Über die c-Reflexivität von $C_c(X)$

von H.-P. Butzmann

Nr. 16 1971

Über die c-Reflexivität von $C_c(X)$

von H.-P. Butzmann

Für einen Limesraum X bezeichne $C_c(X)$ die $\mathbb{R}$ -Algebra aller stetigen, reellwertigen Funktionen auf X, versehen mit der Limitierung der stetigen Konvergenz und $P(C_c(X))$ die Menge aller stetigen Halbnormen auf $C_c(X)$. Die von $P(C_c(X))$ auf $C_c(X)$ induzierte Topologie - die feinste lokalkonvexe Topologie, die gröber ist als die Limitierung der stetigen Konvergenz - heißt die zur Limitierung der stetigen Konvergenz assoziierte lokalkonvexe Topologie. Wir werden im 1. Teil dieser Arbeit zeigen, daß sie mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen zusammenfällt, wenn X zu der Klasse von Limesräumen gehört, die wir nach [1] c-einbettbar nennen.

Für einen Limesvektorraum E bezeichne L_cE die Menge aller linearen, stetigen Funktionale auf E, versehen mit der Limitierung der stetigen Konvergenz, und der Raum E soll c-reflexiv heißen, wenn der natürliche Homomorphismus von E in L_cL_cE ein Homöomorphismus ist. Im 2. Teil werden wir die c-Reflexivität von $C_c(X)$ für jeden Limesraum X beweisen.

Im 3. Teil werden wir schließlich zeigen, daß L_cL_cE die (topologische) Vervollständigung von E ist, wenn E ein lokalkonvexer, topologischer Vektorraum ist. Also ist E in diesem Falle genau dann c-reflexiv, wenn E vollständig ist.

Die Resultate der Teile 1 und 2 entstammen der Dissertation des Autors. Viele Beweise sind jedoch vereinfacht und verkürzt wiedergegeben. Die Anwendungen dieser Ergebnisse auf topologische insbesondere lokalkonvexe, topologische Vektorräume wurden zusammen mit E. Binz gefunden.

I. Die assoziierte lokalkonvexe Topologie von $C_c(X)$

Es sei (E,Λ) ein Limesvektorraum und $P(E)$ die Menge aller stetigen Halbnormen auf (E,Λ). Die Menge $P(E)$ induziert auf E eine lokalkonvexe Topologie τ, die gröber als Λ ist. In der Tat ist τ die feinste lokalkonvexe Topologie auf E, die gröber ist als Λ, und daher heißt (E,τ) der zu (E,Λ) assoziierte lokalkonvexe Vektorraum. Für $(E,\Lambda) = C_c(X)$ soll er $C_{\tau c}(X)$ genannt werden. Bezeichnen wir mit $C_k(X)$ die Menge $C(X)$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von X, so ist die Identität von $C_c(X)$ in $C_k(X)$ immer stetig. Nun soll in diesem Teil gezeigt werden, daß sie für einen c-einbettbaren Limesraum X ein Homöomorphismus ist, d.h. in diesem Falle ist der zu $C_c(X)$ assoziierte lokalkonvexe Vektorraum $C_k(X)$.

Es sei X ein Limesraum und $K \subseteq X$ kompakt. Definiert man

$$p_K : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)| \quad \text{für alle } f \in C(X),$$

so ist p_K eine stetige Halbnorm auf $C_c(X)$. Weiterhin erzeugt das System

$$\{p_K \mid K \subseteq X,\ K \text{ kompakt}\}$$

die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen auf $C(X)$. Es bezeichne $\mathbb{P}$ wiederum die Menge aller stetigen Halbnormen auf $C_c(X)$, dann ist die Homöomorphie von

$$\mathrm{id} : C_{\tau_c}(X) \longrightarrow C_k(X)$$

äquivalent zu der Aussage:

Zu jedem $p \in P$ existieren eine kompakte Menge $K \subseteq X$ und eine reelle Zahl $\alpha > 0$ mit der Eigenschaft:

$$p \leq \alpha p_K \quad .$$

Es sei $\tilde{P}$ die Menge aller Halbnormen $p \in P$, für die gilt:

(i) $p(f) = p(|f|)$ für alle $f \in C(X)$

(ii) $p(f) \leq p(g)$ für alle f und g aus $C(X)$ mit $|f| = f \leq g$.

