Über metrische Räume und $C_c(X)$.

von E. Binz und K. Kutzler

Nr. 1 (1970)

Über metrische Räume und $C_c(X)$.

von E. Binz und K. Kutzler

Im Folgenden sollen metrische Räume mit Hilfe einer gewissen Klasse von Algebren funktionalanalytisch untersucht werden. Hierbei spielt folgender Charakterisierungssatz metrisierbarer Räume aus der allgemeinen Topologie (siehe Kowalsky, [6], 28.8 und 31.4) eine wichtige Rolle: " Ein topologischer Raum ist genau dann metrisierbar, wenn er in das abzählbare Produkt eines Sternraumes einbettbar ist."

1. Zwei Lemmata.

Die im Folgenden verwendete Symbolik schließt sich den in [1] - [3] eingeführten Bezeichnungen an. Für einen Limesraum X sei $C(X)$ die R-Algebra aller auf X definierten, stetigen und reellwertigen Funktionen. $C_c(X)$ sei die Algebra $C(X)$ versehen mit der von X auf $C(X)$ induzierten stetigen Konvergenz, d.h., der gröbsten Limitierung Λ auf $C(X)$ mit der Eigenschaft, daß die Evaluation $\omega: C_\Lambda(X) \times X \longrightarrow R$ definiert durch $\omega(f,x) = f(x)$ ($(f,x) \in C(X) \times X$) stetig ist. Für eine Unteralgebra A von $C(X)$, die im Folgenden stets die konstanten Funktionen enthälte, sei A_c die mit der von $C_c(X)$ induzierten stetigen Konvergenz versehene Limesalgebra. A^o sei die Algebra aller beschränkten Funktionen aus A . $\mathrm{Hom}\, A_c$ sei die Menge aller stetigen Algebrenhomomorphismen $h: A_c \longrightarrow R$, für die $h(1) = 1$ gilt.Es ist $\mathrm{Hom}\, A_c \subset C(A_c)$.

Mit $\mathrm{Hom}_c A_c$ werde der Raum $\mathrm{Hom}\, A_c$ versehen mit der von $C_c(A_c)$ induzierten stetigen Konvergenz bezeichnet. Sind B und B' Limesalgebren mit Einselementen und $\mathrm{Hom}\, B$ sowie $\mathrm{Hom}\, B'$ nicht leer, so induziert jeder stetige Algebrenhomomorphismus $v: B \longrightarrow B'$ eine stetige Abbildung $v^*: \mathrm{Hom}_c B' \longrightarrow \mathrm{Hom}_c B$ definiert durch $v^*(h')(b) = h'(v(b))$ ($h' \in \mathrm{Hom}\, B'$, $b \in B$). Sind X und Y Limesräume, so definiert jede stetige Abbildung $v': Y \longrightarrow X$ einen stetigen Algebrenhomomorphismus $(v')^*: C_c(X) \longrightarrow C_c(Y)$ durch $(v')^*(f)(y) = f(v'(y))$ ($f \in C(X)$, $y \in Y$). Eine Limesalgebra A mit Einselement, die der Bedingung $\mathrm{Hom}\, A \neq \emptyset$ genügt, besitzt die Gelfanddarstellung $C_c(\mathrm{Hom}_c A)$, die durch die folgende universelle Eigenschaft charakterisiert ist:
Sei der stetige Algebrenhomomorphismus $d: A \longrightarrow C_c(\mathrm{Hom}_c A)$ definiert durch

$$d(a)(h) = h(a) \qquad (a \in A \,, h \in \mathrm{Hom}\, A)$$

Dann gibt es zu jedem Limesraum Y und zu jedem stetigen Algebrenhomomorphismus $u: A \longrightarrow C_c(Y)$ genau einen stetigen Algebrenhomorphismus $(u')^*: C_c(\mathrm{Hom}_c A) \longrightarrow C_c(Y)$, der durch eine stetige Abbildung $u': Y \longrightarrow \mathrm{Hom}_c A$ induziert wird, derart, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "u"'] & C_c(\mathrm{Hom}_c A) \arrow[d, "(u')^*"] \\ & C_c(Y) \end{tikzcd}$$

.

1.1) Lemma: Sei X ein vollständig regulärer topologischer Hausdorffraum. $A \subset C(X)$ sei eine Unteralgebra, die die konstanten Funktionen enthalte und die zudem die Eigenschaft besitze, daß A^0 dicht in A_c ist. Dann sind alle stetigen Homomorphismen aus $\operatorname{Hom} A_c$ durch Punktevaluationen darstellbar.

Beweis: Es gilt $A^0 \subset C^0(X)$. Sei $\overline{A^0}$ die abgeschlossene von A^0 bezüglich der Supremumsnorm . Dann ist $\overline{A^0}$ sowohl eine Unteralgebra als auch ein Unterverband von $C^0(X)$. Ein Homomorphismus h' aus $\operatorname{Hom} A_c^0$ ist auch uniform stetig. Er läßt sich zu einem verbandstreuen Homomorphismus $h:\overline{A^0} \longrightarrow R$ stetig bezüglich der Normtopologie fortsetzen. Es werde angenommen, daß h nicht durch eine Punktevaluation induziert wird. Dann gibt es zu x aus X stets f_x aus $\overline{A^0}$, so daß gilt:

$$f_x(x) = 1 \quad \text{und} \quad h(f_x) = 0 \quad .$$

Man beachte, daß A^0 uniform dicht in $\overline{A^0}$ ist, d.h., daß es zu $\delta > 0$ und zu f aus $\overline{A^0}$ stets g aus A^0 derart gibt, daß

$$\|f - g\| = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| < \delta$$

gilt.

