

EIN NUMERISCHES VERFAHREN ZUR
ANALYTISCHEN FORTSETZUNG

von

Wilhelm Niethammer

Nr. 27

1972

Ein numerisches Verfahren zur analytischen Fortsetzung

von

Wilhelm Niethammer

Zusammenfassung: Für die Aufgabe, eine durch ihre Potenzreihe gegebene Funktion über den Rand des Konvergenzkreises hinaus fortzusetzen, wird ein klassisches Summierungsverfahren herangezogen und auf seine numerische Brauchbarkeit untersucht. Ein bekannter Satz über den "Fortsetzungsbereich" des Verfahrens liefert auch Aussagen über die Konvergenzgeschwindigkeit der transformierten Reihe. Für gewisse Fortsetzungsprobleme werden in einem gewissen Sinne optimale Verfahren beschrieben. Ferner werden für die Berechnung der Summierungsmatrix Rekursionsformeln angegeben.

Summary: For the problem of continuing a given TAYLOR series beyond the circle of convergence a classical summation method is proposed; numerical properties are studied. A known theorem about the "region of continuation" yields results about the speed of convergence of the transformed series. For special problems there are described in some sense optimal methods. Recursion formulas for the computation of the summation matrix are given.

1. Einleitung

In der Arbeit [1] wird von HENRICI eine konstruktive Version der bekannten Methode von WEIERSTRASS zur analytischen Fortsetzung einer Funktion f vorgestellt. Wir wollen hier gewisse Summierungsverfahren - ebenfalls klassische Hilfsmittel für dieses Problem - auf ihre numerische Brauchbarkeit für die analytische Fortsetzung untersuchen. Man geht dabei jeweils von einer im Nullpunkt holomorphen Funktion f aus, deren Potenzreihenkoeffizienten gegeben sind und die über den Rand des Konvergenzkreises hinaus fortsetzbar ist. Während bei der Methode von WEIERSTRASS die Fortsetzung von f längs beliebiger Wege möglich ist und sich theoretisch die Fortsetzung über die ganze RIEMANNsche Fläche erreichen läßt, eignet sich das hier beschriebene Verfahren höchstens zur Fortsetzung in den sogenannten MITTAG-LEFFLERSchen Hauptstern von f ; dieser besteht aus allen Holomorphiepunkten, die sich bei radialer Fortsetzung von o aus erreichen lassen. Für die Praxis bedeutet dies zunächst keine Einschränkung, denn beide Methoden sind ohnehin äußerst anfällig gegen Rundefehler, insbesondere "numerisches Auslöschen", so daß die Verfahren früher versagen, als man es theoretisch erwartet. Trotzdem ist der beschriebene Algorithmus z.B. zur Fortsetzung von Potenzreihenlösungen bei Differentialgleichungen geeignet.

Bei der vorgeschlagenen Methode, die auf PAINLEVE (1888) und LINDELÖF (1898) zurückgeht, wird versucht, durch Substitution einer geeigneten, ebenfalls als Potenzreihe gegebenen Funktion p und die dadurch bewirkte konforme Abbildung die Singularitäten, die die Konvergenz behindern, "unschädlich" zu machen. Es ist zweck-

mäßig, den Übergang von der ursprünglichen Potenzreihe zur transformierten Reihe als Anwendung eines Summierungsverfahrens mit einer Matrix \mathcal{P} zu betrachten (PERRON [7], KNOPP [3]); man erhält so die Klasse der allgemeinen EULER-Verfahren (ZELLER-BEEKMANN [8], S. 134 ff.; man findet dort auch ausführliche Literaturangaben).

In Abschnitt 2 wird die Methode beschrieben. Im nächsten Abschnitt gibt zunächst Satz 1, der schon bei PERRON [7] bewiesen wird, Auskunft über den "Fortsetzungsbereich" des Verfahrens. Für numerische Zwecke ist es notwendig, nicht nur Konvergenz schlechthin, sondern auch eine möglichst schnelle Konvergenz zu erhalten. Dazu wird als Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit der Konvergenzfaktor eingeführt; ein Korollar zu Satz 1 gibt an, in welchen Teilen des Fortsetzungsbereichs ein bestimmter Mindestkonvergenzfaktor gewährleistet ist. In Abschnitt 4 wird für gewisse Fortsetzungsprobleme eine optimale Funktion p_0 bestimmt. Für die Programmierung sind Rekursionsformeln für die Berechnung der Matrix \mathcal{P} notwendig; Diese werden in Abschnitt 5 angegeben. Für eine spezielle Klasse von Funktionen p , die sich in geschlossener Form angeben lassen, erhält man besonders rationelle Rekursionsformeln. In Abschnitt 6 zeigen einfache Beispiele, daß die vorgeschlagene Methode die Berechnung von $f(z_0)$ in Punkten z_0 weit außerhalb des Konvergenzkreises der ursprünglichen Potenzreihe möglich macht.

2. Beschreibung des Verfahrens

Gegeben sei eine in o holomorphe Funktion f durch ihre Potenzreihe

$$(1) \quad f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m z^m .$$

Bekannt sei (mindestens) eine Singularität ζ von f , so daß (1) für $|z| < |\zeta|$ konvergiert. f sei über den Rand des Konvergenzkreises hinaus fortsetzbar. Alle Holomorphiepunkte von f , die von o aus durch radiale Fortsetzung erreichbar sind, bilden bekanntlich den "MITTAG-LEFFLERSchen Hauptstern" $\mathcal{A}(f)$. Das klassische Verfahren zur Fortsetzung von f , das wir hier auf seine numerische Brauchbarkeit untersuchen wollen, geht auf PAINLEVÉ (1888) und LINDELÖF (1898) zurück. Es ist bequem, die Methode als Anwendung eines Summierungsverfahrens auf die Reihe (1) zu interpretieren, wie es bei PERRON [7] und KNOPP [3] geschieht; ZELLER-BEEKMANN [8] sprechen von "allgemeinen EULER-Verfahren" ([8], S. 134 ff.; man vergleiche auch die dortigen Literaturangaben zu den erstgenannten Autoren). Eine weitere Beschreibung der Methode findet sich bei HILLE ([2], S. 77 ff.).