Wir werden zunächst zeigen, daß die von P und $\tilde{P}$ erzeugten Topologien übereinstimmen. Dazu brauchen wir die beiden folgenden Lemmata:

Lemma 1 *Es sei* X *ein Limesraum. Definiert man für eine beliebige Teilmenge* $F \subseteq C(X)$

$$\urcorner F = \{f \in C(X) \mid \text{es existiert ein } g \in F \text{ mit } |f| \leq |g|\},$$

dann konvergiert ein Filter Θ *auf* $C_c(X)$ *genau dann gegen Null, wenn* $\urcorner\Theta$ *gegen Null konvergiert, dabei sei* $\urcorner\Theta$ *der von* $\{\urcorner F \mid F \in \Theta\}$ *erzeugte Filter.*

Den Beweis führt man durch einfaches Ausrechnen.

Lemma 2 *Es sei* ψ *eine positiv homogene, in Null stetige Abbildung von* $C(X)$ *in* $\mathbb{R}$, *dann ist* ψ *beschränkt, d.h. für jedes* $f_o \in C(X)$ *ist die folgende Menge beschränkt:*

$$\psi\{f \in C(X) \mid -f_o \leq f \leq f_o\} \quad .$$

<u>Beweis</u> Es sei $f_o \in C(X)$ und $A_{f_o} = \{f \in C(X) \mid -f_o \leq f \leq f_o\}$. Nehmen wir an, daß $\psi(A_{f_o})$ nicht beschränkt ist, dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $g_n \in A_{f_o}$ mit:

$$|\psi(g_n)| \geq n \quad ,$$

also

$$|\psi(\frac{g_n}{n})| \geq 1 \quad .$$

Andererseits gilt aber

$$-f_o \leq g_n \leq f_o \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad -\frac{f_o}{n} \leq \frac{g_n}{n} \leq \frac{f_o}{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad ,$$

woraus folgt, daß die Folge $(\frac{g_n}{n})$ gegen Null konvergiert. Da ψ in Null stetig ist, erhalten wir daraus die Konvergenz von $\psi(\frac{g_n}{n})$ gegen Null, also einen Widerspruch.

Nun definieren wir für jedes $p \in P$

$$\tilde{p} : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch:

$$\tilde{p}(f_o) = \sup\{p(f) \mid f \in C(X), |f| \leq |f_o|\}$$

$$\text{für alle } f_o \in C(X) \quad .$$

Nach Lemma 2 ist $\tilde{p}$ wohldefiniert, und es ist nicht schwer zu verifizieren, daß $\tilde{p}$ eine Halbnorm auf $C(X)$ ist. Wir beweisen daher nur die Stetigkeit von $\tilde{p}$:

Es konvergiere Θ gegen Null in $C_c(X)$, dann konvergiert nach Lemma 1 auch $\urcorner\Theta$ gegen Null. Da p stetig ist, gibt es zu jeder positiven reellen Zahl $\varepsilon > 0$ ein $F_\varepsilon \in \Theta$ mit den Eigenschaften:

$$F_\varepsilon = \neg F_\varepsilon$$

und

$$p(F_\varepsilon) \subseteq (-\varepsilon,\varepsilon) .$$

Sei $f_o \in F_\varepsilon$ und $|f| \leq |f_o|$, dann gilt $f \in F_\varepsilon$ und daher

$$p(f) < \varepsilon \quad ,$$

woraus wir

$$\tilde{p}(f_o) \leq \varepsilon$$

erhalten. Also gilt:

$$\tilde{p}(F_\varepsilon) \subseteq [-\varepsilon,\varepsilon] .$$

Daher gibt es zu jeder stetigen Halbnorm $p \in P$ eine stetige Halbnorm $\tilde{p} \in \tilde{P}$ mit der Eigenschaft:

$$p \leq \tilde{p} \quad ,$$

woraus folgt, daß P und $\tilde{P}$ in der Tat dieselbe Topologie auf $C(X)$ erzeugen.

