusion erfüllt. ■

5.3 Ereignisstrukturen

Auf Ereignisstrukturen ist eine Vielzahl von Bisimulationsbegriffen diskutiert worden, siehe z.B. [GG89, GG90, Vog90, LG91, Che92, GKP92, Vog93, MP97]. Dementsprechend nimmt das Modellieren von Bisimulationen auf Ereignisstrukturen mit den

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

abstrakten Charakterisierungen einen breiten Raum in dieser Arbeit ein. Naturgemäß kann bei dieser Untersuchung keine Vollständigkeit erreicht werden.

Wir führen in Abschnitt 5.3.1 einige ausgewählte Bisimulationsbegriffe auf Ereignisstrukturen ein. Diese modellieren wir in Abschnitt 5.3.2 als AM-Bisimulation. In Abschnitt 5.3.3 versuchen wir, durch Wahl geeigneter Pfad-Kategorien \mathbb{P} die konkreten Bisimulationen als \mathbb{P} -Bisimulation bzw. (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation darzustellen. Dies wird nicht immer gelingen. Abschnitt 5.3.4 stellt abschließend die erfolgreichen Modellierungen zusammen.

5.3.1 Definition von Bisimulationen

In diesem Abschnitt führen wir die Begriffe interleaving Bisimulation, bf-Bisimulation, step Bisimulation, pomset Bisimulation, whp-, hp- und shp-Bisimulation auf Ereignisstrukturen ein. Die Begriffe hp- und shp-Bisimulation definieren wir zusätzlich für Ereignisstrukturen mit Konsistenzrelation, um beim Modellieren mit Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation ein Ergebnis von [JNW94] verwenden zu können. Das Vorgehen ist in beiden Fällen identisch: Zunächst führen wir verschiedene Transitionen zwischen den Konfigurationen einer Ereignisstruktur (mit Konsistenzmenge) ein. Darauf aufbauend können die verschiedenen Bisimulationen definiert werden.

Bisimulationen auf Ereignisstrukturen

Es sei $\mathcal{E} = (E, \leq, \sharp, l)$ eine Ereignisstruktur über Akt , es seien $X, X' \in Konf(\mathcal{E})$ Konfigurationen von \mathcal{E} . Wir schreiben

$$X \Leftrightarrow X', \text{ wenn } X \subseteq X'.$$

$$X \xrightarrow{\ell} X', \text{ wenn } a \in Akt, X \subseteq X', X' \setminus X = \{e\}, l(e) = a.$$

$$X \xrightarrow{M} X', \text{ wenn } M \in \mathbb{N}_0^{Akt}, X \subseteq X', \forall e, f \in X' \setminus X : e \neq f \Rightarrow e \text{ cof } f \text{ und} \\ \forall a \in Akt : M(a) = |\{e \in X' \setminus X \mid l(e) = a\}|.$$

$$X \xrightarrow{p} X', \text{ wenn } p \in [\mathbf{Pos}], X \subseteq X' \text{ und } p = [X' \setminus X].$$

Es seien $\mathcal{E} = (E, \leq_E, \sharp_E, l_E)$, $\mathcal{F} = (F, \leq_F, \sharp_F, l_F)$ Ereignisstrukturen über Akt . Eine Relation $R \subseteq Konf(\mathcal{E}) \times Konf(\mathcal{F})$ mit $(\emptyset, \emptyset) \in R$ heißt

interleaving Bisimulation, wenn für alle $(X, Y) \in R$, $a \in Akt$ gilt:

- gibt es eine Transition $X \xrightarrow{\ell} X'$ in \mathcal{E} , so gibt es eine Transition $Y \xrightarrow{\ell} Y'$ in \mathcal{F} für eine Konfiguration $Y' \in Konf(\mathcal{F})$ mit $(X', Y') \in R$, und

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

- gibt es eine Transition $Y \xleftrightarrow{g} Y'$ in \mathcal{F} , so gibt es eine Transition $X \xleftrightarrow{g} X'$ in \mathcal{E} für eine Konfiguration $X' \in \text{Konf}(\mathcal{E})$ mit $(X', Y') \in R$.

bf-Bisimulation (backward-forward bisimulation, [GKP92]), wenn sie eine interleaving Bisimulation ist und für alle $(X', Y') \in R$, $a \in \text{Akt}$ gilt:

- gibt es eine Transition $X \xleftrightarrow{a} X'$ in \mathcal{E} , so gibt es eine Transition $Y \xleftrightarrow{a} Y'$ in \mathcal{F} für eine Konfiguration $Y \in \text{Konf}(\mathcal{F})$ mit $(X, Y) \in R$, und
- gibt es eine Transition $Y \xleftrightarrow{a} Y'$ in \mathcal{F} , so gibt es eine Transition $X \xleftrightarrow{a} X'$ in \mathcal{E} für eine Konfiguration $X \in \text{Konf}(\mathcal{E})$ mit $(X, Y) \in R$.

step Bisimulation, wenn für alle $(X, Y) \in R$, $M \in \mathbb{N}_0^{\text{Akt}}$ gilt:

- gibt es eine Transition $X \xleftrightarrow{M} X'$ in \mathcal{E} , so gibt es eine Transition $Y \xleftrightarrow{M} Y'$ in \mathcal{F} für eine Konfiguration $Y' \in \text{Konf}(\mathcal{F})$ mit $(X', Y') \in R$, und
- gibt es eine Transition $Y \xleftrightarrow{M} Y'$ in \mathcal{F} so gibt es eine Transition $X \xleftrightarrow{M} X'$ in \mathcal{E} für eine Konfiguration $X' \in \text{Konf}(\mathcal{E})$ mit $(X', Y') \in R$.

pomset Bisimulation, wenn für alle $(X, Y) \in R$, $p \in [\mathbf{Pos}]$ gilt:

- gibt es eine Transition $X \xleftrightarrow{p} X'$ in \mathcal{E} so gibt es eine Transition $Y \xleftrightarrow{p} Y'$ in \mathcal{F} für eine Konfiguration $Y' \in \text{Konf}(\mathcal{F})$ mit $(X', Y') \in R$, und
- gibt es eine Transition $Y \xleftrightarrow{p} Y'$ in \mathcal{F} , so gibt es eine Transition $X \xleftrightarrow{p} X'$ in \mathcal{E} für eine Konfiguration $X' \in \text{Konf}(\mathcal{E})$ mit $(X', Y') \in R$.

whp-Bisimulation (weak history preserving bisimulation, [GKP92]) wenn für alle $(X, Y) \in R$ gilt:

- $(X, \leq_E \cap (X \times X), \emptyset, l_{E|X})$ und $(Y, \leq_F \cap (Y \times Y), \emptyset, l_{F|Y})$ sind isomorph,
- gibt es eine Transition $X \Leftrightarrow X'$ in \mathcal{E} , so gibt es eine Transition $Y \Leftrightarrow Y'$ in \mathcal{F} für eine Konfiguration $Y' \in \text{Konf}(\mathcal{F})$ mit $(X', Y') \in R$, und
- gibt es eine Transition $Y \Leftrightarrow Y'$ in \mathcal{F} , so gibt es eine Transition $X \Leftrightarrow X'$ in \mathcal{E} für eine Konfiguration $X' \in \text{Konf}(\mathcal{E})$ mit $(X', Y') \in R$.

Eine Menge R von Tripeln (X, Y, η) , wobei

$$X \in \text{Konf}(\mathcal{E}), Y \in \text{Konf}(\mathcal{F}) \text{ und}$$

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

$\eta : X = (X, \leq_E \cap (X \times X), \emptyset, l_{E|X}) \rightarrow Y = (Y, \leq_F \cap (Y \times Y), \emptyset, l_{F|Y})$ ein Isomorphismus ist,

mit $(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in R$ heißt

hp-Bisimulation[GG89] (history preserving bisimulation), wenn für alle $(X, Y, \eta) \in R$ gilt:

- gibt es eine Transition $X \Leftrightarrow X'$ in \mathcal{E} , so gibt es eine Transition $Y \Leftrightarrow Y'$ in \mathcal{F} für eine Konfiguration $Y' \in \text{Konf}(\mathcal{F})$ und eine Abbildung $\eta' : X' \rightarrow Y'$ mit $(X', Y', \eta') \in R$ und $\eta'_{|X} = \eta$, und
- gibt es eine Transition $Y \Leftrightarrow Y'$ in \mathcal{F} , so gibt es eine Transition $X \Leftrightarrow X'$ in \mathcal{E} für eine Konfiguration $X' \in \text{Konf}(\mathcal{E})$ und eine Abbildung $\eta' : X' \rightarrow Y'$ mit $(X', Y', \eta') \in R$ und $\eta'_{|X} = \eta$.

shp-Bisimulation (strong history preserving bisimulation, [JNW94]), wenn R eine hp-Bisimulation ist und für alle $(X', Y', f') \in R$ gilt:

- gibt es eine Transition $X \Leftrightarrow X'$ in \mathcal{E} , so gibt es eine Konfiguration $Y \in \text{Konf}(\mathcal{F})$ und eine Abbildung $\eta' : X \rightarrow Y$ mit $(X', Y', \eta') \in R$ und $\eta'_{|X} = \eta$, und
- gibt es eine Transition $Y \Leftrightarrow Y'$ in \mathcal{F} , so gibt eine Konfiguration $X \in \text{Konf}(\mathcal{E})$ und eine Abbildung $\eta' : X' \rightarrow Y'$ mit $(X', Y', \eta') \in R$ und $\eta'_{|X} = \eta$.

Über den Zusammenhang zwischen diesen Bisimulationen finden sich folgende Aussagen in der Literatur:

1. shp \Rightarrow hp \Rightarrow pomset \Rightarrow step \Rightarrow interleaving.
Die Umkehrung dieser Implikationen gilt nicht.
2. whp-Bisimulation und pomset Bisimulation sind nicht vergleichbar.
3. Für Ereignisstrukturen ohne auto-concurrency stimmen whp- und hp-Bisimulation überein.
4. Für endlich verzweigte Ereignisstrukturen ohne auto-concurrency gilt: bf \Rightarrow hp.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Bemerkung 5.10 (Alternative Definition von hp-Bisimulation)

Verwendet man in der Definition von (shp-) hp-Bisimulation auf Ereignisstrukturen die Relation $\overset{g}{\Leftrightarrow}$ anstelle von \Leftrightarrow , erhält man einen äquivalenten Begriff:

Gibt es in einer Ereignisstruktur eine Transition der Form $X \overset{g}{\Leftrightarrow} X'$, so gibt es auch eine Transition der Form $X \Leftrightarrow X'$. Damit ist klar, daß jede (shp-) hp-Bisimulation unter Verwendung von \Leftrightarrow als Übergangsrelation eine (shp-) hp-Bisimulation unter Verwendung von $\overset{g}{\Leftrightarrow}$ als Übergangsrelation ist.

Nun zeigen wir, daß jede hp-Bisimulation bezüglich $\overset{g}{\Leftrightarrow}$ eine hp-Bisimulation bezüglich \Leftrightarrow ist. Es sei R eine hp-Bisimulation unter Verwendung von $\overset{g}{\Leftrightarrow}$ als Übergangsrelation zwischen Ereignisstrukturen $\mathcal{E} = (\mathcal{E}, \leq_E, \sharp_E, l_E)$ und \mathcal{F} , es gelte $(X, Y, \eta) \in R$, es sei $X \Leftrightarrow X'$ eine Transition in \mathcal{E} . Gilt $X = X'$, so wählen wir $Y' := Y$, $\eta' := \eta$ und erhalten: $Y \Leftrightarrow Y'$ in \mathcal{F} und $(X', Y', \eta') \in R$. Gilt hingegen $X \neq X'$, so definieren wir $\hat{X} := X' \setminus X$ und $\leq := \leq_E \cap (\hat{X} \times \hat{X})$. Da X' endlich ist, ist auch \hat{X} endlich, definiere $n := |\hat{X}|$. Es sei \leq' eine Linearisierung von \leq . Dann gibt es eine Ableitung

$$X \overset{l_E(e_1)}{\overset{g}{\Leftrightarrow}} X \cup \{e_1\} \overset{l_E(e_2)}{\overset{g}{\Leftrightarrow}} \dots \overset{l_E(e_n)}{\overset{g}{\Leftrightarrow}} X \cup \hat{X} = X'.$$

in \mathcal{E} , wobei $\hat{X} = \{e_1, \dots, e_n\}$ und $e_i \leq' e_j$ für $i \leq j$. Wir definieren $X_i := X \cup \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ für $0 \leq i \leq n$. Da R eine hp-Bisimulation unter Verwendung von $\overset{g}{\Leftrightarrow}$ als Übergangsrelation ist, gibt es Konfigurationen $Y_0, Y_1, \dots, Y_n \in \text{Konf}(\mathcal{F})$ und Isomorphismen $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$, für die gilt: $Y_0 = Y$, $\eta_0 = \eta$,

$$Y = Y_0 \overset{l_E(e_1)}{\overset{g}{\Leftrightarrow}} Y_1 \overset{l_E(e_2)}{\overset{g}{\Leftrightarrow}} \dots \overset{l_E(e_n)}{\overset{g}{\Leftrightarrow}} Y_n =: Y'$$

ist eine Ableitung in \mathcal{F} , $(X_i, Y_i, \eta_i) \in R$ für $0 \leq i \leq n$ und $\eta_{i|_{X_{i-1}}} = \eta_{i-1}$ für $1 \leq i \leq n$. Daraus folgt $Y \Leftrightarrow Y'$, $\eta_{n|_X} = \eta_0 = \eta$ und $(X', Y', \eta_n) \in R$. Der Beweis für den Fall der shp-Bisimulation verläuft analog.

Bisimulationen auf Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge

Für Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge führen wir die Begriffe hp-Bisimulation und shp-Bisimulation ein. In Abschnitt 5.3.3 werden wir diskutieren, wie diese Bisimulationen auf Ereignisstrukturen und Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge zusammenhängen.

Es sei $\mathcal{E} = (E, \leq, Km, l)$ eine Ereignisstruktur mit Konsistenzmenge über *Akt*, es seien $X, X' \in \text{Konf}(\mathcal{E})$ Konfigurationen von \mathcal{E} . Wir schreiben

$$X \Leftrightarrow X', \text{ wenn } X \subseteq X'.$$

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

$X \xleftrightarrow{g} X'$, wenn $a \in Akt$, $X \subseteq X'$, $X' \setminus X = \{e\}$, $l(e) = a$.

