

Über mehrstufige Iterationsverfahren und die
Lösung der Hammersteinschen Gleichung

Eckart Gekeler

Nr. 23

1972

Über mehrstufige Iterationsverfahren und die
Lösung der Hammersteinschen Gleichung

Eckart Gekeler

Abstract. The numerical solution of integral equations of Hammerstein type results in solving systems of equations $x + Kf(x) = 0$ with constant matrix K and diagonal mapping f . It is shown that two-step iterative methods are asymptotically optimal if K is positive semi-definite and f is isotone and continuously differentiable.

1. Einleitung

Ist $G \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes Gebiet mit genügend glattem Rand ∂G und

$$L(s, u) = \sum_{0 \neq |j|, |k| \leq 1} (-1)^{|j|} D^j (a_{jk}(s) D^k u)$$

für alle $s \in G$ ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator mit nichtnegativem $a_{00}(s)$, so läßt sich das Dirichletproblem

$$L(s, u) + h(s, u) = 0 \quad \forall s \in G, \quad u(s) = 0 \quad \forall s \in \partial G$$

in die Hammerstein-Integralgleichung

$$(1) \quad u(s) + \int_G K(s, t) h(t, u(t)) dt = 0$$

transformieren, wenn h und die Koeffizienten von L ebenfalls hinreichend glatt sind (vgl. Hammerstein [3], Hyers [4] und Krasnoselskii-Steckenko [5]). $K(s,t)$ ist hierbei die Green-Funktion zum Differentialoperator L und der Randbedingung $u(s) = 0 \quad \forall s \in \partial G$. Die Lösung von (1) mit bekannten Methoden der numerischen Integration führt auf ein Gleichungssystem der Form

$$(2) \quad x + Kf(x) = 0,$$

in dem die (n,n) -Matrix K konstante Koeffizienten hat und $f: \mathbb{R}^n \supset D_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine diagonale Abbildung ist, d.h. $f(x) = (f^{(1)}(x^{(1)}), \dots, f^{(n)}(x^{(n)}))^T$ gilt.

Amann [1] schlägt zur Lösung von (2) einstufige Iterationsverfahren

$$(3) \quad x_{i+1} = (1-\alpha_0)x_i - \alpha_0 Kf(x_i) \quad i = 0, 1, \dots$$

vor und es liegt nahe, diesen Ansatz zu verallgemeinern. Im ersten Teil dieser Arbeit betrachten wir die Klasse der k -stufigen stationären Iterationsverfahren mit konstanten Koeffizienten $\alpha_j \in \mathbb{C}$

$$(4) \quad x_{i+1} = (1-\alpha_0)x_i - \alpha_0 g(x_i) + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j (x_i - x_{i-j}) \quad i=k-1, k, \dots$$

in der Anwendung auf Gleichungssysteme $x + g(x) = 0$; dieses Problem wird in dem bekannten Buch von Ortega und Rheinboldt [10] nicht näher untersucht. Anschließend sei K eine positiv semidefinite Matrix, f eine isotone stetig differenzierbare Abbildung und $g(x) = Kf(x)$. Wir zeigen, daß in diesem Fall schon zweistufige Verfahren in bezug auf einen naheliegenden Gütebegriff asymptotisch optimal sind, das sind solche Verfahren (4), in denen gegenüber (3) gerade ein weiteres Glied hinzukommt. Als Sonderfall ergeben sich Aussagen von Polyak [12] über die asymptotische Konvergenz nichtlinearer Gleichungssysteme mit symmetrischer Funktionalmatrix. Ähnliche Überlegungen finden sich bei Niethammer [8, 9] und Schempp [14], dort wird für lineare Gleichungssysteme unter anderem bewiesen, daß mehrstufige Iterationsverfahren identisch sind mit der Limitierung der zugrunde liegenden Neumannschen Reihe durch ein Euler-Verfahren.

