Über Zusammenhänge, die zwischen einigen Limitierungen auf C(X) und dem Satz von Dini bestehen.

von Kurt Kutzler

Nr. 2o 1972

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Es ist wohlbekannt, daß für einen lokalkompakten, topologischen Hausdorffraum T die kompakt-offene Topologie auf $C(T) = C(T,\mathbb{R})$ universell charakterisierbar ist als die gröbste Topologie auf $C(T)$ mit der Eigenschaft, daß die Evaluationsabbildung

$$\omega : C(T) \times T \longrightarrow \mathbb{R}$$

definiert durch

$$\omega(f,p) = f(p) \qquad ((f,p) \in C(T) \times T)$$

stetig ist. Es ist ferner bekannt, daß sich auf $C(T)$ keine Topologie mit der soeben erwähnten Eigenschaft finden läßt, falls T vollständig regulär aber nichtlokalkompakt ist.

Als die Theorie der Limesräume im Hinblick auf eine Verallgemeinerung des Begriffs des topologischen Raumes angeregt durch eine Anzahl konkreter Konvergenzbegriffe, die sich nicht in die Rubrik "Topologie" aufnehmen ließen, entwickelt wurde, stellte sich die Frage erneut, ob sich nicht eine Lösung des oben genannten universellen Problems in der Kategorie der Limesräume finden läßt, zumal immer wieder Arbeiten - zurückgehend bis auf Carathéodory und Hahn - auf diese Möglichkeiten hinwiesen.

Im letzten Jahrzehnt definierten dann Binz und Keller (3), Cook und Fischer (5) und andere Autoren allgemein den Begriff der stetigen Konvergenz, der das universelle Problem löste:

Für zwei Limesräume X und Y existiert auf der Menge $C(X,Y)$ aller stetigen Abbildungen von X in Y eine gröbste Limitierung Λ_c mit der Eigenschaft, daß die Evaluationsabbildung

$$\omega: C(X,Y) \times X \longrightarrow Y$$

stetig ist. Λ_c wurde stetige Konvergenz genannt.
Binz interessierte sich in der Folgezeit besonders für den Fall, in dem X ein beliebiger Limesraum ist und $Y = \mathbb{R}$ gilt. Er bezeichnete $C(X)$ versehen mit Λ_c mit $C_c(X)$.
Bei seinen Untersuchungen erwiesen sich zwei volle Unterkategorien der Kategorie der Limesräume als von besonderem Interesse:

a) die Kategorie der c-einbettbaren Limesräume

und

b) die Kategorie der vollständig regulären, topologischen Hausdorffräume.

In diesem Zusammenhang stellte sich die Frage, die unter anderem in dieser Arbeit behandelt werden soll, welche Eigenschaften von $C_c(X)$ charakteristisch dafür sind, daß X ein vollständig regulärer, topologischer Hausdorffraum ist. Dieses und einige andere Probleme, die sich bisher im Rahmen der Theorie von gewissen Limitierungen auf $C(X)$ ergaben, sollen mit den Mitteln, die in dieser Arbeit entwickelt werden, gelöst werden. Dabei wird die Verallgemeinerung des Satzes von Dini für $C_c(X)$ (X beliebiger Limesraum), die im ersten Abschnitt bewiesen wird, eine wichtige Rolle spielen.
Es wird sich zeigen, daß die Umkehrbarkeit des Satzes von Dini in einem noch präziser anzugebenden Sinne charakteristisch dafür ist, daß X ein vollständig regulärer, topologischer Hausdorffraum ist. In diesem Zusammenhang wird es als ratsam erscheinen, eine neue Limitierung Λ_D, die Dini-Konvergenz

auf $C(X)$ einzuführen, deren Beziehungen zu Λ_c und anderen auf $C(X)$ bekannten Limitierungen ein Hauptgegenstand der folgenden Betrachtungen ist. Diese anderen Limitierungen sind:

a) Die lokaluniforme Konvergenz Λ_u auf $C(X)$, wobei X ein topologischer Raum ist, die nach Poppe (14) wie folgt definiert ist:

   Ein Filter Φ auf $C(X)$ konvergiert lokaluniform gegen f aus $C(X)$, wenn es zu jedem Punkt p aus X eine Umgebung U_p des Punktes p in X mit der Eigenschaft gibt, daß Φ auf U_p gleichmäßig gegen f konvergiert. $C(X)$ versehen mit der Limitierung Λ_u werde mit $C_u(X)$ bezeichnet.

b) Die Marinescu-Limitierung Λ_I auf $C(X)$, wobei X ein vollständig regulärer, topologischer Hausdorffraum ist, die von Binz und Feldman (6) wie folgt definiert wurde:

$$C_I(X) = \operatorname*{ind}_{\substack{K \subseteq \beta X \setminus X \\ K \text{ kompakt}}} C_c(\beta X \setminus K) .$$

   Hierbei steht $C_I(X)$ für $C(X)$ versehen mit der Limitierung Λ_I, wird der induktive Limes in der Kategorie der Limesräume gebildet und ist βX die Stone-Čech-Kompaktifizierung von X.

Da im ersten Abschnitt die ordnungsbeschränkten Teilmengen von $C(X)$ eine wichtige Rolle spielen, erhebt sich im zweiten Abschnitt die Frage, ob und, wenn, welche Zusammenhänge zwischen den ordnungsbeschränkten Teilmengen von $C(X)$ und den "Limitierungs-" beschränkten Teilmengen bezüglich Λ_c, Λ_u, Λ_I und Λ_D bestehen. Dabei wird sich zeigen, daß erwartungsgemäß die Λ_D-beschränkten Teilmengen von $C(X)$ mit den ordnungsbeschränkten Teilmengen identisch sind. Wir werden ferner zeigen, daß Λ_c, Λ_u und Λ_I dieselbe Klasse "Limitierungs-" beschränkter Teilmengen von $C(X)$ besitzen und aufgrund eines Ergebnisses in (11) sehen, daß das Zusammenfallen der Familien der Λ_c- und der Λ_D-beschränkten Teilmengen von $C(X)$ impliziert, daß die Dedekindsche Vervollständigung von $C(X)$ in der Form $C(Y)$ darstellbar ist. Anhand eines Beispieles wird zu sehen sein, daß ein Zusammenfallen der Limitierungen Λ_c, Λ_u und Λ_I nicht ein Zusammenfallen der Familie der ordnungsbeschränkten Teilmengen von $C(X)$ mit der Familie der Λ_c-beschränkten Teilmengen von $C(X)$ implizieren muß.

Der dritte Abschnitt geht hauptsächlich auf die Limitierungen Λ_u und Λ_I sowie die Gültigkeit des Satzes von Dini für diese Konvergenzstrukturen ein, die ja in gewissem Sinne auch Verallgemeinerungen der kompakt-offenen Topologie auf $C(X)$ darstellen. Es wird sich zeigen, daß der Satz von Dini für $C_I(X)$ genau dann gilt, wenn der Umgebungsfilter von X in βX die Abzählbare-Durchschnitts-Eigenschaft besitzt. Da sich ferner beweisen läßt, daß auf den ordnungsbeschränkten Teilmengem von $C(X)$ die Limitierungen Λ_I und Λ_u dieselbe Relativlimitierung induzieren, folgt, daß der Satz von Dini für Λ_u genau dann gilt, wenn er für Λ_I erfüllt ist. Auch unter diesem Gesichtspunkt erscheint Λ_c als die sinngemäße Verallgemeinerung der kompakt-offenen Topologie.

Der vierte Abschnitt ist der Untersuchung von OP-Limitierungen gewidmet. OP-Limitierungen erweisen sich als eine sinnvolle Verallgemeinerung derjenigen Topologien auf $C(X)$, die durch die gleichmäßige Konvergenz auf gewissen Teilmengen von X definiert sind. Zu fast jeder Limitierung auf $C(X)$ läßt sich in natürlicher Weise eine OP-Limitierung assoziieren. Wir werden erkennen, daß Λ_c und Λ_u OP-Limitierungen sind. Ferner werden wir beweisen, daß Λ_u die zu Λ_I und Λ_c die zu Λ_D assoziierten OP-Limitierungen sind. Diese Ergebnisse führen einerseits zur Charakterisierung eines vollständig regulären, topologischen Hausdorffraumes X durch $C_c(X)$ via $C_D(X)$ und andererseits zusammen mit den Ergebnissen des dritten Abschnittes sowie der Antwort auf die Frage, wann Λ_I eine OP-Limitierung ist, zu notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Relationen

$$\Lambda_c = \Lambda_u \;, \quad \Lambda_u = \Lambda_I \;, \quad \Lambda_c = \Lambda_I \;.$$

Die zwei Bedingungen, die für $\Lambda_c = \Lambda_I$ notwendig und hinreichend sind, stimmen mit den in (2) gefundenen überein. Ein Satz und ein Beispiel des dritten Abschnittes beantworten ferner die bisher ungelöste Frage, ob diese Bedingungen unabhängig voneinander sind, positiv.

Im fünften und sechsten Abschnitt wird die Limitierung Λ_D weiter untersucht. Im fünften Abschnitt wird unter anderem gezeigt, daß $C_D(X)$ und $C_c(X)$ dieselben abgeschlossenen Algebren- und Verbandsideale besitzen. Die aus diesem Grunde naheliegende Vermutung, daß $C_D(X)$ und $C_c(X)$ als IR-Limesvektorräume denselben Dualraum besitzen und die Vermutung, daß die kompakt-offene Topologie auf $C(X)$ die zu Λ_D assoziierte lokalkonvexe Topologie auf $C(X)$ ist - was für Λ_c nach (4) stimmt - werden widerlegt. Es wird das Beispiel eines lokalkompakten, topologischen Hausdorffraumes X angegeben, so daß - entgegen allen Erwartungen, die die Abschnitte vier und fünf wecken - der Raum aller stetigen,

reellwertigen, linearen Funktionale auf $C_D(X)$ den Raum aller stetigen, linearen und reellwertigen Funktionale auf $C_c(X)$ echt umfaßt. Folglich kann die zu Λ_D assoziierte lokalkonvexe Topologie auf $C(X)$ nicht mit der kompakt-offenen Topologie auf $C(X)$ zusammenfallen.
Anschließend werden jedoch zwei hinreichende Bedingungen für vollständig reguläre, topologische Hausdorffräume X angegeben, die bewirken, daß die kompakt-offene Topologie auf $C(X)$ die zu Λ_D assoziierte lokalkonvexe Topologie ist. Notwendige und hinreichende Bedingungen hierfür sind leider noch nicht bekannt.

0. Bezeichnungsweisen.

Die Grundlagen der Theorie der Limesräume werden als bekannt vorausgesetzt. Im Übrigen wollen wir auf die Arbeit von Fischer (siehe (7)) verweisen. Sei X ein Limesraum. Mit $C(X)$ werde die Menge aller auf X definierten, stetigen und reellwertigen Funktionen bezeichnet. Wenn auf $C(X)$ Addition, Skalarmultiplikation und Multiplikation punktweise definiert werden, so wird $C(X)$ zu einer unitären $\mathbb{R}$-Algebra. Definiert man ferner für f und g aus $C(X)$

" $f \leq g$ genau dann, wenn $f(p) \leq g(p)$ für alle p aus X ",

so ist durch $\leq$ auf $C(X)$ eine Ordnungsrelation gegeben, mit der $C(X)$ zu einem archimedisch geordneten Vektorverband wird. Das Maximum von f und g aus $C(X)$ werde mit $f \vee g$, das Minimum mit $f \wedge g$ bezeichnet. $|f|$ sei der Absolutbetrag von f aus $C(X)$.

Für die Begriffe einer Algebrenlimitierung auf einer $\mathbb{R}$-Algebra, der stetigen Konvergenz Λ_c auf $C(X)$, der Marinescu-Limitierung Λ_I und der lokaluniformen Konvergenz Λ_u auf $C(X)$ werde der Leser auf die Arbeiten (1),(6),(7),(14) verwiesen. Alle diese Limitierungen sind $\mathbb{R}$-Algebrenlimitierungen.

Für einen $\mathbb{R}$-Limesvektorraum E (siehe (7)) bezeichnen E' den Raum der (reellwertigen) stetigen, linearen Funktionale auf E und E^{-} den zu E assoziierten lokalkonvexen, topologischen Vektorraum.

Seien X ein Limesraum und Λ eine Algebrenlimitierung auf $C(X)$. Dann definiert man :

$$\underline{\mathrm{Hom}}\, C_\Lambda(X) = \{ M \mid M : C_\Lambda(X) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ unitärer, stetiger Algebrenhomomorphismus} \}.$$

$\underline{\text{Hom}}\, C_\wedge(X)$ kann als Teilmenge von $C(C_\wedge(X))$ mit der von $C_\wedge(X)$ induzierten stetigen Konvergenz versehen werden. Diesen Limesraum bezeichnen wir mit

$$\underline{\text{Hom}}_c\, C_\wedge(X) \; .$$

Es sei ferner

$$\text{Hom}\, C(X) = \{M \mid M: C(X) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ unitärer Algebrenhomomorphismus}\} \; .$$

Sowohl $\underline{\text{Hom}}\, C_\wedge(X)$ als auch $\text{Hom}\, C(X)$ sind Teilmengen des algebraischen Dualraumes von $C(X)$. Deswegen können sie mit der von $C(X)$ auf seinem algebraischen Dualraum induzierten schwachen Topologie versehen werden. Die vollständig regulären, topologischen Hausdorffräume, die man so erhält, werden mit

$$\underline{\text{Hom}}_s\, C_\wedge(X) \quad \text{beziehungsweise} \quad \text{Hom}_s\, C(X)$$

bezeichnet.

Für p aus X definiert man

$$i_X(p)(f) = f(p) \quad \text{für jede Funktion } f \text{ aus } C(X) \; .$$

Man erkennt sofort, daß $i_X(p) \in \text{Hom}\, C(X)$ gilt, d.h., durch vorangegangene Definition ist eine Abbildung

$$i_X : X \longrightarrow \text{Hom}\, C(X)$$

gegeben. Es ist ein bekanntes Ergebnis von Binz, daß für jeden Limesraum X gilt :

i) $\quad i_X(X) = \underline{\text{Hom}}\, C_c(X)$.

ii) Die Abbildung $i_X : X \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_c\, C_c(X)$ ist stetig .

Ein Limesraum X wird nach Binz c-einbettbar genannt, wenn $i_X : X \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_c\, C_c(X)$ ein Homöomorphismus ist. Jeder vollständig reguläre, topologische Hausdorffraum X ist c-einbettbar und es gilt $\underline{\text{Hom}}_c\, C_c(X) = \underline{\text{Hom}}_s\, C_c(X)$.

Binz bewies ferner : Für jeden Limesraum X ist $\underline{\text{Hom}}_c\, C_c(X)$

c-einbettbar.

Die Räume $\underline{\mathrm{Hom}}_c C_c(X)$, $\underline{\mathrm{Hom}}_s C_c(X)$ und $\mathrm{Hom}_s C(X)$ besitzen die folgenden Eigenschaften:

1.) $$X \xrightarrow{i_X} \underline{\mathrm{Hom}}_c C_c(X) \xrightarrow{\mathrm{id}} \underline{\mathrm{Hom}}_s C_c(X) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_s C(X)$$

ist ein Diagramm stetiger Abbildungen.

2) a) Zu jedem c-einbettbaren Limesraum Y und zu jeder stetigen Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ gibt es eine eindeutig bestimmte, stetige Abbildung $f': \underline{\mathrm{Hom}}_c C_c(X) \longrightarrow Y$ mit der Eigenschaft, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[dr, "f"'] & \underline{\mathrm{Hom}}_c C_c(X) \arrow[d, "f'"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

kommutiert.

b) Zu jedem vollständig regulären, topologischen Hausdorffraum Z und zu jeder stetigen Abbildung $g: X \longrightarrow Z$ gibt es eine eindeutig bestimmte, stetige Abbildung $g'': \underline{\mathrm{Hom}}_s C_c(X) \longrightarrow Z$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[dr, "g"'] & \underline{\mathrm{Hom}}_s C_c(X) \arrow[d, "g''"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Im Folgenden wollen wir f, f' und f'' identifizieren.

c) $\mathrm{Hom}_s C(X)$ ist die Reellkompaktifizierung von $\underline{\mathrm{Hom}}_s C_c(X)$.

(Für den Begriff der Reellkompaktifizierung siehe (8) .)

Wir nennen $\underline{\mathrm{Hom}}_c C_c(X)$ den zu X assoziierten c-einbettbaren Raum und bezeichnen ihn mit X'.

$\underline{\mathrm{Hom}}_s C_c(X)$ wird der zu X assoziierte, vollständig reguläre, topologische Hausdorffraum genannt und mit X'' bezeichnet.

Wenn wir für einen vollständig regulären, topologischen Hausdorffraum Z dessen Reellkompaktifizierung mit νZ bezeichnen, so haben νZ und Z nach (8) dieselben Algebren stetiger, reellwertiger Funktionen:

$$C(Z) = C(\nu Z) .$$

Insbesondere gilt für einen Limesraum X:

$$\mathrm{Hom}_s C(X) \doteq \nu(X'') .$$

Für die Limitierungen Λ_c, Λ_u und Λ_I sowie für die kompakt-offene Topologie τ_{co} auf $C(X)$ gelten die folgenden Aussagen:

a) $\Lambda_c \geqslant \tau_{co}$ (Λ_c ist feiner als τ_{co}).

b) $\Lambda_I \geqslant \Lambda_u \geqslant \Lambda_c \geqslant \tau_{co}$, wenn X ein vollständig regulärer, topologischer Hausdorffraum ist.