Das Summierungsverfahren ist durch eine Funktion p bestimmt, deren Eigenschaften in der folgenden Definition zusammengefaßt sind; dabei seien D bzw. \bar{D} die offene bzw. abgeschlossene Einheitskreisscheibe in der komplexen Ebene.

Definition 1: Die Abbildung $p: \bar{D} \rightarrow \mathbb{C}$ genügt der Voraussetzung V genau dann, wenn

$$a) \quad p(o) = o, \quad p(1) = 1 ,$$

b) p holomorph und schlicht in \bar{D} und

c) $\bar{\Delta}^* := p(\bar{D})$ sternförmig bezüglich o ist.

p besitzt dann eine in \bar{D} konvergente Potenzreihe

$$(2) \quad p(\phi) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \phi^j \quad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1.$$

Mit p bilden wir für ein beliebiges $z_0 \in \mathcal{O}(f)$ die Funktion

$$(3) \quad F(\phi, z_0) = f(z_0 p(\phi)) \sim \sum_{m=0}^{\infty} u_m z_0^m [p(\phi)]^m;$$

Das Zeichen \sim soll bedeuten, daß es sich zunächst nur um ein formales Einsetzen handelt. Wir erhalten für jedes $z_0 \in \mathcal{O}(f)$ eine Funktion $F(\cdot, z_0)$, die wegen der Voraussetzungen über f und p in einer Umgebung von o holomorph ist. Führen wir

$$(4) \quad [p(\phi)]^m = \sum_{j=m}^{\infty} p_{jm} \phi^j$$

ein, setzen in (3) ein und ordnen nach Potenzen von ϕ um, so erhalten wir

$$(5) \quad F(\phi, z_0) \sim \sum_{j=0}^{\infty} v_j(z_0) \phi^j;$$

dabei sind die v_j Polynome

$$(6) \quad v_j(z_0) = \sum_{k=0}^j u_k p_{jk} z_0^k \quad (j = 0, 1, \dots)$$

Insbesondere erhalten wir für $\phi = 1$

$$(7) \quad f(z_0) = F(1, z_0) \sim \sum_{j=0}^{\infty} v_j(z_0).$$

Führen wir nun die aus den Gliedern von (1) und (7) gebildeten Vektoren

$$\vec{u}(z_0)^T = (u_0, u_1 z_0, u_2 z_0^2, \dots)$$

$$\vec{v}(z_0)^T = (v_0, v_1(z_0), v_2(z_0), \dots)$$

sowie die Matrix $\mathcal{P} = (p_{ij})_{i,j \geq 0}$ ein, so stellt

$$(8) \quad w(z_0) = \mathcal{P} \cdot \tilde{u}(z_0)$$

ein Matrix-Summierungsverfahren in der sogenannten Reihe-Reihe-Form dar (vgl. ZELLER-BEEKMANN [8], S. 6);

ist $\{t_m(z_0)\}_{m \geq 0}$ die Folge der Teilsummen von (7) und $A(z_0)^T = (t_0, t_1(z_0), t_2(z_0), \dots)$, so ist

$$(9) \quad A(z_0) = \tilde{\mathcal{P}} \tilde{u}(z_0) \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathcal{P}} = \Sigma \cdot \mathcal{P} \quad \text{und} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

das gleiche Verfahren in Reihe-Folge-Form. Es ist

$$(10) \quad t_j(z_0) = \sum_{i=0}^j \tilde{p}_{ji} u_i \cdot z_0^i \quad \text{mit} \quad \tilde{p}_{ji} = \sum_{k=i}^j p_{ki}.$$

Diese Summieremethode wird als "allgemeines EULER-Verfahren" bezeichnet; wir wollen sowohl die Reihe (7) als auch die Folge $\{t_j(z_0)\}$ die \mathcal{E}_p -Transformierte der Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} u_m z_0^m$ nennen.

3. Fortsetzungsbereiche

Wir beschäftigen uns jetzt mit der Frage, für welche z_0 die \mathcal{E}_p -Transformierte konvergiert und als Summe den gewünschten Wert $f(z_0)$ besitzt.

Genügt die Funktion p der Voraussetzung V und ist $\bar{\Delta}^* := p(\bar{D})$, so führen wir den Bereich

$$(11) \quad \Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid 1/z \notin \bar{\Delta}^*\}$$

ein (wir erhalten also Δ als Komplement von $\bar{\Delta}'$ bezüglich \mathbb{C} , wobei $\bar{\Delta}'$ das Bild von $\bar{\Delta}^*$ bei Spiegelung am Einheitskreis darstellt). Δ ist offen und enthält die Punkte 0 im Inneren und 1

auf dem Rand. Ferner bezeichne für $\zeta \in \mathbb{C}$ $\zeta \cdot \Delta$ den Bereich

$$\zeta \Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid z = \zeta z', z' \in \Delta\}.$$

Satz 1: Hat f die Singularitäten ζ_1, \dots, ζ_L und genügt p der Voraussetzung V, so gilt: $f(z_0) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j(z_0)$ für

$$z_0 \in \Delta(f, p) = \bigcap_{j=1}^L \zeta_j \Delta.$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig bezüglich z_0 in jedem kompakten Teilbereich von $\Delta(f, p)$.

Wir nennen $\Delta(f, p)$ auch Fortsetzungsbereich von f bezüglich p . Beweise für diesen Satz finden sich an verschiedenen Stellen, so bei PERRON [7] oder HILLE ([2], S. 77). Dabei zeigt man zunächst, daß Δ der Fortsetzungsbereich der geometrischen Reihe g mit ihrer Singularität $\zeta_1 = 1$ ist; es wird dabei ausgenutzt, daß unter den Voraussetzungen über p die Potenzreihe (5) der Funktion $F(., z_0)$ - jetzt aufgestellt für g - für jedes $z_0 \in \Delta$ einen Konvergenzradius größer als 1 besitzt. Die Reihe (7) ergibt sich für $\phi = 1$; insbesondere konvergiert (7) absolut. Mit Hilfe der CAUCHYschen Integralformel folgt die Behauptung für eine beliebige ⁱⁿ holomorphe Funktion f mit Singularitäten ζ_1, \dots, ζ_L (für unser numerisches Problem bedeutet es keine Einschränkung, wenn wir nur endlich viele Singularitäten betrachten).