Das folgende, sehr einfach zu beweisende, Lemma bildet den Schlüssel des Beweises dafür, daß P die Topologie der Kompakten Konvergenz auf $C(X)$ erzeugt:

Lemma 3 *Für jedes* $p \in \tilde{P}$ *ist der Kern von* p *ein abgeschlossenes Ideal in* $C_c(X)$.

Beweis Der Kern jeder stetigen Halbnorm auf $C_c(X)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $C_c(X)$, also bleibt zu zeigen, daß Ker p gegen Multiplikation mit Elementen aus $C(X)$ abgeschlossen ist.

Sei also $p \in \tilde{P}$, $f_o \in \operatorname{Ker} p$ und $g \in C(X)$. Definiert man

$$g_n = (-\underline{n} \vee g) \wedge \underline{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so konvergiert die Folge (g_n) gegen g und die Folge $(g_n f_o)$ gegen gf_o. (Dabei bezeichne "$\vee$" bzw. "$\wedge$" das (punktweise definierte) Supremum bzw. Infimum zweier Funktionen und $\underline{n}$ die konstante Funktion mit dem Wert n.)

Weiterhin gilt:

$$|f_o g_n| \leq n|f_o| \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad p(f_o g_n) \leq p(nf_o) = np(f_o) = 0 .$$

Also liegen alle $f_o g_n$ im Kern von p. Da p stetig ist, folgt, daß $f_o g \in \operatorname{Ker} p$ gilt.

Für ein Ideal $I \subseteq C(X)$ definiere man

$$N(I) = \{x \in X \mid f(x) = 0 \text{ für alle } f \in I\} .$$

Man rechnet leicht nach, daß $N(\operatorname{Ker} p)$ kompakt sein muß, wenn sich $p \in \tilde{P}$ durch das Vielfache einer Supremumsnorm über eine kompakte Menge majorisieren läßt. Beim Beweis dieser Kompaktheit müssen wir uns jedoch (wegen Lemma 5) auf die Klasse der c-einbettbaren Limesräume beschränken, die wir deshalb hier kurz beschreiben wollen:

Für einen Limesraum Y bezeichne $\mathit{Hom}_c C_c(Y)$ die Menge aller reellwertigen, unitären $\mathbb{R}$-Algebrenhomomorphismen auf Y, versehen mit der Limitierung der stetigen Konvergenz und

$$i_Y : Y \longrightarrow \mathit{Hom}_c C_c(Y)$$

werde definiert durch $i_Y(y)(f) = f(y)$ für alle $y \in Y$ und alle $f \in C(Y)$. In[3] wurde gezeigt, daß i_Y stets surjektiv ist. Wenn i_Y sogar ein Homöomorphismus ist, nennen wir Y , der Terminologie von [3] folgend, c-einbettbar. Als Beispiele c-einbettbarer Limesräume erwähnen wir hier die vollständig regulären topologischen Räume und $C_c(Y)$ für jeden Limesraum Y. Ferner sind Unterräume c-einbettbarer Limesräume wieder c-einbettbar.

Unser Ziel ist es nun, für jeden c-einbettbaren Limesraum zu beweisen, daß $N(\operatorname{Ker} p)$ für alle $p \in \widetilde{P}$ kompakt ist und $p \leq p(\underline{1})\, p_{N(\operatorname{Ker} p)}$ gilt. Zum Beweis der Kompaktheit brauchen wir die folgende Definition und die sich anschließenden beiden Lemmata (s.[8]):

<u>Definition</u> *Ein System* $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ *von Teilmengen eines Limesraumes* X *heißt Überdeckungssystem von* X *, wenn es zu jedem* $x \in X$ *und jedem gegen* x *konvergenten Filter* Φ *ein* $U_{x,\Phi} \in \mathfrak{U}$ *gibt mit* $x \in U_{x,\Phi}$ *und* $U_{x,\Phi} \in \Phi$.