τ_{co} ist die zu Λ_I und folglich auch die zu Λ_u und Λ_c assoziierte lokalkonvexe Vektorraumtopologie auf $C(X)$ (siehe (6)). Ferner gelten die folgenden Homöomorphien:

$$\underline{\mathrm{Hom}}_c C_I(X) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_c C_u(X) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_c C_c(X) \cong X .$$

Für einen Limesraum X besteht das folgende Diagramm aus stetigen Abbildungen:

$$C_I(X'') \xrightarrow{id} C_u(X'') \xrightarrow{id} C_c(X'') \xrightarrow{id} C_c(X') \xrightarrow{id} C_c(X).$$

Hierbei ist $id: C_c(X') \longrightarrow C_c(X)$ bistetig. Sei Z ein vollständig regulärer, topologischer Hausdorffraum. Wenn φ ein reellwertiges, lineares und ordnungsbeschränktes (,d.h. ordnungsbeschränkte Teilmengen von $C(Z)$ in beschränkte Teilmengen von IR abbildendes,) Funktional auf $C(Z)$ mit $\varphi \neq 0$ ist, so existiert eine minimale, nichtleere, kompakte Teilmenge K von νZ mit der Eigenschaft, daß

$$f \in C(X) \quad \text{und} \quad \{p \mid p \in \nu Z ,\ f(p) \neq 0\} \cap K = \emptyset$$

stets

$$\varphi(f) = 0$$

implizieren. K wird Träger des Funktionals φ genannt:

$$K =: \mathrm{supp}\, \varphi .$$

1. Die Dini - Konvergenz Δ_D .

Für lokalkompakte, topologische Hausdorffräume T ist der Satz von Dini bekannt, der besagt, daß der Abschnittsfilter Φ eines nach unten (oben) filtrierenden Systemes F von Funktionen aus C(T) , der punktweise gegen f aus C(T) konvergiert, auch bezüglich $\mathcal{T}_{co}$ (= Λ_c) gegen f konvergiert. Ersetzt man T durch einen beliebigen Limesraum X und sinngemäß die kompakt-offene Topologie $\mathcal{T}_{co}$ durch die stetige Konvergenz Λ_c , so erhält man die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Dini :

<u>1.1 Satz: Seien X ein Limesraum und F ein nach unten (oben) gerichtetes System von Funktionen aus C(X) mit der Eigenschaft, daß der Abschnittsfilter Φ der Familie F punktweise gegen f aus C(X) konvergiert. Dann konvergiert Φ in $C_c(X'')$ gegen f und somit erst recht in $C_c(X)$.</u>

<u>Beweis:</u> Wegen der Stetigkeit der Abbildung $id: C_c(X'') \longrightarrow C_c(X)$ genügt es, die Behauptung für einen vollständig regulären, topologischen Hausdorffraum X zu beweisen. Ferner nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, daß F nach unten gerichtet ist.

Wir wählen p aus X und $\varepsilon > 0$. U_p sei eine Umgebung von p in X , so daß für q aus U_p gilt:

$$|f(q) - f(p)| < \varepsilon/4 \quad .$$

Wegen der punktweisen Konvergenz des Filters Φ gibt es $f_{p,\varepsilon}$ aus F mit der Eigenschaft, daß

$$|f_{p,\varepsilon}(p) - f(p)| = f_{p,\varepsilon}(p) - f(p) < \varepsilon/4$$

erfüllt ist. Sei V_p eine Umgebung von p mit der Eigenschaft, daß

$$|f_{p,\varepsilon}(q) - f_{p,\varepsilon}(p)| < \varepsilon/4$$

für alle q aus V_p gilt. Dann folgt für q aus $V_p \cap U_p$:

$$f_{p,\varepsilon}(q) - f(q) = |f_{p,\varepsilon}(q) - f(q)| < 3\varepsilon/4 .$$

Also gilt für alle Funktionen g aus F mit $g \leq f_{p,\varepsilon}$ und für q aus $V_p \cap U_p$:

$$0 \leq g(q) - f(q) = |g(q) - f(q)| < 3\varepsilon/4 ,$$

woraus sich für q aus $U_p \cap V_p$

$$|g(q) - f(p)| < \varepsilon$$

und somit die stetige Konvergenz des Filters Φ in $C_c(X'')$ gegen die Funktion f aus $C(X)$ ergibt.

Der Satz von Dini ist eine Aussage, in der die Ordnungsstruktur von $C(X)$ sowie die Topologie $\mathcal{T}_s(X)$ der punktweisen Konvergenz auf $C(X)$ mit der stetigen Konvergenz in Relation gebracht werden. Wir wollen diesen Sachverhalt im Folgenden näher untersuchen:

Die Funktion f ist Infimum der Familie F bezüglich der Verbandsstruktur von $C(X)$. Darüberhinaus ist f sogar punktweises Infimum der Familie F , was besagt, daß die Infima von F in den Vektorverbänden $C(X)$ und $\mathbb{R}^X$ zusammenfallen. Die Aussage des Satzes von Dini wird falsch, wenn man die Voraussetzung der punktweisen Konvergenz des Abschnittsfilters Φ von F fallen läßt. In diesem Zusammenhang wollen wir den Begriff der Ordnungskonvergenz betrachten, wie er etwa von Schäfer für geordnete Vektorräume eingeführt wird (15):

Sei X ein Limesraum . H bezeichne eine nach unten gerichtete Familie von Funktionen aus $C(X)$, für die (- in der Vektorverbandsstruktur von $C(X)$ -)

$$\inf H = 0$$

gilt. Eine solche Familie werde <u>zulässig</u> genannt. Einer zulässigen Familie H kann man ihren Intervallfilter Φ_H

zuordnen, indem man Φ_H als den Filter auf $C(X)$ definiert, der das System

$$\{[-h,h] \mid h \in H\}$$

als Basis besitzt. Hierbei bezeichne $[-h,h]$ das Intervall aller Funktionen f aus $C(X)$ mit $-h \leq f \leq h$.

Ein Filter Φ auf $C(X)$ heiße <u>ordnungskonvergent gegen f aus $C(X)$</u>, wenn es eine zulässige Familie H in $C(X)$ gibt, so daß $\Phi \supseteq \Phi_H + f$ gilt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können die zulässigen Familien im Folgenden stets als ordnungsbeschränkt angenommen werden.

Durch die Auszeichnung der ordnungskonvergenten Filter auf $C(X)$ ist auf $C(X)$ eine Limitierung Λ_o definiert. Berücksichtigt man, daß $C(X)$ eine archimedisch geordnete Verbandsalgebra ist, so beweist man ohne Schwierigkeiten den folgenden Satz:

<u>1.2 Satz: Die Ordnungskonvergenz Λ_o auf $C(X)$ ist eine separierte Limitierung, die mit der Algebrenstruktur von $C(X)$ verträglich ist.</u>

<u>Bemerkung:</u> Da für einen beliebigen Limesraum X die Ordnungsstrukturen der Algebren $C(X)$, $C(X')$, $C(X'')$ und $C(\upsilon X'')$ identisch sind, hängt die Ordnungskonvergenz auf $C(X)$ lediglich von der Hewittschen Reellkompaktifizierung $\upsilon X''$ des zu X assoziierten, vollständig regulären, topologischen Hausdorffraumes X'' ab.

Eine Frage, die sich für eine Algebrenlimitierung auf $C(X)$ sofort stellt, ist die nach dem Spektrum der Limesalgebra, also nach den abgeschlossenen, maximalen, reellen Algebrenidealen, bzw. was hierzu äquivalent ist, nach den stetigen, reellwertigen, unitären Algebrenhomomorphismen. Diese Frage steht in engem Zusammenhang mit dem Problem, inwieweit in den Voraussetzungen des Satzes von Dini die punktweise Konvergenz benötigt wird.

Wir wollen also Hom $C_o(X)$ bestimmen, wobei $C_o(X)$ für die mit der Limitierung Λ_o versehene Algebra $C(X)$ steht.

Es werde bemerkt, daß die soeben gestellte Frage äquivalent ist zu der Frage nach den stetigen, reellwertigen Verbandshomomorphismen, die für die konstante Funktion $\underline{1}$ den Wert 1 annehmen, da alle reellwertigen Verbandshomomorphismen auf $C(X)$ mit der soeben genannten Eigenschaft auch Algebrenhomomorphismen sind et vice versa (siehe (10)).

1.3 Satz: Die Algebra $C(X)$ trenne die Punkte von X. Ein reeller, unitärer Algebrenhomomorphismus $M: C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist bezüglich Λ_o genau dann stetig, wenn es einen isolierten Punkt p_M in X gibt, so daß für f aus $C(X)$ gilt:

$$M(f) = f(p_M) .$$

Beweis: Sei M aus Hom $C_o(X)$. Auf Grund von

$$C_o(\upsilon X'') = C_o(X)$$

(siehe Bemerkung nach (1.2)), soll zuerst angenommen werden, daß X ein reellkompakter, vollständig regulärer, topologischer Hausdorffraum ist. Nach Definition der Reellkompaktheit gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt p_M aus X, so daß für f aus $C(X)$ gilt $M(f) = f(p_M)$.

Wähle nun eine beliebige, offene Umgebung U des Punktes p_M. Da X vollständig regulär ist, gibt es eine stetige Funktion $f_U: X \longrightarrow [0,1]$ mit

$$f_U(q) = \begin{cases} 1 & | \quad q = p_M \\ 0 & | \quad q \in X \setminus U \end{cases} .$$

Das System $H = \{\bigwedge_{i=1}^{n} f_{U_i} \mid U_i$ offene Umgebung von $p_M\}$ ist eine nach unten filtrierende Familie stetiger, reellwertiger Funktionen mit

$$\inf H(q) = \begin{cases} 0 \mid q \neq p_M \\ 1 \mid q = p_M \end{cases} .$$

Wenn p_M kein isolierter Punkt in X ist, so gilt

$$\inf H = o$$

in $C(X)$, d.h. H ist eine zulässige Familie. Demnach sind der Intervallfilter Φ_H und folglich erst recht der feinere Abschnittsfilter Φ von H ordnungskonvergent gegen o. Für jede kofinale Teilmenge H' von H gilt aber

$$M(H') = H'(p_M) = \{1\},$$

also

$$\lim M(\Phi) = 1 ,$$

was einen Widerspruch zur Voraussetzung $M \in \underline{\mathrm{Hom}}\, C_o(X)$ bedeutet. Demnach ist die Bedingung der Isoliertheit von p_M notwendig für die Stetigkeit von M bezüglich Λ_o.

Es werde nun umgekehrt angenommen, daß M durch einen isolierten Punkt p_M aus X dargestellt wird. Wir beweisen zunächst:

<u>Sei H eine nach unten gerichtete Familie von Funktionen aus $C(X)$ mit</u>

$$\inf H = f \in C(X) .$$

<u>Dann gilt</u>

$$\inf H(p_M) = f(p_M) .$$

Offensichtlich ist $\inf H(p_M) \geqslant f(p_M)$. Definiert man f_1 aus $C(X)$ durch

$$f_1(q) = \begin{cases} \inf H(p_M) \mid q = p_M \\ f(q) \mid q \neq p_M \end{cases} ,$$

so gilt für h aus H

$$f = \inf H \leq f_1 \leq h \quad ,$$

was $\quad f = f_1 \quad$, also $\quad f(p_M) = \inf H(p_M)$ impliziert .
Sei nun Φ aus $\Lambda_o(o)$. Dann gibt es eine zulässige Familie H in $C(X)$ mit $\Phi \geqslant \Phi_H$. Nach dem soeben Bewiesenen folgt

$$\inf H(p_M) = 0 \quad , \quad \text{also} \quad \lim M(\Phi_H) = 0$$

und somit erst recht $\quad \lim M(\Phi) = 0$.
Folglich gilt $M \in \underline{\mathrm{Hom}}\, C_o(X)$.
Sei nun X ein beliebiger Limesraum mit der Eigenschaft, daß $C(X)$ die Punkte von X trennt. Dann besteht das folgende Diagramm aus stetigen, injektiven Abbildungen

$$X \xrightarrow{i_X} X'' \hookrightarrow \upsilon X'' \quad .$$

i_X ist in diesem Falle bijektiv. Nach Vorangegangenem kann M aus $\underline{\mathrm{Hom}}\, C_o(X)$ mit einem isolierten Punkt von $\upsilon X''$ identifiziert werden. Da aber $\upsilon X'' \setminus X''$ wegen $C(\upsilon X'') = C(X'')$ keine isolierten Punkte enthalten kann ((8),9.6), muß der Punkt p_M, der M darstellt, schon in X'' liegen und dort isoliert sein. Wegen der Stetigkeit von i_X ist dann auch p_M ein isolierter Punkt in X, der M darstellt .
Da umgekehrt jeder isolierte Punkt in X auch in X'' isoliert ist, ist der Satz bewiesen.

Da man von einer Algebrenlimitierung Λ auf $C(X)$, die einigermaßen sinnvoll definiert sein soll, erwartet, daß die Punktevaluationen in Punkten aus X stetige Algebrenhomomorphismen liefern, d.h., die Abbildung

$$i_X : X \longrightarrow \mathrm{Hom}\, C(X)$$

den Raum X in $\underline{\mathrm{Hom}}\, C_\Lambda(X)$ abbildet, kann man sich unter diesem Gesichtspunkt nicht mit der Ordnungskonvergenz zufrieden geben .

Darüberhinaus haben wir erkannt, daß die Forderung an eine nach unten filtrierende Familie H von Funktionen aus $C(X)$, daß sie in $C(X)$ ein Infimum besitze, noch nicht ausreicht, um die Voraussetzungen des Satzes von Dini zu erfüllen, bzw. nicht impliziert, daß der Abschnittsfilter Φ von H stetig gegen das Infimum konvergiert, da Φ nicht einmal punktweise zu konvergieren braucht. Wir wollen aus diesem Grunde den Begriff der zulässigen Familie einschränken:

Definition: Eine nach unten filtrierende Familie H von Funktionen aus $C(X)$ heiße D-zulässig, wenn für p aus X stets

$$\inf H(p) = 0$$

gilt.

Die Motivierung für die Einführung dieses Begriffs liegt im Satz von Dini. Wir definieren weiter:

Definition: Ein Filter Φ auf $C(X)$ sei Dini-konvergent gegen eine Funktion f aus $C(X)$, wenn es eine D-zulässige Familie H in $C(X)$ gibt, so daß

$$\Phi \supseteq \Phi_H + f$$

gilt. Die hierdurch auf $C(X)$ definierte Limitierung werde Dini-Limitierung genannt und mit Λ_D bezeichnet.

Bemerkung: Die Dini-Konvergenz Λ_D ist universell charakterisierbar als die feinste Vektorraumlimitierung auf $C(X)$, für die der Satz von Dini gilt. Nach (1.1) besteht das folgende Diagramm aus stetigen Abbildungen:

$$\begin{tikzcd}
C_c(X'') \arrow[r, "id"] & C_c(X) \\
C_D(X) \arrow[u, "id"] \arrow[ur, "id"'] &
\end{tikzcd}$$

Die Frage nach den stetigen unitären, reellen Algebrenhomomorphismen auf $C_D(X)$ beantwortet

1.4 Proposition: Sei X ein Limesraum. Dann ist jeder unitäre, stetige Algebrenhomomorphismus $M: C_D(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ durch einen Punkt p aus X darstellbar:

$$M = i_X(p) .$$

Beweis: Annahme: M sei nicht durch einen Punkt p aus X darstellbar. Dann muß es p_M aus $\upsilon X'' \setminus X''$ geben, so daß M durch p_M dargestellt werden kann. Sei nun $\mathfrak{U}$ das System aller offenen Umgebungen von p in $\upsilon X''$. Für U aus $\mathfrak{U}$ wähle man wieder f_U aus $C(X)$ mit der Eigenschaft, daß

$$f_U(q) = \begin{cases} 1 & | \; q = p_M \\ 0 & | \; q \in \upsilon X'' \setminus U \end{cases} \quad \text{gilt} .$$

Dann ist die Familie $H = \{ \bigwedge_{i=1}^{n} f_{U_i} \mid U_i \in \mathfrak{U} \}$ nach unten gerichtet und D-zulässig in $C(X)$. Folglich konvergiert der Abschnittsfilter Φ von H bezüglich Λ_D gegen 0. Andererseits gilt aber für jede kofinale Teilmenge H' von H

$$M(H') = H'(p_M) = \{1\}$$

und somit $\lim M(\Phi) = 1$,

was einen Widerspruch zur Stetigkeit von M ergibt.

Bemerkung: Aus dem vorangegangenen Diagramm folgt, daß für p aus X stets $i_X(p) \in \underline{\mathrm{Hom}}\, C_D(X)$ gilt. Also haben wir bewiesen, daß $i_X: X \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}\, C_D(X)$ eine surjektive Abbildung ist.

Es erhebt sich natürlich die Frage nach der Kompatibilität von Λ_D mit der Algebrenstruktur von $C(X)$. Da sich die Verträglichkeit von Λ_D mit den algebraischen Strukturen von $C(X)$ als Konsequenz eines unserer folgenden Ergebnisse zeigen wird, werde diese Frage noch zurückgestellt.

Aus dem Vorangegangenen wissen wir, daß

$$id : C_D(X) \longrightarrow C_c(X'')$$

für jeden Limesraum X stetig ist. Die Frage, wann diese Abbildung ein Homöomorphismus ist, läßt sich mit Hilfe eines einfachen Argumentes beantworten. Es genügt, sich in der folgenden Betrachtung auf den Fall zu beschränken, daß X ein vollständig regulärer, topologischer Hausdorffraum ist.

1.5 Proposition: Wenn X nicht kompakt ist, so ist die Dini-Konvergenz echt feiner als die stetige Konvergenz Λ_c. Insbesondere existiert auf $C(X)$ ein Filter Φ, der bezüglich Λ_c gegen o konvergiert, der aber keine ordnungsbeschränkten Teilmengen von $C(X)$ enthält.