Unser Ziel ist es, zur Berechnung von Funktionswerten von f in Punkten z_0 , in denen die Ausgangsreihe (1) langsam konvergiert oder gar divergiert, die Reihe (7) heranzuziehen. Wir erwarten also in irgendeinem Sinne eine schnelle Konvergenz und benötigen zunächst ein Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit. Auch hier

nutzen wir aus, daß es sich bei der Reihe (7) um eine Potenzreihe, ausgewertet in dem speziellen Punkt $\phi = 1$ handelt. Die Konvergenzgeschwindigkeit wird davon abhängen, wie weit dieser Punkt $\phi = 1$ vom Rand des Konvergenzkreises von $F(., z_0)$ entfernt ist. Als Maß wählen wir den reziproken Konvergenzradius:

Definition 2: Für $z_0 \in \Delta(f, p)$ nennen wir

$$\kappa = \kappa(z_0) := \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} (|v_j(z_0)|)^{1/j} \text{ den Konvergenzfaktor}$$

der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} v_j(z_0)$.

Ist R der Konvergenzradius der Reihe (4) für $F(., z_0)$, so ist $\kappa = 1/R$; für $z_0 \in \Delta(f, p)$ ist $R > 1$ und damit $\kappa(z_0) < 1$. In bekannter Weise läßt sich damit auch eine asymptotische Fehlerabschätzung angeben: Ist ein $\epsilon > 0$ mit $\kappa + \epsilon < 1$ gegeben, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$(11) \quad |v_j(z_0)|^{1/j} < (\kappa + \epsilon) \text{ für alle } j \geq N \text{ ist. Dies bedeutet}$$
$$\sum_{j=N}^{\infty} |v_j(z_0)| \leq \sum_{j=N}^{\infty} (\kappa + \epsilon)^j = \frac{(\kappa + \epsilon)^N}{1 - \kappa - \epsilon}.$$

Um nun eine Aussage über den Konvergenzradius von $F(., z_0)$ und damit über den Konvergenzfaktor zu erhalten, braucht man stärkere Voraussetzungen über p (dabei sei D_r die offene Kreisscheibe vom Radius r):

Definition 3: Die Abbildung p genügt der Voraussetzung V_r genau dann, wenn

- a) $p(0) = 0$, $p(1) = 1$
- b) p holomorph und schlicht in D_r für $r > 1$ und
- c) $\Delta_r^* := p(D_r)$ sternförmig bezüglich 0 ist.

Ist dann $\bar{\Delta}_r := \{z \in \mathbb{C} \mid 1/z \notin \Delta_r^*\}$, so gilt das

Korollar zu Satz 1: Hat f die Singularitäten ζ_1, \dots, ζ_L und genügt p der Voraussetzung V_r , so ist $\kappa(z_0) \leq 1/r$ für

$$z_0 \in \bar{\Delta}_r(f, p) := \bigcap_{i=1}^L \zeta_i \bar{\Delta}_r.$$

Wir nennen $\bar{\Delta}_r(f, p)$ auch r -Fortsetzungsbereich von f bezüglich p .

Beweis: Ähnlich wie bei Satz 1 kann man sich darauf beschränken, die Aussage für die geometrische Reihe g zu beweisen. Die Behauptung lautet dann, daß für ein $z_0 \in \bar{\Delta}_r$ die zu g gehörige Funktion $F(., z_0)$ einen Konvergenzradius besitzt, der größer oder gleich r ist. Dies ist dann der Fall, wenn $F(., z_0) = f(z_0 p(.))$ in D_r holomorph ist, d.h. wenn die Singularität $1 \notin z_0 \Delta_r^*$ ist. Dies trifft für $z_0 \in \bar{\Delta}_r$ zu. Da wir im Beweis die Holomorphie von $F(., z_0)$ nur in der offenen Kreisscheibe D_r benötigen, läßt sich die Behauptung für den abgeschlossenen Bereich $\bar{\Delta}_r(f, p)$ aufstellen.

4. Optimale Verfahren

Wir haben im letzten Abschnitt für ein gegebenes p und eine beliebige in o holomorphe Funktion f angegeben, wie der Fortsetzungsbereich $\Delta(f, p)$ und speziell die r -Fortsetzungsbereiche $\bar{\Delta}_r(f, p)$ aussehen. Jetzt soll für eine gegebene Funktion f ein p gefunden werden, das für alle z_0 eines vorgegebenen Bereichs S die analytische Fortsetzung mit einem möglichst günstigen Konvergenzfaktor liefert. Dieses Problem läßt sich zunächst nur unter einschränkenden Voraussetzungen über f und p lösen; immerhin sind noch wichtige Fälle eingeschlossen, wie sie etwa bei der Lösung von Differentialgleichungen durch Potenzreihen auftreten.

Als gegebene Funktion f wählen wir vorerst die geometrische Reihe g ; S sei ein kompakter, einfach zusammenhängender Bereich in \mathbb{C} mit $0 \in S$ und $1 \in S$.

Definition 4: Eine Funktion p , die der Voraussetzung V genügt, heißt bezüglich S zulässig, falls S in Δ enthalten ist.

Also ist p zulässig bezüglich S , wenn die \mathcal{C}_p -Transformierte der geometrischen Reihe für jedes $z_0 \in S$ konvergiert.

Ferner nennen wir für ein p , das bezüglich S zulässig ist,

$$\kappa(S,p) := \sup_{z_0 \in S} \kappa(z_0)$$

den Konvergenzfaktor von S bezüglich p .

Definition 5: Eine bezüglich S zulässige Funktion p_0 heißt optimal bezüglich S , wenn $\kappa(S,p_0) \leq \kappa(S,p)$ ist für alle bezüglich S zulässigen Funktionen p .

Zu S gehört nun ein Bereich $S^* := \{z \in \mathbb{C} \mid 1/z \notin S\}$. Wir erhalten S^* als Innengebiet der Kurve ∂S^* , die aus dem Rand ∂S von S durch Spiegelung am Einheitskreis hervorgeht.