Es seien $\mathcal{E} = (E, \leq_E, Km_E, l_E)$, $\mathcal{F} = (F, \leq_F, Km_F, l_F)$ Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge über Akt . Eine Menge R von Tripeln (X, Y, η) , wobei

$X \in Konf(\mathcal{E})$, $Y \in Konf(\mathcal{F})$ und

$\eta : (X, \leq_E \cap (X \times X), \mathcal{P}_{endl}(X), l_{E|X}) \rightarrow (Y, \leq_F \cap (Y \times Y), \mathcal{P}_{endl}(Y), l_{F|Y})$ ein Isomorphismus ist,

mit $(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in R$ heißt

hp-Bisimulation (history preserving bisimulation), wenn für alle $(X, Y, \eta) \in R$, $a \in Akt$ gilt:

- gibt es eine Transition $X \xleftrightarrow{g} X'$ in \mathcal{E} , so gibt es eine Transition $Y \xleftrightarrow{g} Y'$ in \mathcal{F} für eine Konfiguration $Y' \in Konf(\mathcal{F})$ und eine Abbildung $\eta' : X' \rightarrow Y'$ mit $(X', Y', \eta') \in R$ und $\eta'_{|X} = \eta$, und
- gibt es eine Transition $Y \xleftrightarrow{g} Y'$ in \mathcal{F} , so gibt es eine Transition $X \xleftrightarrow{g} X'$ in \mathcal{E} für eine Konfiguration $X' \in Konf(\mathcal{E})$ und eine Abbildung $\eta' : X' \rightarrow Y'$ mit $(X', Y', \eta') \in R$ und $\eta'_{|X} = \eta$.

shp-Bisimulation (strong history preserving bisimulation, [JNW94]), wenn R eine hp-Bisimulation ist und für alle $(X', Y', f') \in R$ gilt:

- gibt es eine Transition $X \xleftrightarrow{g} X'$ in \mathcal{E} , so gibt es eine Konfiguration $Y \in Konf(\mathcal{F})$ und eine Abbildung $\eta' : X \rightarrow Y$ mit $(X', Y', \eta') \in R$ und $\eta'_{|X} = \eta$, und
- gibt es eine Transition $Y \xleftrightarrow{g} Y'$ in \mathcal{F} , so gibt eine Konfiguration $X \in Konf(\mathcal{E})$ und eine Abbildung $\eta' : X' \rightarrow Y'$ mit $(X', Y', \eta') \in R$ und $\eta'_{|X} = \eta$.

Es macht keinen Unterschied, ob wir in der Definition von hp- und shp-Bisimulation auf Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge nur endliche Konfigurationen betrachten oder auch unendliche Konfigurationen verwenden:

1. Geben wir eine Menge R von Tripeln an, die den aufgeführten Bedingungen genügt, so sind die Ereignisstrukturen hp- bzw. shp-bisimilar, unabhängig davon, ob die Konfigurationen X und Y der Tripel (X, Y, η) stets endlich sind oder nicht.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

2. Sind andererseits Ereignisstrukturen \mathcal{E} und \mathcal{F} hp bzw. shp-bisimilar, so gibt es eine Relation R , welche den angegebenen Bedingungen genügt. Die Menge

$$\hat{R} := \{(X, Y, \eta) \mid X, Y \text{ endlich}\}$$

ist dann auch eine hp bzw. shp-Bisimulation.

Dieser Zusammenhang liegt in der Asymmetrie der Definition von hp- und shp-Bisimulation begründet: Bei der „Vergrößerung“ von Konfigurationen im Fall der hp-Bisimulation verwenden wir die Relation $\overset{g}{\leftarrow\rightarrow}$, welche eine Konfiguration nur um ein Element vergrößert, nur bei der „Verkleinerung“ im Fall der shp-Bisimulation setzen wir die Relation \leftrightarrow ein, welche Konfigurationen mit beliebigem Größenunterschied verbinden kann.

5.3.2 Modellierungen mit AM-Bisimulation

Die verschiedenen Bisimulationen auf Ereignisstrukturen modellieren wir als AM-Bisimulation, indem wir geeignete Operatoren T angeben, welche einer Ereignisstruktur ein Transitionssystem zuordnen.

Für interleaving, step und pomset Bisimulation definieren wir Operatoren T_{int} , T_{step} und T_{pom} . Die Wahl dieser Operatoren ist naheliegend und der Beweis einfach, daß die jeweilige AM-Bisimulation den gewünschten Begriff darstellt. bf-Bisimulation modellieren wir mit dem Operator T_{int} und vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation. Schwieriger ist es, für whp-, hp- und shp-Bisimulation entsprechende Operatoren zu finden. Das Problem besteht darin, im Rahmen von AM-Bisimulation die Existenz der verschiedenen Isomorphismen zu modellieren. Der Operator T_{whp} für whp-Bisimulation entsteht durch ein Variation des Operators T_{pom} . Für hp- und shp-Bisimulation verwenden wir den Operator T_{hp} , der als Zustände Derivationen anstelle von Konfigurationen nutzt.

Da auf Transitionssystemen die Begriffe AM-Bisimulation und vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation verschieden sind, vergl. Beispiel 4.8, erhalten wir zu jedem der Operatoren T auf Ereignisstrukturen zwei voneinander verschiedene Bisimulationen. Zu dem Operator T_{int} sind dies interleaving Bisimulation und bf-Bisimulation, hp- und shp-Bisimulation zu dem Operator T_{hp} . Die vorwärts-rückwärts AM-Bisimulationen zu den Operatoren T_{step} und T_{pom} hingegen sind neue Bisimulationsbegriffe auf Ereignisstrukturen. Es ist eine offene Frage, ob für den Operator T_{whp} die Begriffe AM-Bisimulation und vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation übereinstimmen oder verschieden sind.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Es sei Akt eine Menge von Aktionen. Relativ zu dieser Menge führen wir Operatoren T_* ein, $*$ $\in \{int, step, pom, whp, hp\}$, welche einer Ereignisstruktur $\mathcal{E} = (E, \leq, \sharp, l)$ aus \mathbf{E}_{Akt} ein Transitionssystem über einer Menge von Markierungen L zuordnen, wobei L eine der Mengen $Akt, \mathbb{N}_0^{Akt}, [\mathbf{Pos}], Der_{Akt}$ ist.

$T_{int}(\mathcal{E}) := (Konf(\mathcal{E}), \Leftrightarrow_{int}, \emptyset)$ ist ein Transitionssystem über Akt wobei $X \xrightarrow{a}_{int} X'$, wenn $X \subseteq X'$, $X' \setminus X = \{e\}$ und $l(e) = a$.

$T_{step}(\mathcal{E}) := (Konf(\mathcal{E}), \Leftrightarrow_{step}, \emptyset)$ ist ein Transitionssystem über \mathbb{N}_0^{Akt} , wobei $X \xrightarrow{M}_{step} X'$, wenn $X \subseteq X'$, $\forall e, f \in X' \setminus X : e \neq f \Rightarrow e \text{ co } f$ und $\forall a \in Akt : M(a) = |\{e \in X' \setminus X \mid l(e) = a\}|$.

$T_{pom}(\mathcal{E}) := (Konf(\mathcal{E}), \Leftrightarrow_{pom}, \emptyset)$ ist ein Transitionssystem über $[\mathbf{Pos}]$, wobei $X \xrightarrow{p}_{pom} X'$, wenn $X \subseteq X'$ und $p = [X' \setminus X]$.

$T_{whp}(\mathcal{E}) := (Konf(\mathcal{E}), \Leftrightarrow_{whp}, \emptyset)$ ist ein Transitionssystem über $[\mathbf{Pos}]$, wobei $X \xrightarrow{p}_{whp} X'$, wenn $X \subseteq X'$ und $p = [X']$.

$T_{hp}(\mathcal{E}) := (\{Der(X) \mid X \in Konf(\mathcal{E})\}, \Leftrightarrow_{hp}, \epsilon)$ ist ein Transitionssystem über Der_{Akt} , wobei

$$e_1 e_2 \dots e_n \xrightarrow{[e_1 e_2 \dots e_n e_{n+1}]_{hp}} e_1 e_2 \dots e_n e_{n+1},$$

wenn $X' \setminus X = \{e_{n+1}\}$ für $X = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $X' = \{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}\}$.

Theorem 5.11 (interleaving, bf, step und pomset Bisimulation)

Ereignisstrukturen \mathcal{E}, \mathcal{F} über Akt sind

1. interleaving bisimilar, gdw. es eine AM-Bisimulation (R, γ) zwischen $T_{int}(\mathcal{E})$ und $T_{int}(\mathcal{F})$ gibt mit $(\emptyset, \emptyset) \in R$.
2. bf-bisimilar, gdw. es eine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation (R, γ) zwischen $T_{int}(\mathcal{E})$ und $T_{int}(\mathcal{F})$ gibt mit $(\emptyset, \emptyset) \in R$.
3. step bisimilar, gdw. es eine AM-Bisimulation (R, γ) zwischen $T_{step}(\mathcal{E})$ und $T_{step}(\mathcal{F})$ gibt mit $(\emptyset, \emptyset) \in R$.
4. pomset bisimilar, gdw. es eine AM-Bisimulation (R, γ) zwischen $T_{pom}(\mathcal{E})$ und $T_{pom}(\mathcal{F})$ gibt mit $(\emptyset, \emptyset) \in R$.

Beweis: Wir führen den Beweis nur für interleaving und bf-Bisimulation. Die anderen Aussagen lassen sich analog beweisen. Es seien (A, α) und (B, β) die Coalgebren mit $\mathcal{T}_{(A, \alpha)} = (Konf(\mathcal{E}), \Leftrightarrow_{int})$ und $\mathcal{T}_{(B, \beta)} = (Konf(\mathcal{F}), \Leftrightarrow_{int})$.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Es sei $R \subseteq \text{Konf}(\mathcal{E}) \times \text{Konf}(\mathcal{F})$ eine interleaving Bisimulation zwischen \mathcal{E} und \mathcal{F} . Wir definieren für alle $(X, Y), (X', Y') \in R, a \in \text{Akt}$

$$(a, X', Y') \in \gamma(X, Y) :\iff (a, X') \in \alpha(X), (a, Y') \in \beta(Y)$$

und behaupten, daß (R, γ) eine AM-Bisimulation zwischen (A, α) und (B, β) ist.

Es sei $(a, X') \in (\alpha \circ \pi_1)(X, Y)$. Daraus folgt $(a, X') \in \alpha(X)$. Da R nach Voraussetzung eine interleaving Bisimulation ist, gibt es ein Y' mit $(a, Y') \in \beta(Y)$ und $(X', Y') \in R$. Daraus folgt $(a, X', Y') \in \gamma(X, Y)$ und somit $(a, X') \in (F\pi_1 \circ \gamma)(X, Y)$. Die andere Inklusion zeigt Lemma 3.7. Mit Lemma 3.6 folgt die andere Implikation.

Es sei nun R eine bf-Bisimulation zwischen \mathcal{E} und \mathcal{F} . Dann ist R insbesondere eine interleaving Bisimulation. Demnach ist R mit der eben definierten Abbildung γ eine AM-Bisimulation zwischen (A, α) und (B, β) . Wir behaupten, daß (R, γ) zudem eine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation ist. Nach Lemma 3.7 müssen wir dazu nur die Inklusion $(\alpha^- \circ \pi_1) \subseteq (F\pi_1 \circ \gamma^-)$ zeigen.

Es sei $(X', Y') \in R$, es gelte $(a, X) \in (\alpha^- \circ \pi_1)(X', Y')$. Dann erhalten wir $(a, X) \in \alpha^-(X')$ und somit $(a, X') \in \alpha(X)$. Da R eine bf-Bisimulation ist, folgt daraus, daß es ein $Y \in \text{Konf}(\mathcal{F})$ gibt mit $(a, Y') \in \beta(Y)$ und $(X, Y) \in R$. Nach Definition von γ gilt $(a, X', Y') \in \gamma(X, Y)$, damit $(a, X, Y) \in \gamma^-(X', Y')$, und wir erhalten schließlich $(a, X) \in (F\pi_1 \circ \gamma^-)(X', Y')$.

Es sei (R, γ) eine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation zwischen \mathcal{E} und \mathcal{F} mit $(\emptyset, \emptyset) \in R$. Wir wissen bereits, daß R eine interleaving Bisimulation zwischen \mathcal{E} und \mathcal{F} ist. Um zu zeigen, daß R auch eine bf-Bisimulation ist, betrachten wir eine Transition $(a, X') \in \alpha(X)$ in $T_{\text{int}}(\mathcal{E})$, wobei $(X', Y') \in R$. Daraus folgt $(a, X) \in \alpha^-(X')$ und $(a, X) \in (\alpha^- \circ \pi_1)(X', Y')$. Da (R, γ) eine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation ist, schließen wir daraus $(a, X) \in (F\pi_1 \circ \gamma^-)(X', Y')$. Demnach gibt es eine Konfiguration $Y \in \text{Konf}(\mathcal{F})$, so daß $(a, X, Y) \in \gamma^-(X', Y')$. Daraus folgt $(X, Y) \in R$. Wir verwenden ein weiteres Mal, daß (R, γ) eine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation ist, und erhalten $(a, Y) \in \beta^-(Y')$ und somit $(a, Y') \in \beta(Y)$. ■

Das folgende Beispiel zeigt, daß die Begriffe AM-Bisimulation und vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation zu den Operatoren T_{int} , T_{step} und T_{pom} verschieden sind. Dabei nutzen wir aus, daß jede pomset Bisimulation auch eine step Bisimulation und eine interleaving Bisimulation ist.

Beispiel 5.12 (vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation für T_{int} , T_{step} und T_{pom})

Es seien \mathcal{E} und \mathcal{F} die Ereignisstrukturen aus Abbildung 30. Die Menge

$$R := \{ (\emptyset, \emptyset), (\{e_1\}, \{f_1\}), (\{e_1\}, \{f_4\}), (\{e_2\}, \{f_2\}), (\{e_1, e_3\}, \{f_1, f_3\}), \\ (\{e_1, e_2\}, \{f_1, f_3\}), (\{e_1, e_3\}, \{f_2, f_4\}), (\{e_1, e_2\}, \{f_2, f_4\}) \}$$

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

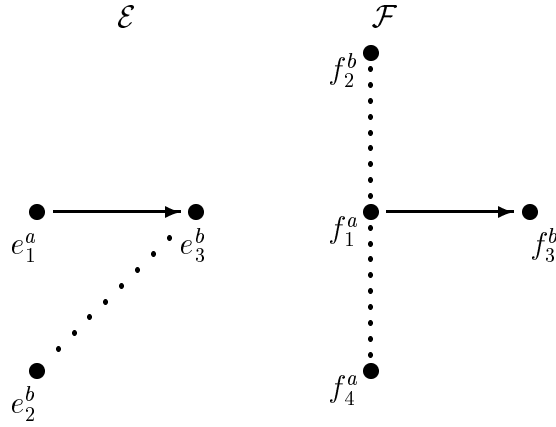


Abbildung 30: Pomset bisimulare Ereignisstrukturen.

ist ein pomset Bisimulation zwischen \mathcal{E} und \mathcal{F} und demzufolge auch eine step und interleaving Bisimulation. Wir behaupten, daß $T_*(\mathcal{E})$ und $T_*(\mathcal{F})$ nicht vorwärts-rückwärts AM-bisimilar sind für $*$ \in $\{\text{int}, \text{step}, \text{pom}\}$.

Es seien (A, α) und (B, β) die Coalgebren mit $\mathcal{T}_{(A, \alpha)} = (\text{Konf}(\mathcal{E}), \Leftrightarrow_*)$ und $\mathcal{T}_{(B, \beta)} = (\text{Konf}(\mathcal{F}), \Leftrightarrow_*)$, wobei $*$ \in $\{\text{int}, \text{step}, \text{pom}\}$. Es sei (R, γ) eine AM-Bisimulation zwischen (A, α) und (B, β) . Da $\emptyset \Leftrightarrow^g \{f_1\}$ eine Transition in (B, β) ist, gilt $(\{e_1\}, \{f_1\}) \in R$. In (A, α) gibt es eine Transition $\{e_1\} \Leftrightarrow^b \{e_1, e_2\}$. Daher muß R das Paar $(\{e_1, e_2\}, \{f_1, f_3\})$ enthalten.