Die Konvergenz des Verfahrens (4) beruht auf einem Ausmitteln stark schwankender Vektorfolgen. Dieser Tatsache wird eine Normabschätzung, wie sie für den Banachschen Fixpunktsatz notwendig ist, nicht gerecht. Daher müssen zum Nachweis der Konvergenz in größeren Bereichen die Intervalle für die Parameter α_j unter Umständen erheblich kleiner vorausgesetzt werden, als dies für die asymptotische Konvergenz notwendig ist.

Einige Beispiele am Ende der Arbeit bestätigen die gute Konvergenz der zweistufigen Iteration bei Systemen (2) mit den genannten Eigenschaften.

2. Mehrstufige Iterationsverfahren

Es sei $\tilde{\mathbb{C}}$ die um den Punkt ∞ erweiterte komplexe Ebene (Ein-Punkt-Kompaktifizierung der komplexen Ebene \mathbb{C}) und $B_\rho = \{\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| < \rho\}$ ($0 < \rho$). Die Konvergenz eines fest vorgegebenen k -stufigen Verfahrens (4) in der Anwendung auf $x + g(x) = 0$ hängt vom Spektrum der Funktionalmatrix $g'(a)$ an der Lösung a ab. Im allgemeinen kennt man nur eine mehr oder weniger grob bestimmte Menge $S \subset \mathbb{C}$, in der dieses Spektrum enthalten ist, und es ist daher angebracht, die Konvergenz eines Verfahrens (4) gleich bei der ganzen durch die folgende Definition festgelegten Klasse von Funktionen zu untersuchen.

Definition 1. Es sei $G_{S,a}$ die Menge aller stetig differenzierbaren Abbildungen $g: \mathbb{C}^n \supset D_g \rightarrow \mathbb{C}^n$, D_g offen, mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $a \in D_g$ ist die einzige Lösung von $x + g(x) = 0$,
- (ii) die Eigenwerte von $g'(a)$ liegen in der kompakten Menge $S \subset \mathbb{C}$.

Es sei $g \in G_{S,a}$ und $(\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ kurz mit α bezeichnet. Mit den k -tupeln

$$\tilde{x}_i = (x_{i-k+1}, x_{i-k+2}, \dots, x_i)^T$$

von aufeinanderfolgenden Näherungen bilden wir nach Bittner [2]

das zu (4) gehörende einstufige Iterationsverfahren

$$(5) \quad \underset{\sim}{x}_{i+1} = T_{\alpha}(g; \underset{\sim}{x}_i) = \begin{pmatrix} x_{i-k+2} \\ \vdots \\ x_i \\ (1-\alpha_0)x_i - \alpha_0 g(x_i) + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j (x_i - x_{i-j}) \end{pmatrix}$$

Die Folge $\{x_i\}_{0 \leq i}$ konvergiert genau dann, wenn $\{\underset{\sim}{x}_i\}_{0 \leq i}$ konvergiert und der Grenzwert ist $\underset{\sim}{a}$ bzw. $\underset{\sim}{a} = (a, \dots, a)^T$ (k Komponenten). Die Folge $\{\underset{\sim}{x}_i\}_{0 \leq i}$ konvergiert andererseits nach einem Satz von Ostrowski [11, Theorem 22.1] in einer Umgebung von $\underset{\sim}{a}$, wenn der Spektralradius $\rho(T'_{\alpha}(g; \underset{\sim}{a}))$ der Funktionalmatrix von $T_{\alpha}(g; \cdot)$ am Fixpunkt $\underset{\sim}{a}$ kleiner als Eins ist. Ostrowski und Meis-Törnig [6] beweisen dieses Ergebnis für reelle Funktionen; der Beweis in [6] überträgt sich wörtlich auf den komplexen Fall.