Sind D bzw. D_r wieder die offenen Kreisscheiben mit Radius 1 bzw. r , so gilt:

Satz 2: a) Genügt p der Voraussetzung V , ist $\Delta^* = p(D)$ und ist $\Delta^* \subset S^*$, so ist p zulässig bezüglich S .

b) Genügt p_0 der Voraussetzung V_{r_0} und ist $p_0(D_{r_0}) =: \Delta_{r_0}^* = S^*$, so ist p_0 optimal bezüglich S .

Beweis: a) Ist $\Delta^* \subset S^*$, so gilt $\Delta = \Delta(g,p) \supset S$, d.h. p ist zulässig bezüglich S .

b) Für eine beliebige, bezüglich S zulässige Funktion p setzen wir $r = 1/\kappa(s,p)$. Dann ist nach Definition von $\kappa(S,p)$ und nach dem Korollar zu Satz 1 der Bereich S in $\bar{\Delta}_r$ enthalten. Nach Voraussetzung über p_0 gilt andererseits: $\bar{\Delta}_{r_0} = S$. Dies bedeutet $\kappa(S,p_0) = 1/r_0$. Wir sind fertig, wenn wir zeigen können: $r_0 \geq r$. Dazu betrachten wir die Funktion h mit $h(z) = p_0^{-1}(z) \circ p(z)$ (nach Voraussetzung V_{r_0} ist p_0 auf D_{r_0} holomorph und bijektiv). Es ist dann $h: D_r \rightarrow D_{r_0}$ mit $h(0) = 0$. Nach dem SCHWARZschen Lemma schließen wir:

$$|h(z)| \leq r_0 |z|/r \text{ für alle } z \in D_r .$$

Ferner ist nach Voraussetzung $p(1) = p_0(\bar{1}) = 1$, d.h. $h(1) = 1$. Damit folgt aus der letzten Ungleichung für $z = 1$: $r \leq r_0$.

Folgerung 1: Sind p_1 und p_2 zulässig bezüglich S , ferner

$r_i = 1/\kappa(S,p_i)$ für $i = 1,2$ und $\Delta_{r_1}^* \supset \Delta_{r_2}^*$, so ist

$\kappa(S,p_1) \leq \kappa(S,p_2)$, d.h. p_1 ist "günstiger" als p_2 .

Gehen wir nun zu dem allgemeineren Problem über, für die analytische Fortsetzung einer Funktion f mit Singularitäten ζ_1, \dots, ζ_L in einen Bereich S_f eine Funktion p so zu finden, daß $\kappa(S_f,p)$ möglichst klein wird (dabei werden die Begriffe $\kappa(S_f,p)$ und Optimalität von p ganz analog wie bei der geometrischen Reihe definiert). Nach dem Korollar zu Satz 1 wissen wir, daß für ein p mit $p(D_r) = \Delta_r^*$ der r -Fortsetzungsbereich von f bezüglich p gegeben ist durch

$$\bar{\Delta}_r(f,p) = \bigcap_{i=1}^L \zeta_i \bar{\Delta}_r .$$

Es ist $\kappa(S_f, p) \leq 1/r$, wenn $\bar{\Delta}_r(f, p)$ den Bereich S_f umfaßt. Das Problem, zu gegebenem S_f ein Δ_r so zu finden, daß $\sum_{i=1}^L \zeta_i \bar{\Delta}_r = S_f$ wird, hängt stark von der geometrischen Konfiguration der Singularitäten ab. In einem Fall, der in Anwendung häufig vorkommt, läßt sich jedoch aus S_f das "Grundgebiet" $\bar{\Delta}_r$ bestimmen.

Folgerung 2: Wir nehmen an, es gebe einen Index $k \in \{1, \dots, L\}$, so daß $(\zeta_j/\zeta_k)S_f \supset S_f$ für $j = 1, \dots, L$ gilt. Dies ist z.B. der Fall, wenn alle Singularitäten auf der gleichen Halbgeraden vom Nullpunkt aus liegen. Unter dieser Annahme ist die nach Satz 2 bezüglich $S := (1/\zeta_k)S_f$ optimale Funktion p_0 (für die geometrische Reihe) auch optimal für f bezüglich S_f , falls S den übrigen geforderten Bedingungen genügt.

5. Rekursionsformeln für die Matrix \tilde{P}

Wir wenden uns nun der Berechnung von $f(z_0)$ mit Hilfe der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} v_j(z_0)$ bzw. der Folge $\{t_m(z_0)\}_{m \geq 0}$ ihrer Teilsummen zu. Dabei sind die v_j und die t_m Polynome (vgl. (6))

$$(12) \quad v_j(z_0) = \sum_{k=0}^j u_k p_{jk} z_0^k, \quad t_m(z_0) = \sum_{k=0}^m u_k \tilde{p}_{mk} z_0^k \quad (j, m = 0, 1, \dots).$$

Ohne direkte Rekursionsformel wird man in zwei Schritten vorgehen: Berechnung der Elemente der Matrizen P bzw. \tilde{P} und anschließend Berechnung von $v_j(z_0)$ bzw. $t_m(z_0)$ mit dem Horner Schema. Dabei empfiehlt sich die Berechnung der t_m , wenn im voraus bekannt ist, bis zu welchem Glied die transformierte Reihe berechnet werden soll, weil so nur eine Anwendung des Horner Schemas erforderlich ist. Nachdem noch keine Fehlerabschätzung vorliegt, wird man ein numerisches Abbrechkriterium verwenden, d.h. nach J Gliedern abbrechen,

falls $|v_j(z_0)| < \epsilon$ ist für ein gegebenes $\epsilon > 0$. Die asymptotische Fehlerabschätzung (11) liefert eine gewisse Berechtigung für dieses Vorgehen.