<u>Lemma 4</u> *Ein hausdorffscher Limesraum ist genau dann kompakt, wenn es zu jedem Überdeckungssystem* $\mathfrak{U}$ *von* X *ein endliches Teilsystem* $\mathfrak{U}' \subseteq \mathfrak{U}$ *gibt, dessen Elemente* X *überdecken.*

<u>Lemma 5</u> *Es sei* X *ein c-einbettbarer Limesraum und* $\mathcal{X}$ *die von* $C(X)$ *auf* X *induzierte Topologie. Weiter sei* $\mathfrak{U}$ *ein Überdeckungssystem von* X *. Dann gibt es ein Überdeckungssystem* $\mathfrak{W}$ *von* X *mit den Eigenschaften:*

(i) $\mathfrak{W}$ *ist Verfeinerung von* $\mathfrak{U}$

(ii) $V \in \mathfrak{W} \Rightarrow X \setminus V \in \mathcal{X}$

Nun können wir die Kompaktheit von $N(\mathrm{Ker}\ p)$ im c-einbettbaren Fall beweisen:

Lemma 6 *Es sei* X *ein* *c-einbettbarer Limesraum,* $p \in \tilde{P}$ *und* $K := N(\mathrm{Ker}\ p)$ *, dann ist* K *kompakt.*

Beweis OBdA sei $K \neq \emptyset$. Nach Lemma 4 reicht es, zu zeigen, daß jedes Überdeckungssystem von K eine endliche Teilüberdeckung enthält. Sei also $\tilde{\mathfrak{U}}$ ein Überdeckungssystem von K. Da K abgeschlossen ist, bildet das System

$$\mathfrak{U} = \{U \cup (X \setminus K) \mid U \in \tilde{\mathfrak{U}}\}$$

ein Überdeckungssystem für X. Sei nun $\mathfrak{W}$ ein Überdeckungssystem von X, für das die Bedingungen (i) und (ii) des Lemmas 5 gelten. Für jedes $V \in \mathfrak{W}$ und jede positive reelle Zahl ε definiere man:

$$F_{V,\varepsilon} = \{f \in C(X) \mid f(V) \subseteq (-\varepsilon,\varepsilon)\} .$$

Es gilt $\underline{0} \in F_{V,\varepsilon}$ für alle $V \in \mathfrak{W}$ und alle $\varepsilon > 0$, also ist

$$\{F_{V,\varepsilon} \mid V \in \mathfrak{W},\ \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\}$$

eine Filtersubbasis, der erzeugte Filter heiße Θ. Da $\mathfrak{W}$ ein Überdeckungssystem von X ist, konvergiert Θ gegen $\underline{0}$ und wegen der Stetigkeit von p konvergiert $p(\Theta)$ gegen 0. Also gibt es Mengen $V_i \in \mathfrak{W}$ $(i=1,\ldots,n)$ und eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ mit:

$$p(F_{V_1,\varepsilon} \cap \ldots \cap F_{V_n,\varepsilon}) \subseteq [-1,1] .$$

Wir wollen nun zeigen, daß

$$\bigcup_{i=1}^{n} V_i \supseteq K$$

gilt. Nehmen wir an, daß es ein $x_o \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ gibt. Da alle V_i in $(X,\mathcal{X})$ abgeschlossen sind, existiert eine stetige Funktion $f_o \in C(X)$, für die gilt:

$$f_o(\bigcup V_i) = \{0\}$$

und

$$f_o(x_o) = 1 ,$$

es folgt:

$$kf_o \in F_{V_i,\varepsilon} \qquad \text{für } i=1,\dots,n \text{ und alle } k \in \mathbb{N} ,$$

also

$$\hat{p}(kf_o) \leq 1 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \qquad p(f_o) = 0 .$$

Nach [4], Thm 2 gilt für jedes abgeschlossene Ideal $I \subseteq C(X)$:

$$f \in I \Longleftrightarrow f(N(I)) = \{0\} .$$

Da Ker p nach Lemma 3 ein abgeschlossenes Ideal ist, folgt wegen $f_o(K) \neq \{0\}$ also $f_o \notin \operatorname{Ker} p$. Dieser Widerspruch zeigt, daß $\mathfrak{W}$ und daher auch $\widetilde{\mathfrak{U}}$ eine endliche Teilüberdeckung von K enthalten.