Für einen beliebigen Eigenwert λ von $g'(a)$ sind nach dem Spektralabbildungssatz die Eigenwerte von $T'_{\alpha}(g; \underset{\sim}{a})$ die Wurzeln der Gleichung

$$(6) \quad \tau^k - (1 - \alpha_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j - \alpha_0 \lambda) \tau^{k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j \tau^{k-1-j} = 0,$$

d.h. die von Null verschiedenen Eigenwerte dieser Matrix berechnen sich gemäß

$$(7) \quad \lambda = q_{\alpha}(\tau) := -(\tau - (1 - \alpha_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j) + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j / \tau^j) / \alpha_0$$

aus den Eigenwerten λ von $g'(a)$. Die Iteration (4) konvergiert also für beliebiges, aber festes $g \in G_{S,a}$ in einer Umgebung

von a , wenn die Menge $q_\alpha^{-1}(S)$ im offenen Einheitskreis B_1 liegt und dies ist genau dann erfüllt, wenn $q_\alpha(C \setminus B_1) \subset C \setminus S$ gilt. Wir haben damit auf einfache Weise ein Ergebnis gewonnen, das für den linearen Fall auf Arbeiten von Niethammer [8,9] zurückgeht:

Satz 1. Es sei $g \in G_{S,a}$ und für die durch (7) erklärte Abbildung $q_\alpha: C \setminus \{0\} \rightarrow C$ gelte

$$q_\alpha(C \setminus B_1) \subset C \setminus S.$$

Dann gibt es eine Umgebung $U(a)$ von a so, daß die k -stufige Iteration (4) für $x_j \in U(a)$ ($0 \leq j \leq k-1$) gegen a konvergiert.

Ist $\rho(T'_\alpha(g;a)) < 1$, so stellt dieser Wert wie im linearen Fall ein Maß für die asymptotische Konvergenzgeschwindigkeit der Iteration (5) und damit der Iteration (4) dar. Wir definieren deshalb wie folgt

Definition 2. Die 1-stufige Iteration

$$(8) \quad x_{i+1} = (1-\beta_0)x_i - \beta_0 g(x_i) + \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j (x_i - x_{i-j}) \quad i = l-1, l, \dots$$

heißt bezüglich der kompakten Menge $S \subset C$ (asymptotisch) optimal, wenn

$$\max_{g \in G_{S,a}} \rho(T'_\beta(g;a)) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \inf_{\alpha \in \mathbb{R}^k} \max_{g \in G_{S,a}} \rho(T'_\alpha(g;a)) < 1$$

gilt.

Die Charakterisierung des optimalen Verfahrens ist jetzt eine einfache Folgerung aus dem Schwarzschen Lemma der Funktionentheorie.

Satz 2. Das Iterationsverfahren (8) ist bezüglich der kompakten Menge $S \subset \mathbb{C}$ optimal, wenn die durch (7) erklärte zugehörige Abbildung q_β die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (i) es gibt ein $\rho \in \mathbb{R}$, $0 < \rho < 1$, mit $q_\beta(\mathbb{C} \setminus \overline{B}_\rho) = \mathbb{C} \setminus S$,
- (ii) die Restriktion $q_\beta: \mathbb{C} \setminus \overline{B}_\rho \rightarrow \mathbb{C} \setminus S$ ist bijektiv und
- (iii) deren Umkehrabbildung ist holomorph.

Beweis. Wir vergleichen q_β mit einer beliebigen Abbildung q_α , für die $\rho_1 = \max_{g \in G_{S,a}} \rho(T'_\alpha(g;a)) < 1$, d.h. $q_\alpha^{-1}(S) \subset B_{\rho_1}$ gilt.

Nach (6) und dem Fundamentalsatz der Algebra ist $0 < \rho_1$ ($S \neq \emptyset$). Die Abbildung $q_\beta^{-1} \circ q_\alpha: \tilde{\mathbb{C}} \setminus \overline{B}_{\rho_1} \rightarrow \tilde{\mathbb{C}} \setminus \overline{B}_\rho$ ist stetig, auf $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_{\rho_1}$ holomorph und hat die Fixpunkte 1 und ∞ . Nach dem Schwarzschen Lemma ist daher

$$|q_\beta^{-1} \circ q_\alpha(\zeta)| \geq \frac{\rho}{\rho_1} |\zeta|$$

für $|\zeta| \geq \rho_1$. Setzen wir $\zeta = 1$, so folgt $\rho \leq \rho_1$ q.e.d..

Die Voraussetzungen von Satz 2 sind im allgemeinen Fall schwer nachprüfbar. Ist jedoch der Rand von S eine Ellipse, und enthält S nicht den Punkt -1 , so läßt sich die gesuchte Abbildung q_β vollständig bestimmen.