Wünschenswert zur Berechnung von $v_j(z_0)$ wäre eine Rekursionsformel, in die nur die gegebenen Koeffizienten u_i von f und p_{jk} von p sowie schon errechnete Glieder $v_{j-1}(z_0), \dots, v_0$ eingehen. Eine derartige Rekursionsformel läßt sich nur für $u_i \equiv 1$ d.h. für die geometrische Reihe aufstellen. Für unser Problem der analytischen Fortsetzung spielt diese Möglichkeit keine Rolle, doch lassen sich die erwähnten Formeln ganz entsprechend für die Summierung der NEUMANNschen Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} T^j$ für einen linearen stetigen Operator T in einem Banachraum verwenden; aus den Rekursionsformeln für $v_j(T)$ bzw. $t_j(T)$ ergeben sich nützliche Iterationsverfahren zur Berechnung von Lösungen linearer Gleichungen $x - Tx = f$ auch in Fällen, in denen T nicht kontrahierend ist (vgl. [5], [6]).

Für die Berechnung von \mathcal{R} gilt

Satz 3: Sei p gegeben durch $p(\phi) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \phi^j$. Die Elemente der unteren Dreiecksmatrix \mathcal{R} lassen sich dann berechnen gemäß

$$(13) \quad p_{00} = 1, \quad p_{k0} = 0 \quad \text{für } k > 0,$$

$$(14) \quad p_{kn} = \sum_{i=1}^{k-n} p_i \cdot p_{k-i, n-1} \quad (k \geq 1, 1 \leq n \leq k).$$

Die Anzahl der Multiplikationen zur Berechnung von \mathcal{R} bis zur Zeile mit dem Index m ist $m^3/6 + O(m^2)$.

Beweis: Nach Definition von \mathcal{R} ergeben sich die Elemente p_{kn} aus $[p(\phi)]^n = \sum_{k=n}^{\infty} p_{kn} \phi^k$.

Daraus folgt zunächst (13) für $n = 0$. (14) ergibt sich durch Koeffizientenvergleich aus der für $|\phi| \leq 1$ und $n \geq 1$ geltenden Identität

$$[p(\phi)]^n = [p(\phi)] \cdot [p(\phi)]^{n-1}.$$

Die Anzahl der Multiplikationen zur Berechnung der Zeile mit Index k ist $\sum_{j=1}^{k-1} j = (k-1)k/2$. Durch Summation bis zur Zeile mit Index m ergibt sich die Behauptung.

Bemerkung 1: Wegen $\tilde{R} = \sum \cdot R$ - wobei \sum gemäß (9) definiert ist - erhält man für die erste Spalte von \tilde{R}

$$(15) \quad \tilde{p}_{k0} = 1 \quad \text{für } k \geq 0.$$

Ferner gilt $\tilde{p}_{kn} = \sum_{j=n}^k p_{jn}$. Setzt man in diese Beziehung die Rekursionsformel (14) ein und vertauscht die Reihenfolge der Summation, so ergibt sich

$$(16) \quad \tilde{p}_{kn} = \sum_{j=1}^{k-n} p_j \cdot \tilde{p}_{k-i, n-1} \quad (k \geq 1, 1 \leq n \leq k).$$

Man erkennt, daß sich die Elemente von R und \tilde{R} nach der gleichen Rekursionsformel berechnen; lediglich die Startwerte sind verschieden.

Bemerkung 2: Aus den Startwerten (13) bzw. (15) ergeben sich noch einfache Formeln für die Spalten mit Index 1:

$$(17) \quad p_{k1} = p_k \quad (k \geq 1),$$

$$(18) \quad \tilde{p}_{k1} = \tilde{p}_{k-1,1} + p_k \quad (k \geq 1).$$

Es genügt dann, (14) und (16) für $n \geq 2$ zu benutzen.

Satz 3 dient zur Berechnung von \mathcal{R} , wenn die Funktion p als Potenzreihe gegeben ist. Wir betrachten jetzt noch eine spezielle Klasse von Funktionen p , die in geschlossener Form gegeben sind.

Satz 4: Hat p die Gestalt

$$(19) \quad p(\phi) = s_0 \phi / (1 - s_1 \phi - \dots - s_J \phi^J), \quad s_0 + \dots + s_J = 1,$$

so errechnet sich \mathcal{R} gemäß

$$(20) \quad p_{00} = 1, \quad p_{k0} = 0 \text{ für } k > 0$$

$$(21) \quad p_{kn} = s_0 p_{k-1, n-1} - \sum_{j=1}^J s_j \cdot p_{k-j, n}.$$

Die Anzahl der Multiplikationen zur Berechnung von \mathcal{R} bis zur Zeile mit Index m ist $(J + 1)m^2/2 + O(m)$.

Beweis: Wir gehen wieder von der Identität $[p(\phi)]^n = [p(\phi)] \cdot [p(\phi)]^{n-1}$ aus, setzen jedoch p in Form (19) ein:

$$(1 + s_1 \phi + \dots + s_J \phi^J) \left(\sum_{k=n}^{\infty} p_{kn} \phi^k \right) = s_0 \phi \cdot \left(\sum_{k=n-1}^{\infty} p_{k, n-1} \phi^k \right).$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt (21). Zur Berechnung der Elemente der Zeile mit Index k ($k \geq 1$) sind $k(J + 1) - J(J + 1)/2$ Multiplikationen notwendig (der zweite Term kommt herein, wenn man die Dreiecksgestalt von \mathcal{R} berücksichtigt). Durch Summation bis zur Zeile mit Index m ergibt sich die Behauptung.

Bemerkung 3: Die Berechnung von \mathcal{R} vollzieht sich nach (21) mit \tilde{p}_{kn} anstelle von p_{kn} ; die Startwerte sind durch (15) gegeben.

Bemerkung 4: Zur Berechnung jeder Zeile sind nur noch die letzten J vorangehenden Zeilen notwendig. Da für die Anwendung vor allem die Fälle $J = 1$ und $J = 2$ interessant sind, ergibt sich eine

beträchtliche Reduzierung der erforderlichen Rechenoperationen sowie des erforderlichen Speicherplatzes.