Angenommen, (R, γ) ist eine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation. Da es in (A, α) die Transition $\{e_2\} \Leftrightarrow^g \{e_1, e_2\}$ gibt, folgt mit $(\alpha^- \circ \pi_1)(\{e_1, e_2\}, \{f_1, f_3\}) = (F\pi_1 \circ \gamma^-)(\{e_1, e_2\}, \{f_1, f_3\})$, daß $(a, \{e_2\}, Y) \in \gamma^-(\{e_1, e_2\}, \{f_1, f_3\})$ und es demnach ein Transition $Y \Leftrightarrow^g \{f_1, f_3\}$ in (B, β) geben muß – Widerspruch.

Theorem 5.13 (whp-Bisimulation)

Ereignisstrukturen \mathcal{E} und \mathcal{F} sind whp-bisimilar, gdw. es eine AM-Bisimulation (R, γ) zwischen $T_{whp}(\mathcal{E})$ und $T_{whp}(\mathcal{F})$ gibt mit $(\emptyset, \emptyset) \in R$.

Beweis: Es seien (A, α) und (B, β) die Coalgebren mit $\mathcal{T}_{(A, \alpha)} = (\text{Konf}(\mathcal{E}), \Leftrightarrow_{whp})$ und $\mathcal{T}_{(B, \beta)} = (\text{Konf}(\mathcal{F}), \Leftrightarrow_{whp})$.

Es sei $R \subseteq \text{Konf}(\mathcal{E}) \times \text{Konf}(\mathcal{F})$ eine whp-Bisimulation zwischen \mathcal{E} und \mathcal{F} . Wir definieren für alle $(X, Y), (X', Y') \in R, p \in [\mathbf{Pos}]$

$$(p, X', Y') \in \gamma(X, Y) : \iff [X'] = [Y'] = p, X \subseteq X', Y \subseteq Y'$$

und behaupten, daß (R, γ) eine AM-Bisimulation zwischen (A, α) und (B, β) ist. Da R eine whp-Bisimulation ist, gilt $(\emptyset, \emptyset) \in R$.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Es gelte $(p, X') \in (\alpha \circ \pi_1)(X, Y)$. Daraus folgt $(p, X') \in \alpha(X)$, d.h. $X \subseteq X'$ und $p = [X']$. Da R nach Voraussetzung eine whp-Bisimulation ist folgt, daß es ein $Y' \in B$ gibt mit $Y \subseteq Y'$ und $[X'] = [Y']$. Nach Definition von γ erhalten wir $(p, X', Y') \in \gamma(X, Y)$ und $(p, X') \in (F\pi_1 \circ \gamma)(X, Y)$. Die andere Inklusion folgt nach Lemma 3.7.

Es sei nun (R, γ) eine AM-Bisimulation zwischen (A, α) and (B, β) mit $(\emptyset, \emptyset) \in R$. Die Menge \hat{R} enthalte alle in (R, γ) von (\emptyset, \emptyset) erreichbaren Zustände. Wir behaupten, daß \hat{R} eine whp-Bisimulation ist. Offensichtlich gilt $(\emptyset, \emptyset) \in \hat{R}$.

Es gelte $(X, Y) \in \hat{R}$. Zunächst zeigen wir, daß $[X] = [Y]$. Für $(X, Y) = (\emptyset, \emptyset)$ gilt dies offensichtlich. Falls $(X, Y) \neq (\emptyset, \emptyset)$, dann existiert ein Paar $(U, V) \in \hat{R}$ mit $(p, X, Y) \in \gamma(U, V)$. Daraus folgt $(p, X) \in (F\pi_1 \circ \gamma)(U, V)$. Da (R, γ) ein AM-Bisimulation ist, erhalten wir $(p, X) \in (\alpha \circ \pi_1)(U, V)$ und damit $(p, X) \in \alpha(U)$. Nach Definition von T_{whp} erhalten wir $p = [X]$. Analog schließen wir, daß $p = [Y]$ und damit $[X] = [Y]$.

Um die Abschlußeigenschaften von \hat{R} zu zeigen, betrachten wir ein Paar $(X, Y) \in \hat{R}$ und eine Transition $X \Leftrightarrow X'$ für eine Konfiguration $X' \in \text{Konf}(\mathcal{E})$. Nach Definition von T_{whp} folgt daraus $([X'], X') \in \alpha(X)$. Daher erhalten wir $([X'], X') \in (\alpha \circ \pi_1)(X, Y)$. Da (R, γ) eine AM-Bisimulation ist, folgt $([X'], X') \in (F\pi_1 \circ \gamma)(X, Y)$. Demzufolge gibt es eine Konfiguration Y' mit $([X'], X', Y') \in \gamma(X, Y)$. Also gilt $(X', Y') \in R$. Da (X, Y) erreichbar ist in (R, γ) , ist auch (X', Y') erreichbar und wir können schließen: $(X', Y') \in \hat{R}$. Ein weiteres Mal benutzen wir, daß (R, γ) eine AM-Bisimulation ist, und erhalten $([X'], Y') \in \beta(Y)$, d.h. $Y \subseteq Y'$. ■

Theorem 5.14 (hp- und shp-Bisimulation)

Ereignisstrukturen \mathcal{E} und \mathcal{F} sind hp-bisimilar (shp-bisimilar), gdw. es eine (vorwärts-rückwärts) AM-Bisimulation (R, γ) zwischen $T_{hp}(\mathcal{E})$ und $T_{hp}(\mathcal{F})$ gibt mit $(\epsilon, \epsilon) \in R$.

Beweis: Es seien (A, α) und (B, β) die Coalgebren mit $\mathcal{T}_{(A, \alpha)} = (\text{Konf}(\mathcal{E}), \Leftrightarrow_{hp})$ und $\mathcal{T}_{(B, \beta)} = (\text{Konf}(\mathcal{F}), \Leftrightarrow_{hp})$. In diesem Beweis verwenden wir die alternative Definition von (shp-) hp-Bisimulation aus Bemerkung 5.10.

Es sei R eine hp-Bisimulation zwischen \mathcal{E} und \mathcal{F} . Wir definieren

$$\hat{R} := \{(e_1 e_2 \dots e_n, f_1 f_2 \dots f_n) \mid \exists (X, Y, \eta) \in R : \begin{array}{l} e_1 e_2 \dots e_n \in \text{Der}(X), \\ f_1 f_2 \dots f_n \in \text{Der}(Y), \\ \eta(e_1 e_2 \dots e_n) = f_1 f_2 \dots f_n \end{array}\}$$

$$([\bar{g}], \bar{e}', \bar{f}') \in \hat{\gamma}((\bar{e}, \bar{f}) : \iff ([\bar{g}], \bar{e}') \in \alpha(\bar{e}), ([\bar{g}], \bar{f}') \in \alpha(\bar{f}))$$

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

für alle $((\bar{e}, \bar{f}), (\bar{e}', \bar{f}')) \in \hat{R}$, $[\bar{g}] \in Der_{Akt}$ und behaupten, daß $(\hat{R}, \hat{\gamma})$ eine AM-Bisimulation zwischen $T_{hp}(\mathcal{E})$ und $T_{hp}(\mathcal{F})$ ist. Offensichtlich gilt $(\epsilon, \epsilon) \in \hat{R}$.

Es sei $(e_1 e_2 \dots e_n, f_1 f_2 \dots f_n) \in \hat{R}$, es gelte $e_1 e_2 \dots e_n \xrightarrow{[e_1 e_2 \dots e_n e_{n+1}]}_{hp} e_1 e_2 \dots e_n e_{n+1}$. Nach Definition von \hat{R} gibt es dann ein Tripel $(X, Y, \eta) \in R$, so daß gilt:

- $e_1 e_2 \dots e_n \in Der(X)$,
- $f_1 f_2 \dots f_n \in Der(Y)$ und
- $\eta : X \rightarrow Y$ ist ein Isomorphismus mit $\eta(e_1 e_2 \dots e_n) = f_1 f_2 \dots f_n$.

Aus $e_1 e_2 \dots e_n \xrightarrow{[e_1 e_2 \dots e_n e_{n+1}]}_{hp} e_1 e_2 \dots e_n e_{n+1}$ in (A, α) folgen $X' := X \cup \{e_{n+1}\} \in Konf(\mathcal{E})$ und damit $X \subseteq X'$. Da R eine hp-Bisimulation ist, gibt es ein Tripel $(X', Y', \eta') \in R$ mit $Y \subseteq Y'$ und $\eta'|_X = \eta$. Daraus erhalten wir: $\eta'(e_1 e_2 \dots e_n e_{n+1}) = f_1 f_2 \dots f_n \eta'(e_{n+1})$ ist eine Derivation von Y' , $(e_1 e_2 \dots e_n e_{n+1}, f_1 f_2 \dots f_n \eta'(e_{n+1})) \in \hat{R}$ und $f_1 f_2 \dots f_n \xrightarrow{[e_1 e_2 \dots e_n e_{n+1}]}_{hp} f_1 f_2 \dots f_n \eta'(e_{n+1})$ in (B, β) . Mit der Definition von γ folgt daraus:

$$((e_1 e_2 \dots e_n e_{n+1}), e_1 e_2 \dots e_n e_{n+1}, f_1 f_2 \dots f_n \eta'(e_{n+1})) \in \gamma(e_1 e_2 \dots e_n, f_1 f_2 \dots f_n).$$

und wir erhalten $((e_1 e_2 \dots e_n e_{n+1}), e_1 e_2 \dots e_n e_{n+1}) \in (F\pi_1 \circ \gamma)(e_1 e_2 \dots e_n, f_1 f_2 \dots f_n)$. Die andere Inklusion folgt mit Lemma 3.7.

Es sei nun $(\hat{R}, \hat{\gamma})$ eine AM-Bisimulation zwischen (A, α) und (B, β) mit $(\epsilon, \epsilon) \in \hat{R}$. Wir behaupten, daß

$$R := \{(X, Y, \eta) \mid \exists (e_1 e_2 \dots e_n, f_1 f_2 \dots f_n) \in \hat{R} : \\ X = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}, Y = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}, \\ \eta : X \rightarrow Y \text{ ist ein Isomorphismus mit } \eta(e_1 e_2 \dots e_n) = f_1 f_2 \dots f_n\}$$

eine hp-Bisimulation zwischen \mathcal{E} und \mathcal{F} ist. Offensichtlich gilt $(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in R$.

Es sei $(X, Y, \eta) \in R$, es gelte $X \xrightarrow{g} X'$. Nach Definition von R gibt es ein Paar $(e_1 e_2 \dots e_n, f_1 f_2 \dots f_n) \in \hat{R}$ mit $X = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}, Y = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ und $\eta(e_1 e_2 \dots e_n) = f_1 f_2 \dots f_n$. Da $X \subseteq X' = X \cup \{e\}$ gibt es es eine Transition $e_1 e_2 \dots e_n \xrightarrow{[e_1 e_2 \dots e_n e]}_{hp} e_1 e_2 \dots e_n e$ in (A, α) . Da $(\hat{R}, \hat{\gamma})$ eine AM-Bisimulation ist, gibt es eine Derivation $f_1 f_2 \dots f_n f$ mit $f_1 f_2 \dots f_n \xrightarrow{[e_1 e_2 \dots e_n e]}_{hp} f_1 f_2 \dots f_n f$ in (B, β) und $(e_1 e_2 \dots e_n e, f_1 f_2 \dots f_n f) \in \hat{R}$. Nach Definition von T_{hp} gibt es einen Isomorphismus $\eta' : X' \rightarrow Y'$ mit $\eta'(e_1 e_2 \dots e_n e) = f_1 f_2 \dots f_n f$. Daher gilt $\eta'|_X = \eta$, $(X', Y', \eta') \in R$ und $Y \xrightarrow{g} Y'$.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Es sei nun R eine shp-Bisimulation zwischen \mathcal{E} und \mathcal{F} . Dann ist die oben definierte Coalgebra $(\hat{R}, \hat{\gamma})$ eine AM-Bisimulation zwischen (A, α) und (B, β) . Wir behaupten, daß sie auch eine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation ist.

Es sei $(e_1 e_2 \dots e_n e_{n+1}, f_1 f_2 \dots f_n f_{n+1}) \in \hat{R}$, es sei

$$e_1 e_2 \dots e_n \xleftrightarrow{[e_1 e_2 \dots e_n e_{n+1}]_{hp}} e_1 e_2 \dots e_n e_{n+1}$$

eine Transition in (A, α) . Dann gibt es ein Tripel $(X', Y', \eta') \in R$ mit

$$X' = \{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}\},$$

$$Y' = \{f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1}\}, \text{ und}$$

$$\eta' : X' \rightarrow Y' \text{ ist ein Isomorphismus mit } \eta'(e_1 e_2 \dots e_n e_{n+1}) = f_1 f_2 \dots f_n f_{n+1}.$$

Nach Definition von T_{hp} wissen wir, daß $X := \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ eine Konfiguration von \mathcal{E} ist, offensichtlich gilt $X \xleftrightarrow{\ell} X'$. Daher gibt es ein Tripel $(X, Y, \eta) \in R$ mit $Y \xleftrightarrow{\ell} Y'$ und $\eta|_X = \eta'$. Daraus folgt, daß $\eta(e_1 e_2 \dots e_n) = f_1 f_2 \dots f_n$, und daß $f_1 f_2 \dots f_n$ eine Derivation von Y ist. Also gilt $(e_1 e_2 \dots e_n, f_1 f_2 \dots f_n) \in \hat{R}$ und $f_1 f_2 \dots f_n \xleftrightarrow{[e_1 e_2 \dots e_n e_{n+1}]_{hp}} f_1 f_2 \dots f_n f_{n+1}$. Mit der Definition von $\hat{\gamma}$ erhalten wir:

$$([e_1 e_2 \dots e_n e_{n+1}], e_1 e_2 \dots e_n) \in (F\pi_1 \circ \gamma^-)(e_1 e_2 \dots e_n e_{n+1}, f_1 f_2 \dots f_n f_{n+1}).$$

Die andere Inklusion gilt nach Lemma 3.7.

Es sei nun $(\hat{R}, \hat{\gamma})$ eine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation zwischen (A, α) und (B, β) mit $(\epsilon, \epsilon) \in \hat{R}$. Unter diesen Voraussetzungen ist die oben definierte Relation R eine hp-Bisimulation zwischen \mathcal{E} und \mathcal{F} . Wir behaupten, daß sie weiterhin eine shp-Bisimulation ist.