Satz 3. Es sei der Rand ∂S von S eine Ellipse mit den Brennpunkten $\gamma, \delta \in \mathbb{C}$ und es sei $-1 \notin S$ (dabei ist die Entartung von ∂S zu einer Strecke mit den Endpunkten γ und δ zugelassen). Man wähle für (β_0, β_1) dasjenige Paar

$$\left(\frac{4}{(\sqrt{1+\gamma} + \sqrt{1+\delta})^2}, \frac{(\sqrt{1+\gamma} - \sqrt{1+\delta})^2}{(\sqrt{1+\gamma} + \sqrt{1+\delta})^2} \right),$$
$$\left(\frac{4}{(\sqrt{1+\gamma} - \sqrt{1+\delta})^2}, \frac{(\sqrt{1+\gamma} + \sqrt{1+\delta})^2}{(\sqrt{1+\gamma} - \sqrt{1+\delta})^2} \right)$$

mit $|\beta_1| < 1$. Dann gibt es für $g \in G_{S,a}$ eine Umgebung $U(a)$ so, daß die Iteration

$$(9) \quad x_{i+1} = (1-\beta_0)x_i - \beta_0 g(x_i) + \beta_1(x_i - x_{i-1}) \quad i = 1, 2, \dots$$

für $x_0, x_1 \in U(a)$ gegen a konvergiert. (9) stellt das bezüglich S optimale mehrstufige Iterationsverfahren dar.

Beweis. Es sei $\beta = (\beta_0, \beta_1)$ und $\sqrt{\beta_1}$ als einer der beiden möglichen Werte festgelegt. Die von Null verschiedenen Eigenwerte der Matrix $T'_\beta(g; a)$ berechnen sich nach

$$\lambda = q_{\beta}(\tau) = -(\tau - (1 - \beta_0 + \beta_1) + \beta_1/\tau)/\beta_0$$

aus den Eigenwerten λ von $g'(a)$. Die Bilder der konzentrischen Kreise $\tau = \mu\sqrt{\beta_1}e^{i\phi}$ ($0 < \phi \leq 2\pi$, $0 < \mu$) sind die konfokalen Ellipsen

$$E_{\mu}: \lambda = (1 - \beta_0 + \beta_1 - \sqrt{\beta_1}(\mu+1/\mu)\cos\phi - i\sqrt{\beta_1}(\mu-1/\mu)\sin\phi)/\beta_0,$$

die für $\mu = 1$ zu der Strecke

$$E_1: \lambda = (1 - \beta_0 + \beta_1 - 2\sqrt{\beta_1}\cos\phi)/\beta_0$$

entarten. q_{β} bildet das Gebiet $\{\tau \in \mathbb{C}, |\tau| < |\sqrt{\beta_1}|\}$ und das Gebiet $\{\tau \in \mathbb{C}, |\tau| > |\sqrt{\beta_1}|\}$ jeweils schlicht auf die ganze längs E_1 geschlitzte λ -Ebene ab. Fallen die Brennpunkte der Ellipsen E_{μ} , also die Endpunkte von E_1 , mit den Brennpunkten γ und δ von ∂S zusammen:

$$\gamma = (1 - \beta_0 + \beta_1 + 2\sqrt{\beta_1})/\beta_0,$$

(10)

$$\delta = (1 - \beta_0 + \beta_1 - 2\sqrt{\beta_1})/\beta_0,$$

dann gibt es ein $\mu \geq 1$, für das E_{μ} mit ∂S übereinstimmt.

Es folgt $q_{\beta}(\mathbb{C} \setminus \overline{E_{\mu}}) = \mathbb{C} \setminus S$ und die übrigen Voraussetzungen

von Satz 2 sind ebenfalls erfüllt. Aus (10) ergeben sich die

im Satz genannten Werte von β_0 und β_1 . Es ist jetzt noch zu zeigen, daß $\mu < 1/|\sqrt{\beta_1}|$ ist, daß also das größere der beiden Urbilder von E_μ ($\mu \geq 1$) im Einheitskreis liegt. Dazu muß notwendigerweise $|\beta_1| < 1$ sein. Das Bild des Einheitskreises selbst ist die Ellipse

$$E_{1/|\sqrt{\beta_1}|}: \lambda = (1 - \beta_0 + \beta_1 - (1+\beta_1)\cos\phi - i(1-\beta_1)\sin\phi)/\beta_0,$$

die für $\phi = 0$ durch den Punkt -1 geht; daraus folgt die Behauptung wegen $-1 \notin S$.