6. Beispiele

Wir wollen jetzt an zwei einfachen Beispielen die Methode erläutern. Dazu fassen wir noch einmal die eingeführten Bezeichnungen zusammen: Bei gegebenem p ist $\bar{\Delta}^*$ das Bild der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe \bar{D} , also nach Voraussetzung V einfach zusammenhängend. Geht der Rand $\partial\Delta^*$ durch Spiegelung am Einheitskreis in die Kurve $\partial\Delta$ über, so ist Δ das Innengebiet von $\partial\Delta$. Wir erhalten $\partial\Delta$ direkt als Bild von ∂D , wenn wir die Abbildung $p^* = 1/p$ betrachten. Analoges gilt für D_r , Δ_r^* und Δ_r . Ferner ist p_0 optimal bezüglich eines Bereiches S , wenn für ein $r > 1$ $p(\bar{D}_r) = S$ wird.

Wir betrachten zunächst das erste Beispiel

$$(22) \quad f_1(z) = (1+z)\ln(1+z) - z = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{(n-1)n}$$

(man erhält dieses Beispiel durch zweimalige Integration von $1/(1+z)$). Die einzige Singularität ist $\zeta_1 = -1$. f_1 soll im Intervall $[0, b]$ mit $b > 1$ fortgesetzt werden. Dazu betrachten wir zunächst versuchsweise eine Funktion vom Typ (19) mit $J = 1$. Setzen wir $s_0 = \alpha$ und $s_1 = 1 - \alpha$, so ergibt sich

$$(23) \quad p_{\alpha}(\phi) := \frac{\alpha\phi}{1-(1-\alpha)\phi}, \quad p_{\alpha}^*(\phi) = \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{\phi} - (1-\alpha) \right)$$

(die zu p_{α} gehörige Matrix \mathcal{P} liefert das klassische Verfahren von EULER-KNOPP (vgl. ZELLER-BEEKMANN [8], S. 132 ff.)). p_{α} ist eine linear gebrochene Abbildung und genügt der Voraussetzung V_r für alle $r > 1$. Als Bilder von D und D_r ergeben sich wieder

Kreise, die wegen der Singularität -1 noch am Ursprung gespiegelt werden. So erhalten wir als r -Fortsetzungsbereiche von f_1 bezüglich p_α die Kreise

$$(24) \quad \bar{\Delta}_r(f_1, p_\alpha) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - (1/\alpha - 1)| \leq \frac{1}{r \cdot |\alpha|}\} .$$

Der eigentliche Fortsetzungsbereich $\Delta(f_1, p_\alpha)$ ist die aus (24) sich für $r = 1$ ergebende (offene) Kreisscheibe mit Mittelpunkt $1/\alpha - 1$ und Radius $1/|\alpha|$. Wir beschränken uns auf positive α .

Dann schließt man geometrisch: p_α ist zulässig bezüglich $S = [0, b]$ für $0 < \alpha < 2/(1+b)$. p_α kann nicht optimal bezüglich S sein, weil kein r -Fortsetzungsbereich mit S zusammenfällt. Innerhalb der Klasse der p_α mit $\alpha > 0$ ist diejenige Funktion p_{α_1} am günstigsten, bei der der Mittelpunkt der Kreise (24) mit dem Mittelpunkt des Intervalls $[0, b]$ zusammenfällt. Dies ergibt:

$$(25) \quad \alpha_1 = \frac{2}{2+b} \quad , \quad \kappa(S, p_{\alpha_1}) = \frac{b}{2+b} .$$

Wählen wir z.B. $b = 4$, so wird $\kappa(S, p_{\alpha_1}) = 2/3$, d.h. transformieren wir die Reihe (23) mit p_{α_1} , so hat die transformierte Reihe für jedes $z_0 \in [0, 4]$ mindestens einen Konvergenzfaktor von $2/3$, während die ursprüngliche Reihe nur für $z_0 \in [0, 1]$ konvergiert.

Das bezüglich S optimale Verfahren ergibt sich für ein p der Form (19) mit $J = 2$:

$$(26) \quad p(\phi) = \frac{s_0 \phi}{1 - s_1 \phi - s_2 \phi^2} \quad , \quad p^*(\phi) = \frac{1}{s_0} \left(\frac{1}{\phi} - s_1 - s_2 \phi \right) \quad ,$$

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1$$

Wir beschränken uns auf reelle s_i mit $0 < s_0 < 2$, $|s_2| < 1$.

Man rechnet direkt nach, daß sich als Bild des Einheitskreises D

eine Ellipse ergibt; $\Delta(f_1, p)$ wird das Innengebiet der Ellipse mit Mittelpunkt s_1/s_0 und Halbachsen $(1-s_2)/s_0$, $(1+s_2)/s_0$. Für $s_2 < 0$ liegt die große Halbachse auf der reellen Geraden, für $s_2 > 0$ auf einer Parallelen zur imaginären Achse.

$\bar{\Delta}_r(f_1, p)$ sind konfokale Ellipsen mit den Halbachsen $(1-s_2 r^2)/rs_0$, $(1+s_2 r^2)/rs_0$ für $1 \leq r \leq r_e = 1/\sqrt{|s_2|}$. $\bar{\Delta}_{r_e}(f_1, p)$ ist das Intervall zwischen den Brennpunkten $B_{1,2} := (s_1 \pm 2\sqrt{|s_2|})/s_0$. Für $r > r_e$ ist die Voraussetzung V_r nicht mehr erfüllt.

Die bezüglich des Intervalls S optimale Funktion p_0 ist dadurch charakterisiert, daß das Intervall zwischen den Brennpunkten B_1 und B_2 mit S zusammenfällt. Dies ergibt die Bedingungen:

$s_1/s_0 = b/2$, $(1 + 2\sqrt{|s_2|})/s_0 = b$; ferner ist nach Voraussetzung $s_0 + s_1 + s_2 = 1$. Daraus lassen sich die Koeffizienten für das bezüglich S optimale p_0 berechnen:

$$s_0 = 4(\sqrt{1+b}-1)^2/b^2, \quad s_1 = 2(\sqrt{1+b}-1)^2/b, \quad s_2 = -(\sqrt{1+b}-1)^4/b^2.$$

Der Konvergenzfaktor von S bezüglich p_0 ist

$$\kappa(S, p_0) = 1/r_e = \sqrt{|s_2|} = (\sqrt{1+b}-1)^2/b.$$

Für $b=4$ ergibt sich $\kappa(S, p_0) \approx 0.384$. Dies ist eine beträchtliche Verbesserung gegenüber dem Wert $2/3$, der sich für das bezüglich S günstigste EULER-KNOPP-Verfahren p_{α_1} ergab. Man muß dabei allerdings bedenken, daß die mit p_0 transformierte Reihe für alle $z_0 \in S$ den gleichen Konvergenzfaktor 0.384 besitzt, während bei der mit p_{α} transformierten Reihe der Konvergenzfaktor vom Rand zur Mitte des Intervalls vom Wert $2/3$ bis auf 0 abnimmt.