Es sei $(X', Y', \eta') \in R$, es gilt $X \xleftrightarrow{\ell} X'$ für eine Konfiguration $X \in \text{Konf}(\mathcal{E})$. Wegen $(X', Y', \eta') \in R$ gibt es ein Paar $(e_1 e_2 \dots e_n e, f_1 f_2 \dots f_n f) \in \hat{R}$ mit

$$X' = \{e_1, e_2, \dots, e_n, e\},$$

$$Y' = \{f_1, f_2, \dots, f_n, f\}, \text{ und}$$

$$\text{für den Isomorphismus } \eta' : X' \rightarrow Y' \text{ gilt } \eta'(e_1 e_2 \dots e_n e) = f_1 f_2 \dots f_n f.$$

$e_1 e_2 \dots e_n$ ist eine Derivation von X . Daher gibt es eine Transition $e_1 e_2 \dots e_n \xleftrightarrow{[e_1 e_2 \dots e_n e]_{hp}} e_1 e_2 \dots e_n e$ in (A, α) . Da \hat{R} eine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation ist, gibt es eine Derivation \bar{f} zu einer Konfiguration $Y \in \text{Konf}(\mathcal{F})$ mit $(e_1 e_2 \dots e_n, \bar{f}) \in \hat{R}$ und $\bar{f} \xleftrightarrow{[e_1 e_2 \dots e_n e]_{hp}} f_1 f_2 \dots f_n f$ in (B, β) . Mit der Definition des Operators T_{hp} schließen wir

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

daraus $\bar{f} = f_1 f_2 \dots f_n$, $Y = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$. Die Abbildung $\eta := \eta'_{|X} : X \rightarrow Y$ ist ein Isomorphismus. Damit folgern wir $(X, Y, \eta) \in R$, $Y \xleftrightarrow{\ell} Y'$ und $\eta = \eta'_{|X}$. ■

5.3.3 Modellierungen mit \mathbb{P} - und Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation

Um die konkreten Bisimulationen aus Abschnitt 5.3.1 als \mathbb{P} -Bisimulation bzw. Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation darzustellen, bieten sich zwei Vorgehensweisen an:

Zum einen können wir eine Kategorie \mathbb{P} von Pfadobjekten wählen und versuchen zu zeigen, daß \mathbb{P} -Bisimulation bzw. Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation mit einer konkreten Bisimulation übereinstimmt.

Zum anderen können wir auf die Modellierungen der konkreten Bisimulationen als AM-Bisimulationen aus dem vorigen Abschnitt zurückgreifen und prüfen, ob die Operatoren T_* zu einer Pfadkategorie \mathbb{P} verbindend sind. Ist dies der Fall, so erhalten wir mit Hilfe von Theorem 4.7 eine Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation.

Wir werden beide Ansätze verfolgen. Den ersten nutzen wir für interleaving, hp- und shp-Bisimulation. Für interleaving Bisimulation zeigen wir, daß sie äquivalent ist zu **Lin**-Bisimulation. Im Fall von hp- und shp-Bisimulation zitieren wir ein Ergebnis von [JNW94], das diese Bisimulationen auf Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge mit der Kategorie **PosK** darstellt. Diese Modellierung übertragen wir auf Ereignisstrukturen. Den zweiten Ansatz können wir nur im Fall von interleaving und step Bisimulation erfolgreich anwenden. Die Operatoren T_{int} und T_{step} sind verbindend. Die Operatoren T_{pom} , T_{whp} und T_{hp} können zu keiner Pfadkategorie verbindend sein, da sie sich nicht zu Funktoren fortsetzen lassen.

Interleaving und bf-Bisimulation

Wir zeigen zunächst, daß der Operator T_{int} verbindend ist zur Pfadkategorie **Lin**. Anschließend beweisen wir, daß **Lin**-Bisimulation und interleaving Bisimulation übereinstimmen. Aus diesen beiden Ergebnissen können wir mit Hilfe der Theoreme aus Kapitel 4 und der Darstellung von interleaving Bisimulation als AM-Bisimulation aus Abschnitt 5.3.2 eine Reihe äquivalenter Charakterisierungen von interleaving Bisimulation herleiten.

Aus diesen Ergebnissen folgt, daß bf-Bisimulation weder mit **Lin**-Bisimulation noch mit (vorwärts-rückwärts) Pfad-**Lin**-Bisimulation übereinstimmen kann. Ein of-

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

fenes Problem bleibt, ob es eine Pfadkategorie \mathbb{P} gibt, mit der bf-Bisimulation als \mathbb{P} -Bisimulation bzw. Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation dargestellt werden kann.

Lemma 5.15 (*T_{int} ist ein verbindender Operator*)

Der Operator T_{int} ist verbindend zu der Kategorie \mathbf{Lin} .

Beweis:

Zu B1: Es seien \mathcal{E} und \mathcal{F} Ereignisstrukturen, $\eta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ ein Morphismus in \mathbf{E}_{Akt} . Die Definition $T_{int}(\eta)(X) := \eta(X)$ für eine Konfiguration $X \in \text{Konf}(\mathcal{E})$ erweitert den Operator T_{int} zu einem Funktor.

Zu B2: Es sei $\mathcal{P} = (P, \leq, \emptyset, l)$ ein Objekt aus \mathbf{Lin} . Die Konfiguration P ist von allen Zuständen von $T_{int}(\mathcal{P})$ erreichbar.

Zu B3: Zu einer Ableitung $s_1 \xleftrightarrow{a_1} s_2 \xleftrightarrow{a_2} \dots \xleftrightarrow{a_{n-1}} s_n$, $n \geq 1$, definieren wir ein Pfad-Objekt $\mathcal{P} = (P, \leq, \emptyset, l)$ in \mathbf{Lin} vermöge

$$P := \{\langle s_1, s_2 \rangle, \langle s_1, s_2, s_3 \rangle, \dots, \langle s_1, s_2, s_3, \dots, s_n \rangle\},$$

$$\langle s_1, s_2, \dots, s_i \rangle \leq \langle s_1, s_2, \dots, s_j \rangle : \iff i \leq j \text{ und}$$

$$l(\langle s_1, s_2, \dots, s_i \rangle) := a_{i-1}, \quad 2 \leq i \leq n.$$

Wenn eine Ereignisstruktur \mathcal{E} eine Ableitung $u_1 \xleftrightarrow{a_1} u_2 \xleftrightarrow{a_2} \dots \xleftrightarrow{a_{n-1}} u_n$ in $T_{int}(\mathcal{E})$ hat, wobei $u_1 = \emptyset$ der Anfangszustand von $T_{int}(\mathcal{E})$ ist, so ist $p : P \rightarrow X$ mit $p(\langle s_1, s_2, \dots, s_i \rangle) := e_i$ der gesuchte Morphismus, wobei $\{e_i\} = u_i \setminus u_{i-1}$, $i = 2, \dots, n$.

Zu B4: Die leere Ereignisstruktur erfüllt Bedingung B3 für $n = 0$.

Zu B5: Es seien \mathcal{P} und \mathcal{Q} Objekte in \mathbf{Lin} , \mathcal{E} eine Ereignisstruktur, $p : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$, $q : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{E}$ Morphismen in \mathbf{E}_{Akt} , $m : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ ein Morphismus in \mathbf{Lin} . Es sei $\emptyset \xleftrightarrow{a_1} \{e_1\} \xleftrightarrow{a_2} \dots \xleftrightarrow{a_{n-1}} \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ eine Ableitung in $T_{int}(\mathcal{P})$, wobei $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ der erreichbare Zustand von $T_{int}(\mathcal{P})$ ist. Es gelte für alle Konfigurationen $\{e_1, e_2, \dots, e_i\} \in \text{Konf}(\mathcal{P})$, $0 \leq i \leq n \iff 1 : (T_{int}(q) \circ T_{int}(m))\{e_1, e_2, \dots, e_i\} = T_{int}(p)\{e_1, e_2, \dots, e_i\}$. Daraus folgt $(q \circ m)(e_i) = p(e_i)$ für alle $1 \leq i \leq n \iff 1$ und damit $q \circ m = p$. ■

Theorem 5.16 (*interleaving Bisimulation als Lin-Bisimulation*)

Ereignisstrukturen \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 aus \mathbf{E}_{Akt} sind interleaving bisimilar, gdw. sie \mathbf{Lin} -bisimilar sind.

Beweis: Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \leq_1, \sharp_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \leq_2, \sharp_2, l_2)$ \mathbf{Lin} -bisimulare Ereignisstrukturen. Dann gibt es eine Ereignisstruktur $\mathcal{E} = (E, \leq, \sharp, l)$ und \mathbf{Lin} -offene Morphismen $p_i : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_i$, $i = 1, 2$. Wir behaupten, daß

$$R := \{(p_1(X), p_2(X)) \mid X \in \text{Konf}(\mathcal{E})\}$$

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

eine interleaving Bisimulation zwischen \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 ist. Da $\emptyset \in \text{Konf}(\mathcal{E})$ folgt $(\emptyset, \emptyset) \in R$.

Es sei $(p_1(X), p_2(X)) \in R$ für eine Konfiguration $X \in \text{Konf}(\mathcal{E})$, es sei $p_1(X) \xleftrightarrow{g} Y'$ eine Transition. Aus der Konfiguration $p_1(X) \in \text{Konf}(\mathcal{E}_1)$ konstruieren wir eine Ereignisstruktur $\mathcal{P} = (P, \leq_P, \sharp_P, l_P)$ wie folgt: $P := X$, \leq_P ist eine Linearisierung von $\leq_1 \cap (X \times X)$, $\sharp_P := \emptyset$ und $l_P := l_{1|X}$. Es sei \hat{e} das Ereignis, um welches sich $p_1(X)$ and Y' unterscheiden, d.h. $\{\hat{e}\} = Y' \setminus p_1(X)$. Es sei $\mathcal{Q} := (Q, \leq_Q, \emptyset, l_Q)$ die Ereignisstruktur mit $Q := P \cup \{\hat{e}\}$, $\forall e \in Q : e \leq_Q \hat{e}$ und $\forall e, f \in P : e \leq_Q f : \iff e \leq_P f$, $\sharp_Q := \emptyset$ und $\forall e \in P : l_Q(e) := l_P(e)$ und $l_Q(\hat{e}) := a$. Offenkundig sind \mathcal{P} und \mathcal{Q} Objekte von **Lin**.

Wir definieren Morphismen $p : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$, $m : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ und $q : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{E}_1$ vermöge

- $\forall e \in P : p(e) := e$,
- $\forall e \in P : m(e) := e$ und
- $\forall e \in P : q(e) := p_1(e)$, $q(\hat{e}) = \hat{e}$.

Offensichtlich gilt $p_1 \circ p = q \circ m$. Da p_1 **Lin**-offen ist, gibt es einen Morphismus $r : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{E}$ mit $r \circ m = p$ und $p_1 \circ r = q$. Damit erhalten wir $Y := r(Q) = X \cup \{r(\hat{e})\} \in \text{Konf}(\mathcal{E})$, $p_1(Y) = Y'$, und $X \xleftrightarrow{g} Y$ ist eine Transition zwischen Konfigurationen von \mathcal{E} . Da p_2 ein **Lin**-offener Morphismus ist, erhalten wir eine Transition $p_2(X) \xleftrightarrow{g} p_2(Y)$ zwischen Konfigurationen von \mathcal{E}_2 . Weiterhin gilt nach Definition von R , daß $(p_1(Y), p_2(Y)) = (Y', p_2(Y)) \in R$.

Es seien nun \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 interleaving bisimilar. In Theorem 5.11 haben wir eine AM-Bisimulation (R, γ) zwischen $T_{\text{int}}(\mathcal{E}_1)$ und $T_{\text{int}}(\mathcal{E}_2)$ konstruiert mit $(\emptyset, \emptyset) \in R$. Wir wickeln diese Coalgebra (R, γ) zu einem Synchronisationsbaum \mathcal{S} ab. Diesen fassen wir anschließend als Ereignisstruktur \mathcal{E} auf und definieren Morphismen $p_i : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_i$, $i = 1, 2$. Wir zeigen, daß die Morphismen p_i **Lin**-offen sind und erhalten damit, daß \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 **Lin**-bisimilar sind.

Wir wickeln (R, γ) zu einem Synchronisationsbaum $\mathcal{S} = (S, s, \rightarrow)$ über *Akt* ab, indem wir als Zustände alle nichtleeren, endlichen Ableitungen von (\emptyset, \emptyset) verwenden, d.h. die einelementige Folge $\langle (\emptyset, \emptyset) \rangle$ ist der Anfangszustand s von \mathcal{S} , eine Folge

$$\langle (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n) \rangle$$

ist ein Zustand von \mathcal{S} , wenn $(X_1, Y_1) \xleftrightarrow{q_1} (X_2, Y_2) \xleftrightarrow{q_2} \dots \xleftrightarrow{q_n} (X_n, Y_n)$ eine Ableitung in (R, γ) ist und $(X_1, Y_1) = (\emptyset, \emptyset)$. Es gibt eine Transition

$$\langle (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n) \rangle \xleftrightarrow{g} \langle (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n), (X_{n+1}, Y_{n+1}) \rangle,$$

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

in \mathcal{S} , wenn $(X_n, Y_n) \xleftrightarrow{a} (X_{n+1}, Y_{n+1})$ in (R, γ) .

Nun konstruieren wir aus $\mathcal{S} = (S, s, \Leftrightarrow)$ eine Ereignisstruktur $\mathcal{E} = (E, \leq, \sharp, l)$ wie folgt:

$$E := S \setminus \{s\},$$

$e \leq f : \Leftrightarrow (e, f) \in Tran^*$, wobei $Tran^*$ die reflexiv transitive Hülle von $Tran := \{(e, f) \mid e \xleftrightarrow{a} f \text{ für eine Aktion } a\}$ ist,

$e \sharp f : \Leftrightarrow \neg(e \leq f \vee f \leq e)$ und

$l(e) = a : \Leftrightarrow e = \langle (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n) \rangle \wedge (X_{n-1}, Y_{n-1}) \xleftrightarrow{a} (X_n, Y_n)$.

Wir definieren Abbildungen $p_1 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_1$, $p_2 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_2$ mit

- $p_1(\langle (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n) \rangle) := e$, wenn $\{e\} = X_n \setminus X_{n-1}$, und
- $p_2(\langle (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n) \rangle) := e$, wenn $\{e\} = Y_n \setminus Y_{n-1}$,

und behaupten, daß p_1 und p_2 **Lin**-offene Morphismen sind.

Zunächst zeigen wir, daß p_1 und p_2 Morphismen in \mathbf{E}_{Akt} sind. Nach Konstruktion von (R, γ) erhalten wir: aus $(X, Y) \xleftrightarrow{a} (X', Y')$ folgt $X \xleftrightarrow{a} X'$ und $Y \xleftrightarrow{a} Y'$. Daher bewahren p_1 und p_2 Markierungen. Da Ereignisse der Ereignisstruktur \mathcal{E} in Konflikt sind gdw. sie nicht in der Relation \leq stehen, ist eine Konfiguration C von \mathcal{E} mit $n \geq 1$ Elementen eine Menge der Form

$$C = \{ \langle (\emptyset, \emptyset), (X_2, Y_2) \rangle, \\ \langle (\emptyset, \emptyset), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) \rangle, \\ \dots \\ \langle (\emptyset, \emptyset), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), \dots, (X_{n+1}, Y_{n+1}) \rangle \}.$$

Wenden wir die Abbildung p_1 auf eine solche Konfiguration $C \in Konf(\mathcal{E})$ an, so erhalten wir:

$$p_1(C) = \bigcup_{i=2}^{n+1} X_i \setminus X_{i-1} = X_{n+1} \in Konf(\mathcal{E}_1).$$

Es seien e, e' Ereignisse aus einer Konfiguration $C \neq \emptyset \in Konf(\mathcal{E})$ mit $p_1(e) = p_1(e')$. Aus der eben hergeleiteten Struktur von Konfigurationen folgt, daß

$e = \langle (\emptyset, \emptyset), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), \dots, (X_i, Y_i) \rangle$ und

$e' = \langle (\emptyset, \emptyset), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), \dots, (X_j, Y_j) \rangle$

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

für $2 \leq i, j \leq |C| + 1$. Angenommen $i \neq j$. Gelte o.B.d.A. $i < j$. Dann folgen $X_i \subseteq X_{j-1}$, $p_1(e) = p_1(e') \in X_i$, $X_j \setminus X_{j-1} = \{p_1(e)\} = \{p_1(e')\}$ – Widerspruch. Also gilt $i = j$ und demnach $e = e'$.