Wir kehren nun zu dem in der Einleitung beschriebenen Gleichungssystem zurück.

3. Die Lösung der Hammersteinschen Gleichung

Mit $\|\cdot\|$ bezeichnen wir bei Vektoren die Euklidnorm und bei Matrizen die Spektralnorm. Ferner sei $B(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq \rho\}$, $N(K) = \{x \in \mathbb{R}^n, Kx = 0\}$ der Nullraum von K und $R(K)$ der Wertevorrat von K . Weil das Gleichungssystem $x + Kf(x) = 0$ einen nichtlinearen Anteil enthält, muß die Lösung grob lokalisiert sein, bevor man Satz 3 anwenden kann. Der folgende Satz von Amann [1] leistet hier wertvolle Dienste.

Satz 4. In dem Gleichungssystem $x + Kf(x) = 0$ sei die (n,n) -Matrix K reellsymmetrisch, positiv semidefinit und die Abbildung $f: \mathbb{R}^n \supset D_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und monoton:

$$(f(x) - f(y), x - y) := (f(x) - f(y))^T(x - y) \geq 0 \quad \forall x, y \in D_f.$$

Ist dann $\rho_0 = \|K\| \|f(0)\|$ und $B(\rho_0) \cap R(K)$ in D_f enthalten, so gibt es genau eine Lösung und diese liegt in der Kugel $B(\rho_0)$.

Beweis. Der Raum \mathbb{R}^n läßt sich als orthogonale Summe $\mathbb{R}^n = R(K) \oplus N(K)$ darstellen. Bezeichnet $P: \mathbb{R}^n \rightarrow R(K)$ die orthogonale Projektion auf $R(K)$, so kann für (2) auch $x + K Pf(x) = 0$ geschrieben werden. Die Abbildung $f_1 := P \circ f: R(K) \cap D_f \rightarrow R(K)$ hat auf $R(K) \cap D_f$ dieselben Eigenschaften wie f auf D_f . Sicher liegt jede Lösung von (2) in $R(K)$, man kann also an Stelle von (2) die Gleichung

$$x + Kf_1(x) = 0$$

auf dem Hilbertraum $R(K) = N(K)^\perp$ betrachten (vgl. [1]). Die Existenz von K^{-1} kann somit ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden. Wegen

$$(K^{-1}x + f(x) - K^{-1}y - f(y), x - y) \geq \|K\|^{-1} \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in D_f$$

folgt dann die Behauptung für das zu (2) äquivalente System $K^{-1}x + f(x) = 0$ aus einem Satz von Minty [7].

Erfüllt f zusätzlich in jeder Kugel $B(\rho) \subset D_f$ eine Lipschitzbedingung

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \theta_\rho \|x - y\| \quad \forall x, y \in B(\rho),$$

und ist K positiv definit, so konvergiert nach einem weiteren Ergebnis von Amann [1] die Iteration (3) für $0 < \alpha_0 < 2(1 + \|K\|_{2\rho_0})^{-2}$ gegen die Lösung a , falls $B(2\rho_0)$ in D_f enthalten ist.