Um ein Gefühl für die Wirksamkeit der Methode zu vermitteln,

wurde die transformierte Reihe für einige z_0 innerhalb und außerhalb des Konvergenzkreises von f_1 ausgewertet.

Für die beiden Funktionen

A: p_α mit $\alpha = 0.3$,

B: p in der Form (26) mit $s_0 = 0.3$, $s_1 = 1$, $s_2 = -0.3$

wurde die Anzahl N der Glieder der transformierten Reihe (7) bestimmt, die für eine Genauigkeit von $\epsilon = 10^{-4}$ erforderlich waren (es wurde mit den exakten Werten $f_1(z_0)$ verglichen). Die kleinere der beiden Zahlen N wurde in Abbildung 1 im Punkt z_0 eingetragen; dabei beziehen sich unterstrichene Zahlen auf A, überstrichene auf B.

Als zweites Beispiel betrachten wir $f_2(z) = 1/(1+z^2) = \sum_{j=0}^{\infty} z^{2j}$ mit den Singularitäten $\zeta_1 = 1$ und $\zeta_2 = -1$. Für p_α ergeben sich als Fortsetzungsbereiche gemäß dem Korollar zu Satz 1

$$\bar{\Delta}_r(f_2, p_\alpha) = \bar{\Delta}_r(f_1, p_\alpha) \cap (-\Delta_r(f_1, p_\alpha)),$$

d.h. der Durchschnitt des Kreises (24) mit dem am Nullpunkt gespiegelten Kreis. Zur Fortsetzung auf dem Stück $S := [-ib, ib]$ (b reell) der imaginären Achse ist auch ein p der Form (26) optimal und wird ähnlich bestimmt wie bei f_1 . Ist S nicht symmetrisch zum Nullpunkt, so ergeben sich komplexe Koeffizienten für p_0 . Abbildung 2 zeigt die Zahlen N für f_2 entsprechend der Abbildung 1 für f_1 , und zwar mit den Funktionen

C: p_α mit $\alpha = 0.6$,

D: p der Form (26) mit $s_0 = 0.6$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0.4$.

Beim zweiten Beispiel sind die Fortsetzungsbereiche Ellipsen

mit Mittelpunkt o und Brennpunkten $B_{1,2} \approx \pm 2.11i$.

7. Schlußbemerkung

Die Möglichkeit, eine Potenzreihe auch außerhalb des Konvergenz-
kreises durch Anwendung eines Summierungsverfahrens in eine
konvergente Reihe zu transformieren, beruht letztlich auf einem
Mittelungsprozeß; die zum Teil stark anwachsenden Reihenglieder
werden "abgeglichen". Es ist deshalb nicht verwunderlich, daß
dieser Prozeß außerordentlich anfällig ist für "numerisches
Auslöschen". Dies zeigt sich darin, daß man zur Erzielung einer
höheren Genauigkeit nicht in jedem Falle eine größere Anzahl
von Reihengliedern auswerten kann; mit wachsendem N und damit
wachsendem Grad der Polynome v_n kann plötzlich durch die Runden-
fehler beim Hornerschema jede Genauigkeit verloren gehen. Bis zu
einem gewissen Grad läßt sich durch Anwendung höherer Maschinen-
genauigkeit noch eine Verbesserung erzielen. Erforderlich wären
andere Methoden zur Auswertung von Polynomen.

Schließlich noch eine Bemerkung zu zwei verwandten Arbeiten.
Setzt man in (3) $z_0 = 1$ und bestimmt stattdessen zu einem gege-
benen z_1 aus dem Bildbereich der Abbildung p das Urbild ϕ_1 , so
kann man $f(z_1)$ direkt durch Auswerten von (3) für $z_0 = 1$ und
 $\phi = \phi_1$ bestimmen. Diese Methode wird von KUBLANOWSKAYA [4] vor-
geschlagen; sie geht weniger auf die numerische Seite des Algo-
rithmus ein, sondern untersucht Anwendungen bei der Lösung line-
arer Gleichungssysteme und bei der Berechnung von Eigenwerten.
ZELMER [9], [10] untersucht zum Zweck der analytischen Fortset-
zung beim Zwei- und Dreikörperproblem eine andere Klasse von
Summierungsverfahren, sogenannte SONNENSCHEN-Verfahren (ZELLER-

BEEKMANN [8], S. 185). Hier entstehen nur in den einfachsten Fällen Polynomreihen. Es macht mehr Mühe, Fortsetzungsbereiche zu bestimmen.