Schließlich beweisen wir, daß p_1 **Lin**-offen ist. Es seien $\mathcal{P} = (P, \leq_P, \emptyset, l_P)$ und $\mathcal{Q} = (Q, \leq_Q, \emptyset, l_Q)$ Objekte aus **Lin**, es seien $p : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$, $m : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$, $q : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{E}_1$ Morphismen mit $q \circ m = p_1 \circ p$. Wir beweisen die Existenz von einem Morphismus $r : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{E}$ mit $p = r \circ m$ und $q = p_1 \circ r$ mittels Induktion über die Differenz $n := |Q| \Leftrightarrow |P|$.

Im Fall $n = 0$ ist der Morphismus m bijektiv: Er ist injektiv, weil $P \in \text{Konf}(\mathcal{P})$. Da $|P| = |Q|$ ist m weiterhin surjektiv. Da die Abbildung m^{-1} markierungserhaltend ist, Konfigurationen von \mathcal{Q} auf Konfigurationen von \mathcal{P} abbildet und injektiv ist auf Q , ist m^{-1} ein Morphismus in \mathbf{E}_{Akt} . Deshalb können wir r wählen als $r := p \circ m^{-1}$ und erhalten: $r \circ m = p \circ m^{-1} \circ m = p$ und $p_1 \circ r = p_1 \circ p \circ m^{-1} = q$, da $q \circ m = p_1 \circ p$.

Es gelte nun $|Q| \Leftrightarrow |P| = n + 1$. Es sei \hat{e} das größte Ereignis in Q . Wir definieren $\mathcal{Q}' := (Q', \leq', \emptyset, l')$ vermöge $Q' := Q \setminus \{\hat{e}\}$, $\leq' := \leq_Q \cap (Q' \times Q')$, $l' := l_{Q|Q'}$. Es sei $m' : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}'$ der Morphismus mit $m'(e) := m(e)$ für alle $e \in P$ und $q' : \mathcal{Q}' \rightarrow \mathcal{E}_1$ der Morphismus mit $q'(e) := q(e)$ für alle $e \in Q'$. Dann gilt offensichtlich $q' \circ m' = p_1 \circ p$, und nach Induktionsannahme gibt es einen Morphismus $r' : \mathcal{Q}' \rightarrow \mathcal{E}$ mit $p = r' \circ m'$ und $q' = p_1 \circ r'$.

Wir betrachten das Bild von Q' unter dem Morphismus r' : Es ist eine Konfiguration $C \in \text{Konf}(\mathcal{E})$ und weist daher die folgende Form auf:

$$C = \{ \langle (\emptyset, \emptyset), (X_2, Y_2) \rangle, \\ \langle (\emptyset, \emptyset), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) \rangle, \\ \dots \\ \langle (\emptyset, \emptyset), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), \dots, (X_{k+1}, Y_{k+1}) \rangle \},$$

wobei $k = |Q'|$, $p_1(C) = X_{k+1}$ und $q'(Q) = p_1(r'(Q)) = X_{k+1}$.

Die Transition $Q' \xrightarrow{q'} Q$ in $T_{int}(\mathcal{Q})$ impliziert, daß es eine Transition $q(Q') = X_{k+1} \xrightarrow{q} q(Q)$ in $T_{int}(\mathcal{E}_1)$ gibt. Da R eine interleaving Bisimulation ist und das Paar $(X_{k+1}, Y_{k+1}) \in R$, gibt es eine Konfiguration $Y' \in C(\mathcal{E}_2)$ mit $(q(Q), Y') \in R$, wobei $Y_{k+1} \xrightarrow{q} Y'$ eine Transition in $T_{int}(\mathcal{E}_2)$ ist. Daher gibt es nach Definition von γ eine Transition $(X_{k+1}, Y_{k+1}) \xrightarrow{\gamma} (q(Q), Y')$ in (R, γ) und somit ein Ereignis

$$f := \langle (\emptyset, \emptyset), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), \dots, (X_{k+1}, Y_{k+1}), ((q(Q), Y')) \rangle$$

in der Ereignisstruktur \mathcal{E} . Wir setzen $\forall e \in Q' : r(e) := r'(e)$ und $r(\hat{e}) := f$. Diese Abbildung r ist der gesuchte Morphismus. ■

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Korollar 5.17 (interleaving Bisimulation)

Für Ereignisstrukturen \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 aus \mathbf{E}_{Akt} sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind interleaving bisimilar.
2. Es gibt eine AM-Bisimulation (R, γ) zwischen $T_{int}(\mathcal{E}_1)$ und $T_{int}(\mathcal{E}_2)$ mit $(\emptyset, \emptyset) \in R$.
3. \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind **Lin**-bisimilar.
4. \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind Pfad-**Lin**-bisimilar.
5. \mathcal{E}_1 and \mathcal{E}_2 sind vorwärts-rückwärts Pfad-**Lin**-bisimilar.
6. Es gibt eine AM-Bisimulation (R, γ) zwischen $T_{path\text{-Lin}}(\mathcal{E}_1)$ und $T_{path\text{-Lin}}(\mathcal{E}_2)$ mit $(\iota_1, \iota_2) \in R$.
7. Es gibt eine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation (R, γ) mit $(\iota_1, \iota_2) \in R$ zwischen $T_{path\text{-Lin}}(\mathcal{E}_1)$ und $T_{path\text{-Lin}}(\mathcal{E}_2)$.

Beweis:

- 1 \Leftrightarrow 2 : Theorem 5.11.
 1 \Leftrightarrow 3 : Theorem 5.16.
 3 \Rightarrow 5 : Theorem 4.10.
 5 \Rightarrow 4 : nach Definition.
 4 \Leftrightarrow 2 : Theorem 4.7 mit T_{int} als verbindendem Operator (vergl. Lemma 5.15).
 4 \Leftrightarrow 6 : Theorem 4.2.
 5 \Leftrightarrow 7 : Theorem 4.2. ■

Korollar 5.18 (bf-Bisimulation)

*bf-Bisimulation stimmt weder mit **Lin**-Bisimulation noch mit (vorwärts-rückwärts) Pfad-**Lin**-Bisimulation überein.*

Beweis: Beispiel 5.12 und Korollar 5.17. ■

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Step Bisimulation

Step Bisimulation läßt sich als Pfad-**Step**-Bisimulation darstellen. Dieses Ergebnis erzielen wir aus der Modellierung von step Bisimulation als AM-Bisimulation mit Theorem 4.7, da der Operator T_{step} verbindend ist zu **Step**. An einem Beispiel zeigen wir, daß vorwärts-rückwärts Pfad-**Step**-Bisimulation und Pfad-**Step**-Bisimulation nicht übereinstimmen. Daher sind **Step**-Bisimulation und step Bisimulation verschieden. Es bleibt ein offenes Problem, ob es eine Pfadkategorie \mathbb{P} gibt, mit der step Bisimulation als \mathbb{P} -Bisimulation dargestellt werden kann.

Korollar 5.19 (step Bisimulation als Pfad-Step-Bisimulation)

*Ereignisstrukturen \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 aus \mathbf{E}_{Akt} sind step bisimilar, gdw. sie Pfad-**Step**-bisimilar sind.*

Beweis: Wir zeigen die Behauptung, indem wir nachweisen, daß der Operator T_{step} verbindend ist. Da **Step**-Bisimulation in Theorem 5.11 mit dem Operator T_{step} als AM-Bisimulation modelliert wurde, folgt daraus die Aussage mit Theorem 4.7. In den Bezeichnungen aus Definition 4.3 wählen wir im folgenden stets $\mathbb{M} = \mathbf{E}_{Akt}$, $\mathbb{P} = \mathbf{Step}$ und für die Kategorie der Transitionssysteme $\mathbf{T}_{\mathbb{N}_0^{Akt}}$.

zu B1: Es seien \mathcal{E} und \mathcal{F} Ereignisstrukturen, $\eta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ ein Morphismus in \mathbf{E}_{Akt} .

Wir behaupten, daß die Definition $T_{step}(\eta)(X) := \eta(X)$ für eine Konfiguration $X \in \text{Konf}(\mathcal{E})$ den Operator T_{step} zu einem Funktor von \mathbf{E}_{Akt} nach $\mathbf{T}_{\mathbb{N}_0^{Akt}}$ fortsetzt.

Wir zeigen zunächst, daß $T_{step}(\eta)$ ein Morphismus in $\mathbf{T}_{\mathbb{N}_0^{Akt}}$ ist. Offenkundig gilt $T_{step}(\eta)(\emptyset) = \eta(\emptyset) = \emptyset$. Es sei $X \xrightarrow{M} X'$ eine Transition in $T_{step}(\mathcal{E})$. Da η ein Morphismus zwischen Ereignisstrukturen ist, erhalten wir $\eta(X), \eta(X') \in \text{Konf}(\mathcal{F})$. Weiterhin ist f injektiv auf X' . Damit gibt es in $T_{step}(\mathcal{F})$ eine Transition $\eta(X) \xrightarrow{M} \eta(X')$.

Offenkundig gelten $T_{step}(id_{\mathcal{E}}) = id_{T_{step}(\mathcal{E})}$ und $T_{step}(\eta \circ \theta) = (T_{step}(\eta)) \circ (T_{step}(\theta))$ für alle Morphismen $\eta : \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_3$, $\theta : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ aus \mathbf{E}_{Akt} .

zu B2: Es sei $\mathcal{S} = (S, \leq, \sharp, l) = \mathcal{M}_1; \mathcal{M}_2; \dots; \mathcal{M}_n$, $n \geq 0$, ein Schritt, wobei $\mathcal{M}_i = (M_i, \leq_{M_i}, \emptyset, l_i)$. Wir wählen die Konfiguration S als den erreichbaren Zustand. Um zu zeigen, daß S erreichbar ist, betrachten wir eine Konfiguration $X \in \text{Konf}(\mathcal{S})$. Aufgrund der Struktur von \mathcal{S} gilt, daß $S \setminus X = R \cup \bigcup_{i=k+1}^n M_i$ für eine Menge $R \subseteq M_k$ und ein $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Wir definieren Multimengen

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

über $Akt : A(a) := |\{e \in R \mid l(e) = a\}|$, und $A_i(a) := |\{e \in M_{i+1} \mid l(e) = a\}|$, $i = k, k+1, \dots, n \Leftrightarrow 1$, $a \in Akt$. Mit diesen Bezeichnungen ist

$$X \xleftrightarrow{A_1} \bigcup_{i=1}^k M_i \xleftrightarrow{A_k} \bigcup_{i=1}^{k+1} M_i \xleftrightarrow{A_k} \dots \xleftrightarrow{A_n} S$$

eine Ableitung von X nach S in $T_{step}(\mathcal{S})$.

Zu B3: Es sei $s_1 \xleftrightarrow{A_1} s_2 \xleftrightarrow{A_2} \dots \xleftrightarrow{A_{n-1}} s_n$, $n \geq 1$, eine Ableitung in einem Transitionssystem aus $\mathbf{T}_{\mathbb{N}^{Akt}}$. Für die folgende Konstruktion gehen wir davon aus, daß die universelle Menge U ausreichend viele Ereignisnamen bereitstellt. Wir betrachten den Schritt $\mathcal{S} = (S, \leq, \sharp, l) = \mathcal{M}_1; \mathcal{M}_2; \dots; \mathcal{M}_{n-1}$, mit $\mathcal{M}_i = (M_i, \leq_{M_i}, \emptyset, l_i)$, $\leq_{M_i} = \{(m, m) \mid m \in M_i\}$, M_i paarweise disjunkt, $\forall a \in Akt$, $\forall 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow 1 : A_i(a) = |\{e \in M_i \mid l_i(e) = a\}|$. $T_{step}(\mathcal{S})$ hat die Ableitung

$$\emptyset \xleftrightarrow{A_1} M_1 \xleftrightarrow{A_2} M_1 \cup M_2 \xleftrightarrow{A_3} \dots \xleftrightarrow{A_{n-1}} S,$$

wobei \emptyset der Anfangszustand und S der erreichbare Zustand von $T_{step}(\mathcal{S})$ ist.

Es sei $\mathcal{E} = (E, \leq_E, \sharp_E, l_E)$ eine Ereignisstruktur aus \mathbf{E}_{Akt} mit einer Ableitung $X_1 = \emptyset \xleftrightarrow{A_1} X_2 \xleftrightarrow{A_2} X_3 \xleftrightarrow{A_3} \dots \xleftrightarrow{A_{n-1}} X_n$ in $T_{step}(\mathcal{E})$. Für die oben eingeführten Mengen M_i und die Differenzmengen $X_{i+1} \setminus X_i$ der Konfiguration von \mathcal{E} gilt $\forall a \in Akt : A_i(a) = |\{e \in M_i \mid l_i(e) = a\}| = |\{e \in X_{i+1} \setminus X_i \mid l_E(e) = a\}|$, $1 \leq i \leq n \Leftrightarrow 1$. Demnach gibt es bijektive Abbildungen $p_i : M_i \rightarrow X_{i+1} \setminus X_i$ mit $l_E(p_i(e)) = l_i(e)$ für alle Ereignisse $e \in M_i$, $i = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow 1$. Wir behaupten, daß $p := \bigcup_{i=1}^{n-1} p_i$ der gesuchte Morphismus von \mathcal{S} nach \mathcal{E} ist.

Offenkundig ist p markierungserhaltend und injektiv auf allen Konfigurationen von \mathcal{S} . Da die Mengen X_n konfliktfrei sind, gilt dies auch für $p(Y) \subseteq X_n$ für alle Konfigurationen $Y \in Konf(\mathcal{S})$. Damit bleibt noch zu zeigen, daß das Bild einer Konfiguration $Y \in Konf(\mathcal{S})$ linksabgeschlossen ist in E .

Es sei $e \in p(Y)$ für eine Konfiguration $Y \in Konf(\mathcal{S})$, es gelte $e' \leq_E e$ und $e' \neq e$. Da X_n linksabgeschlossen ist, folgt $e' \in X_n$. Da $e' \leq_E e$, gibt es ein $j \in \{1, 2, \dots, n \Leftrightarrow 1\}$ mit $e' \in X_j, e \notin X_j$. Daher gilt für die Ereignisse $f, f' \in S$ mit $p(f) = e, p(f') = e'$, daß $f' \leq_S f$. Da Y eine Konfiguration ist, folgt $f' \in Y$ und damit $p(f') = e' \in p(Y)$. Mit der Definition von p erhalten wir schließlich: $\forall 1 \leq i \leq n : (T_{step}(p))(\bigcup_{j < i} M_j) = \bigcup_{j < i} p_j(M_j) = X_{i+1}$.