Das folgende Lemma beschließt den 1. Teil:

<u>Lemma 7</u> *Es sei* X *ein c-einbettbarer Limesraum, und* K *wie oben. Dann gilt:*

$$p \leq p(\underline{1})p_K \quad .$$

Beweis Zunächst bemerken wir, daß K nach Lemma 6 kompakt ist. Nun sei $f \in C(X)$ und $f(K) \subseteq [-1,1]$. Definiert man

$$g = (f \wedge \underline{1}) \vee (-\underline{1}) \quad ,$$

so folgt

$$(f-g)(K) = \{0\}$$

und

$$|g| \leq \underline{1} \quad .$$

Aus $(f-g)(K) = \{0\}$ folgt $p(f-g) = 0$ und wir erhalten:

$$p(f) \leq p(f-g) + p(g) \leq p(\underline{1}) \quad .$$

Da $p(f) = 0$ äquivalent zu $p_K(f) = 0$ ist, folgt aus der positiven Homogenität von p die Behauptung.
Zusammenfassend können wir also sagen:

Satz 1 *Es sei X ein c-einbettbarer Limesraum, dann ist der zu $C_c(X)$ assoziierte lokalkonvexe Vektorraum $C_k(X)$.*

Beweis Für $p \in P$ definiere man $\tilde{p}$ und K durch:

$$\tilde{p}(f_o) = \sup\{p(f) \mid f \in C(X) \ , \ |f| \leq |f_o| \ \} \qquad \text{für alle } f_o \in C(X)$$

und

$$K = N(\operatorname{Ker} \tilde{p}) \quad .$$

Nach den obigen Ausführungen ist $\tilde{p}$ eine stetige Halbnorm auf $C_c(X)$, die Menge K kompakt, und es gilt:

$$p \leq \tilde{p}(\underline{1})\, p_K \quad .$$

II. Die c-Reflexivität von $C_c(X)$

Für einen Limesvektorraum E bezeichne $\mathcal{L}_c E$ die Menge aller linearen, stetigen Funktionale auf E, versehen mit der Limitierung der stetigen Konvergenz, und

$$j_E : E \longrightarrow \mathcal{L}_c \mathcal{L}_c E$$

werde definiert durch $j_E(f)(\psi) = \psi(f)$ für alle $f \in E$ und alle $\psi \in \mathcal{L}_c E$. Offenbar ist j_E ein stetiger Homomorphismus. Wenn j_E sogar ein Homöomorphismus ist, dann nennen wir E c-reflexiv. In diesem Teil wollen wir die c-Reflexivität von $C_c(X)$ für jeden Limesraum X beweisen. Dazu betrachten wir die stetige Abbildung

$$i_X : X \longrightarrow \mathcal{L}_c C_c(X)$$

definiert durch $i_X(p)(f) = f(p)$ für alle $p \in X$ und alle $f \in C(X)$. Unser Ziel ist es, zunächst zu zeigen, daß die lineare Hülle von $i_X(X)$ (im folgenden kurz mit $[i_X(X)]$ bezeichnet) dicht in $\mathcal{L}_c C_c(X)$ liegt. Dazu brauchen wir den folgenden, von M. Schroder bewiesenen

<u>Satz 2</u> *Für jeden topologischen Vektorraum* E *ist* $\mathcal{L}_c E$ *lokalkompakt, d.h. jeder konvergente Filter enthält eine kompakte Menge.*

Zum Beweis sei Φ ein in $\mathcal{L}_c E$ gegen 0 konvergenter Filter, $\mathfrak{U}$ der Nullumgebungsfilter in E und $\omega : \mathcal{L}_c E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ die Auswertung. Dann gibt es Mengen $U \in \Phi$ und $F \in \mathfrak{U}$, so daß gilt:

$$\omega(U \times F) \subseteq [-1,1] ,$$

woraus

$$\tilde{U} = \{\psi \in LE \mid \psi(F) \subseteq [-1,1]\} \in \Phi$$

folgt. Wir wollen nun die Kompaktheit von $\tilde{U}$ zeigen. Sei also Ψ ein Ultrafilter auf $\tilde{U}$ und $f \in E$. Da F absorbierend ist, gibt es eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, so daß gilt:

$$\omega(\tilde{U} \times \{f\}) \subseteq [-k,k] ,$$

also konvergiert der Ultrafilter $\omega(\Psi \times f)$ in $[-k,k]$ und daher auch in $\mathbb{R}$ gegen eine Zahl $\chi(f)$. Es ist nicht schwer zu verifizieren, daß $\chi \in L_c E$ gilt und daß Ψ gegen χ konvergiert. Da $\tilde{U}$ abgeschlossen ist, folgt auch $\chi \in \tilde{U}$.