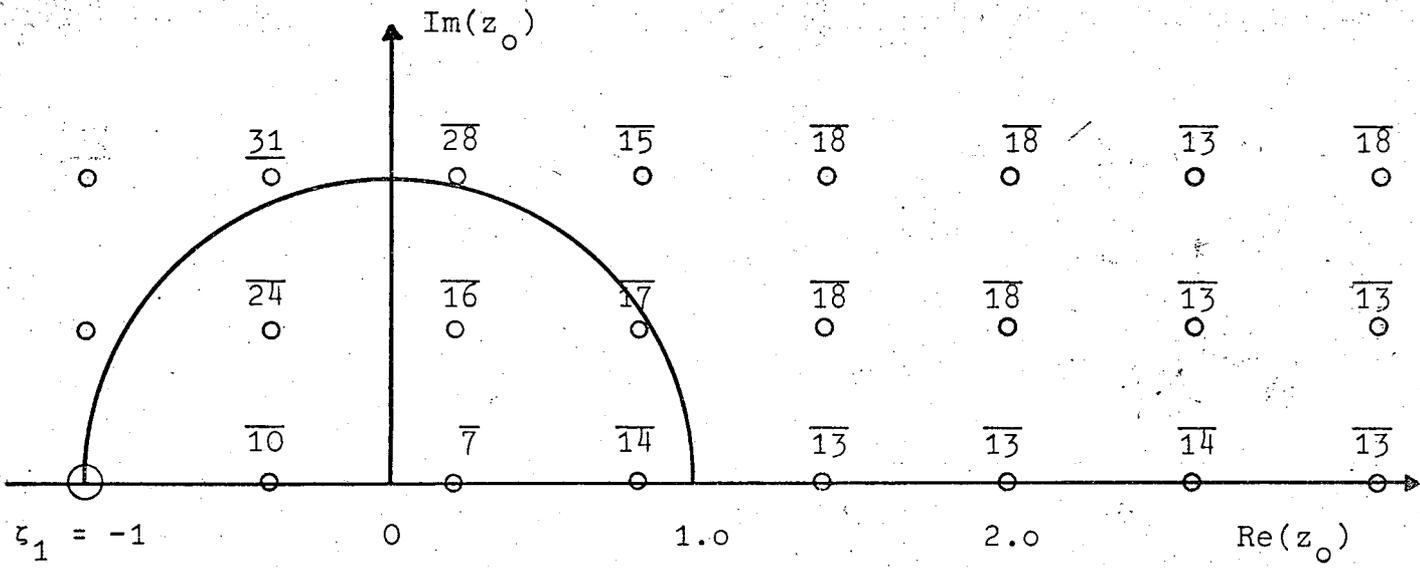


Bild 1

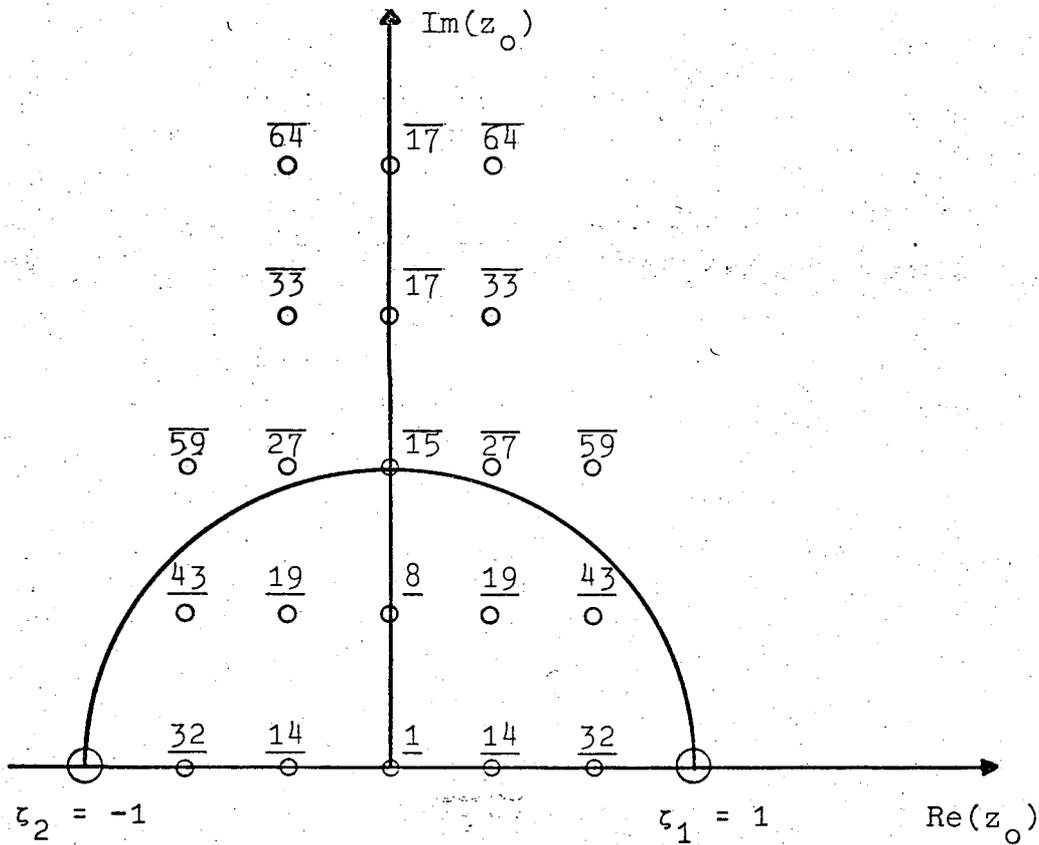


Bild 2

L i t e r a t u r

1. HENRICI, P.: An algorithm for analytic continuation. J. SIAM Numer. Anal. 3, 67-78 (1966)
2. HILLE, E.: Analytic function theory II. Boston-New York: Ginn and Company 1962
3. KNOPP, K.: Über Polynomentwicklungen im MITTAG-LEFFLERSchen Stern durch Anwendung der EULERSchen Reihentransformation. Acta Math. 47, 313-335 (1926)
4. KUBLANOWSKAYA, V.N.: Application of analytic continuation in numerical analysis by means of change of variables. Trudy Mat. Inst. Steklov 53, 145-185 (1959)
5. NIETHAMMER, W.: Konvergenzbeschleunigung bei einstufigen Iterationsverfahren durch Summierungsverfahren. Iterationsverfahren, Numerische Mathematik, Approximationstheorie. ISNM Vol. 15, 235-243 Basel-Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1970.
6. NIETHAMMER, W. und W. SCHEMPP: On the construction of iteration methods for linear equations in BANACH spaces by summation methods. Aequat. Math. 5, 273-284 (1970).
7. PERRON, O.: Über eine Verallgemeinerung der EULERSchen Reihentransformation. Math. Zeitschr. 18, 157-172 (1923).
8. ZELLER, K. und BEEKMANN, W.: Theorie der Limitierungsverfahren. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1970.
9. ZELMER, G.: Summation methods in the two- and three-body problems. Thesis. University of British-Columbia, May 1967.
10. ZELMER, G.: $(E, \gamma, \alpha, \beta)$ Summability and Applications. Arch. Rat. Mech. Anal. 35, 211-219 (1969).