Beweis: Da X nicht kompakt ist, gibt es ein Überdeckungssystem $\{ U_p \mid p \in X \}$ bestehend aus offenen Teilmengen von X, das kein endliches Überdeckungssystem enthält. Wähle nun für p aus X eine Nullmengenumgebung (siehe (8)) Z_p mit $p \in Z_p \subset U_p$. Ferner sei

$$I(Z_p) = \{ f \mid f \in C(X) , \; f(Z_p) = \{0\} \} .$$

$I(Z_p)$ ist ein abgeschlossenes, nichttriviales Verbands- und Algebrenideal in $C_c(X)$. Für $p_1, \ldots, p_n$ aus X ist $\bigcup_{i=1}^{n} Z_{p_i}$ eine Nullmenge in X mit

$$\bigcup_{i=1}^{n} Z_{p_i} \neq X .$$

Nun gilt

$$\bigcap_{i=1}^{n} I(Z_{p_i}) = I(\bigcup_{i=1}^{n} Z_{p_i}) .$$

Folglich ist auch $\bigcap_{i=1}^{n} I(Z_{p_i})$ ein nichttriviales, abgeschlossenes Verbands- und Algebrenideal in $C_c(X)$. Also ist

$$\{ I(Z_{p_i}) \mid n \in \mathbb{N} , \; p_1, \ldots, p_n \in X \}$$

Basis eines Filters Φ, der in $C_c(X)$ gegen o konvergiert. Da überdies ein nichttriviales Vektorverbandsideal in keiner ordnungsbeschränkten Menge liegen kann, da $C(X)$ archimedisch ist, folgt, daß Φ keine ordnungsbeschränkte Teilmenge enthält. Nach Konstruktion konvergiert Φ stetig gegen o;

offenbar konvergiert Φ aber nicht bezüglich Λ_D gegen o.
Aus dem Beweis zu (1.5) erkennt man, daß ein wesentlicher Unterschied zwischen Λ_D und Λ_c darauf gründet, daß es Filter auf $C(X)$ gibt, die bezüglich Λ_c konvergieren, aber keine ordnungsbeschränkte Menge enthalten. Umgekehrt allerdings vermuten wir:

1.6 Satz: Sei X ein vollständig regulärer, topologischer Hausdorffraum. Φ sei ein Filter auf $C(X)$, der bezüglich Λ_c gegen f aus $C(X)$ konvergiere. Ferner enthalte Φ eine ordnungsbeschränkte Menge. Dann konvergiert Φ auch bezüglich Λ_D gegen f.

Beweis: Aus der Definition von Λ_D geht hervor, daß ein Filter Φ auf $C(X)$ genau dann in $\Lambda_D(f)$ ist, wenn $\Phi - f \in \Lambda_D(o)$ gilt. Aus diesem Grunde können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\Phi \in \Lambda_c(o)$ gilt, und zeigen, daß daraus $\Phi \in \Lambda_D(o)$ folgt. Es muß also die Existenz eines D-zulässigen Systems H in $C(X)$ nachgewiesen werden, so daß

$$\Phi \supseteq \Phi_H$$

gilt.

Da nach Voraussetzung Φ eine ordnungsbeschränkte Menge enthält, existiert f_o aus $C(X)$ (- wobei $f_o \geqslant \underline{1}$ angenommen werden kann -), so daß

$$[-f_o, f_o] \in \Phi$$

erfüllt ist.

Seien nun ε mit $0 < \varepsilon < 1$ und p aus X vorgegeben. Wegen $\Phi \in \Lambda_c(o)$ gibt es eine Menge $F_{p,\varepsilon}$ aus Φ mit $F_{p,\varepsilon} \subseteq [-f_o, f_o]$ und eine offene Umgebung U_p von p derart, daß

$$F_{p,\varepsilon}(U_p) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$$

gilt.

Sei $\tilde{g}_{p,\varepsilon} : X \longrightarrow [0,1]$ eine stetige Funktion mit

$$\tilde{g}_{p,\varepsilon}(q) = \begin{cases} 0 & | \; q = p \\ 1 & | \; q \in X \setminus U_p \end{cases} .$$

Es ist $V_p = \tilde{g}^{-1}_{p,\varepsilon}([0,1/2])$ eine abgeschlossene Nullmengenumgebung von p in X mit der Eigenschaft $V_p \subseteq U_p$.

Wir definieren nun die stetige Funktion

$$g_{p,\varepsilon} : X \longrightarrow [0,1]$$

durch

$$g_{p,\varepsilon} = 2((\tilde{g}_{p,\varepsilon} \vee \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}) .$$

Dann gilt

$$g_{p,\varepsilon}(q) = \begin{cases} 0 & | \; q \in V_p \\ 1 & | \; q \in X \setminus U_p \end{cases} .$$

Weiter definieren wir eine stetige Funktion $f_{p,\varepsilon}$ aus $C(X)$ durch

$$f_{p,\varepsilon} = (f_o - \underline{\varepsilon})g_{p,\varepsilon} + \underline{\varepsilon} .$$

Diese Funktion besitzt die folgenden Eigenschaften:

(a) $\quad f_{p,\varepsilon} \geqslant \underline{\varepsilon}$.

(b) $\quad f_{p,\varepsilon}(q) = \begin{cases} f_o(q) & | \; q \in X \setminus U_p \\ \varepsilon & | \; q \in V_p \end{cases}$.

Für eine Funktion f aus $F_{p,\varepsilon}$ gilt wegen $F_{p,\varepsilon} \subseteq [-f_o, f_o]$:

(a) $\quad |f(q)| \leq \varepsilon \leq f_{p,\varepsilon}(q)$ für q aus U_p

(b) $\quad |f(q)| \leq f_o(q) = f_{p,\varepsilon}(q)$ für q aus $X \setminus U_p$.

Also folgt:

$$F_{p,\varepsilon} \subseteq [-f_{p,\varepsilon}, f_{p,\varepsilon}] .$$

Demnach gilt also insbesondere $[-f_{p,\varepsilon}, f_{p,\varepsilon}] \in \Phi$.

Nach dem soeben angegebenen Konstruktionsverfahren ist jedem ε mit $0 < \varepsilon < 1$ und jedem p aus X die Funktion $f_{p,\varepsilon}$ zugeordnet. Seien nun $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sowie $p_1, \ldots, p_n$ vorgegeben.

Wegen $[-f_{p_i,\varepsilon_i}, f_{p_i,\varepsilon_i}] \in \Phi$ folgt dann aber auch

$$\bigcap_{i=1}^{n}[-f_{p_i,\varepsilon_i}, f_{p_i,\varepsilon_i}] = \Big[\bigvee_{i=1}^{n}(-f_{p_i,\varepsilon_i}), \bigwedge_{i=1}^{n} f_{p_i,\varepsilon_i}\Big] =$$

$$= \Big[-\bigwedge_{i=1}^{n} f_{p_i,\varepsilon_i}, \bigwedge_{i=1}^{n} f_{p_i,\varepsilon_i}\Big] \in \Phi .$$

Man kann nun zu der Funktionenfamilie $\{f_{p,\varepsilon} \mid 0 < \varepsilon < 1 , p \in X\}$ das nach unten gerichtete System H der endlichen Infima bilden:

$$H = \Big\{\bigwedge_{i=1}^{n} f_{p_i,\varepsilon_i} \;\Big|\; n \in \mathbb{N} , 0 < \varepsilon_i < 1 , p_i \in X\Big\} .$$

Da jede der Funktionen $f_{p,\varepsilon}$ nichtnegativ ist, enthält H nur nichtnegative Funktionen. Da aber für $\varepsilon > 0$ und p aus X die Funktion $f_{p,\varepsilon/2}$ in H liegt und

$$0 < f_{p,\varepsilon/2}(p) = \varepsilon/2 < \varepsilon$$

gilt, folgt

$$\inf H(p) = 0$$

für p aus X. Folglich ist H D-zulässig. Aus dem soeben Gezeigten folgt ferner $\Phi \supseteq \Phi_H$. Also konvergiert Φ bezüglich Λ_D gegen o.

Wir haben also bewiesen: <u>Wenn X ein Limesraum ist, so konvergiert ein Filter Φ auf $C(X)$ genau dann bezüglich Λ_D, wenn er in $C_c(X'')$ konvergiert und eine ordnungsbeschränkte Teilmenge von $C(X)$ enthält.</u>

Als eine wichtige Konsequenz des soeben bewiesenen Satzes ergibt sich unmittelbar:

<u>(1.7 Korollar: Sei X ein Limesraum. Dann stimmen auf den ordnungsbeschränkten Teilmengen von $C(X)$ die von $C_c(X'')$ und von $C_D(X)$ induzierten Limitierungen überein.</u>

Da $C_c(X'')$ eine Limesalgebra ist und da das System der ordnungsbeschränkten Teilmengen von $C(X)$ stabil gegenüber den algebraischen Operationen auf $C(X)$ ist, ergibt sich unmittelbar:

<u>1.8 Korollar: $C_D(X)$ ist eine vollständige Limesalgebra .</u>

<u>Beweis:</u> Es bleibt lediglich die Vollständigkeit nachzuweisen. Sei also Φ ein Cauchy-Filter bezüglich Λ_D, d.h., es gelte $\Phi - \Phi \in \Lambda_D(o)$. Dann ist Φ auch ein Cauchy-Filter in der Limesalgebra $C_c(X'')$. Folglich existiert wegen der Vollständigkeit von $C_c(X'')$ eine Funktion f aus $C(X)$, so daß $\Phi \in \Lambda_c(f)$ gilt. Aus der Cauchy-Filter-Eigenschaft von Φ bezüglich Λ_D folgt, daß eine Menge F in Φ und eine positive Funktion $f_o \geqslant 1$ aus $C(X)$ existieren müssen mit

$$F - F \leq [-f_o, f_o] \text{ .}$$

Insbesondere folgt dann für g und h aus F :

$$\big|\,|g| - |h|\,\big| \leq |g-h| \leq f_o \text{ .}$$

Fixiert man h aus F , so folgt für beliebiges g aus F

$$|g| \leq f_o + |h| \text{ ,}$$

also

$$F \leq \big[-(f_o + |h|), (f_o + |h|)\big] \text{ .}$$

Der Filter Φ enthält folglich eine ordnungsbeschränkte Menge, konvergiert also bezüglich Λ_D gegen f .

In diesem Zusammenhang müssen wir uns die Frage nach $\underline{\mathrm{Hom}}_s C_D(X)$ und $\underline{\mathrm{Hom}}_c C_D(X)$ stellen. Wir erhalten:

<u>1.9 Satz: Für einen beliebigen Limesraum X gilt</u>

$$\underline{\mathrm{Hom}}_c C_D(X) = \underline{\mathrm{Hom}}_s C_D(X) = X''$$

<u>Beweis:</u> Wir haben bereits zuvor gesehen, daß

$$i_X(X) = \underline{\mathrm{Hom}}\, C_D(X) \qquad \text{gilt .}$$

Aus der Stetigkeit der Abbildung $id : C_D(X) \xrightarrow[id]{} C_c(X'')$ folgt die Stetigkeit von $X'' = \underline{\mathrm{Hom}}_c C_c(X'') \longrightarrow \mathrm{Hom}_c C_D(X)$, wobei X'' der mit der von $C(X)$ auf $i_X(X)$ induzierten schwachen Topologie versehene Raum ist. Aus der Stetigkeit der Evaluationsabbildung $\omega : \underline{\mathrm{Hom}}_c C_D(X) \times C_D(X) \longrightarrow IR$

folgt, daß die Limitierung von $\underline{\mathrm{Hom}}_c C_D(X)$ feiner als die von $C(X)$ auf $\underline{\mathrm{Hom}}\, C_D(X)$ induzierte schwache Topologie sein müß, was äquivalent zur Stetigkeit von

$$\underline{\mathrm{Hom}}_c C_D(X) \xrightarrow{\mathrm{id}} \underline{\mathrm{Hom}}_c C_c(X'') = X''$$

ist. Daraus ergibt sich die Behauptung.

Wir haben in (1.5) gesehen, daß für einen vollständig regulären, topologischen Hausdorffraum X die Dini-Konvergenz Λ_D feiner als die stetige Konvergenz Λ_c auf $C(X)$ ist , falls X nicht kompakt ist.

Wenn umgekehrt X ein kompakter, topologischer Hausdorffraum ist, so ist $C_c(X)$ ein Banachverband mit Ordnungseinheit $\underline{1}$. Der Nullumgebungsfilter von $C_c(X)$ enthält das Ordnungsintervall $[-\underline{1},\underline{1}]$, also eine ordnungsbeschränkte Menge, konvergiert demnach bezüglich Λ_D gegen o .

Wir schließen hieraus:

<u>1.10 Korollar: Sei X ein vollständig regulärer, topologischer Hausdorffraum. Dann sind äquivalent:</u>

a) X <u>ist kompakt .</u>

b) $\Lambda_c = \Lambda_D$.

c) $\Lambda_u = \Lambda_D$.

e) $\Lambda_I = \Lambda_D$.

<u>Beweis:</u>Mit Hilfe von Konstruktionsprozessen, die analog dem im Beweis von (1.5) verlaufen, kann man zeigen, daß, falls X nicht kompakt ist, Filter auf $C(X)$ existieren, die bezüglich Λ_u bzw. Λ_I gegen o streben, aber bezüglich Λ_D nicht konvergieren. Wenn X kompakt ist, so ist die Gültigkeit der Aussagen (b) - (e) evident.

2. Beschränkte Mengen.

Ein wesentlicher Begriff, der uns im Vorangegangenen immer wieder begegnete und uns ins Kommende begleiten wird, ist der der ordnungsbeschränkten Teilmenge von $C(X)$. Da sich in Limesvektorräumen der Begriff der beschränkten Menge in Analogie zu dem in topologischen Vektorräumen definieren läßt, ist die Frage sinnvoll, von welcher Form die beschränkten Teilmengen von $C(X)$ bezüglich Λ_c, Λ_D, Λ_u, Λ_I sind und wann ihre Klassen übereinstimmen. In diesem Abschnitt wollen wir – was nach dem ersten Abschnitt als sinnvoll erscheint – uns auf die Voraussetzung beschränken, daß X ein vollständig regulärer, topologischer Hausdorffraum sei.

Für das Folgende benötigen wir ein technisches Lemma, das aus den Arbeiten von Binz und Feldman über $C_I(X)$ bekannt ist. (Siehe (6)).

<u>2.1 Lemma: Sei H eine ordnungsbeschränkte Teilmenge von $C(X)$. Dann gibt es eine kompakte Teilmenge K von $\beta X \setminus X$ und eine ordnungsbeschränkte Teilmenge H^K von $C(\beta X \setminus K)$ derart, daß zu h aus H stets h^K aus H^K mit der Eigenschaft</u>

$$h = h^K|_X$$

<u>existiert.</u>

<u>Beweis:</u> Nach Voraussetzung gibt es $f_o \geqslant 1$ in $C(X)$ mit der Eigenschaft, daß aus $h \in H$ stets $|h| \leqslant f_o$ folgt. Mit $\overline{\mathbb{R}}$ wollen wir die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}$ bezeichnen. Aufgrund der universellen Charakterisierung der Stone-Čech-Kompaktifizierung existieren zu h aus H bzw. zu f_o stetige Abbildungen $h^\beta : \beta X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ bzw. $f_o^\beta : \beta X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, so daß die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "h"'] & \beta X \arrow[d, "h^\beta"] \\ & \overline{\mathbb{R}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, shift left, "1/f_o"'] \arrow[dr, shift right, "f_o"'] & \beta X \arrow[d, shift left, "f_o^\beta"] \arrow[d, shift right, "1/f_o^\beta"] \\ & \overline{\mathbb{R}} \end{tikzcd}$$

Es ist $K := ((1/f_o^\beta))^{-1}(0)$ eine kompakte Teilmenge von $\beta X \setminus X$. Ferner gilt

$$f_o^\beta\big|_{\beta X \setminus K} \in C(\beta X \setminus K) \quad .$$

Wegen der Relationen $|h| \leq f_o$ für alle h aus H, folgt mit Hilfe eines Dichte-Schlusses, daß auch

$$h^\beta\big|_{\beta X \setminus K} \in C(\beta X \setminus K)$$

gilt, so daß wir definieren können :

$$H^K = \{ h^\beta\big|_{\beta X \setminus K} \mid h \in H \} \quad .$$

Man sieht, daß H^K zusammen mit $f_o^\beta\big|_{\beta X \setminus K}$ die Behauptung des Lemmas erfüllt.

<u>Bemerkung:</u> Wenn im Folgenden Y ein Unterraum von βX mit der Eigenschaft $X \subseteq Y \subseteq \beta X$ ist und wenn die Funktion f aus $C(X)$ auf Y eine (eindeutig bestimmte) stetige Fortsetzung besitzt, so wollen wir im Folgenden f und die Fortsetzung auf Y nicht durch verschiedene Symbole unterscheiden, wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht, was gemeint ist .

<u>Definition: Sei E ein Limesvektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Teilmenge B von E heißt beschränkt (bezüglich der Limitierung, die E trägt) , wenn der Filter $\mathcal{V} \cdot B$ in E gegen o konvergiert. Hierbei sei $\mathcal{V}$ der Nullumgebungsfilter in $\mathbb{R}$.</u>

Im folgenden Lemma werden kurz einige Eigenschaften der Klasse der beschränkten Teilmengen eines $\mathbb{R}$ - Limesvektorraumes zusammengefaßt:

<u>2.2 Lemma: Sei E ein Limesvektorraum. Dann gilt:</u>

a) <u>Wenn B_1 und B_2 beschränkte Teilmengen von E sind, so sind auch die Teilmengen $B_1 \cup B_2$ und $B_1 + B_2$ beschränkt .</u>

b) <u>Wenn B eine beschränkte Teilmenge von E ist, so ist auch</u>

jede Teilmenge von B beschränkt.

c) Wenn B eine beschränkte Teilmenge von E ist, so sind für λ aus $\mathbb{R}$ die Menge $\lambda.B$ und die equilibrierte Hülle $[-1,1].B$ von B beschränkt.

Das bedeutet: Die Familie der beschränkten Teilmengen von E bildet eine Vektorraumbornologie.