Daraus leiten wir jetzt den folgenden, für unsere Arbeit fundamentalen Satz her. Der ursprüngliche Beweis verwendete eine Integraldarstellung für lineare, stetige Funktionale auf $C_c(X)$, die man aus dem Teil (ii) des Beweises von Satz 3 leicht herleiten kann. Der hier wiedergegebene Beweis stützt sich auf eine Idee von E. Binz und K. Kutzler.

Satz 3 *Für einen Limesraum* X *liegt* $[i_X(X)]$ *dicht in* $L_c C_c(X)$.

Der Beweis zerfällt in drei Teile:

(i) X sei kompakt und topologisch

In diesem Falle stimmt die Limitierung der stetigen Konvergenz auf $C_c(X)$ mit der üblichen Supremumsnormtopologie überein, mithin ist $C_c(X)$ ein Banachraum. Den Dualraum $LC_c(X)$ versehen wir einerseits mit der üblichen Normtopologie und schreiben dafür $L_n C_c(X)$, andererseits mit der schwachen Topologie bezüglich $C_c(X)$, was wir mit $L_s C_c(X)$ bezeichnen wollen. Für diese Räume sind die folgenden Identitäten stetig:

$$L_n C_c(X) \xrightarrow{id} L_c C_c(X) \xrightarrow{id} L_s C_c(X) \quad .$$

Es sei U die Einheitskugel in $L_n C_c(X)$. Dann konvergiert der von $(\frac{1}{n} U)_{n \in \mathbb{N}}$ erzeugte Filter in $L_n C_c(X)$ und daher auch in $L_c C_c(X)$ gegen 0 , enthält also nach Satz 2 eine kompakte Menge. Folglich ist U in $L_c C_c(X)$ selbst kompakt. Wir schreiben im folgenden U_c bzw. U_s , wenn wir U als Unterraum von $L_c C_c(X)$ bzw. $L_s C_c(X)$ auffassen. Als Unterraum eines c-einbettbaren Limesraumes ist U_c selbst c-einbettbar. Da der Raum U_c kompakt ist, muß er nach [2], Satz 4 sogar topologisch sein und daher homöomorph zu U_s . Nun ist aber U_s die abgeschlossene konvexe Hülle von $i_X(X) \cup (-i_X(X))$ (s. [6], V8.6) und daher ist es auch U_c . Also läßt sich jedes $\psi \in U$ in $L_c C_c(X)$ durch Elemente aus $[i_X(X)]$ approximieren. Da U absorbierend ist, folgt die Behauptung des Satzes im kompakten, topologischen Fall.

(ii) X sei c-einbettbar

Es sei $\psi \in L C_c(X)$, dann ist $|\psi|$ eine stetige Halbnorm auf $C_c(X)$, also gibt es nach Satz 1 eine reelle Konstante $\alpha > 0$ und eine kompakte Menge $K \subseteq X$ mit:

$$|\psi(f)| \leq \alpha p_K(f) \qquad \text{für alle} \quad f \in C(X) \; .$$

Daher gibt es eine lineare, stetige Abbildung χ , die das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} C_c(X) \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "\psi"'] & & C_c(K) \arrow[dl, "\chi"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Dabei sei r die Restriktionsabbildung. Weil K kompakt, topologisch ist (s.[2], Satz 4), läßt sich χ in $\mathcal{L}_c C_c(K)$ durch Elemente aus $[i_K(K)]$ approximieren und daher in $\mathcal{L}_c C_c(X)$ durch Elemente aus $[i_X(K)]$.