Mit dem Ergebnis von Satz 4 folgt aus Satz 3

Korollar. Das Gleichungssystem $x + Kf(x) = 0$ erfülle die folgende Voraussetzung

- (i) die reelle (n, n) -Matrix K sei symmetrisch und positiv semidefinit,
- (ii) es sei $D_f \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, diagonal und $B(\rho_0) \subset D_f$ ($\rho_0 = \|K\| \|f(0)\|$),

(iii) es sei die Diagonalmatrix $f'(x)$ positiv semi-definit $\forall x \in D_f$ und

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \theta_{\rho_0} \|x - y\| \quad \forall x, y \in B(\rho_0).$$

Dann gibt es eine Umgebung $U(a)$ der eindeutig bestimmten Lösung a von $x + Kf(x) = 0$ so, daß für $x_0, x_1 \in U(a)$ die Iteration

$$(11) \quad x_{i+1} = (1 - \beta_0)x_i - \beta_0 Kf(x_i) + \beta_1(x_i - x_{i-1}) \quad i = 1, 2, \dots$$

mit

$$\beta_0 = \frac{4}{(1 + \sqrt{1 + \|K\|_{\theta_{\rho_0}}})^2}, \quad \beta_1 = \frac{(1 - \sqrt{1 + \|K\|_{\theta_{\rho_0}}})^2}{(1 + \sqrt{1 + \|K\|_{\theta_{\rho_0}}})^2}$$

gegen a konvergiert. (11) stellt das bezüglich $S = \{\lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq \|K\|_{\theta_{\rho_0}}\}$ optimale Verfahren dar.

Beweis. Bei positiv definiten Matrix K hat $Kf'(x)$ die gleichen Eigenwerte wie die symmetrische Matrix $K^{1/2}f'(x)K^{1/2}$ und es gilt für $x \in D_f$

$$z^*(K^{1/2}f'(x)K^{1/2})z \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Folglich sind die Eigenwerte von $Kf'(x)$ reell und nicht-negativ $\forall x \in D_f$ und aus Stetigkeitsgründen gilt dies auch, wenn K positiv semidefinit ist. Damit liegen die Eigenwerte von $g'(a) = Kf'(a)$ in S , weil nach Satz 4 die ein-

deutig bestimmte Lösung a in $B(\rho_0)$ enthalten ist.

Zum Nachweis der Konvergenz zweistufiger Iterationsverfahren in größeren Bereichen und nicht nur in der Nähe der Lösung muß die Wahl der Parameter aus den in der Einleitung genannten Gründen eingeschränkt werden. Der folgende Satz verwendet in einfacher Weise den von Robert [13] eingeführten Begriff der Vektornorm.

Satz 5. Das Gleichungssystem $x + Kf(x) = 0$ genüge der Voraussetzung des Korollars und es sei K positiv definit.

Ist dann der Quader

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n, |x_j| \leq 2\rho_0, 1 \leq j \leq n\}$$

in D_f enthalten und $\theta_f \in \mathbb{R}$ durch

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \theta_f \|x - y\| \quad \forall x, y \in Q$$

erklärt, so konvergiert die Iteration

$$(12) \quad \begin{aligned} x_0 &= 0, \quad x_1 = (1 - \alpha_0)x_0 - \alpha_0 Kf(x_0), \\ x_{i+1} &= (1 - \alpha_0)x_i - \alpha_0 Kf(x_i) + \alpha_1(x_i - x_{i-1}) \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

für $0 < \alpha_0 < 2/(1 + \|K\|_{\theta_f})$, $\alpha_1 = 0$ und für $0 < \alpha_0 < 2/(2 + \|K\|_{\theta_f})$, $0 < \alpha_1 < \alpha_0/2$ gegen die eindeutig bestimmte Lösung von $x + Kf(x) = 0$.

Beweis. Die eindeutige Existenz der Lösung a folgt aus Satz 4. Da f eine diagonale Abbildung ist, gibt es nach dem Mittelwertsatz zu $x_i \in Q$ ein $u_i \in Q$ mit

$$x_{i+1} - a = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -\alpha_1 E & (1 - \alpha_0 + \alpha_1)E - \alpha_0 Kf'(u_i) \end{pmatrix} (x_i - a).$$

Durch $\|x\|_K = \|K^{-1/2}x\|$ ist für $x \in \mathbb{R}^n$ eine Norm definiert, weil K positiv definit ist. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} \|x_i - a\|_K \\ \|x_{i+1} - a\|_K \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_1 & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|x_{i-1} - a\|_K \\ \|x_i - a\|_K \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, \dots,$$

wobei $\sigma = \max_{u_i \in Q} \|(1 - \alpha_0 + \alpha_1)E - \alpha_0 K^{1/2} f'(u_i) K^{1/2}\|$ ist.