Folgende Bemerkung ist bei der Frage, wann die Λ_c- und die Λ_D-beschränkten Teilmengen von $C(X)$ übereinstimmen, von Nutzen:

2.3 Bemerkung: Eine Teilmenge B von $C(X)$ ist genau dann Λ_c-beschränkt, wenn es eine unterhalbstetige, nichtnegative, lokalbeschränkte Funktion $u:X \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, so daß für f aus B gilt:

$$|f| \leq u .$$

Beweis: Definiere für die beschränkte Menge B aus $C_c(X)$ die unterhalbstetige Funktion $u:X \longrightarrow [0,+\infty]$ durch

$$u(p) = \sup_{f\in B} |f(p)| \qquad (p\in X) .$$

Wegen $\mathcal{W}.B \in \Lambda_c(o)$ gibt es zu p aus X eine Umgebung U_p von p und eine Konstante M_p derart, daß

$$[-(1/M_p),(1/M_p)].B(U_p) \subseteq [-1,1] ,$$

also

$$B(U_p) \subseteq [-M_p,M_p]$$

gilt. Demnach folgt:

$$\sup_{q\in U_p} u(q) = \sup_{q\in U_p} \sup_{f\in B} |f(q)| \leq M_p ,$$

d.h. u ist lokalbeschränkt.

Sei andererseits $u:X \longrightarrow [0,+\infty]$ eine unterhalbstetige, lokalbeschränkte Funktion. B sei eine Teilmenge von $C(X)$, so daß für f aus B gilt $|f| \leq u$.

Wähle p aus X. Dann gibt es eine Umgebung U_p von p in X und eine Konstante $M_p > 0$ mit der Eigenschaft, daß

$$u|_{U_p} \leq \underline{M}_p|_{U_p}$$

gilt. Hieraus folgt

$$\sup_{q\in U_p} \sup_{f\in B} |f(q)| \leq M_p \quad .$$

Also gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$:

$$[-(\varepsilon/M_p),(\varepsilon/M_p)] \cdot B(U_p) \subseteq [-\varepsilon,\varepsilon] ,$$

was $V \cdot B \in \Lambda_c(o)$ impliziert.

Für die Λ_D-beschränkten Teilmengen von $C(X)$ gilt die folgende naheliegende und leicht zu beweisende Aussage:

<u>2.4 Bemerkung: Eine Teilmenge B von $C(X)$ ist genau dann Λ_D-beschränkt, wenn sie ordnungsbeschränkt ist.</u>

Für die Λ_c- , Λ_u- und Λ_I-beschränkten Teilmengen von $C(X)$ gilt der folgende

<u>2.5 Satz: Für einen vollständig regulären, topologischen Hausdorffraum X sind die Familien der Λ_c- , Λ_u- und Λ_I-beschränkten Teilmengen von $C(X)$ identisch.</u>

<u>Beweis:</u> Man beachte die Relationen $\Lambda_I \geqslant \Lambda_u \geqslant \Lambda_c$. Aus diesem Grunde sind die Λ_I- ebenso wie die Λ_u-beschränkten Teilmengen von $C(X)$ auch Λ_c-beschränkt. Wenn es gelingt zu zeigen, daß jede Λ_c- beschränkte Teilmenge von $C(X)$ auch Λ_I-beschränkt ist, so ist der Satz bewiesen.

Sei B eine Λ_c-beschränkte Teilmenge von $C(X)$. Aus (2.3) geht hervor, daß zu jedem p aus X eine offene Umgebung U_p von p und eine Konstante $M_p > 0$ existieren, so daß

$$B(U_p) \subseteq [-M_p, M_p]$$

gilt. Sei $cl_{\beta X}(U_p)$ die abgeschlossene Hülle von U_p in βX . Dann folgt für f aus B

$$\sup_{q\in cl_{\beta X}(U_p)} |f^\beta(q)| \leq M_p \quad .$$

Hierbei bezeichnet f^{β} die Stone-Čech-Fortsetzung $f^{\beta}: \beta X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ der Funktion f aus $C(X)$.

Das Innere V_p $(= \operatorname{int}_{\beta X} \operatorname{cl}_{\beta X}(U_p))$ von $\operatorname{cl}_{\beta X}(U_p)$ in βX ist eine Umgebung von p in βX und es gilt

$$\sup_{f \in B} \sup_{q \in V_p} |f^{\beta}(q)| \leq M_p .$$

Definiere

$$Y := \bigcup_{p \in X} V_p \subseteq \beta X .$$

Y ist als Vereinigung offener Teilmengen eines kompakten Raumes lokalkompakt, also von der Form

$$Y = \beta X \setminus K ,$$

wobei K eine kompakte Teilmenge von $\beta X \setminus X$ ist. Man sieht nun unmittelbar ein, daß die Menge B_K definiert durch

$$B_K = \{ f_K \mid f_K = f^{\beta}|_Y , f \in B \}$$

eine beschränkte Teilmenge von $C_c(Y)$ ist, d.h., daß $W.B_K \longrightarrow o$ in $C_c(Y)$ gilt. Da aber $W.B$ Bild von $W.B_K$ unter der Injektion

$$C_c(Y) \longrightarrow C_I(X)$$

ist, folgt $W.B \in \Lambda_I(o)$. Damit ist B Λ_I-beschränkt.

Es soll nun der Fall untersucht werden, wann die Λ_c-beschränkten Teilmengen von $C(X)$ mit den Λ_D-beschränkten Teilmengen zusammenfallen.

Nach (2.3) und (2.4) folgt

(a) <u>Jede Λ_D-beschränkte Teilmenge von $C(X)$ ist auch Λ_c-beschränkt.</u>

(b) <u>Die Λ_c-beschränkten Teilmengen von $C(X)$ sind genau dann Λ_D-beschränkt, wenn es zu jeder unterhalbstetigen, lokalbeschränkten Funktion $u: X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion f aus $C(X)$ mit $u \leq f$ gibt.</u>

Die Aussage (b) stimmt mit der Definition eines schwachen cb-Raumes, wie sie von Mack und Johnson (11) gegeben wurde, überein, so daß wir sagen können:

2.6 Satz: Für einen vollständig regulären, topologischen Hausdorffraum X stimmen die Klassen der Λ_c- und der Λ_D-beschränkten Teilmengen von $C(X)$ genau dann überein, wenn X ein schwacher cb-Raum ist.

In (11) werden eine Anzahl äquivalenter Eigenschaften von schwachen cb-Räumen hergeleitet und Permanenzeigenschaften untersucht. Das zentrale, mit dieser Klasse von topologischen Räumen in Zusammenhang stehende Ergebnis ist der folgende

2.7 Satz (Mack & Johnson) : Sei X ein reellkompakter, vollständig regulärer, topologischer Hausdorffraum. Die Dedekindsche Vervollständigung von $C(X)$ (als Verbandsalgebra) ist genau dann isomorph einer Algebra vom Typ $C(Y)$, wenn X ein schwacher cb-Raum ist .

Es werde bemerkt, daß nach Johnson und Mack die Reellkompaktifizierung υX eines schwachen cb-Raumes wiederum ein schwacher cb-Raum ist.

An dieser Stelle wollen wir uns die Frage stellen, ob unter Umständen das Zusammenfallen zweier der drei Limitierung Λ_c, Λ_u und Λ_I impliziert, daß der Raum X ein schwacher cb-Raum ist.

Die Antwort hierauf ist negativ. Wir wollen dazu ein auf Johnson und Mack zurückgehendes Beispiel eines lokalkompakten, topologischen Hausdorffraumes X , für den dann Λ_c, Λ_u und Λ_I auf $C(X)$ zusammenfallen , angeben, der kein schwacher cb-Raum ist. Für diesen Raum umfaßt also die Familie der Λ_c-beschränkten echt die Familie der Λ_D-beschränkten Teilmengen von $C(X)$

trotz $\Lambda_c = \Lambda_u = \Lambda_I$.

Im Folgenden bezeichne für eine Ordinalzahl α

$$W(\alpha) = \{ \sigma \mid \sigma \text{ Ordinalzahl }, \sigma < \alpha \}$$

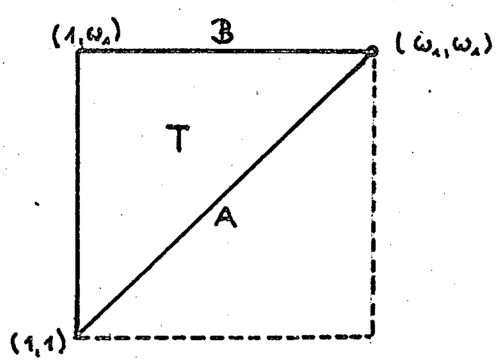
die Menge aller Ordinalzahlen, die kleiner als α sind, versehen mit der Intervalltopologie. Mit dieser Topologie ist $W(\alpha)$ stets ein vollständig regulärer, topologischer Hausdorffraum. Überdies ist $W(\alpha)$ kompakt, wenn α keine Limesordinalzahl ist. (Siehe (8)).

Im Folgenden wollen wir die kleinste Ordinalzahl mit überabzählbarer Kardinalität mit ω_1 bezeichnen.

Wir untersuchen nun einen Unterraum T des Raumes $W(\omega_1) \times W(\omega_1+1)$, der definiert ist durch

$$T := \{ (\sigma,\tau) \mid \sigma \in W(\omega_1), \tau \in W(\omega_1+1), \sigma \leq \tau \} .$$

Diesen Raum kann man sich graphisch wie folgt dargestellt denken:



Es seien $A := \{ (\sigma,\sigma) \mid \sigma \in W(\omega_1) \}$ und $B := \{ (\sigma, \omega_1) \mid \sigma < \omega_1 \}$. B ist als Urbild des Punktes ω_1 aus $W(\omega_1+1)$ unter der Projektion

$$W(\omega_1) \times W(\omega_1+1) \longrightarrow W(\omega_1+1)$$

eine abgeschlossene und zu $W(\omega_1)$ homöomorphe Teilmenge von T.

Ebenso ist A als Graph der Einbettung

$$W(\omega_1) \hookrightarrow W(\omega_1+1)$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $W(\omega_1) \times W(\omega_1+1)$ und somit erst recht von T. $W(\omega_1) \times W(\omega_1+1)$ ist als Produkt eines lokalkompakten Raumes mit einem kompakten Raum lokalkompakt. Als ein abgeschlossener Unterraum dieses Produktes ist T ebenfalls lokalkompakt. Die Stone-Čech-Kompaktifizierung βT von T stimmt mit der Einpunkt-Kompaktifizierung von T überein:

$$\beta T = T \cup \{(\omega_1, \omega_1)\}.$$

Zu jeder Funktion f aus $C(T)$ gibt es eine Ordinalzahl $\sigma_0 < \omega_1$ derart, daß f auf dem "Schwanz"

$$S = \{(\sigma, \tau) \mid \sigma_0 \leq \sigma < \omega_1 \ , \ \sigma \leq \tau \leq \omega_1\}$$

konstant ist. Die abgeschlossenen Mengen A und B können deshalb nicht durch stetige Funktionen getrennt werden.

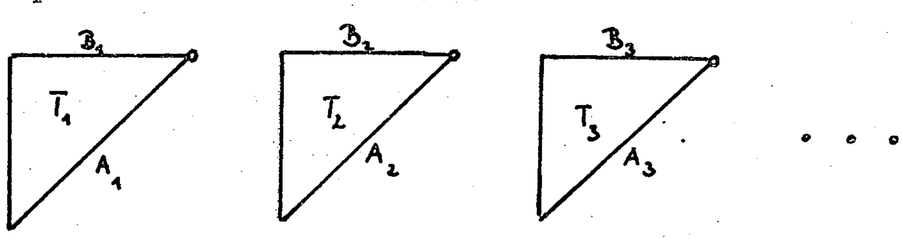
Wir definieren nun einen lokalkompakten, topologischen Hausdorffraum Y durch:

$$Y = X \times \mathbb{N}.$$

Da die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen die diskrete Topologie trägt, können wir Y auch als die $\mathbb{N}$-fache topologische Summe

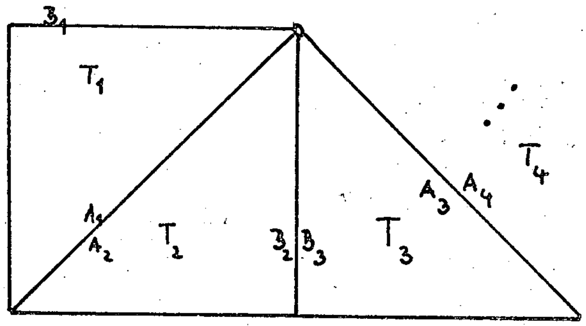
$$Y = \sum_{n \in \mathbb{N}} T_n$$

interpretieren, wobei für jede natürliche Zahl n der Raum T_n eine Kopie von T ist. Y hat also die Form



Hierbei bezeichnen wir die den Mengen A und B entsprechenden Teilmengen von T_n mit A_n bzw. B_n. Die Räume T_n werden nun wie folgt "verklebt":

Für $k = 1, 2, \ldots$ identifizieren wir jeweils die Menge A_{2k-1} mit der Menge A_{2k} sowie die Menge B_{2k} mit der Menge B_{2k+1}. Man erhält auf diese Weise einen Quotientenraum von Y, den wir im Folgenden mit X bezeichnen wollen und der die folgende Gestalt besitzt:



Man beachte, daß X ein lokalkompakter Raum ist. Eine stetige Funktion f aus $C(X)$ induziert aufgrund der Quotientenabbildung

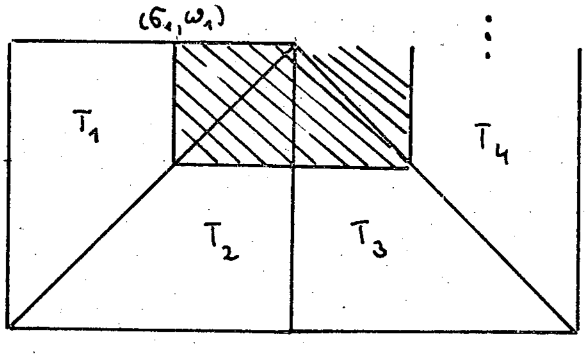
$$k: Y \longrightarrow X$$

auf jedem der Räume T_n eine stetige Funktion $f_n := f \circ k \big|_{T_n}$, die die folgende Eigenschaft haben muß:

Es gibt eine (von n unabhängige!) Ordinalzahl σ_1 derart, daß die Funktion f_n auf dem "Schwanz"

$$S_n = \{(\sigma, \tau) \mid \sigma_1 \leq \sigma < \omega_1, \ \sigma \leq \tau \leq \omega_1\}$$

von T_n konstant ist. Da die Funktion $f \circ k$ von der auf dem "verklebten" Raum X definierten Funktion f induziert wird, nimmt sie auf allen "Schwänzen" S_n denselben Wert an. Betrachtet man die folgende graphische Darstellung des Raumes X, so bedeutet dies, daß f auf der schraffierten Fläche konstant sein muß.



Wir definieren nun für n aus $\mathbb{N}$ unterhalbstetige Funktionen

$$u_n : T_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$u_1(p) = \begin{cases} 0 & p \in B_1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$u_2(p) = \begin{cases} 1 & p \in A_2 \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

und für $k = 1, 2, \ldots\ldots$

$$u_{2k}(p) = \begin{cases} 2k-1 & p \in A_{2k} \\ 2k & \text{sonst} \end{cases}$$

$$u_{2k+1}(p) = \begin{cases} 2k & p \in B_{2k+1} \\ 2k+1 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Diese Funktionen definieren folglich eine unterhalbstetige

$$\tilde{u} : Y = \sum_{\mathbb{N}} T_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch $\tilde{u}(p) = u_n(p)$ für p aus T_n .

$\tilde{u}$ ist so konstruiert, daß beim Übergang von Y zum Quotientenraum X eine unterhalbstetige Funktion $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert, so daß

$$\tilde{u} = u \circ k$$

gilt. Die Funktionen u_n sind lokalbeschränkt. Dies trifft dann nach Konstruktion auch für $\tilde{u}$ und u zu . Aus der Konstruktion von u sowie aus der besonderen Form einer jeden stetigen Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ folgt, daß es keine stetige Funktion auf X mit Werten in $\mathbb{R}$ gibt, die u majorisiert. Also ist X ein lokalkompakter, topologischer Hausdorffraum, der kein schwacher cb-Raum ist.

3. Der Satz von Dini für Λ_I und Λ_u.

Im ersten Abschnitt haben wir die Gültigkeit des Satzes von Dini für $C_c(X)$ bewiesen, die Dini-Konvergenz eingeführt und erste Zusammenhänge zwischen $C_c(X'')$ und $C_D(X)$ aufgezeigt. Auch in diesem Abschnitt wollen wir wieder als Generalprämisse voraussetzen, daß X ein vollständig regulärer, topologischer Hausdorffraum ist, und untersuchen, wann der Satz von Dini für $C_I(X)$ bzw. $C_u(X)$ erfüllt ist, d.h., die Frage beantworten, wann

$$\Lambda_D \geqslant \Lambda_I$$

bzw.

$$\Lambda_D \geqslant \Lambda_u \qquad \text{gilt.}$$

Wegen (1.10) können wir dabei davon ausgehen, daß X nicht kompakt ist. Aus den Argumenten in den Beweisen zu (1.5) und (1.10) geht hervor, daß Λ_D weder gröber als Λ_u noch gröber als Λ_I sein kann.

Eine vollständige Antwort auf unsere erste Frage gibt:

<u>3.1 Satz : Sei X ein vollständig regulärer, topologischer Hausdorffraum. Λ_D ist genau dann feiner als Λ_I, wenn es zu jeder Folge kompakter Mengen (K_n) aus $\beta X \setminus X$ eine kompakte Teilmenge K von $\beta X \setminus X$ dergestalt gibt, daß</u>

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subseteq K$$

<u>gilt.</u>

<u>Beweis:</u> 1) Zu jeder Folge (K_n) kompakter Teilmengen von $\beta X \setminus X$ gebe es eine kompakte Teilmenge K von $\beta X \setminus X$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subseteq K$.

Sei $\Phi \in \Lambda_D(o)$. Es muß $\Phi \in \Lambda_I(o)$ gezeigt werden.