Zu B4: Die leere Ereignisstruktur erfüllt Bedingung B3.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Zu B5: Es seien \mathcal{S}_1 und \mathcal{S}_2 Schritte, es sei \mathcal{E} eine Ereignisstruktur, $m : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$, $p : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{E}$ und $q : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{E}$ Morphismen. Es sei $\emptyset = X_0 \xleftrightarrow{A_1} X_1 \xleftrightarrow{A_2} X_2 \xleftrightarrow{A_3} \dots \xleftrightarrow{X_{n-1}} X_n$ eine Ableitung in \mathcal{S}_1 , wobei X_n der erreichbare Zustand von \mathcal{S}_1 ist.

Es gelte $\forall 0 \leq i \leq n : (T_{step}(q) \circ T_{step}(m))(X_i) = T_{step}(p)(X_i)$. Daraus folgt insbesondere $(T_{step}(q) \circ T_{step}(m))(X_n) = T_{step}(p)(X_n)$. Da p , q und m als Morphismen injektiv auf Konfigurationen sind, erhalten wir für alle $e \in X_n$: $(q \circ m)(e) = p(e)$, d.h. $q \circ m = p$. ■

Beispiel 5.20 (Pfad-Step-Bisimulation \neq v.-w. Pfad-Step-Bisimulation)

Während für die Pfadkategorie **Lin** die Varianten Pfad-**Lin**-Bisimulation und vorwärts-rückwärts Pfad-**Lin**-Bisimulation übereinstimmen, ist dies für die Pfadkategorie **Step** nicht der Fall. Dies zeigen wir anhand der Ereignisstrukturen \mathcal{E} und \mathcal{F} aus Abbildung 31. Die gepunkteten Linien zwischen Ovalen um Ereignisse bedeuten, daß alle Ereignisse in dem einen Oval mit allen Ereignissen innerhalb des anderen Ovals in Konflikt stehen. So stehen z.B. die Ereignisse e_1 , e_2 und e_3 in Konflikt mit allen Ereignissen e_i mit $i \geq 4$.

Abbildung 32 zeigt die Transitionssysteme $T_{step}(\mathcal{E})$ und $T_{step}(\mathcal{F})$. Eine Markierung "a" – die sich z.B. im Transitionssystem $T_{step}(\mathcal{E})$ beim Pfeil von \emptyset nach $\{e_1\}$ findet – steht für eine Multimenge M mit $M(a) = 1$ und $M(x) = 0$ für alle $x \in \text{Akt}$ mit $x \neq a$. Analog steht eine Markierung "ab" – die sich u.a. im Transitionssystem $T_{step}(\mathcal{E})$ am Pfeil \emptyset nach $\{e_1, e_2\}$ findet – für eine Multimenge M mit $M(a) = 1$, $M(b) = 1$ und $M(x) = 0$ für alle $x \in \text{Akt}$ mit $x \notin \{a, b\}$. Abbildung 33 zeigt eine AM-Bisimulation (R, γ) zwischen $T_{step}(\mathcal{E})$ und $T_{step}(\mathcal{F})$ mit $(\emptyset, \emptyset) \in R$. Demnach sind \mathcal{E} und \mathcal{F} nach Theorem 5.11 step bisimilar und damit nach Korollar 5.19 Pfad-**Step**-bisimilar.

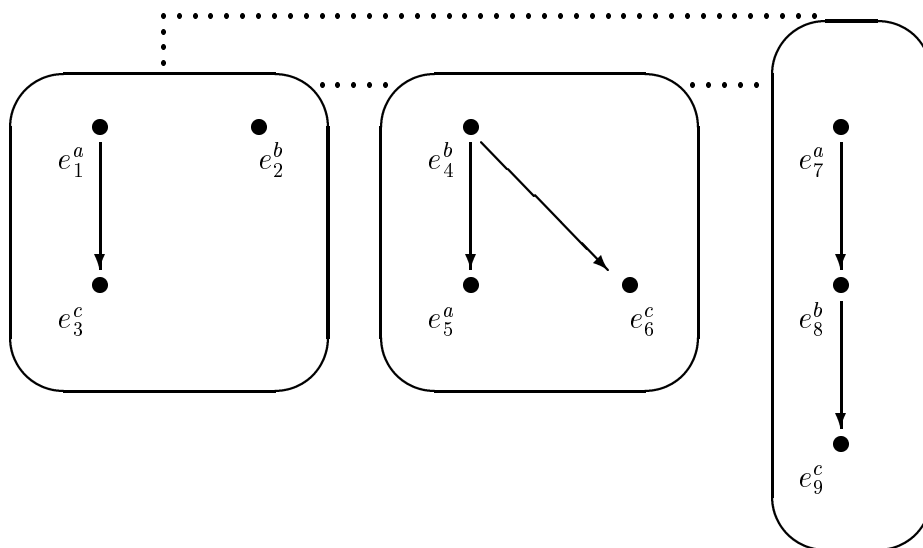
Wir nehmen an, daß es eine vorwärts-rückwärts Pfad-**Step**-Bisimulation R zwischen \mathcal{E} und \mathcal{F} gibt. Für R gilt dann:

„ $(o_1, o_2) \in R$:“ Wir betrachten eine Ereignisstruktur $O := (\{g_1, g_2\}, \emptyset, \emptyset, l_O)$, die aus zwei Ereignissen g_1 und g_2 mit $g_1 \text{ co } g_2$ besteht, wobei $l_O(g_1) := a$, $l_O(g_2) := b$. Offenkundig ist O ein Schritt. Die Abbildungen $o_1 : O \rightarrow \mathcal{E}$ mit $o_1(g_1) := e_1$, $o_1(g_2) := e_2$ und $o_2 : O \rightarrow \mathcal{F}$ mit $o_2(g_1) := f_1$, $o_2(g_2) := f_2$ sind Morphismen in \mathbf{E}_{Akt} . Demnach gilt $(o_1, o_2) \in R$ für jede Pfad-**Step**-Bisimulation R .

„ $(o_1 \circ m_1, o_2 \circ m_2) \in R$:“ Es sei $P := (\{g'\}, \{g' \leq_P g'\}, \emptyset, l_P(g') := a)$ eine Ereignisstruktur, die aus einem mit a markierten Ereignis besteht. Wir definieren einen Morphismus $m_1 : P \rightarrow O$ vermöge $m_1(g') := g_1$. Da R nach Voraussetzung eine vorwärts-rückwärts Pfad-**Step**-Bisimulation ist, erhalten wir $(o_1 \circ m_1, o_2 \circ m_2) \in R$.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Eine Ereignisstruktur \mathcal{E} :



Eine Ereignisstruktur \mathcal{F} :

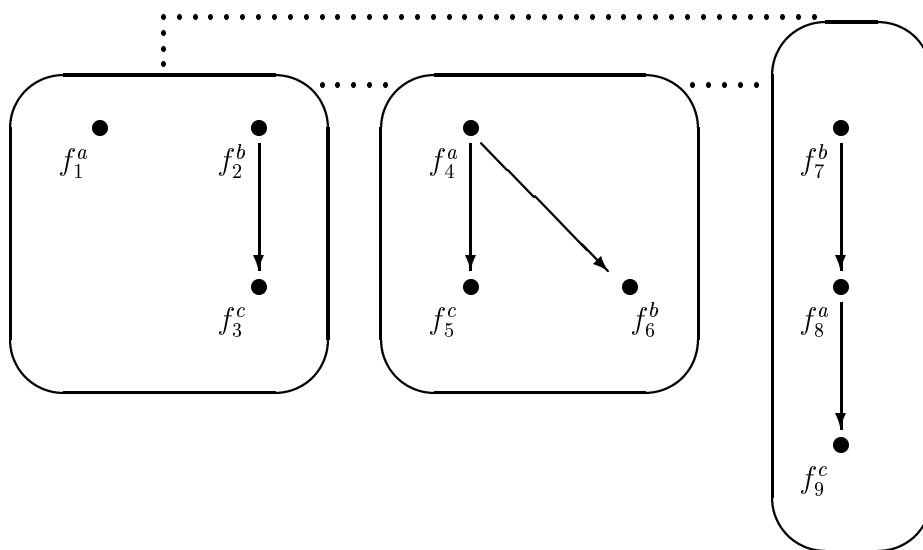


Abbildung 31: Step bisimulare Ereignisstrukturen \mathcal{E} und \mathcal{F} .

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

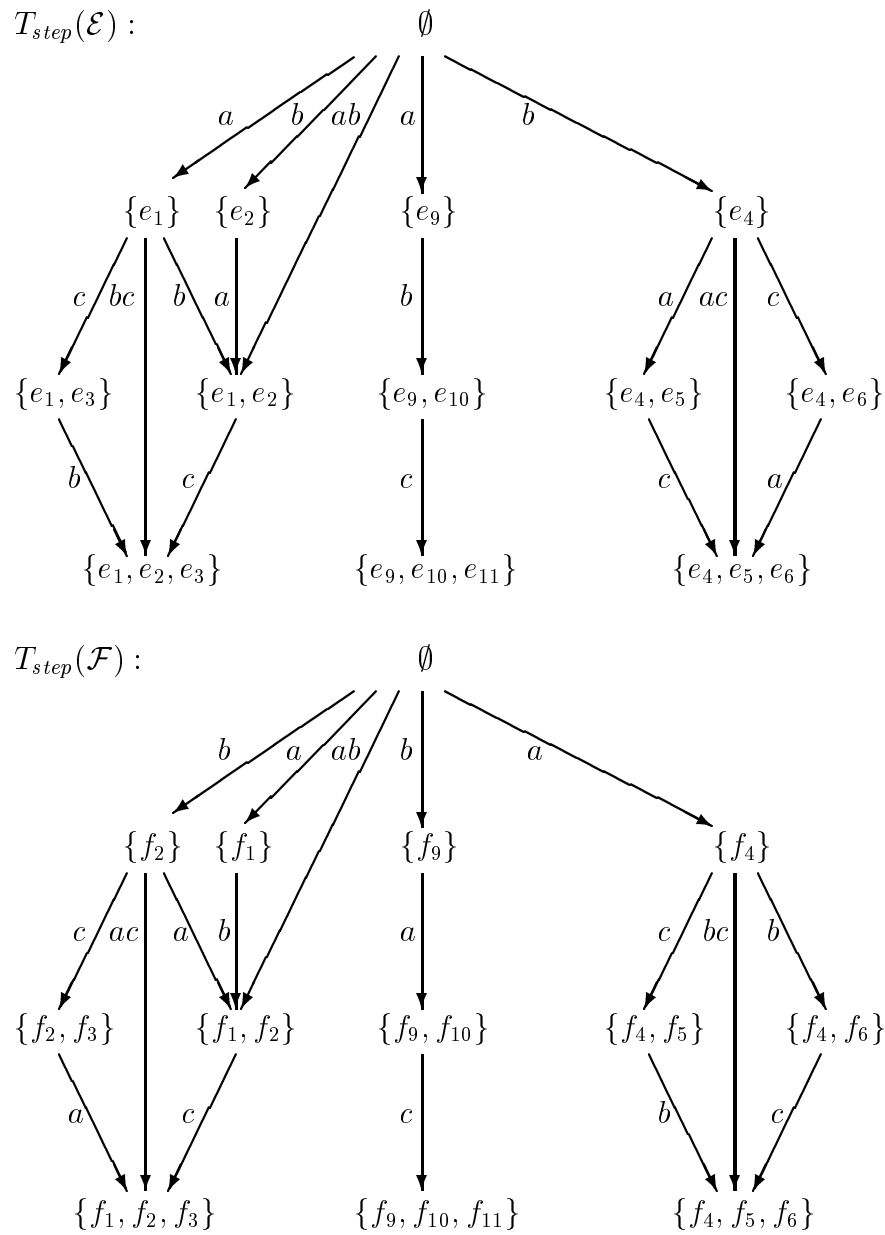


Abbildung 32: Transitionssysteme $T_{step}(\mathcal{E})$ und $T_{step}(\mathcal{F})$ zu den Ereignisstrukturen aus Abbildung 31.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

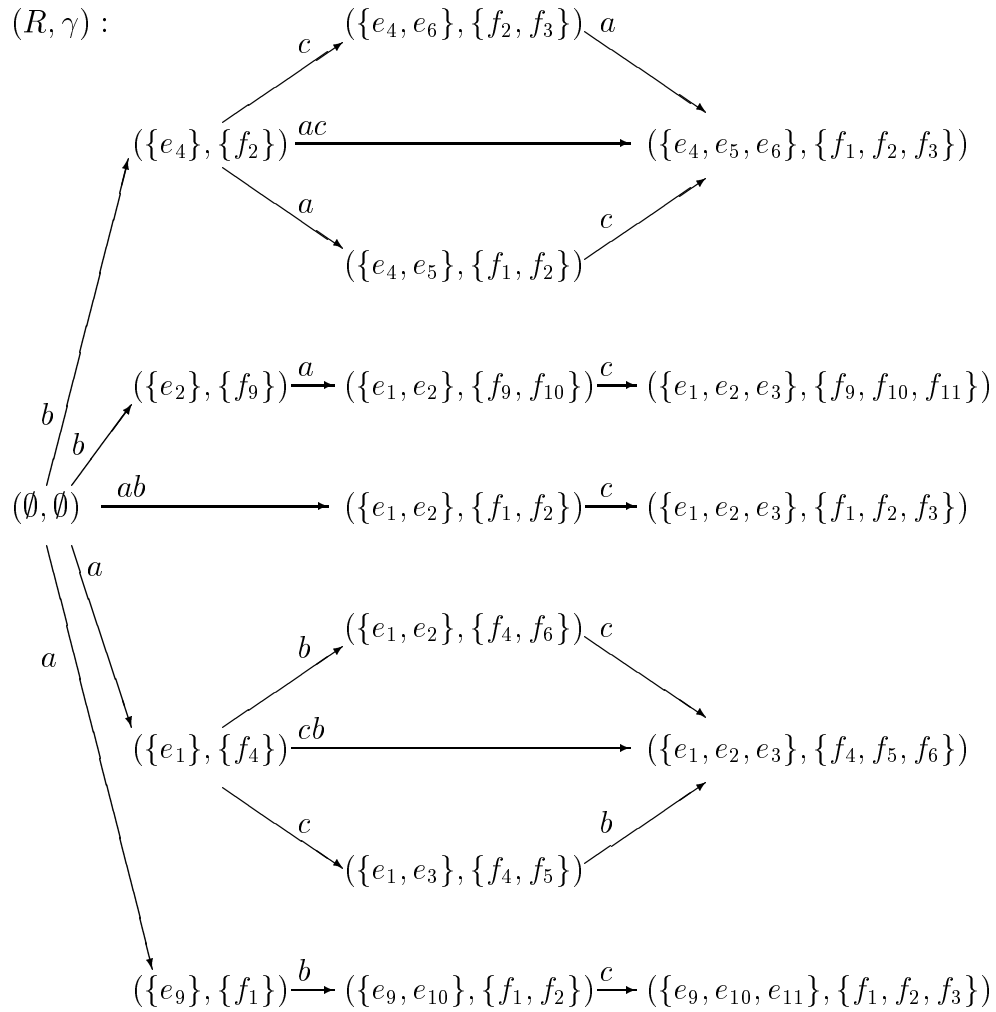


Abbildung 33: Eine AM-Bisimulation zwischen $T_{step}(\mathcal{E})$ und $T_{step}(\mathcal{F})$ aus Abbildung 32.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.