Die zweistufige Iteration (12) konvergiert, wenn der Spektralradius der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_1 & \sigma \end{pmatrix}$$

kleiner als Eins ist. Daraus folgt für $\alpha_1 = 0$ die Behauptung nach einem Ergebnis von Niethammer [7, Satz 7.2]. Ist $\alpha_1 \neq 0$, so muß $0 < \alpha_1 < 1 - \sigma$ sein. Für $0 < \alpha_0 < 2/(2 + \|K\|_{\Theta_f})$ ist dann

$$\sigma = \max\{|1 - \alpha_0 + \alpha_1|, |1 - \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_0 \|K\|_{\Theta_f}|\} = |1 - \alpha_0 + \alpha_1|,$$

und für $0 < \alpha_1 < \alpha_0/2$ ergeben sich die Ungleichungen $\sigma < 1$ und $0 < \alpha_1 < 1 - |1 - \alpha_0 + \alpha_1| = \alpha_0 - \alpha_1$.

Es erscheint schwierig, die in Satz 5 für die Parameter angegebenen Intervalle zu vergrößern.

4. Beispiele

Es sei G ein meßbares Gebiet des \mathbb{R}^m . In der Hammerstein-Integralgleichung

$$u(s) + \int_G K(s,t)h(t,u(t))dt = 0 \quad s \in G$$

sei der Kern reellsymmetrisch, positiv semidefinit:

$$(13) \quad \int_{G \times G} K(s,t)u(s)u(t)dsdt \geq 0 \quad \forall 0 \neq u \in L^2(G),$$

und der Einfachheit halber stetig. (Es genügt, daß K quadratisch integrierbar ist [1].) $h: G \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ sei als Funktion von u für alle $x \in G$ monoton nichtfallend und stetig differenzierbar. Ersetzen wir das Integral näherungsweise durch eine Quadraturformel mit nichtnegativen Gewichten p_j ($1 \leq j \leq n$), so entsteht das Gleichungssystem

$$u(s_j) + \sum_{k=1}^n K(s_j, s_k)p_k h(s_k, u(s_k)) = 0 \quad 1 \leq j \leq n.$$

Die Matrix $K = (K(s_j, s_k))$ und die durch $f_k = p_k h(s_k, \cdot)$ ($1 \leq k \leq n$) erklärte Abbildung f erfüllen die Voraussetzung des Korollars, wie man bei K durch Einsetzen geeigneter Funktionen $u \in L^2(G)$ in (13) zeigen kann.

Als Beispiel wählen wir für $K(s,t)$ die Green-Funktion zum Differentialoperator $-d^2/dx^2$ und den Randbedingungen

$x(0) = x(1) = 0$, d.h. $K(s,t) = s(1-t)$ für $0 \leq s \leq t \leq 1$
und $K(s,t) = K(t,s)$ für $0 \leq t \leq s \leq 1$. Ferner sei

$$(14) \quad \begin{aligned} h_1(t,u) &= \pi^2(\theta u^3 - \theta(\sin\pi t)^3 - \sin\pi t), \\ h_2(t,u) &= \pi^2(\exp(\theta u) - \exp(\theta \sin\pi t) - \sin\pi t). \end{aligned}$$

Die Hammerstein-Integralgleichungen

$$(15) \quad u(s) + \int_0^1 K(s,t)h_k(t,u(t))dt = 0 \quad k = 1,2$$

haben die Lösung $u(s) = \sin\pi s$. Für die numerischen Rechnungen wurde (15) mittels der Quadraturformel nach Simpson für die Schrittweite $h = 1/10$ durch ein Näherungsgleichungssystem ersetzt. Bei der einstufigen Iteration wurde mit $x_0 = 0$ gestartet, bei der zweistufigen Iteration wurden $x_0 = 0$ und $x_1 = (1-\beta_0/2)x_0 - (\beta_0/2)Kf(x_0)$ als Startvektoren gewählt. In jedem Fall wurde die Iteration bei $\|x_{i+1} - x_i\| \leq 10^{-6}$ abgebrochen. In den nachfolgenden Tabellen sind die optimalen Werte für das einstufige und das zweistufige Verfahren in Abhängigkeit von der Größe θ in (14) aufgetragen. N ist die Anzahl der benötigten Iterationsschritte.