Wegen $\Phi \in \Lambda_D(o)$ gibt es ein D-zulässiges System H von nichtnegativen Funktionen aus $C(X)$, so daß $\Phi \supseteq \Phi_H$ gilt.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß alle Funktionen aus H durch eine Funktion h_o aus $C(X)$ mit $h_o \geqslant 1$ majorisiert werden können.

Jeder Funktion h aus H kann ihre Stone-Čech-Fortsetzung

$$h^{\beta}: \beta X \longrightarrow [0, +\infty]$$

zugeordnet werden. Sei

$$H^{\beta} = \{ h^{\beta} \mid h \in H \} .$$

Man definiere nun eine oberhalbstetige Funktion

$$u_H: \beta X \longrightarrow [0, +\infty]$$

durch

$$u_H(p) = \inf H^{\beta}(p) \qquad (p \in \beta X) .$$

Nach Voraussetzung über H gilt

$$u_H\big|_X = 0 .$$

Definiere ferner eine kompakte Teilmenge K_o von $\beta X \setminus X$ durch

$$K_o := (1/h_o^{\beta})^{-1}(0) .$$

Da für h aus H stets

$$|h^{\beta}| \leqslant h_o^{\beta}$$

gilt, folgt, daß die Funktion u_H auf $\beta X \setminus K_o$ endlich sein muß. Nach (2.1) kann die Familie H als Teilmenge von $C(\beta X \setminus K_o)$ aufgefaßt werden. Es ist offensichtlich, daß H eine <u>zulässige</u> Familie in $C(\beta X \setminus K_o)$ ist, also

$$\inf H = 0$$

in $C(\beta X \setminus K_o)$ gilt. Für jede natürliche Zahl n sei

$$K_n = u_H^{-1}([1/n, +\infty]) .$$

Da u_H oberhalbstetig ist und auf X verschwindet, muß K_n eine kompakte Teilmenge von $\beta X \setminus X$ sein. Definiere nun

$$K = cl_{\beta X}(\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n) .$$

Dann ist K nach Voraussetzung über X eine kompakte Teilmenge von $\beta X \setminus X$. Nach Konstruktion von K verschwindet u_H

auf $\beta X \setminus K$, d.h., es gilt

$$\inf H(p) = 0$$

für alle p aus $\beta X \setminus K$, was bedeutet, daß H in $C(\beta X \setminus K)$ eine D-zulässige Familie ist. Folglich konvergiert der Intervallfilter Φ_H^K bezüglich der Dini-Konvergenz von $C(\beta X \setminus K)$ und somit erst recht in $C_c(\beta X \setminus K)$ gegen o. Da der Filter Φ_H das Bild des Filters Φ_H^K unter der kanonischen Abbildung

$$C_c(\beta X \setminus K) \hookrightarrow C_I(X)$$

ist, folgt, daß Φ_H aus $\Lambda_I(o)$ sein muß. Wegen $\Phi \geq \Phi_H$ folgt $\Phi \in \Lambda_I(o)$.

2) Sei umgekehrt Λ_D feiner als Λ_I.

(K_n) sei eine Folge kompakter Teilmengen von $\beta X \setminus X$. Für jede natürliche Zahl n bezeichne

$$u_n : \beta X \longrightarrow [0,1]$$

die charakteristische Funktion von K_n. Als charakteristische Funktion einer abgeschlossenen Teilmenge des kompakten, topologischen Hausdorffraumes βX ist u_n beschränkt und oberhalbstetig. Definiere nun

$$u : \beta X \longrightarrow [0,1]$$

durch

$$u(p) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} u_n(p)$$

für p aus βX. Man verifiziert sofort, daß u eine oberhalbstetige Funktion auf βX ist, die auf X verschwindet. Als beschränkte, oberhalbstetige Funktion ist u punktweises Infimum einer nach unten filtrierenden Familie H stetiger Funktionen auf βX. Wegen

$$u|_X = o \qquad \text{und} \qquad \inf H(p) = u(p)$$

für p aus βX folgt, daß die Familie H aus $C(X)$ D-zulässig ist. Demnach konvergiert der Intervallfilter Φ_H bezüglich Λ_D gegen o. Da Λ_D feiner als Λ_I angenommen wurde, und da H nur aus beschränkten Funktionen bestand, muß es eine kompakte Teilmenge K in $\beta X \setminus X$ geben, so daß der Intervallfilter der Familie H auf $C(\beta X \setminus K)$, der mit Φ_H^K bezeichnet werde, in $C_c(\beta X \setminus K)$ gegen o konvergiert. Insbesondere konvergiert dann aber der Abschnittsfilter Φ von H in $C_c(\beta X \setminus K)$, also erst recht punktweise auf $\beta X \setminus K$ gegen o. Das aber impliziert für p aus $\beta X \setminus K$:

$$u_H(p) = \inf H(p) = 0 .$$

Da u_H auf $\beta X \setminus K$ verschwindet, muß demnach

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subseteq K \subseteq \beta X \setminus X$$

gelten. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir bemerken hierzu: Wenn X lokalkompakt ist, so ist $\beta X \setminus X$ kompakt. Die Voraussetzungen des Satzes sind folglich erfüllt, und es gilt $\Lambda_D \geqslant \Lambda_I$.

In (2) wurde ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Relation $\Lambda_c = \Lambda_I$ bewiesen. Anhand eines Beispieles wurde ferner gezeigt, daß es durchaus nichtlokalkompakte, vollständig reguläre, topologische Hausdorffräume gibt, für deren Algebra stetiger, reellwertiger Funktionen $\Lambda_I = \Lambda_c$ gilt, so daß die Lokalkompaktheit von X hinreichend aber nicht notwendig für die Relation $\Lambda_D \geqslant \Lambda_I$ ist. Betrachtet man in (2) das notwendige und hinreichende Kriterium für die Bedingung $\Lambda_c = \Lambda_I$, so erkennt man, daß die Aussage "Der abzählbare Durchschnitt von Umgebungen von X in βX ist wieder eine Umgebung von X in βX" äquivalent ist zur Bedingung, daß Λ_D feiner als Λ_I ist. Wir werden dieses Thema nochmals am Ende dieses Abschnittes anschneiden.

Nun wenden wir uns der Frage "Wann gilt $\Lambda_D \geqslant \Lambda_u$?" zu.

Dazu beweisen wir zunächst:

3.2 Satz: Sei X ein vollständig regulärer, topologischer Hausdorffraum. Φ sei ein Filter auf $C(X)$, der eine ordnungsbeschränkte Menge enthalte und bezüglich Λ_u gegen o konvergiere. Dann konvergiert Φ auch bezüglich Λ_I gegen o.

Beweis: Wir können annehmen, daß es eine Funktion $f_o \geqslant 1$ aus $C(X)$ gibt mit der Eigenschaft, daß das Ordnungsintervall $[-f_o, f_o]$ ein Element des Filters Φ ist. Dann definieren wir

$$K_o := (1/f_o^\beta)^{-1}(0) \subseteq \beta X \setminus X .$$

Nach Voraussetzung besitzt der Filter Φ eine Basis von Teilmengen von $[-f_o, f_o]$. Wegen $f_o \in C(\beta X \setminus K_o)$ können diese Teilmengen mit Teilmengen des Intervalles $[-f_o, f_o]$ in $C(\beta X \setminus K_o)$ identifiziert werden (siehe (2.1)), so daß Φ eine Basis von Teilmengen der Algebra $C(\beta X \setminus K_o)$ besitzt.

Nach Voraussetzung konvergiert Φ bezüglich Λ_u gegen o. Das bedeutet: Zu jedem Punkt p aus X gibt es eine offene Umgebung U_p dergestalt, daß der Filter $\Phi(U_p)$ in $\mathbb{R}$ gegen 0 konvergiert. Wir definieren

$$V_p = \operatorname{int}_{\beta X} \operatorname{cl}_{\beta X}(U_p) .$$

Demnach ist V_p eine offene Umgebung von p in βX. Ferner setzen wir

$$Z = \bigcup_{p \in X} V_p .$$

Als Vereinigung offener Teilmengen eines kompakten Raumes ist Z lokalkompakt. Nach Konstruktion von Z gilt $X \subseteq Z \subseteq \beta X$.

Folglich existiert eine kompakte Teilmenge $K_1 \subseteq \beta X \setminus X$, so daß

$$Z = \beta X \setminus K_1$$

gilt. Wir definieren nun den lokalkompakten Raum Y durch

$$Y = \beta X \setminus (K_o \cup K_1) .$$

Offensichtlich gilt $X \subsetneq Y \subseteq \beta X$.

Da sich die Algebra $C(\beta X \setminus K_o)$ in kanonischer Weise in $C(Y)$ einbetten läßt, folgt, daß der Filter Φ eine Basis $\mathcal{L}$ von Mengen aus $[-f_o, f_o]$ besitzt, die schon in $C(Y)$ liegen.

Nach Voraussetzung gibt es zu p aus X und $\varepsilon > 0$ eine Teilmenge $F_{p,\varepsilon}$ von $[-f_o, f_o]$, die zudem Element von Φ ist, mit der Eigenschaft, daß

$$F_{p,\varepsilon}(U_p) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$$

gilt. Dann folgt aber

$$F_{p,\varepsilon}(V_p \cap Y) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon] \ .$$

Da $\{V_p \cap Y \mid p \in X\}$ ein Überdeckungssystem bestehend aus offenen Teilmengen von Y ist, impliziert dies, daß der Filter Φ_Y auf $C(Y)$, der von $\mathcal{L}$ erzeugt wird, in $C_u(Y)$, also in $C_c(Y)$ gegen o konvergiert. Da der Filter Φ Bild des Filters Φ_Y unter der kanonischen Abbildung

$$C_c(Y) \longleftrightarrow C_I(X)$$

ist, folgt, daß Φ bezüglich Λ_I gegen o konvergiert.

Als unmittelbare Konsequenz dieses Satzes ergibt sich:

<u>3.3 Korollar: Auf den ordnungsbeschränkten Teilmengen von</u> $C(X)$ <u>induzieren</u> Λ_I <u>und</u> Λ_u <u>dieselbe Limitierung.</u>

Der Satz (3.2) gibt nun auch unmittelbar Auskunft darüber, wann der Satz von Dini für Λ_u gilt:

Wegen $\Lambda_I \geqslant \Lambda_u$ gilt der Satz von Dini bestimmt für Λ_u, wenn er für Λ_I gilt. Da aber andererseits jeder Filter aus $\Lambda_D(o)$ eine ordnungsbeschränkte Teilmenge von $C(X)$ enthält, impliziert (3.2), daß aus der Gültigkeit des Satzes von Dini für $C_u(X)$ auch die Gültigkeit des Satzes von Dini für $C_I(X)$ folgt.

<u>3.4 Korollar: Der Satz von Dini gilt genau dann für</u> $C_u(X)$,

wenn er für $C_I(X)$ gilt, d.h., $\Lambda_D \geqslant \Lambda_u$ genau dann, wenn $\Lambda_D \geqslant \Lambda_I$.
In (2) war das Beispiel eines vollständig regulären, topologischen Hausdorffraumes X angegeben worden, für den $C_c(X) = C_I(X)$ gilt, der aber nicht lokalkompakt ist. Räume mit dieser Eigenschaft wurden in (2) wie folgt charakterisiert:
Es gilt $C_c(X) = C_I(X)$ genau dann, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) Der Durchschnitt abzählbar vieler Umgebungen von X in βX ist wieder eine Umgebung von X in βX. (Das bedeutet: Der Satz von Dini gilt für $C_I(X)$.)

b) Die Menge $\tilde{X}$ aller Punkte aus X, die in υX keine kompakte Umgebung besitzen, ist eine kompakte Teilmenge von X.

Die sich dabei ergebende Frage, ob die Bedingung (a) die Bedingung (b) impliziert, konnte bisher noch nicht beantwortet werden. (Ein Beispiel für " (b) impliziert nicht (a)" werden wir noch geben.) Wir wollen diese Frage hier wieder aufgreifen. Zunächst beweisen wir:

3.5 Satz: Wenn wir mit X_{nl} die Menge aller Punkte des Raumes X bezeichnen, die keine kompakte Umgebung in X besitzen, und wenn der Umgebungsfilter eines jeden Punktes aus X_{nl} stabil gegenüber der Bildung von abzählbaren Durchschnitten ist, so gilt für $C_u(X)$ der Satz von Dini, d.h., Λ_D ist feiner als Λ_I.

Beweis: Sei H ein D-zulässiges System von Funktionen aus $C(X)$. Mit Φ bezeichnen wir den Abschnittsfilter von H. Ferner sei X_l die Menge aller Punkte mit einer kompakten Umgebung in X. Da der Satz von Dini für kompakte Räume in Bezug auf die gleichmäßige Konvergenz gilt, können wir zu jedem Punkt p aus X_1 eine relativ-kompakte, offene Umgebung V_p von p dergestalt finden, daß

$$\Phi(V_p) \longrightarrow 0$$

in IR gilt. Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt p aus X_{n1}. Wegen

$$\inf H(p) = 0$$

finden wir zu jeder natürlichen Zahl n eine Funktion $h_{n,p}$ aus H und eine Umgebung $U_{n,p}$ von p in X mit der Eigenschaft, daß

$$0 \leq h_{n,p}(q) \leq 1/n$$

für alle q aus $U_{n,p}$ gilt. Nach Voraussetzung ist

$$V_p := \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{n,p}$$

eine Umgebung von p in X. Dann gilt für alle h aus H mit $h \leq h_{n,p}$ und für alle q aus V_p :

$$0 \leq h(q) \leq h_{n,p}(q) \leq 1/n \quad ,$$

d.h.,

$$\Phi(V_p) \longrightarrow 0$$

in IR. Mit $\{V_p \mid p \in X\}$ ist ein Überdeckungssystem von Umgebungen der Punkte von X definiert, das die Eigenschaft besitzt, daß der Filter Φ auf jedem Element dieses Überdeckungssystems gleichmäßig gegen o konvergiert. Also konvergiert Φ bezüglich Λ_u gegen o. Damit ist der Satz von Dini für $C_u(X)$ bewiesen.

Um das Beispiel eines Raumes zu finden der Eigenschaft (a) aber nicht Eigenschaft (b) besitzt, betrachten wir wieder den Raum $W(\omega_1+1)$ (siehe Abschnitt 2), der nach (8) kompakt ist. Jede Limesordinalzahl σ von abzählbarer Kardinalität ist ein G_δ-Punkt und folglich eine Nullmenge. Da jede Konull-Menge eines reellkompakten Raumes als Unterraum reellkompakt ist, folgt die Reellkompaktheit des Unterraumes

$$Y_\sigma := W(\omega_1+1) \setminus \{\sigma\}.$$

Da der Durchschnitt von reellkompakten Räumen reellkompakt ist (siehe (8)), folgt, daß der Unterraum Y von $W(\omega_1+1)$ definiert durch

$$Y = \bigcap_{\substack{\sigma<\omega_1 \\ \text{Limesordinalzahl}}} Y_\sigma = W(\omega_1+1) \setminus \{\sigma \mid \sigma<\omega_1, \sigma \text{ Limesordinalzahl}\}$$

ein reellkompakter, vollständig regulärer, topologischer Hausdorffraum sein muß. Y hat die Eigenschaft, daß jeder Punkt p aus Y mit $p \neq \omega_1$ isolierter Punkt ist. Der Durchschnitt von abzählbar vielen Umgebungen von ω_1 in Y ist wieder eine Umgebung von ω_1 in Y.

Da $\mathbb{N}$ reellkompakt und da das Produkt reellkompakter Räume wieder reellkompakt (siehe (8)) ist, folgt, daß der Raum

$$X := Y \times \mathbb{N}$$

reellkompakt sein muß. Da $\mathbb{N}$ die diskrete Topologie trägt, kann X auch als topologisch direkte Summe

$$X = \sum_{n \in \mathbb{N}} Y_n$$

angesehen werden, wobei jedes Y_n eine Kopie von Y ist.

Alle Punkte der Form (α, n) mit $\alpha \in Y \setminus \{\omega_1\}$ und n aus $\mathbb{N}$ sind isoliert, haben sich selbst also als kompakte Umgebung in X. Die Punkte, die keine kompakte Umgebung in X besitzen, sind die von der Form (ω_1, n) ($n \in \mathbb{N}$). Jeder dieser Punkte hat die Eigenschaft, daß der Durchschnitt von abzählbar vielen Umgebungen wieder eine Umgebung ist. Ferner ist

$$\tilde{X} = X_{nl} = \{(\omega_1, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ein abzählbarer, diskreter Unterraum von X, also nicht kompakt. Da nach (3.5) der Satz von Dini für $C_u(X)$ gilt und da X reellkompakt ist, folgt, daß X die Eigenschaft (a) aber nicht (b) erfüllt.

4. OP-Limitierungen auf $C(X)$.

Im Folgenden wollen wir den Begriff der OP-Limitierung einführen, der eine Verallgemeinerung uniformer Konvergenzen darstellt.