(iii) Für einen beliebigen Limesraum X bezeichne $\tilde{X}$ den Raum $\mathit{Hom}_c C_c(X)$. Wir erinnern daran, daß

$$i_X : X \longrightarrow \tilde{X}$$

definiert ist durch $i_X(p)(f) = f(p)$ für alle $p \in X$ und alle $f \in C(X)$. Das folgende Diagramm ist nun kommutativ:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{i}_X"] \arrow[d, "i_X"] & \tilde{X} \arrow[d, "i_{\tilde{X}}"] \\ \mathcal{L}_c C_c(X) \arrow[r, "\mathcal{L}_c C_c(\tilde{i}_X)"] & \mathcal{L}_c C_c(X) \end{tikzcd}$$

Nach [3], Satz 1 ist $\tilde{i}_X$ surjektiv. Da $\tilde{X}$ außerdem c-einbettbar ist, folgt die Behauptung des Satzes aus (ii).

Die c-Reflexivität von $C_c(X)$ läßt sich nach diesen Vorbereitungen sehr leicht beweisen:

Satz 4 *Für jeden Limesraum* X *ist* $C_c(X)$ *ein c-reflexiver Limesvektorraum.*

Beweis Man definiere die Abbildung

$$i^* : \mathcal{L}_c\mathcal{L}_c\mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathcal{C}_c(X)$$

durch $i^*(T) = T \circ i_X$ für alle $T \in \mathcal{L}\mathcal{L}_c\mathcal{C}_c(X)$, d.h. man setze $i^* = \mathcal{C}_c(i_X) | \mathcal{L}\mathcal{L}_c\mathcal{C}_c(X)$. Mit Hilfe des Satzes 3 verifiziert man sehr leicht, daß i^* invers zu $j_{\mathcal{C}_c(X)}$ ist.

III. Lokalkonvexe, topologische Vektorräume

Es sei E ein topologischer Vektorraum, dann ist $\mathcal{L}_cE$ nach Satz 2 lokalkompakt, und daher sind $\mathcal{C}_c(\mathcal{L}_cE)$ und $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_cE$ lokalkonvex, topologisch (s.[8]). Liegt weiterhin $j_E(E)$ dicht in $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_cE$, so ist $\mathcal{L}_c(j_E)$ die inverse Abbildung zu $j_{\mathcal{L}_cE}$ und $\mathcal{L}_cE$ daher c-reflexiv. Ist umgekehrt $j_E(E)$ nicht dicht in $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_cE$, so gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein nichttriviales Funktional ψ auf $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_cE$, das auf $j_E(E)$ verschwindet. Man sieht leicht, daß $\psi \notin j_{\mathcal{L}_cE}(\mathcal{L}_cE)$ gilt, $\mathcal{L}_cE$ also nicht c-reflexiv sein kann. Damit haben wir bewiesen:

Satz 5 *Es sei E ein topologischer Vektorraum, dann ist $\mathcal{L}_cE$ genau dann c-reflexiv, wenn $j_E(E)$ dicht in $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_cE$ liegt.*

Ist E sogar lokalkonvex, so ist E nach [7], S.252 homöomorph und isomorph zu einem Unterraum von $C(X)$, wobei X ein geeigneter lokalkompakter Raum ist und $C(X)$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen trägt, die jedoch in diesem Falle mit der Limitierung der stetigen Konvergenz zusammenfällt (s.[8]). Das folgende Lemma zeigt, daß j_E in diesem Falle stets ein Homöomorphismus auf $j_E(E)$ ist:

Lemma 8 *Es sei* X *ein Limesraum und* $A \subseteq C_c(X)$ *ein Unterraum. Dann ist* j_A *ein Homöomorphismus auf* $j_A(A)$.

Zum Beweis betrachten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "e"] \arrow[d, "j_A"] & C_c(X) \arrow[d, "j_{C_c(X)}"] \\
\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c A \arrow[r, "\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c e"] & \mathcal{L}_c\mathcal{L}_c C_c(X)
\end{tikzcd}.$$

Die Behauptung folgt dann aus der Homöomorphie von $j_{C_c(X)}$.