Im übrigen ergab sich bei den Testrechnungen, daß die Schrittlänge h der näherungsweise Quadratur wenig Einfluß auf die optimalen Parameterwerte hat. Zur Berechnung der Lösung einer Hammerstein-Integralgleichung (1) mit hoher

Genauigkeit lassen sich daher die optimalen Werte β_0 und β_1 durch die versuchsweise Iteration mit einem Näherungssystem (2) niederer Ordnung ermitteln, wenn eine Schätzung mit Hilfe der Formeln von Satz 3 zu umständlich erscheint.

Beispiel 1:

θ	einstufig		zweistufig		
	N	β_0	N	β_0	β_1
1.0	15	0.4	11	0.5	0.1
3.0	28	0.2	21	0.2	0.3
5.0	50	0.1	25	0.1	0.5
7.0	48	0.1	28	0.1	0.4
9.0	-	-	24	0.1	0.4
11.0	-	-	37	0.1	0.4

Beispiel 2:

θ	einstufig		zweistufig		
	N	β_0	N	β_0	β_1
1.0	11	0.4	11	0.4	0.1
1.4	23	0.2	14	0.3	0.2
1.8	41	0.1	16	0.2	0.2
2.2	38	0.1	25	0.1	0.4
2.6	-	-	29	0.1	0.4
3.0	-	-	-	-	-

Dr. Eckart Gekeler
Universität Mannheim (WH)
D-6800 Mannheim
Postfach 2428

Literatur

1. Amann, H.: Über die Existenz und iterative Berechnung einer Lösung der Hammersteinschen Gleichung. *Aequ. math.* 1 (1968), 242-266.
2. Bittner, L.: Über ein mehrstufiges Iterationsverfahren zur Lösung von linearen Gleichungen. *Numer. Math.* 6 (1964), 161-180.
3. Hammerstein, A.: Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen. *Acta Math.* 54 (1930), 117-176.
4. Hyers, D.H.: Integral Equations for Nonlinear Problems in Partial Differential Equations. Erschienen in W.F. Ames (Hrsg.): *Nonlinear Partial Differential Equations*. New York-London: Academic Press 1967.
5. Krasnoselskii, M.A., Stecenko, V.A.: Some Nonlinear Problems with Many Solutions (Russ.) *Sibirski Mat.* 4 (1963), 120-137.
6. Meis, Th., Törnig, W.: Iterative Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme und Diskretisierungsverfahren bei elliptischen Differentialgleichungen. *Computing* 5 (1970), 281-294.
7. Minty, G.J.: On a "Monotonicity" Method for the Solution of Nonlinear Equations in Banach Spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 50 (1963), 1038-1041.
8. Niethammer, W.: Iterationsverfahren und allgemeine Euler-Verfahren. *Math. Z.* 102 (1967), 288-317.
9. --- Konvergenzbeschleunigung bei einstufigen Iterationsverfahren durch Summierungsverfahren. Erschienen in L. Collatz, H. Unger (Hrsg.): *Iterationsverfahren, Numerische Mathematik, Approximationstheorie*. ISNM Bd. 15. Basel-Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1970.
10. Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C.: *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. New York-London: Academic Press 1970.

11. Ostrowski, A.M.: Solution of Equations and Systems of Equations. New York-London: Academic Press 1966.
12. Polyak, B.T.: Some Methods of Speeding up the Convergence of Iteration Methods. USSR Comput. Math. and Math. Physics 4 (1964), Nr. 5, 1-17.
13. Robert, F.: Normes vectorielles de vecteurs et de matrices. Rev. Franç. Traitement Information Chiffres 7 (1964), 261-299.
14. Schempp, W.: Iterative Solution of Linear Operator Equations in Hilbert Space and Optimal Euler Methods. Archiv d. Math. 21 (1970), 390-395.