Sei X ein Limesraum. Für f aus $C(X)$ mit $f \geqslant o$ definieren wir eine Abbildung

$$T_f : C(X) \longrightarrow [-f,f]$$

durch

$$T_f(h) = (h \wedge f) \vee (-f)$$

für h aus $C(X)$. Wenn $g \geqslant f \geqslant o$ gilt, wobei g und f aus $C(X)$ seien, so sei die Abbildung

$$T^g_f : [-g,g] \longrightarrow [-f,f]$$

gegeben durch

$$T^g_f = T_f \big| [-g,g] \, .$$

Man beachte, daß für jede Funktion h aus $[-f,f]$ stets

$$T_f(h) = h$$

gilt. Das System der Ordnungsintervalle

$$\mathcal{O} = \{[-f,f] \mid f \in C(X) , f \geqslant \underline{1} \}$$

von $C(X)$ bildet offensichtlich zusammen mit der Familie von Abbildungen

$$\mathcal{T} = \{T^g_f \mid f,g \in C(X) , \underline{1} \leq f \leq g \}$$

ein projektives System. Der projektive Limes dieses Systems werde mit $\underline{OP}(X)$ bezeichnet:

$$\underline{OP}(X) = \operatorname*{proj}_{\substack{f \in C(X) \\ f \geqslant \underline{1}}} [-f,f] \, .$$

Offensichtlich induzieren die Abbildungen $T_f : C(X) \longrightarrow [-f,f]$ für f aus $C(X)$ mit $f \geqslant \underline{1}$ aufgrund ihrer Verträglichkeit mit den Abbildungen der Familie $\mathcal{T}$ eine Abbildung

$$T : C(X) \longrightarrow \underline{OP}(X) \, .$$

<u>4.1 Lemma:</u> <u>Die Abbildung</u> $T: C(X) \longrightarrow \underline{OP}(X)$ <u>ist injektiv.</u>

<u>Beweis:</u> Seien f_1 und f_2 aus $C(X)$ mit

$$T(f_1) = T(f_2) .$$

Setzte $f = |f_1| + |f_2| + \underline{1}$. Dann gilt wegen obiger Bemerkung

$$f_1 = T_f(f_1) = T_f(f_2) = f_2 .$$

<u>Anmerkung:</u> Man sieht leicht ein, daß, falls $X \neq \emptyset$ gilt, T nicht surjektiv sein kann.

Sei nun Λ eine Limitierung auf $C(X)$ mit der Eigenschaft, daß für f aus $C(X)$ mit $f \geqslant \underline{1}$ die Abbildung

$$T_f : C_\Lambda(X) \longrightarrow [-f,f]_\Lambda$$

stetig ist. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn Λ eine Vektorraumlimitierung ist, bezüglich der die Betragsabbildung

$$f \longrightarrow |f|$$

stetig ist, da dann auch die Verbandsoperationen stetig sind.

Dann sind die Abbildungen

$$T^g{}_f : [-g,g]_\Lambda \longrightarrow [-f,f]_\Lambda$$

für g und f aus $C(X)$ mit $g \geqslant f \geqslant \underline{1}$ als Einschränkungen stetiger Abbildungen wieder stetig. Wir erhalten auf diese Weise ein projektives System von Limesräumen, das aus der Limesraumfamilie

$$\mathcal{O}_\Lambda = \{ [-f,f]_\Lambda \mid f \in C(X) , f \geqslant \underline{1} \}$$

zusammen mit der Familie stetiger Projektionen

$$\mathcal{F}_\Lambda = \{ T^g{}_f \mid g,f \in C(X) , g \geqslant f \geqslant \underline{1} \}$$

besteht. Hierdurch wird $\underline{OP}(X)$ in natürlicher Weise zu einem Limesraum, den wir mit $\underline{OP}_\Lambda(X)$ bezeichnen wollen.

Die Voraussetzung der Stetigkeit aller Abbildungen der Form

$$T_f : C_\Lambda(X) \longrightarrow [-f,f]_\Lambda \quad (f \in C(X) , f \geqslant \underline{1})$$

sichert, daß die hiervon induzierte Abbildung

$$T : C_\Lambda(X) \longrightarrow \underline{OP}_\Lambda(X)$$

stetig ist.

Bemerkung: Wir werden später anhand des Beispieles $\Lambda = \Lambda_I$ erkennen, daß die Abbildung $T: C_\Lambda(X) \longrightarrow OP_\Lambda(X)$ nicht immer eine Einbettung ist.

Definition: Die Abbildung $T: C(X) \longrightarrow OP_\Lambda(X)$ induziert auf $C(X)$ eine Initiallimitierung, die wir mit Λ_{op} bezeichnen wollen.

Es gilt:

4.2 Bemerkung: Auf den ordnungsbeschränkten Teilmengen von $C(X)$ induzieren Λ und Λ_{op} dieselbe Limitierung.

Beweis: Sei B eine ordnungsbeschränkte Menge aus $C(X)$.

Wir wollen ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$B = [-f_o, f_o]$$

gilt, wobei f_o aus $C(X)$ ist und die Relation $f_o \geqslant 1$ erfüllt. Dann ist aber für f aus $C(X)$ mit $f \geqslant f_o$ die Abbildung

$$T_f \big| [-f_o, f_o] : [-f_o, f_o]_\Lambda \longrightarrow [-f, f]_\Lambda$$

nicht nur eine stetige Abbildung sondern sogar eine Einbettung.

Also ist

$$T \big| [-f_o, f_o] : [-f_o, f_o]_\Lambda \longrightarrow OP_\Lambda(X)$$

eine Einbettung.

Hieraus ergibt sich unmittelbar:

4.3 Bemerkung: Es gilt stets $\Lambda_{op} = (\Lambda_{op})_{op}$.

Definition: Eine Limitierung Λ auf $C(X)$ mit der Eigenschaft, daß für alle f aus $C(X)$ mit $f \geqslant 1$ die Abbildung

$$T_f : C_\Lambda(X) \longrightarrow [-f, f]_\Lambda$$

stetig ist, werde OP-Limitierung genannt, wenn $\Lambda = \Lambda_{op}$ gilt. Allgemein wird Λ_{op} die zu Λ assoziierte OP-Limitierung genannt. (Aus (4.3) geht hervor, daß Λ_{op} eine OP-Limitierung ist.)

<u>4.4 Bemerkung: Λ_{op} ist genau dann eine Topologie, wenn die von Λ auf den ordnungsbeschränkten Teilmengen von</u> $C(X)$ <u>induzierte Limitierung stets eine Topologie ist.</u>

Dies folgt aus der Tatsache, daß die projektiven Limites topologischer Räume in der Kategorie der Limesräume homöomorph zu denen in der Kategorie der topologischen Räume sind.

<u>Bemerkung: Es ist sofort einzusehen, daß Λ_{op} genau dann separiert ist, wenn dies für Λ der Fall ist.</u>

Wenn Λ eine Algebrenlimitierung auf $C(X)$ ist, so sind alle Ordnungsintervalle der Form $[-f,f]_\Lambda$ ($f \geqslant \underline{1}$) homöomorph zum Intervall $[-\underline{1},\underline{1}]_\Lambda$ unter der Abbildung

$$h \longmapsto f.h \quad .$$

Das bedeutet: In diesem Falle ist Λ_{op} genau dann eine Topologie, wenn $[-\underline{1},\underline{1}]_\Lambda$ topologisch ist. Im Folgenden wird sich zeigen, daß wichtige Konvergenzstrukturen auf $C(X)$ OP-Limitierungen sind, bzw., daß zwischen zwei uns bekannten Limitierungen die folgende Relation besteht: Die eine ist die assoziierte OP-Limitierung zur anderen.

Wir werden den Begriff der OP-Limitierung als eine Verallgemeinerung von Konvergenzbegriffen bestimmter Charakteristik zu interpretieren haben. Dies wird aus den folgenden Resultaten zu schließen sein.

Es sei $\mathfrak{T}$ ein nach oben filtrierendes Überdeckungssystem des Limesraumes X, wobei Überdeckungssystem in dem Sinne, daß $\bigcup \mathfrak{T} = X$ gilt, zu verstehen ist. Die $\mathfrak{T}$-Topologie $\tau_{\mathfrak{T}}$ auf $C(X)$ ist dann die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den Elementen der Familie $\mathfrak{T}$. $\tau_{\mathfrak{T}}$ muß nicht notwendigerweise mit der Vektorraumstruktur von $C(X)$ kompatibel sein. Es gilt:

<u>4.5 Satz: Sei $\mathfrak{T}$ ein nach oben filtrierendes Überdeckungssystem von Teilmengen des Limesraumes</u> X . <u>Dann ist</u> $\tau_{\mathfrak{T}}$ <u>eine</u> OP-<u>Limitierung auf</u> $C(X)$.

<u>Beweis:</u> Offensichtlich ist $T: C_{\tau_{\mathfrak{T}}}(X) \longrightarrow OP_{\tau_{\mathfrak{T}}}(X)$ stetig . Der Satz ist bewiesen, wenn wir zeigen können, daß jeder bezüglich $(\tau_{\mathfrak{T}})_{op}$ konvergente Filter Φ auf $C(X)$ auch bezüglich $\tau_{\mathfrak{T}}$ konvergiert. Nach Definition von $(\tau_{\mathfrak{T}})_{op}$ konvergiert Φ bezüglich $(\tau_{\mathfrak{T}})_{op}$ gegen f_o aus $C(X)$, wenn für jede Funktion f aus $C(X)$ mit $f \geqslant |f_o| + 1$ der Filter $T_f(\Phi)$ bezüglich $\tau_{\mathfrak{T}}$ gegen $T_f(f_o) = f_o$ konvergiert. Wenn dies gilt, so folgt:

Zu A aus $\mathfrak{T}$ und beliebigem ε mit $0 < \varepsilon < 1$ gibt es eine Menge $H_{A,\varepsilon}$ aus Φ mit der Eigenschaft, daß für h aus $H_{A,\varepsilon}$ gilt:

$$\sup_{p \in A} |T_f(h)(p) - f_o(p)| < \varepsilon .$$

Hieraus folgt wegen $\varepsilon < 1$ und $f \geqslant |f_o| + 1$ nach Definition von T_f :

$$-f(p) \leq -(|f_o(p)| + 1) < T_f(h)(p) < (|f_o(p)| + 1) \leq f(p)$$

für alle p aus A und somit

$$T_f(h)(p) = h(p) .$$

Also gilt für h aus $H_{A,\varepsilon}$:

$$\sup_{p \in A} |h(p) - f_o(p)| < \varepsilon .$$

Demnach konvergiert der Filter Φ auf A gleichmäßig gegen f_o. Da A aus $\mathfrak{T}$ beliebig war, folgt, daß Φ bezüglich $\tau_{\mathfrak{T}}$ gegen f_o konvergiert. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Analog erhält man:

<u>4.6 Satz: Sei</u> X <u>ein topologischer Raum</u> . <u>Dann ist die Limitierung</u> Λ_u <u>der lokaluniformen Konvergenz auf</u> $C(X)$ <u>eine</u> OP-<u>Limitierung.</u>

<u>Beweis:</u> Man verifiziert ohne große Schwierigkeiten, daß die Abbildung $f \longmapsto |f|$ von $C(X)$ in den Kegel der nichtnegativen Funktionen von $C(X)$ eine bezüglich Λ_u stetige Abbildung ist. Die Verbandsoperationen auf $C(X)$ sind also bezüglich Λ_u stetig, so daß die Abbildung

$$T: C_u(X) \longrightarrow \underline{OP}_{\Lambda_u}(X)$$

ebenfalls stetig ist. Man zeigt nun ganz wie im Beweis von (4.5), daß jeder Filter auf $C(X)$, der bezüglich $(\Lambda_u)_{op}$ konvergiert, auch bezüglich Λ_u gegen denselben Grenzwert konvergieren muß.

Auch die stetige Konvergenz erweist sich als eine OP-Limitierung.

<u>4.7 Satz: Sei</u> X <u>ein Limesraum. Dann ist die stetige Konvergenz</u> Λ_c <u>auf</u> $C(X)$ <u>eine</u> OP-<u>Limitierung.</u>

<u>Beweis:</u> Man weist wieder ohne große Schwierigkeiten nach, daß die Abbildung $f \longmapsto |f|$ bezüglich Λ_c stetig und somit auch $T: C_c(X) \longrightarrow \underline{OP}_{\Lambda_c}(X)$ stetig ist. Dieselbe Technik wie in den Beweisen zu (4.5) und (4.6) hilft uns einzusehen, daß jeder auf $C(X)$ bezüglich $(\Lambda_c)_{op}$ konvergente Filter auch bezüglich Λ_c gegen denselben Grenzwert konvergiert, so daß $\Lambda_c = (\Lambda_c)_{op}$ folgt.

<u>4.8 Bemerkung:</u> Man verifiziert ohne Schwierigkeiten, daß für einen vollständig regulären, topologischen Hausdorffraum X $f \longmapsto |f|$ auf $C(X)$ bezüglich Λ_I stetig ist, so daß

$$T: C_I(X) \longrightarrow \underline{OP}_{\Lambda_I}(X)$$

stetig ist.

<u>4.9 Bemerkung:</u> Zwei Limitierungen Λ_1 und Λ_2 auf $C(X)$, bezüglich derer die Abbildungen $T_f: C_{\Lambda_i}(X) \longrightarrow [-f,f]_{\Lambda_i}$ für f aus $C(X)$ mit $f \geqslant \underline{1}$ und $i = 1,2$ stetig sind,

besitzen dieselbe assoziierte OP-Limitierung, wenn sie auf den ordnungsbeschränkten Teilmengen von $C(X)$ dieselbe Limitierung induzieren. Hieraus ergibt sich wegen (3.3):

4.10 Satz: Sei X ein vollständig regulärer, topologischer Hausdorffraum. Dann gilt auf $C(X)$

$$(\Lambda_I)_{op} = \Lambda_u .$$

Nach (1.7) wissen wir, daß für einen beliebigen Limesraum X die Limitierungen Λ_D und $\Lambda_c(X'')$ – wobei $\Lambda_c(X'')$ die Limitierung von $C_c(X'')$ sei – auf den ordnungsbeschränkten Teilmengen von $C(X) = C(X'')$ übereinstimmen. Ferner wissen wir – wie auf p. 10 erwähnt wurde –, daß für einen Limesraum X die Algebra $C_c(X)$ den assoziierten c-einbettbaren Limesraum X' charakterisiert, da $C_c(X) = C_c(X')$ gilt. Folglich können wir aussagen:

4.11 Satz: Für jeden Limesraum X gilt $(\Lambda_D)_{op} = \Lambda_c(X'')$. Ein c-einbettbarer Limesraum X ist genau dann vollständig regulär, wenn $(\Lambda_D)_{op} = \Lambda_c$ gilt. Hierbei ist Λ_c die Limitierung von $C_c(X)$.

Damit ist auch die gesuchte Charakterisierung der vollständig regulären, topologischen Hausdorffräume innerhalb der Kategorie der c-einbettbaren Limesräume durch $C_c(X)$ via $C_D(X)$ gegeben.

Zum Beweis von (4.11) braucht man nur die Stetigkeit der Abbildung $f \longrightarrow |f|$ bezüglich Λ_D zu beachten.

Aufgrund von (4.4) und der sich daran anschließenden Bemerkung wissen wir wegen (4.11):

(4.12) Bemerkung: Der zu einem Limesraum X assoziierte vollständig reguläre, topologische Hausdorffraum X'' ist genau dann ein lokalkompakter Raum, wenn das Ordnungsintervall $[-1,1]_D$ versehen mit der Dini-Konvergenz ein topologischer Raum ist.

Wir stellen uns nun die Frage, unter welchen Voraussetzungen die Marinescu-Limitierung Λ_I eine OP-Limitierung ist. Äquivalent dazu ist wegen (4.10) die Frage nach dem Zusammenfallen von Λ_I und Λ_u. Die Antwort hierauf liefert:

<u>(4.13) Satz: Für einen vollständig regulären, topologischen Hausdorffraum X sind die folgenden Aussagen äquivalent:</u>

a) <u>Die Menge $\tilde{X}$ aller Punkte aus X, die in υX keine kompakte Umgebung besitzen, ist in X kompakt.</u>

b) $C_I(X) = C_u(X)$.

c) Λ_I <u>ist eine OP-Limitierung.</u>

<u>Beweis:</u> Annahme: (a). Sei Φ aus $\Lambda_u(o)$. Es soll $\Phi \in \Lambda_I(o)$, also die Behauptung (b), bewiesen werden. Nach Voraussetzung gibt es zu p aus X eine offene Umgebung U_p von p in X, so daß der Filter $\Phi(U_p)$ in $\mathbb{R}$ gegen 0 konvergiert. Da $\tilde{X}$ kompakt ist, gibt es $p_1, \ldots, p_n$ aus $\tilde{X}$, so daß

$$\{ U_{p_i} \mid i = 1, \ldots, n \}$$

die Menge $\tilde{X}$ überdeckt. Wir setzen $\tilde{U} = \bigcup_{i=1}^{n} U_{p_i}$.
Φ konvergiert auch auf $\tilde{U}$ gleichmäßig gegen o. Es kann darüberhinaus angenommen werden, daß für p aus $X \setminus \tilde{X}$ die Umgebung U_p relativ kompakt in υX gewählt wurde. Es ist

$$\tilde{V} := \operatorname{int}_{\beta X} \operatorname{cl}_{\beta X}(\tilde{U})$$

eine offene Umgebung von $\tilde{X}$ in βX. Wir definieren ferner für p aus $X \setminus \tilde{X}$:

$$V_p := \operatorname{int}_{\upsilon X} \operatorname{cl}_{\upsilon X}(U_p)$$

und

$$Y := \Big(\bigcup_{p \in X \setminus \tilde{X}} V_p \Big) \cup \tilde{V} .$$

Der Raum Y ist als Vereinigung offener Teilmengen von βX ein lokalkompakter Raum, der X umfaßt. Also gibt es eine kompakte Teilmenge K von $\beta X \setminus X$, so daß

$$Y = \beta X \setminus K$$

gilt.

Man verifiziert ohne Schwierigkeiten, daß der Filter Φ eine Basis $\mathcal{L}$ von Mengen aus $C(Y)$ besitzt. Der von $\mathcal{L}$ erzeugte Filter Φ_Y in $C(Y)$ konvergiert auf $\tilde{V}$ und auf jedem V_p ($p \in X \setminus \tilde{X}$) gleichmäßig gegen o. Also gilt $\Phi_Y \longrightarrow o$ in $C_c(Y)$. Da unter der kanonischen Abbildung von $C_c(Y)$ in $C_I(X)$ der Filter Φ_Y auf den Filter Φ abgebildet wird, folgt, daß Φ auch bezüglich Λ_I gegen o konvergiert.