Bevor wir die c-Reflexivität von $\mathcal{L}_c E$ beweisen, wollen wir bemerken, daß ein Limesvektorraum vollständig heißt, wenn in ihm jeder Cauchy-Filter konvergiert. Abgeschlossene Unterräume vollständiger Limesvektorräume sind vollständig und vollständige Unterräume separierter Limesvektorräume sind abgeschlossen. Weiterhin ist $C_c(X)$ für jeden Limesraum X vollständig (s.[5], Satz 2) und daher auch $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E$ für jeden Limesvektorraum E, woraus folgt, daß c-reflexive Limesvektorräume vollständig sind. Damit können wir den folgenden Satz formulieren:

Satz 6 *Ein Limesvektorraum* E *ist genau dann vollständig, wenn die folgenden drei Bedingungen gelten:*

(i) j_E *ist ein Homöomorphismus auf* $j_E(E)$

(ii) E *ist vollständig*

(iii) Jedes lineare, stetige Funktional auf $\mathcal{L}_c E$ *läßt sich linear und stetig auf* $C_c E$ *fortsetzen.*

Zum Beweis betrachten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "i_E"] \arrow[dr, "j_E"'] & & \mathcal{L}_c\mathcal{C}_c(E) \arrow[dl, "\mathcal{L}_c e"] \\ & \mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E & \end{tikzcd},$$

dabei bezeichne e die Einbettung von $\mathcal{L}_c E$ in $\mathcal{C}_c(E)$ und i_E sei wie im ersten Teil definiert.

Da die Bedingung (iii) äquivalent mit der Surjektivität von $\mathcal{L}_c e$ ist, ist die Notwendigkeit von (i) - (iii) klar. Umgekehrt liegt nach Satz 3 die lineare Hülle von $i_E(E)$ dicht in $\mathcal{L}_c\mathcal{C}_c(E)$, mit (iii) folgt dann, daß $\mathcal{L}_c e(i_E(E))$, also $j_E(E)$ dicht in $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E$ liegt. Nach (ii) und (i) ist $j_E(E)$ abgeschlossen und daher $j_E(E) = \mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E$, woraus mit (i) die Behauptung folgt.

Wenn nun E lokalkonvex, topologisch ist, dann ist $\mathcal{C}_c(\mathcal{L}_c E)$ topologisch und daher gilt für $\mathcal{L}_c E$ die Bedingung (iii) des Satzes 6. Da $\mathcal{L}_c E$ als abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{C}_c(E)$ vollständig ist und da j_E nach Lemma 7 ein Homöomorphismus auf $j_E(E)$ ist, folgt aus Satz 5 und Satz 6 der

<u>Satz 7</u> *Es sei E ein lokalkonvexer, topologischer Vektorraum. Dann ist $\mathcal{L}_c E$ ein c-reflexiver Limesvektorraum, und j_E ist ein Homöomorphismus auf einen dichten Teilraum von $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E$.*

Als Korollare erhalten wir:

<u>Satz 8</u> *Für einen lokalkonvexen, topologischen Vektorraum E ist $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E$ die (topologische) Vervollständigung von E.*

Satz 9 *Ein lokalkonvexer, topologischer Vektorraum ist genau dann c-reflexiv, wenn er vollständig ist.*

Literaturverzeichnis

[1] E. Binz / H. H. Keller: Funktionenräume in der Kategorie der Limesräume. Ann. Acad. Sci. Fennicae AI, S. 383 (1966)

[2] E. Binz: Kompakte Limesräume und limitierte Funktionenalgebren. Commentarii Mathematici Helvetica Vol. 43, Fasc. 2, S. 195 (1968)

[3] -: Zu den Bezierhungen zwischen c-einbettbaren Limesräumen und ihren Funktionenalgebren. Math. Annalen 181, S. 45 (1969)

[4] -: On closed Ideals in Convergence Function Algebras. Math. Annalen 186, S. 145 (1969)

[5] -: Notes on a Characterisation of Function Algebras. Math. Annalen 186, S. 314 (1970)

[6] N. Dunford and J. Schwartz: Linear Operators Part I. Interscience Publishers, Inc., New York 1967

[7] G. Köthe: Topologische Lineare Räume I. Springer Verlag, Berlin 1966

[8] M. Schroder: Doctoral thesis. Queen's University, Kingston/ Ont. 1971