Abbildung 34: T_{pom} , T_{whp} und T_{hp} sind keine Funktoren.

„ $q_1 \circ m_2 = (o_1 \circ m_1)$ führt zum Widerspruch.“ Es sei $Q := (\{g_1'', g_2''\}, \leq_Q, \emptyset, l_Q)$ eine Ereignisstruktur mit zwei Ereignissen g_1'' und g_2'' , wobei $l_Q(g_1'') := a$, $l_Q(g_2'') := c$ und $g_1'' \leq_Q g_2''$. Wir definieren Morphismen

$$m_2 : P \rightarrow Q, m_2(g^1) := g_1'',$$

$$q_1 : Q \rightarrow \mathcal{E} \text{ mit } q_1(g_1'') := e_1 \text{ und } q_1(g_2'') := e_3.$$

Offensichtlich gilt $q_1 \circ m_2 = (o_1 \circ m_1)$, aber es gibt keinen Morphismus $q_2 : Q \rightarrow \mathcal{F}$ mit $q_2(g_1'') = f_1$ – Widerspruch.

Korollar 5.21 (Step-Bisimulation \neq step Bisimulation)

Step-Bisimulation und step Bisimulation stimmen nicht überein.

Beweis: Wir nehmen an, daß Step-Bisimulation und step Bisimulation äquivalent sind. Da die Ereignisstrukturen \mathcal{E} und \mathcal{F} aus Beispiel 5.20 step bisimilar sind, sind sie auch Step-bisimilar. Mit Theorem 4.10 folgt, daß \mathcal{E} und \mathcal{F} vorwärts-rückwärts Pfad-Step-bisimilar sind – Widerspruch. ■

Pomset, whp-, hp- und shp-Bisimulation

Die Operatoren T_{pom} , T_{whp} und T_{hp} sind nicht verbindend. Daher können wir zur Modellierung von pomset, whp-, hp- und shp-Bisimulation als \mathbb{P} -Bisimulation bzw. Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation Theorem 4.7 nicht verwenden. Für pomset und whp-Bisimulation bleibt es ein offenes Problem, ob es Pfadkategorien \mathbb{P} gibt, mit denen sie als \mathbb{P} -Bisimulation bzw. Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation dargestellt werden können. Im Fall von hp- und shp-Bisimulation greifen wir auf ein Ergebnis von [JNW94] zurück, das diese Bisimulationen auf Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge mit der Kategorie **PosK** darstellt, und übertragen diese Modellierung auf Ereignisstrukturen. Dabei bleibt offen, ob hp- und shp-Bisimulation in der Kategorie \mathbf{E}_{Akt} als \mathbb{P} -Bisimulation dargestellt werden können.

Lemma 5.22

Die Operatoren T_{pom} , T_{whp} und T_{hp} sind nicht verbindend.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Beweis: Es seien \mathcal{G} und \mathcal{H} die Ereignisstrukturen aus Abbildung 34. $\eta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ mit $\eta(g_1) = h_1$ und $\eta(g_2) = h_2$ ist ein Morphismus in \mathbf{E}_{Akt} . In \mathbf{T}_L gibt es jedoch keine Morphismen von $T_*(\mathcal{G})$ nach $T_*(\mathcal{H})$ für $*$ $\in \{pom, whp, hp\}$, $L \in \{[\mathbf{Pos}], Der_{Akt}\}$. ■

Für Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge geben [JNW94] die folgende Charakterisierung an:

Theorem 5.23 ((shp) hp-Bisimulation auf \mathbf{E}_{Akt} , [JNW94])

1. Ereignisstrukturen \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 aus \mathbf{E}_{Akt} sind shp-bisimilar, gdw. sie **PosK**-bisimilar sind.
2. Ereignisstrukturen \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 aus \mathbf{E}_{Akt} sind (shp) hp-bisimilar, gdw. sie (vorwärts-rückwärts) Pfad-**PosK**-bisimilar sind.

Das Ergebnis bezüglich (vorwärts-rückwärts) Pfad-**PosK**-Bisimulation läßt sich auf Ereignisstrukturen übertragen:

Korollar 5.24 ((shp) hp-Bisimulation auf \mathbf{E}_{Akt})

Für Ereignisstrukturen \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 aus \mathbf{E}_{Akt} sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind (shp) hp-bisimilar.
2. \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind (vorwärts-rückwärts) Pfad-**Pos**-bisimilar.
3. Es gibt eine (vorwärts-rückwärts) AM-Bisimulation (R, γ) mit $(\iota_1, \iota_2) \in R$ zwischen $T_{path-Pos}(\mathcal{E}_1)$ und $T_{path-Pos}(\mathcal{E}_2)$.

Beweis: Wir zeigen zunächst 1. \iff 2. Es seien \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 Ereignisstrukturen aus \mathbf{E}_{Akt} . Es seien \mathcal{E}'_1 und \mathcal{E}'_2 aus \mathbf{E}_{Akt} die ihnen in Lemma 2.10 zugeordneten Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge.

Es sei R eine (shp) hp-Bisimulation zwischen \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 aus \mathbf{E}_{Akt} . Nach Bemerkung 5.10 wissen wir, daß wir in der Definition von hp-Bisimulation die Relation $\overset{a}{\iff}$ verwenden dürfen. Nach Lemma 2.10 gilt für die Konfigurationen: $Konf(\mathcal{E}_1) = Konf_{end}(\mathcal{E}'_1)$ und $Konf(\mathcal{E}_2) = Konf_{end}(\mathcal{E}'_2)$. Da wir uns im Fall von (shp) hp-Bisimulation auf Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge auf die endlichen Konfigurationen beschränken können, folgt daraus, daß \mathcal{E}'_1 und \mathcal{E}'_2 (shp) hp-bisimilar sind.

Es seien \mathcal{E}'_1 und \mathcal{E}'_2 (shp) hp-bisimilar. Dann gibt es nach Theorem 5.23 eine (vorwärts-rückwärts) Pfad-**PosK**-Bisimulation R . Wie wir in Abschnitt 2.3 bemerkt haben, gibt es zu jedem Pfad-Objekt P' aus **PosK** ein Objekt P aus **Pos** und umgekehrt. Für die Morphismen von einem Pfadobjekt $P' \in \mathbf{PosK}$ zur Ereignisstruktur

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Bisimulation	AM I	AM II	Pfad- \mathbb{P}	\mathbb{P}
interleaving	T_{int}	(vr) $T_{path-\mathbf{Lin}}$	(vr) \mathbf{Lin}	\mathbf{Lin}
bf	vr T_{int}			
step	T_{step}	$T_{path-\mathbf{Step}}$	\mathbf{Step}	
pomset	T_{pom}			
whp	T_{whp}			
hp	T_{hp}	$T_{path-\mathbf{Pos}}$	\mathbf{Pos}	
shp	vr T_{hp}	vr $T_{path-\mathbf{Pos}}$	vr \mathbf{Pos}	\mathbf{PosK} auf \mathbf{EK}_{Akt}

Abbildung 35: Modellierungen von Bisimulationen auf Ereignisstrukturen.

\mathcal{E}'_1 gilt nach Lemma 2.10: $Hom_{\mathbf{E}_{Akt}}(P, \mathcal{E}_1) = Hom_{\mathbf{EK}_{Akt}}(P', \mathcal{E}'_1)$. Damit ist R eine (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbf{Pos} -Bisimulation in \mathbf{E}_{Akt} .

Die Äquivalenz von 2. und 3. folgt mit Theorem 4.2. ■

Korollar 5.25 (Pomset-Bisimulation)

Pomset Bisimulation stimmt weder mit \mathbf{Pos} -Bisimulation noch mit (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbf{Pos} -Bisimulation überein.

5.3.4 Zusammenfassung der Modellierungen

Abbildung 35 faßt zusammen, welche Bisimulationen auf Ereignisstrukturen aus Abschnitt 5.3.1 wir mit den abstrakten Charakterisierungen modelliert haben. In Spalte „AM I“ sind die Operatoren $T \neq T_{path-\mathbb{P}}$ aufgeführt, mit denen sich die jeweilige Bisimulation als (vorwärts-rückwärts) AM-Bisimulation modellieren läßt. Das Kürzel „vr“ bedeutet, daß für die Modellierung eine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation erforderlich ist. Diese Ergebnisse stammen aus Abschnitt 5.3.2. Spalte „Pfad- \mathbb{P} “ stellt Kategorien \mathbb{P} zusammen, mit denen die konkreten Bisimulationen als Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation modelliert werden können. Das Kürzel „(vr)“ in Klammern heißt, daß Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation und vorwärts-rückwärts Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation übereinstimmen. Ohne Klammern bedeutet es, daß zur Darstellung eine vorwärts-rückwärts Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation notwendig ist. Die Ergebnisse dieser Spalte finden sich in Abschnitt 5.3.3. In Spalte „AM II“ finden wir die aus Spalte „Pfad- \mathbb{P} “ mit Theorem 4.2 abgeleiteten Modellierungen einer Bisimulation als AM-Bisimulation mit dem Operator $T_{path-\mathbb{P}}$. Die Spalte „ \mathbb{P} “ gibt wieder, welche Bisimulationen wir als \mathbb{P} -Bisimulation dargestellt haben. Angegeben ist jeweils die Pfadkategorie \mathbb{P} . Zu beachten ist, daß sich das Resultat für shp-Bisimulation auf die Kategorie \mathbf{EK}_{Akt} bezieht.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Es ist eine offene Frage, ob die in Abbildung 35 offensichtlichen Lücken in den Modellierungen als (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation bzw. \mathbb{P} -Bisimulation geschlossen werden können. [JNW94] schreiben in diesem Zusammenhang³

*It might be thought that strong history-preserving bisimulation, presented as **Pom**-bisimilarity, is affected by restricting the category **Pom** to a smaller class of objects. However, no matter how much the objects in the path category **Pom** are restricted, provided they include all pom-sets of the “stick” and “lollipop” forms in the proof of Proposition 7, then the relation of bisimulation that results will coincide with strong history-preserving bisimulation.*

Natürlich gibt es auch für die abstrakte Charakterisierung AM-Bisimulation entsprechende Lücken. Es ist dem Autor nicht gelungen, die von [GKP92] eingeführte Run-Bisimulation als AM-Bisimulation darzustellen. Ebenso fällt der Begriff der Partial-Word-Bisimulation [Vog90] aus dem Rahmen. Allerdings stellt sich bei letzterem Begriff die Frage, ob es sich tatsächlich um eine Bisimulation handelt, oder ob er zu Recht nicht als AM-Bisimulation modelliert werden kann. Weder im Fall der Run-Bisimulation noch der Partial-Word-Bisimulation sind Modellierungen als \mathbb{P} -Bisimulation oder (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation bekannt. Insgesamt scheint dem Autor die Begriffsbildung der AM-Bisimulation die umfassendste und am flexibelsten zu handhabende von den drei hier untersuchten Charakterisierungen zu sein.

5.4 Transitionssysteme mit Unabhängigkeit

Transitionssysteme mit Unabhängigkeit sind ein relativ neues Modell für paralleles Rechnen. Dementsprechend sind auf ihm nahezu keine Bisimulationsbegriffe eingeführt worden. [JNW94] übertragen den Begriff der shp-Bisimulation mit Hilfe einer Coreflection von der Kategorie \mathbf{EK}_{Akt} auf die Kategorie \mathbf{TU}_{Akt} . Das entsprechende Paar von Funktoren bezeichnen [JNW94] mit $eti : \mathbf{EK}_{Akt} \rightarrow \mathbf{TU}_{Akt}$ bzw. $tie : \mathbf{TU}_{Akt} \rightarrow \mathbf{EK}_{Akt}$, definieren als Unterkategorie \mathbf{PosTU} das Bild der Kategorie \mathbf{PosK} unter eti und zeigen:

Theorem 5.26 (shp-Bisimulation auf \mathbf{TU}_{Akt} , [JNW94])

Transitionssysteme mit Unabhängigkeit \mathcal{U}_1 und \mathcal{U}_2 aus \mathbf{TU}_{Akt} sind \mathbf{PosTU} -bisimilar gdw. $tie(\mathcal{U}_1)$ und $tie(\mathcal{U}_2)$ \mathbf{PosK} -bisimilar sind.

³In der Arbeit [JNW94] ist die Bezeichnung \mathbf{Pom} für die Kategorie \mathbf{PosK} gewählt.

Auf dieses Ergebnis können wir die Charakterisierungen von shp-Bisimulation aus Abschnitt 5.3.3 anwenden und erhalten:

Korollar 5.27 (shp-Bisimulation auf \mathbf{TU}_{Akt})

Für Transitionssysteme mit Unabhängigkeit \mathcal{U}_1 und \mathcal{U}_2 aus \mathbf{TU}_{Akt} sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. \mathcal{U}_1 und \mathcal{U}_2 sind **PosTU**-bisimilar.
2. $tie(\mathcal{U}_1)$ und $tie(\mathcal{U}_2)$ sind vorwärts-rückwärts Pfad-**PosK**-bisimilar.
3. Es gibt eine vorwärts-rückwärts AM-Bisimulation (R, γ) mit $(\iota_1, \iota_2) \in R$ zwischen $T_{path-PosK}(tie(\mathcal{U}_1))$ und $T_{path-PosK}(tie(\mathcal{U}_2))$.

Beweis: Die Äquivalenz von 1. und 2. folgt mit Theorem 5.23, die von 2. und 3. mit Theorem 4.2. ■

6 Zusammenfassung

Diese Arbeit vergleicht drei abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation: AM-Bisimulation, \mathbb{P} -Bisimulation und Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation. Diesen Charakterisierungen ist gemeinsam, daß sie die Sprache der Kategorientheorie verwenden, um das Konzept der Bisimulation unabhängig von einem konkreten Modell parallelen Rechnens zu formulieren. Allerdings füllen sie diesen Begriff unterschiedlich (Abschnitt 3.5). Anschaulich gesprochen ist zwischen zwei Objekten X_1 und X_2 einer Kategorie von Modellen \mathbb{M} eine

AM-Bisimulation ein Transitionssystem, welches das operationale „Verhalten“ wiedergibt, das beiden Objekten gemeinsam ist.

\mathbb{P} -Bisimulation ein Objekt X der Kategorie \mathbb{M} , das Bild aller „gemeinsamer Pfadobjekte“ von X_1 und X_2 aus \mathbb{P} ist.

Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation eine Menge von Pfadpaaren, die unter „Pfadfortsetzung“ abgeschlossen ist.