Wir setzen nun voraus, daß $C_I(X) = C_u(X)$ gelte.
Ferner sei $\{U_p \mid p \in \tilde{X}\}$ ein Überdeckungssystem von $\tilde{X}$, das aus offenen Umgebungen der Punkte p aus $\tilde{X}$ in X bestehe. Zu p aus $\tilde{X}$ wählen wir wegen der Regularität des Raumes X eine abgeschlossene Umgebung V_p von p in X mit

$$V_p \subseteq U_p .$$

Zu jedem Punkt p aus $X \setminus \tilde{X}$ wählen wir eine in X abgeschlossene Umgebung V_p mit der Eigenschaft, daß $cl_{\upsilon X}(V_p)$ in υX kompakt ist und außerdem

$$V_p \cap \tilde{X} = \emptyset$$

gilt. Wir betrachten wie in (1.5) den Filter Φ auf $C(X)$, der als Basis die Idealfamilie

$$\{ I(V_{p_1} \cup \ldots \cup V_{p_n}) \mid p_i \in X , i = 1,\ldots,n , n \in \mathbb{N} \}$$

besitzt. Offensichtlich konvergiert der Filter Φ bezüglich Λ_u gegen o. Nach Voraussetzung konvergiert er dann aber auch bezüglich Λ_I gegen o. Das impliziert die Existenz einer kompakten Teilmenge K von $\beta X \setminus X$ und von endlich vielen Punkten $p_1,\ldots,p_n$ aus X mit der Eigenschaft, daß

$$I(V_{p_1} \cup \ldots \cup V_{p_n}) \subseteq C(\beta X \setminus K)$$

gilt. Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt p aus X, der nicht in der abgeschlossenen Menge $V_{p_1} \cup \ldots \cup V_{p_n}$ liegt.

Da X ein vollständig regulärer, topologischer Hausdorffraum ist, gibt es disjunkte Nullmengenumgebungen Z_p von p und Z_V von $V_{p_1} \cup \dots \cup V_{p_n}$ und eine stetige Funktion

$$f_p : X \longrightarrow [0,1]$$

mit den folgenden Eigenschaften:

$$f_p|_{Z_p} = 1|_{Z_p} \quad \text{und} \quad f_p|_{Z_V} = 0|_{Z_V} \quad .$$

Die Funktion f_p definiert uns eine multiplikative, lineare Abbildung

$$F_p : C(X) \longrightarrow I(V_{p_1} \cup \dots \cup V_{p_n})$$

vermöge

$$F_p(f) = f_p \circ f \quad .$$

Hierbei kann $F_p(f)$ sowohl als Funktion aus $C(X)$ wie auch als Funktion aus $C(\beta X \setminus K)$ aufgefaßt werden. Es gilt

$$F_p(f)|_{Z_p} = f|_{Z_p}$$

für jede Funktion f aus $C(X)$ aufgrund der Wahl von f_p. Aufgrund der Lokalkompaktheit von $\beta X \setminus K$ können wir eine kompakte Umgebung W_p von p in $\beta X \setminus K$ derart finden, daß

$$W_p \subsetneq cl_{\beta X \setminus K}(Z_p)$$

gilt. Die Evaluation eines jeden Punktes q aus W_p zusammengesetzt mit der Abbildung F_p gibt Anlaß zu einem reellen, unitären Algebrenhomomorphismus auf $C(X)$. Daraus folgt aber

$$W_p \subsetneq \upsilon X \; .$$

Demnach besitzt der Punkt p die kompakte Umgebung W_p in υX, liegt also in $X \setminus \tilde{X}$. Da nun p als ein beliebiger Punkt aus X angenommen wurde mit der Eigenschaft, nicht in $V_{p_1} \cup \dots \cup V_{p_n}$ zu liegen, folgt, daß $V_{p_1} \cup \dots \cup V_{p_n}$ die Menge $\tilde{X}$ umfaßt. Da nach Konstruktion der V_{p_i} für jeden Punkt p_i aus $X \setminus \tilde{X}$

$$V_{p_i} \cap \tilde{X} = \emptyset$$

gilt, folgt, daß

$$\{ V_{p_i} \mid i = 1,\dots,n \, , \, p_i \in \tilde{X} \}$$

ein Überdeckungssystem von $\tilde{X}$ ist. Also enthält

$$\{ V_p \mid p \in \tilde{X} \}$$

und somit erst recht die gröbere Überdeckung durch offene Mengen

$$\{ U_p \mid p \in \tilde{X} \}$$

eine endliche Überdeckung von $\tilde{X}$. Also ist $\tilde{X}$ kompakt.

Da nun aber die zu Λ_I assoziierte OP-Limitierung genau Λ_u ist, folgt somit auch die Äquivalenz der Aussagen (a) und (c).

<u>4.14 Bemerkung:</u> Die Äquivalenz der Aussagen (a) und (c) wurde zuerst vom Verfasser bewiesen, wohingegen etwas später Butzmann die Äquivalenz der Aussagen (a) und (b) bewies. Zu diesen Zeitpunkten war noch nicht bekannt, daß die zu Λ_I assoziierte OP-Limitierung Λ_u ist.

Butzmann bewies auch unabhängig vom Verfasser den folgenden Satz, der sich im Rahmen der hier entwickelten Theorie als Korollar ergibt:

<u>4.15 Satz: Es gilt $C_c(X) = C_u(X)$ genau dann, wenn der Umgebungsfilter von X in βX die Abzählbare-Durchschnitts-Eigenschaft besitzt.</u>

Aus (4.2), (4.10) und (4.12) folgt unmittelbar, daß $C_c(X) = C_u(X)$ gilt, wenn der Satz von Dini für $C_u(X)$ gilt. Nach (3.1) und (3.4) ist dies genau dann der Fall, wenn der Umgebungsfilter von X in βX die Abzählbare-Durchschnitts-Eigenschaft besitzt.

Aufgrund der in den Abschnitten 3 und 4 angestellten Betrachtungen erhalten wir als Korollar das folgende Resultat aus (2):

<u>4.16 Satz: Für einen vollständig regulären, topologischen</u>

Hausdorffraum X gilt $C_c(X) = C_I(X)$ genau dann, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) Der abzählbare Durchschnitt von Umgebungen von X in βX ist wieder eine Umgebung von X in βX. (Äquivalent hierzu : Der Satz von Dini gilt für $C_I(X)$. bzw.: $C_c(X) = C_u(X)$.)

b) Die Menge $\tilde{X}$ aller Punkte aus X , die in νX keine kompakte Umgebung besitzen, ist kompakt. (Äquivalent hierzu: Λ_I ist eine OP-Limitierung. bzw. $C_u(X) = C_I(X)$.)

Wir haben im dritten Abschnitt gesehen, daß die Bedingung (a) von (4.16) nicht notwendig die Bedingung (b) implizieren muß.

Umgekehrt ist z.B. der offene, euklidische Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ zusammen mit dem Punkt (0,1) versehen mit der natürlichen, euklidischen Topologie ein Beispiel für einen vollständig regulären, topologischen Hausdorffraum, der (b) aber nicht (a) erfüllt.

Also impliziert weder $\Lambda_I = \Lambda_u$ noch $\Lambda_u = \Lambda_c$ die Relation $\Lambda_c = \Lambda_I$ allein.

5. Algebren- und Verbandsideale in $C_D(X)$.

In diesem Abschnitt wollen wir uns der Frage nach den abgeschlossenen Algebren- und Verbandsidealen von $C_D(X)$ zuwenden. Aufgrund unserer Erkenntnisse über die Dini-Konvergenz in den voraufgegangenen Abschnitten wollen wir im Folgenden voraussetzen, daß X ein vollständig regulärer, topologischer Hausdorffraum sei .

Es werde an die Definition einer soliden Teilmenge eines Vektorverbandes erinnert:

Eine Teilmenge A des Vektorverbandes E heiße solide, wenn die Relationen $a \in A$ und $|b| \leq |a|$ stets $b \in A$ implizieren.

<u>5.1 Satz: Sei A eine solide Teilmenge von $C(X)$. Dann ist die Menge $\alpha_D(A)$ aller Adhärenzpunkte von A bezüglich der Dini-Konvergenz Λ_D identisch mit der Menge $\alpha_c(A)$ aller Adhärenzpunkte von A bezüglich der stetigen Konvergenz Λ_c :</u>

$$\alpha_D(A) = \alpha_c(A) \ .$$

<u>Beweis:</u> Da Λ_D feiner als Λ_c ist, folgt

$$\alpha_D(A) \subseteq \alpha_c(A) \ .$$

Es werde nun umgekehrt gezeigt, daß jede Funktion f aus $C(X)$, die Adhärenzpunkt von A bezüglich Λ_c ist, auch Adhärenzpunkt von A bezüglich Λ_D ist :

Sei also Φ ein Filter auf $C(X)$, der stetig gegen f konvergiere und außerdem eine Basis von Teilmengen von A besitzt .

Wir wählen nun eine Funktion g aus $C(X)$ mit $g \geqslant |f| + \underline{1}$.

Mit Φ_A bezeichnen wir den Filter auf A , der aus allen Teilmengen besteht, die in Φ liegen.

Nach (4.7) konvergiert der Filter $T_g(\Phi)$ gegen $T_g(f) = f$. (Man beachte die Wahl von g !) Wegen (1.6) konvergiert $T_g(\Phi)$ auch bezüglich Λ_D gegen f , da X als vollständig regulärer, topologischer Hausdorffraum vorausgesetzt wurde. Ferner ist $T_g(\Phi_A)$ eine Filterbasis von $T_g(\Phi)$. Da A als solide vorausgesetzt wurde, und da für jede Funktion h aus $C(X)$ stets

$$|T_g(h)| \leq |h|$$

gilt, folgt, daß $T_g(A) \subseteq A$ gilt. Das impliziert, daß der Filter $T_g(\Phi)$ mit $T_g(\Phi_A)$ eine Basis besitzt, deren Elemente Teilmengen von A sind. Also ist f Adhärenzpunkt von A bezüglich Λ_D.

Mit Hilfe dieses Satzes wollen wir die Aussagen über die abgeschlossenen Algebren- und Verbandsideale in $C_D(X)$ aus den Aussagen über die abgeschlossenen Algebrenideale in $C_c(X)$ gewinnen. Dazu benötigen wir :

<u>5.2 Satz: Die abgeschlossenen Algebrenideale in $C_D(X)$ sind mit den abgeschlossenen Verbandsidealen von $C_D(X)$ identisch.</u>

<u>Beweis:</u> a) Sei I ein abgeschlossenes Verbandsideal von $C_D(X)$. Ferner seien f aus $C(X)$ und g aus I. Für jede natürliche Zahl n sei

$$f_n = T_n(f) .$$

Wegen

$$|f_n \cdot g| \leq n\,|g| \in I$$

folgt

$$|f_n \cdot g| \in I .$$

Da $(|f_n \cdot g|)$ punktweise monoton, also im Sinne von Λ_D gegen $|g \cdot f|$ konvergiert, folgt wegen der Λ_D-Abgeschlossenheit von I

$$|f \cdot g| \in I$$

und mithin, da I ein Verbandsideal ist,

$$f \cdot g \in I .$$

b) Sei umgekehrt I ein abgeschlossenes Algebrenideal von

$C_D(X)$. Es ist zu zeigen:

1) Aus $f \in I$ folgt $|f| \in I$.

2) Wenn $f \geqslant 0$, $f \in I$, $g \in C(X)$ und $|g| \leqslant f$ gelten, so folgt $g \in I$.

1) Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß $|f| \leqslant \underline{1}$ gilt , da man sonst diese Relation unmittelbar durch Multiplikation mit der Einheit $\underline{1}/(\underline{1} + f^2)$ aus $C(X)$ erhalten kann. Man wähle nun eine Folge (p_n) von Polynomen aus $C([-1,1])$, die die Funktion $x \longmapsto |x|$ gleichmäßig approximieren und für die $p_n(0) = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) gilt. Dann approximiert $(p_n(f))$ gleichmäßig, also erst recht bezüglich der Dini-Konvergenz Λ_D die Funktion $|f|$. Da für jede natürliche Zahl n stets $p_n(f) \in I$ gilt und da I Λ_D-abgeschlossen ist, folgt $|f| \in I$.

2) Wir definieren eine Funktion $h: X \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$h(x) := \begin{cases} \dfrac{g^2(x)}{f(x)} & \big| \ f(x) \neq 0 \\ 0 & \big| \ f(x) = 0 \ . \end{cases}$$

Man verifiziert ohne Schwierigkeiten, daß h stetig ist und daß

$$g^2 = h.f \in I$$

gilt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann wiederum

$$g^2 \leqslant \underline{1}$$

angenommen werden. Die Funktion $x \longmapsto x^{1/2}$ ist auf $[0,1]$ durch eine Folge (q_n) von Polynomen, die alle im Nullpunkt verschwinden, also keinen von Null verschiedenen konstanten Term besitzen, gleichmäßig approximierbar. Dann approximiert $(q_n(g^2))$ gleichmäßig und folglich erst recht bezüglich Λ_D die Funktion $|g|$, die also in I liegen muß, da I nach Voraussetzung Λ_D-abgeschlossen ist. Andererseits kann auch die Funktion $x \longmapsto x^{1/3}$, die man hier als auf $[-1,1]$ definiert betrachtet, durch eine Folge (r_n) von Polynomen gleichmäßig approximieren. Auch hier gelte wieder $r_n(0) = 0$ für n aus $\mathbb{N}$.

Wegen $|g| \in I$ folgt $g.|g| = (\text{sgn } g).g^2 \in I$.

Die Folge $(r_n(g.|g|))$ approximiert gleichmäßig, also auch bezüglich Λ_D die Funktion

$$(g.|g|)^{2/3} = (\text{sgn } g).g^{2/3} ,$$

die folglich in I liegt. Das aber impliziert:

$$g = |g|^{1/3}.(\text{sgn } g).g^{2/3} \in I .$$

Damit ist (5.2) bewiesen.

Aus (5.1) und (5.2) folgt dann aber unmittelbar:

<u>5.3 Korollar:</u> a) <u>Jedes Λ_c-abgeschlossene Ideal in $C(X)$ ist Λ_D-abgeschlossen und umgekehrt.</u>

b) <u>Ein (Algebren- oder Verbands-) Ideal I in $C(X)$ ist genau dann Λ_D-abgeschlossen, wenn es eine abgeschlossene Teilmenge N von X so gibt, daß</u>

$$I = \{ f \mid f \in C(X) , f(N) = \{0\} \}$$

<u>gilt.</u>

Die Aussage (b) erhält man aus der Aussage (a) und dem entsprechenden Theorem für Λ_c-abgeschlossene Ideale von Binz (1).

Die Übereinstimmung der Theorie der abgeschlossenen Ideale für $C_c(X)$ und $C_D(X)$ legt die Vermutung nahe, daß $C_D(X)$ und $C_c(X)$ denselben Dualraum, ja sogar dieselbe assoziierte lokalkonvexe Topologie besitzen. Dies ist aber nicht der Fall, wie im nächsten Abschnitt gezeigt werden soll.

6. Über die zu Λ_D assoziierte lokalkonvexe Vektorraumtopologie auf $C(X)$.

Untersuchungen von Butzmann (4) und Feldman (6) ergaben, daß die zu Λ_c und Λ_I (und folglich auch zu Λ_u) assoziierten lokalkonvexen Vektorraumtopologien auf $C(X)$ die Topologie τ_{co} der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von X ist. Es liegt nahe zu vermuten, daß diese Beziehung auch für die Dini-Konvergenz Λ_D gilt. Das folgende Beispiel (6.1) soll zeigen, daß diese Vermutung falsch ist, selbst wenn X ein lokalkompakter, topologischer Hausdorffraum ist, also $\Lambda_c = (\Lambda_D)_{op}$ eine lokalkonvexe Vektorraumtopologie auf $C(X)$ ist .

(6.1) Beispiel: Wir betrachten den Raum

$$X := \beta\mathbb{R} \setminus (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$$

als Unterraum der Stone-Čech-Kompaktifizierung $\beta\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$. Offensichtlich ist X lokalkompakt . (Man beachte die Relation $cl_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{N}) = \beta\mathbb{N}$.) Darüberhinaus ist dieser Raum pseudokompakt (siehe ((8),6.P)) , d.h., jede stetige, reellwertige Funktion auf X ist beschränkt.

Wir definieren nun für jede natürliche Zahl n ein stetiges, lineares Funktional φ_n auf $C_D(X)$ durch

$$\varphi_n(f) = \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} f(t)dt \qquad ,$$

wobei dt das Lebesgue-Maß auf der reellen Geraden ist .

Offensichtlich ist

$$\varphi_n : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig. Also ist φ_n bezüglich Λ_D stetig .

Da jede Funktion f aus $C(X)$ beschränkt ist, ist durch

$$\varphi(f) := \sum_{1}^{\infty} 2^{-n} \varphi_n(f) \qquad (f \in C(X))$$

ein positives, lineares Funktional φ auf $C(X)$ definiert. Der Träger $\operatorname{supp}\varphi$ dieses linearen Funktionals umfaßt IR. Da IR ferner dicht in βIR und da βIR die Hewittsche Reellkompaktifizierung von X ist, folgt

$$\operatorname{supp}\varphi = \beta\mathrm{IR} .$$

Wegen $X \neq \beta$IR folgt, daß φ nicht bezüglich Λ_c stetig sein kann. Wir wollen nun zeigen, daß φ bezüglich Λ_D stetig ist.

Hierzu genügt es, da φ ein positives, lineares Funktional ist, nachzuweisen, daß für den Abschnittsfilter einer beliebigen D-zulässigen Familie H auf $C(X)$ der Bildfilter unter φ in IR gegen 0 konvergiert.

Sei H in $C(X)$ eine D-zulässige Familie. Φ sei ihr Abschnittsfilter. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß alle Funktionen h aus H durch eine Funktion h_o aus $C(X)$ majorisiert werden.

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ kann man deshalb eine natürliche Zahl m_o mit der Eigenschaft finden, daß

$$0 \leq \sum_{m_o+1}^{\infty} 2^{-n}\varphi_n(h_o) < \varepsilon/2$$

gilt. Nach dem Satz von Dini konvergiert der Abschnittsfilter Φ auf dem kompakten Intervall $[-m_o, m_o]$ gleichmäßig gegen o. Also existiert h_ε aus H mit der Eigenschaft, daß für alle h aus H mit $h \leq h_\varepsilon$ und für alle natürlichen Zahlen k mit $|k \leq m_o$ gilt:

$$0 \leq \varphi_k(h) < \varepsilon/2 .$$

Dann aber folgt:

$$0 \leq \varphi(h) \leq \sum_{1}^{m_o} 2^{-k}\varphi_k(h) + \sum_{m_o+1}^{\infty} 2^{-n}\varphi_n(h_o) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .$$

Wir haben also mit φ ein lineares, positives Funktional auf $C(X)$ gefunden, das bezüglich Λ_D, aber nicht mehr be-

züglich Λ_c stetig ist.
Aus dem soeben Gezeigten folgt, daß $C_D(X)$ und $C_c(X)$ verschiedene Dualräume besitzen. Also können die assoziierten lokalkonvexen Vektorraumtopologien nicht übereinstimmen :

$$(C_D(X))^{\sim} \neq C_c(X) = C_{co}(X) \quad .$$

Wesentlich im vorangegangenen Beispiel war der Umstand, daß der Raum X nicht reellkompakt war. Wir vermuten, daß für reellkompakte, vollständig reguläre, topologische Hausdorffräume die zur Dini-Konvergenz assoziierte lokalkonvexe Topologie die kompakt-offene Topologie auf $C(X)$ ist .
Um dies im Rahmen eines allgemeineren Ergebnisses zu beweisen benötigen wir noch einige Begriffe sowie Hilfsergebnisse.
Definition: Sei E ein Vektorverband. A sei eine Teilmenge von E . Wir definieren die solide Hülle (A) der Menge A durch

$$(A) := \{ b \mid b \in E \wedge \exists a(a \in A \wedge |b| \leq |a|) \} \quad .$$

Wenn Φ ein Filter auf dem Vektorverband E ist, so ist

$$\{ (F) \mid F \in \Phi \}$$

Basis eines Filters auf E , der mit (Φ) bezeichnet werde.
Definition: Sei E ein Limesvektorraum über $\mathbb{R}$, der gleichzeitig ein Vektorverband ist. E heiße Limesvektorverband, wenn für jeden gegen 0 konvergenten Filter Φ folgt, daß auch der gröbere Filter (Φ) gegen 0 konvergiert.
Beispiele: $C_c(X)$, $C_D(X)$, $C_u(X)$, $C_I(X)$ sind für einen vollständig regulären, topologischen Hausdorffraum X stets Limesvektorverbände.
Es werde daran erinnert, daß der zu einem Limesvektorraum E assoziierte lokalkonvexe, topologische Vektorraum mit $E^{\sim}$ bezeichnet wird. Es gilt:

6.2 Satz: Sei E ein Limesvektorverband. Dann ist $E^{\sim}$ ein lokalkonvexer Vektorverband. (Siehe (13).)

Beweis: Es ist zu zeigen, daß es zu jeder stetigen Halbnorm

$$\pi : E \longrightarrow [0, +\infty[$$

eine stetige Halbnorm

$$\pi' : E \longrightarrow [0, +\infty[$$

mit den folgenden Eigenschaften gibt:

a) $\pi \leq \pi'$.

b) Für f und g aus $C(X)$ mit $|f| \leq |g|$ folgt

$$\pi'(f) \leq \pi'(g) \quad .$$

Wir definieren zur vorgegebenen, stetigen Halbnorm π und für f aus E

$$\pi'(f) = \sup_{g \in [-|f|, |f|]} \pi(g) \quad .$$

Es gilt $\pi'(f) < +\infty$. Wäre nämlich $\pi'(f) = +\infty$, so würde es g_n aus E mit

$$|g_n| \leq |f|$$

und

$$\pi(g_n) \geq n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

geben. Dann müßte also

$$\pi(g_n/n) \geq 1$$

gelten. Der Fréchet-Filter Ψ der Folge (g_n/n) ist feiner als der gegen 0 konvergente Filter

$$(\mathcal{W}.|f|) = \mathcal{W}.[-|f|, |f|] \quad ,$$

konvergiert also ebenfalls gegen 0 . Aus $\pi(g_n/n) \geq 1$ folgt aber, daß $\pi(\Psi)$ nicht gegen 0 konvergiert im Widerspruch zur vorausgesetzten Stetigkeit von π .

Folglich ist die Abbildung π' wohldefiniert . Man erkennt sofort, daß π' positiv ist und daß für jedes λ aus $\mathbb{R}$ sowie für jedes f aus E stets $\pi'(\lambda . f) = |\lambda| . \pi'(f)$ gilt. Folglich bleibt für den Nachweis, daß π' eine Halbnorm ist, nur zu zeigen, daß π' subadditiv ist. Hierfür benutzen wir die Zerlegungseigenschaft von Vektorverbänden:

Wenn f_1, f_2, g_1, g_2 aus E sind und wenn $f_1 \leq g_1$ sowie $f_2 \leq g_2$ gelten, so folgt:

$$[f_1, g_1] + [f_2, g_2] = [f_1+f_2, g_1+g_2] .$$

Seien nun f und g aus E . Dann ist

$$\begin{aligned}
\pi'(f+g) &= \sup_{h \in [-|f+g|, |f+g|]} \pi(h) \leq \\
&\leq \sup_{h \in [-(|f|+|g|), |f|+|g|]} \pi(h) = \\
&= \sup_{h_1 \in [-|f|, |f|],\, h_2 \in [-|g|, |g|]} \pi(h_1+h_2) \leq \\
&\leq \sup_{h_1 \in [-|f|, |f|],\, h_2 \in [-|g|, |g|]} (\pi(h_1)+\pi(h_2)) = \\
&= \pi'(f) + \pi'(g) .
\end{aligned}$$

Also ist π' eine π majorisierende Halbnorm mit der Eigenschaft, daß für f und g aus E mit der Eigenschaft $|f| \leq |g|$ folgt:

$$\pi'(f) \leq \pi'(g) .$$

Wir brauchen nun nur noch zu zeigen, daß

$$\pi' : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig ist.

Sei also Φ ein in E gegen o konvergenter Filter. Da E nach Voraussetzung ein Limesvektorverband ist, folgt, daß auch (Φ) in E gegen o konvergiert. Folglich konvergiert der Filter $\pi((\Phi))$ in IR gegen 0 . Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es eine Menge F_ε aus Φ, so daß

$$\pi((F_\varepsilon)) \leq [-\varepsilon, \varepsilon]$$

gilt. Insbesondere folgt dann für f aus F_ε :

$$\pi([-|f|, |f|]) \leq [-\varepsilon, \varepsilon] ,$$

also $$\pi'(f) \doteq \sup_{|g| \leq |f|} \pi(g) \leq \varepsilon$$

und mithin $\qquad \pi'(F_\varepsilon) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$,

d.h. $\pi'(\Phi)$ konvergiert in IR gegen 0 . Also ist π' stetig.

Bemerkung: Die Grundidee zum Beweis dieses allgemeinen Satzes, geht auf Butzmann (4) zurück , der sie benutzte, um $(C_c(X))^- = C_{co}(X)$ zu berechnen.

Für einen Limesvektorverband lassen sich nun alle Sätze aus der Theorie der lokalkonvexen, topologischen Vektorverbände über stetige, lineare Funktionale und Polarenbildung übertragen:

6.3 Korollar: Wenn E ein Limesvektorverband ist, so ist E', der Raum aller stetigen, linearen Funktionale auf E, ein Verbandsideal im Ordnungsdualraum von E .

Für den Beweis via (6.2) siehe ((13), II, 4.17) .

Wir kehren nun zur Untersuchung der zu Λ_D assoziierten, lokalkonvexen Topologie auf $C(X)$ zurück. Aus den vorangegangenen Ergebnissen wissen wir:

6.4 Korollar: $(C_D(X))^-$ ist ein lokalkonvexer, topologischer Vektorverband.

Wir betrachten nun vollständig reguläre, topologische Hausdorffräume X mit der Eigenschaft, daß $C_{co}(X)$ tonneliert ist. Diese Räume wurden von T. Shirota und L. Nachbin (siehe (16) und (12)) wie folgt charakterisiert:

Satz: $C_{co}(X)$ ist genau dann tonneliert, wenn es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge A von X , die nicht kompakt ist, eine Funktion f aus $C(X)$ gibt, die auf A unbeschränkt ist.

Wir behaupten nun:

6.5 Satz: Wenn $C_{co}(X)$ tonneliert ist, so gilt

$$(C_D(X))^- = C_{co}(X) .$$

Beweis: Da die Abbildung

$$id: C_D(X) \longrightarrow C_c(X)$$

stetig ist, ist wegen der Funktorialität der assoziierten lokalkonvexen Topologie auch

$$id: (C_D(X))^{\sim} \longrightarrow C_{co}(X)$$

stetig. Wir brauchen nun nur zu zeigen, daß jede Nullumgebung von $(C_D(X))^{\sim}$ auch eine Nullumgebung in $C_{co}(X)$ ist.
Dazu betrachten wir eine beliebige, solide, abgeschlossene und absolutkonvexe Nullumgebung V in $(C_D(X))^{\sim}$. Die Polare V^o in $(C_D(X))'$ ist eine gleichstetige Menge, also insbesondere schwach beschränkt. Nach Shirota (16) ist dann

$$K = \operatorname{supp} V^o = cl_{\upsilon X} \Big(\bigcup_{\varphi \in V^o} \operatorname{supp} \varphi \Big)$$

eine kompakte Teilmenge von υX. Nun bilden $(C_D(X))^{\sim}$ und $(C_D(X))'$ ein Dualsystem, wobei $(C_D(X))^{\sim}$ regulär geordnet ist, d.h., die positiven Funktionale auf $C(X)$ trennen die Funktionen aus $C(X)$. Nach ((13), II,4.4) ist die Polare einer soliden Teilmenge von $(C_D(X))^{\sim}$ eine solide Teilmenge von $(C_D(X))'$.
Aus diesem Grunde können wir schreiben:

$$K = \operatorname{supp} V^o = cl_{\upsilon X}\Big(\bigcup_{\varphi \in V^o, \varphi \geq 0} \operatorname{supp} \varphi \Big).$$

Es muß $K_1 = K \cap X$ eine kompakte Teilmenge von X sein, denn jede Funktion f aus $C(X) = C(\upsilon X)$ ist auf der kompakten Menge K und mithin auf K_1 beschränkt. Da K_1 eine abgeschlossene Teilmenge von X ist, muß K_1 nach Voraussetzung kompakt sein.
Es werde nun bewiesen, daß $K = K_1$ gilt.
Dazu nehmen wir $K \neq K_1$ an und wählen p aus $K \setminus K_1$.
Es lassen sich dann offene Umgebungen U_1 von K_1 und U_2 von p in υX finden, so daß $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ gilt und

ferner eine stetige Funktion $f_p : \upsilon X \longrightarrow [0,1]$ existiert mit der Eigenschaft, daß

$$f_p(U_1) = \{0\} \quad \text{und} \quad f_p(U_2) = \{1\}$$

gelten.

Wegen

$$p \in \operatorname{supp} V^o = cl_{\upsilon X}(\bigcup_{\substack{\varphi \in V^o \\ \varphi \geq 0}} \operatorname{supp} \varphi)$$

gibt es ein positives Funktional φ aus V^o mit der Eigenschaft, daß

$$\operatorname{supp} \varphi \cap U_2 \neq \emptyset$$

gilt. Wir definieren nun ein positives, lineares Funktional

$$\varphi_p : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$\varphi_p(f) = \varphi(f_p \cdot f) \qquad (f \in C(X)) .$$

Wegen $0 \leq f_p \leq \underline{1}$ folgt

$$0 \leq \varphi_p \leq \varphi .$$

Da $(C_D(X))'$ ein Verbandsideal im Ordnungsdualraum von $C(X)$ ist und da V^o außerdem solide ist, folgt

$$\varphi_p \in V^o .$$

Da f_p auf U_2 den konstanten Wert 1 annimmt, und da

$$\operatorname{supp} \varphi \cap U_2 \neq \emptyset$$

gilt, ist φ_p ein positives, lineares und stetiges Funktional auf $(C_D(X))^-$. Andererseits gilt wegen $\varphi_p \in V^o$:

$$\operatorname{supp} \varphi_p \subseteq K$$

und wegen der Wahl von f_p darüberhinaus

$$K_2 = \operatorname{supp} \varphi_p \subseteq K \setminus K_1 \subseteq \upsilon X \setminus X .$$

Zu jedem Punkt q aus X läßt sich eine stetige Funktion f_q aus $C(\upsilon X)$ mit den folgenden Eigenschaften finden:

1) $\qquad 0 \leq f_q \leq \underline{1}$.

2) $\qquad f_q(K_2) = \{1\}$ und $f_q(q) = 0$.

Wir betrachten nun das D-zulässige System

$$H := \left\{ \bigwedge_{i=1}^{n} f_{q_i} \mid q_i \in X \ , \ i = 1,\ldots,n \ , \ n \in \mathbb{N} \right\} .$$

Nach Konstruktion gilt für jedes h aus H :

$$\varphi_p(h) = \varphi_p(\underline{1}) \geqslant 0 .$$

Da φ_p ein stetiges, positives, lineares Funktional auf $C_D(X)$ ist, muß $\varphi_p(\underline{1}) > 0$ gelten, da man bei gegenteiliger Annahme leicht einen Widerspruch dazu erzeugt, daß $\varphi_p \neq o$ gilt.

Der Abschnittsfilter Φ von H konvergiert bezüglich Λ_D gegen o . Andererseits gilt aber

$$\lim \varphi_p(\Phi) = \varphi_p(\underline{1}) > 0 .$$

Das aber bedeutet, daß φ_p nicht stetig sein kann. Also muß

$$K = K_1$$

gelten.

Wir definieren uns nun eine reelle Zahl $M_K > 0$ durch

$$1/M_K = \sup_{\varphi \in V^o} |\varphi(\underline{1})| .$$

Aufgrund der Wahl von V gilt nach dem Bipolarensatz

$$V^{oo} = V .$$

Also gilt $\quad \underline{M}_K \in V$.

Da nun nach ((13), II, 4.3 und 4.4) gilt :

$$V = \{ f \mid f \in C(X) \ , \ \varphi \in V^o \Rightarrow |\varphi|(|f|) \leq 1 \} ,$$

folgt für jede Funktion f aus $C(X)$ mit

$$|f| \big|_K \leq \underline{M}_K \big|_K$$

und für φ aus V^o wegen $\operatorname{supp} \varphi \leq K$:

$$|\varphi|(|f|) \leq |\varphi|(\underline{M}_K) \leq 1 .$$

Das aber bedeutet, daß V alle Funktionen f aus $C(X)$ mit der Eigenschaft

$$|f| \big|_K \leq \underline{M}_K \big|_K ,$$

also eine Nullumgebung der kompakt-offenen Topologie, enthält und folglich selbst eine Nullumgebung in $C_{co}(X)$ ist.
Nach (12) und (16) ist ein vollständig regulärer, topologischer Hausdorffraum X genau dann reellkompakt, wenn $C_{co}(X)$ bornologisch ist. In diesem Falle ist dann aber $C_{co}(X)$ auch tonneliert. Wir erhalten also:

<u>6.6 Korollar: Wenn X ein reellkompakter, vollständig regulärer, topologischer Hausdorffraum ist, so gilt</u>

$$(C_D(X))^{-} = C_{co}(X) \quad .$$

Literaturverzeichnis

(1) E.Binz: " On closed ideals in convergence function algebras."
Math.Ann. 182, 145 - 153 , 1969 .

(2) E.Binz, H.-P.Butzmann, W.Feldman, K.Kutzler and M.Schröder:
" On ω-admissible vector space Topologies on C(X) ."
to appear in Math. Ann. 1972 .

(3) E.Binz und H.H.Keller:"Funktionenräume in der Kategorie der Limesräume." Ann.Acad.Sci.Fenn.Serie A , 383 , 1966.

(4) H.-P.Butzmann:"Über die c-Reflexivität von $C_c(X)$."erscheint in den Comm.Math.Helv. 1972 .

(5) C.H.Cook and H.R.Fischer:"On equicontinuity and continuous convergence." Math.Ann. 159 , 94 - 104 , 1965 .

(6) E.Binz and W.Feldman:"On a Marinescu-structure on C(X)." to appear in Comm.Math. Helv. 1972.

(7) H.R.Fischer:"Limesräume." Math.Ann. 137 , 269 - 303 , 1959 .

(8) L.Gillman and M.Jerison:"Rings of continuous functions." Van Nostrand Series in Higher Mathematics, 1960 .

(9) E.Hewitt:"Linear functionals on spaces of continuous functuons." Fund. Math. 37 , 161 - 189 , 1950 .

(10) G.Jameson:"Ordered linear spaces." Lecture Notes in Mathematics, vol.141, Berlin-Heidelberg-New York , 1970 .

(11) D.G.Johnson and J.E.Mack:"The Dedekind completion of C(X)." Pac.J.of Math. 20,2 , 231 - 243 , 1967 .

(12) L.Nachbin:"Topological vector spaces of continuous functions." Proc. Nat. Acad. Sci.USA 40, 471 - 474 , 1954 .

(13) A.L.Peressini:"Ordered topological vector spaces." Harper's Series in Modern Mathematics, 1967 .

(14) H.Poppe:"Charakterisierung der Kompaktheit eines topologischen Raumes X durch Konvergenz in C(X)." Math.Nachr. 29 , 205 - 216, 1965.

(15) H.H.Schaefer: "Topological vector spaces.", Berlin-Heidelberg-New York, 1971 .

(16) T.Shirota : " On locally convex vector spaces of continuous functions." Proc. Japan Acad. 30 , 294 - 298 , 1954 .

(17) S. Warner: " The topology of compact convergence on continuous function spaces." Duke Math. J., 265 - 282 , 1958 .