Der direkte Vergleich der abstrakten Charakterisierungen (Kapitel 4) ergibt, daß jede (vorwärts-rückwärts) Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation äquivalent ist zu einer speziellen (vorwärts-rückwärts) AM-Bisimulation (Theorem 4.2). Für die Umkehrung dieser Aussage benötigen wir zahlreiche Voraussetzungen (Theorem 4.7). In Bezug auf das Konzept der \mathbb{P} -Bisimulation gilt (Theorem 4.10): Sind Objekte X_1 und X_2 einer Kategorie \mathbb{P} -bisimilar, so sind sie vorwärts-rückwärts Pfad- \mathbb{P} -bisimilar bzw. sind $T_{path-\mathbb{P}}(X_1)$ und $T_{path-\mathbb{P}}(X_2)$ vorwärts-rückwärts AM-bisimilar – die Umkehrung dieser Implikation gilt im allgemeinen nicht. Das Problem besteht darin, daß in der Kategorie \mathbb{M} der Modelle nicht immer ein Objekt X existiert, welches Bild aller „gemeinsamen Pfadobjekte“ von X_1 und X_2 ist. Um dieser Schwierigkeit zu begegnen, verwenden [JNW94] die reichhaltigere Kategorie von Presheafs $[\mathbb{P}^{op}, \mathbf{Set}]$ – allerdings um den Preis, daß es in dieser Kategorie Objekte gibt, die keine Interpretation im Sinn des ursprünglichen Modells \mathbb{M} zulassen. Daher kommen wir zu dem Schluß, daß das Konzept der AM-Bisimulation von den drei untersuchten das umfassendste ist. Dieses Bild bestätigt sich beim Modellieren konkreter Bisimulationen mit den abstrakten Charakterisierungen (Kapitel 5). Auf Ereignisstrukturen können alle hier betrachteten Bisimulationen als AM-Bisimulationen dargestellt werden, mit den Konzepten \mathbb{P} -Bisimulation und Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation ist uns dies nicht immer gelungen. Wie die Einschätzung von [JNW94], vergleiche Abschnitt 5.3.4, und die Ergebnisse unseres direkten Vergleichs zeigen, kann die Ursache dafür durchaus prinzipieller Natur sein.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Wie wir in Abschnitt 5.1 gesehen haben, sind die Begriffe AM-Bisimulation und Bisimulation auf Transitionssystemen äquivalent. Damit stellt sich die Frage, welche neue Substanz der Begriff der AM-Bisimulation mit sich bringt. Zum einen ist der Begriff der AM-Bisimulation ein Spezialfall der F -Bisimulation (Abschnitt 3.2), dem ursprünglich von [AM89] eingeführten Begriff. Zwar ist der weitere Spielraum, den die F -Bisimulation bietet, für unsere Untersuchung nicht erforderlich. Doch gibt es Modellierungen von konkreten Bisimulationen, die darauf zurückgreifen (Abschnitt 5.1.3). Zum anderen eröffnet der Begriff AM-Bisimulation eine neue Sichtweise auf das Phänomen Bisimulation: Während Milner den Begriff als Invariante zwischen dynamischen Systemen auffaßt (Vorwort zu [Mil89]), ist eine AM-Bisimulation als Transitionssystem selbst ein dynamisches System. Diese Auffassung von Bisimulation erweist sich als hilfreich sowohl bei den Beweisen der Theoreme 4.2 und 4.7 als auch beim Modellieren konkreter Bisimulationen als AM-Bisimulation: Viele Konstruktionen auf einer Relation R werden erst einsichtig, wenn die Elemente von R als Zustände eines Transitionssystems (R, γ) aufgefaßt werden.

Zusammenfassend können wir formulieren: Aufgrund der beiden Vergleiche der abstrakten Charakterisierungen, des direkten in Kapitel 4 und des Vergleichs in Kapitel 5 über die Möglichkeit, konkrete Bisimulationen zu modellieren, kommen wir zu dem Schluß, daß AM-Bisimulation von den untersuchten Konzepten das umfassendste und flexibelste ist. Wie wir oben ausgeführt haben, eröffnet AM-Bisimulation zudem eine neue Sichtweise auf das Konzept Bisimulation.

Index

- AM-Bisimulation, 27, 46, 55, 60, 76, 78, 79, 87, 95
 - Informationsgehalt, 30
 - vorwärts-rückwärts, 28, 46, 55, 58, 76, 77, 79, 87, 95, 98
- bf-Bisimulation, 71, 76, 87
- Bisimulation
 - Ereignisstruktur
 - bf, 71, 76, 87
 - hp, 72, 79, 95
 - interleaving, 15, 70, 76, 83, 87
 - pomset, 71, 76, 96
 - shp, 72, 79, 95, 97, 98
 - step, 71, 76, 88, 94
 - whp, 71, 78
 - Ereignisstruktur mit Konsistenzmenge
 - hp, 74
 - shp, 74
 - Transitionssystem, 10
 - Transitionssystem mit Unabhängigkeit, 97, 98
- Coalgebra, 26
 - Homomorphismus, 26, 28
 - „inverse“ Coalgebra, 27
 - Kategorie von, 26
- Der_{Akt} , 15
- deterministisch
 - Ereignisstruktur, 15
 - Transitionssystem, 10
 - Transitionssystem mit Unabhängigkeit, 21
- Ereignisstruktur, 13
 - $\mathcal{E} = (E, \leq, \sharp, l)$, 13
 - Äquivalenzklasse einer Derivation, 15
 - Der_{Akt} , 15
 - Derivation, 14
 - deterministisch, 15
 - endlich, 14
 - endlich verzweigt, 15
 - Ereignismenge, 13
 - Flußrelation, 13
 - Konfiguration, 13
 - Konfliktrelation, 13
 - Lposet, 14
 - Markierungsfunktion, 13
 - ohne auto-concurrency, 15
 - Pomset, 16
 - Prinzip der endlichen Ursachen, 13
 - Prinzip der Konfliktvererbung, 13
 - Schritt, 16
 - Tiefe eines Ereignisses, 16
 - trace-Äquivalenz, 15
 - unabhängige Ereignisse, 14
 - [Pos], 16
- Ereignisstruktur mit Konsistenzmenge, 16
 - $\mathcal{E} = (E, \leq, Km, l)$, 16
 - Ereignismenge, 16
 - Flußrelation, 16
 - Konfiguration, 16
 - Konsistenzmenge, 16
 - Markierungsfunktion, 16
 - Prinzip der endlichen Ursachen, 16

- erreichbarer Zustand, 48, 50
- F -Bisimulation, 27
- Hoare-Sprache, 12
 - \mathcal{H} , 12
 - Synchronisationsbaum zu \mathcal{H} , 12
- Homomorphismus zwischen Coalgebren, 26
- Homomorphismus zwischen Coalgebren, 28
- hp-Bisimulation, 72, 74, 79, 95
- interleaving Bisimulation, 15, 70, 76, 83, 87
- Kategorie
 - \mathbb{C}_F der Coalgebren zu F , 26
 - \mathbf{EK}_{Akt} der Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge, 17
 - \mathbf{PosK} , 19
 - \mathbf{E}_{Akt} der Ereignisstrukturen, 13
 - \mathbf{Step} , 16
 - \mathbf{Lin} , 15
 - \mathbf{Pos} , 16
 - \mathbf{S}_{Akt} der Synchronisationsbäume, 11
 - \mathbf{TU}_{Akt} der Transitionssysteme mit Unabhängigkeit, 20
 - \mathbf{T}_{Akt} der Transitionssysteme, 9
 - \mathbf{Bran} , 10
 - initiale Objekte in \mathbf{T}_{Akt} , \mathbf{S}_{Akt} , \mathbf{E}_{Akt} , \mathbf{EK}_{Akt} und \mathbf{TU}_{Akt} , 39
 - Pullbacks in \mathbf{T}_{Akt} , \mathbf{S}_{Akt} , \mathbf{E}_{Akt} , \mathbf{EK}_{Akt} und \mathbf{TU}_{Akt} , 35
- Lposet, 14
- mt , verbindender Operator, 48, 55
- Modelle
 - behaviour, 7, 11, 12
 - branching-time, 7, 8, 11, 12, 19
 - interleaving, 7, 8, 11
 - linear-time, 7, 21
 - system, 7, 8, 19
 - true-concurrency, 7, 12, 19
- Morphismus
 - σ zwischen Transitionssystemen, 9
 - σ zwischen Transitionssystemen mit Unabhängigkeit, 20
 - η zwischen Ereignisstrukturen mit Konsistenzmenge, 17
 - η zwischen Ereignisstrukturen, 13
 - \mathbb{P} -offen, 34
- Operator
 - für Ereignisstrukturen
 - T_{hp} , 76, 94
 - T_{int} , 15, 76, 77, 83, 87
 - T_{pom} , 76, 77, 94
 - T_{step} , 76, 77, 88
 - T_{whp} , 76, 94
 - für Transitionssysteme
 - T_{det} , 67, 68
 - mt , 48, 55
 - $T_{path-\mathbb{P}}$, 45, 46, 51, 60, 87, 95, 98
 - verbindend, 48, 55, 83, 88, 94
- \mathbb{P} -Bisimulation, 35, 61, 83, 87, 94–97
- \mathbb{P} -offen, 34
- Pfad, 38
- Pfad- \mathbb{P} -Bisimulation, 38, 46, 55, 87, 88, 90, 95, 96
 - vorwärts-rückwärts, 38, 46, 58, 61, 87, 90, 95, 96, 98
- Pomset, 16
- pomset Bisimulation, 71, 96

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

- [Pos], 16
- probabilistische Bisimulation, 68
- Pullback, 35
- schwache Bisimulation, 68
- shp-Bisimulation, 72, 74, 79, 95, 97, 98
- step Bisimulation, 71, 76, 88, 94
- Synchronisationsbaum, 11
- $\mathcal{S} = (S, s, \Leftrightarrow)$, 11
- $T_{path-\mathbb{P}}$, 45, 46, 51, 60
- Trace-Äquivalenz
- Ereignisstruktur, 15
- Transitionssystem, 10
- Transitionssystem, 8
- $\mathcal{T} = (S, s, \Leftrightarrow)$, 8
- \Leftrightarrow^* , 10
- Anfangszustand, 8
- deterministisch, 10
- Sprache $Lan(\mathcal{T})$, 10
- trace-äquivalent, 10
- Transition, 9
- Übergangsrelation, 8, 9
- Zustandsmenge, 8
- Transitionssystem mit Unabhängigkeit,
- 19
- $\mathcal{U} = (S, s, \Leftrightarrow, I)$, 19
- deterministisch, 21
- Unabhängigkeitsrelation, 20
- zugrundeliegendes Transitionssystem,
- 20
- Transitionssystem ohne Anfangszustand
- $\mathcal{T} = (S, \Leftrightarrow)$, 9
- unabhängige Ereignisse, 14
- verbindender Operator, 48, 55, 83, 88,
- 94

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

Literatur

- [ABS91] C. Autant, Z. Belmesk, and P. Schnoebelen. Strong bisimilarity on nets revisited. LNCS 506, 1991.
- [Acz94] P. Aczel. Final universes of processes. SLNCS 802, 1994.
- [AM89] P. Aczel and N. Mendler. A final coalgebra theorem. LNCS 389, 1989.
- [Che92] F. Cherief. Back and forth bisimulations on prime event structures. LNCS 605, 1992.
- [CN95] A. Cheng and M. Nielsen. Open maps (at) work. Technical Report RS-95-23, BRICS, 1995.
- [DDNM93] P. Degano, R. De Nicola, and U. Montanari. Universal axioms for bisimulation. *Theoretical Computer Science*, 114:63–91, 1993.
- [DNMV90] R. De Nicola, U. Montanari, and F. W. Vaandrager. Back and forth bisimulations. LNCS 458, 1990.
- [GG89] R. van Glabbeek and U. Goltz. Equivalence notions for concurrent systems and refinement of actions. LNCS 379, 1989.
- [GG90] R. van Glaabeek and U. Goltz. Equivalences and refinement. LNCS 469, 1990.
- [GKP92] U. Goltz, R. Kuiper, and W. Penczek. Propositional temporal logics and equivalences. LNCS 630, 1992.
- [GV87] R. van Glabbeek and F. Vaandrager. Petri net models for algebraic theories of concurrency. LNCS 259, 1987.
- [Hoa85] C. Hoare. *Communicating Sequential Processes*. Prentice Hall, 1985.
- [JNW94] A. Joyal, M. Nielsen, and G. Winskel. Bisimulation from open maps. Technical Report RS-94-7, BRICS, 1994.
- [LG91] R. Loogen and U. Goltz. Modelling nondeterministic concurrent processes with event structures. *Fundamenta Informaticae*, XIV:39–74, 1991.
- [Mal95] P. Malacaria. Studying equivalences of transition systems with algebraic tools. *Theoretical Computer Science*, 139(1–2):187–205, 1995.

Über abstrakte Charakterisierungen von Bisimulation.

-
- [MCR98] M. Majster-Cederbaum and M. Roggenbach. Transition systems from event structures revisited. *Information Processing Letters*, 67(3):119–124, 1998.
- [Mil80] R. Milner. *A calculus of communicating systems*. LNCS 92, 1980.
- [Mil89] R. Milner. *Communication and Concurrency*. Prentice Hall, 1989.
- [Mil92] R. Milner. *Actions structures*, 1992.
- [MN92] M. Mukund and M. Nielsen. CCS, locations and asynchronous transition systems. LNCS 652, 1992.
- [MP97] U. Montanari and M. Pistore. Minimal transition systems for history-preserving-bisimulation. LNCS 1200, 1997.
- [NW95] M. Nielsen and G. Winskel. Petri nets and bisimulations. Technical Report RS-95-4, BRICS, 1995.
- [Par81] D. Park. Concurrency and automata on infinite sequences. LNCS 104, 1981.
- [RT92] J.J.M.M. Rutten and D. Turi. On the foundations of final semantics: Non-standard sets, metric spaces, partial orders. Technical Report CS-R9241, Centrum voor Wiskunde en Informatica, 1992.
- [SNW96] V. Sassone, M. Nielsen, and G. Winskel. Models for concurrency,. *Theoretical Computer Science*, 170(1–2):297–348, 1996.
- [Vog90] W. Vogler. Bisimulation and action refinement. SFB-Bericht NR. 342 / 10 / 90 A, TU München, 1990.
- [Vog93] W. Vogler. Bisimulation and action refinement. *Theoretical Computer Science*, (114):173–200, 1993.
- [VR97] E.P. de Vink and J.J.M.M. Rutten. Bisimulation for probabilistic transition systems: a coalgebraic approach. LNCS 1256, 1997.
- [WN95] G. Winskel and M. Nielsen. Models for concurrency. In S. Abramsky, D. Gabbay, and T. S. E. Maibaum, editors, *Handbook of Logic in Computer Science*. Oxford University Press, 1995.

Lebenslauf

Name Markus Roggenbach
Geburtsdatum 13. März 1966
Geburtsort Wolfsburg

Ausbildung

Schulbildung	1972 – 1976	Rabenbergschule in Wolfsburg
	1976 – 1978	Hermann-Löns-Schule in Wolfsburg
	1978 – 1985	Ratsgymnasium in Wolfsburg
		Abschluß: Allgemeine Hochschulreife
Studium	1985 – 1986	Studium der Musik an der Nordwestdeutschen Musikakademie Detmold bei Professor Schmalfuß im Fach Oboe
	1986 – 1988	Studium der Mathematik und Informatik an der TU Braunschweig
	14.09.1988	Vordiplom in Informatik
	10.10.1988	Vordiplom in Mathematik
	1988 – 1993	Studium der Informatik an der Universität Karlsruhe (TH)
	2.11.1993	Diplom in Informatik

Beruf

seit Januar 1994 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für
Praktische Informatik II an der Universität Mannheim.