Da die Funktionen f_x $(x \in X)$ stetig sind, gibt es zu δ mit $0 < \delta < 1/4$ und x aus X stets eine Umgebung $U_{\delta x}$ von x derart, daß

$$\sup_{y \in U_{\delta x}} |f_x(y) - f_x(x)| \leqslant \delta/2$$

gilt. Aufgrund der zuvor erwähnten Approximationsmöglichkeit läßt sich eine Funktion g_x aus A^0 mit

$$\| f_x - g_x \| < \delta/2$$

finden. Hieraus folgt einerseits

$$\sup_{y \in U_{\delta x}} |g_x(y) - 1| \leqslant \delta \quad .$$

Andererseits folgt aus der Stetigkeit des Homomorphismus h bezüglich der Normtopologie von $\overline{A^0}$:

$|h(g_x)| = |h(g_x - f_x) + h(f_x)| = |h(g_x - f_x)| \leqslant \|h\| \|f_x - g_x\| \leqslant$
$\leqslant \|f_x - g_x\| \leqslant 1/4$.

Nun definiere man für δ mit $0 < \delta < 1/4$ und x aus X :

$D_{\delta x} := \{g \mid g \in A^o , \sup_{y \in U_{\delta x}} |g(y) - 1| \leqslant \delta , h(g) \leqslant 1/4 \}$.

Nach dem soeben Gezeigten ist $D_{\delta x}$ nicht leer. Es werde nun gezeigt, daß die Familie

$$\mathfrak{D} := \{ D_{\delta x} \mid 0 < \delta < 1/4 , x \in X \}$$

die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt. Seien $D_{\delta_1 x_1}, \ldots$ $\ldots, D_{\delta_n x_n}$ aus $\mathfrak{D}$. Definiere $\delta = \min\{ \delta_i \mid i = 1,\ldots,n\}$.
Bilde die Funktion:

$$f := (\bigvee_1^n f_{x_i}) \wedge 1 ,$$

die in $\overline{A^o}$ liegt, da $\overline{A^o}$ ein die Algebra A^o umfassender Verband ist. Die Funktion f hat, wie man aufgrund ihrer Definition und der Verbandstreue von h sofort nachrechnet, die folgenden Eigenschaften:

(a) $$\sup_{y \in U_{\delta_i x_i}} |f(y) - 1| \leqslant \delta_i/2 \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

(b) $$h(f) = 0$$

Wegen $f \in \overline{A^o}$ läßt sich g aus A^o mit $\|f-g\| \leqslant \delta/2$ finden. Dann folgt nach soeben durchgeführter Schlußweise aus (a) und (b) :

(a') $$\sup_{y \in U_{\delta_i x_i}} | g(y) - 1| \leqslant \delta_i \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

(b') $$| h(g)| \leqslant 1/4 \quad .$$

Folglich liegt g in jeder der Mengen $D_{\delta_i x_i}$. Die Familie $\mathfrak{D}$ besitzt demnach die endliche Durchschnittseigenschaft, ist also Subbasis eines Filters Θ auf A^o , der nach Definition der stetigen Konvergenz gegen die Funktion 1 konvergiert.

Andererseits nimmt aber der Homomorphismus h auf keinem Element der Filtersubbasis $\mathfrak{D}$ und somit auch auf keinem Element der davon erzeugten Filterbasis einen Wert $> 1/4$ an. Es gilt also

$$\limsup h(\Theta) \leq 1/4 \quad .$$

Andererseits müßte aus der Stetigkeit von h auf A_c^o

$$\lim h(\Theta) = 1$$

folgen. Hieraus resultiert ein Widerspruch. Folglich ist $h|_{A^o} = h'$ genau dann stetig, wenn sich h' als Punktevaluation darstellen läßt. Sei nun A wie in der Voraussetzung. h' sei aus $\operatorname{Hom} A_c$. Dann ist $h'|_{A^o}$ aus $\operatorname{Hom} A_c^o$ und demnach durch eine Punktevaluation darstellbar. Da nach Voraussetzung A^o dicht in A_c ist und die $h'|_{A^o}$ darstellende Punktevaluation auf einer dichten Teilmenge von A_c mit h' übereinstimmt, müssen beide auf A_c aus Stetigkeitsgründen übereinstimmen.

Als ein Korollar hierzu ergibt sich:

<u>1.2) Korollar: Wenn zusätzlich zu den Voraussetzungen in (1.1)</u> A <u>punkteseparierend oder gar topologieerzeugend ist, so kann man</u> X <u>in natürlicher Weise mit</u> $\operatorname{Hom} A_c$ <u>identifizieren.</u>

Die soeben bewiesenen Ergebnisse liefern für die Gelfanddarstellung einer Unteralgebra A von $C(X)$ das folgende Resultat:

<u>1.3) Lemma: Seien</u> X <u>ein vollständig regulärer Raum und</u> A <u>eine Unteralgebra von</u> $C(X)$, <u>für die gilt:</u>

(i) A <u>enthalte die konstanten Funktionen.</u>

(ii) A <u>erzeuge die Topologie von</u> X .

(iii) A^o <u>ist dicht in</u> A_c .

Dann ist $C_c(X)$ die Gelfanddarstellung der Algebra A_c.

Beweis: Nach (1.1) und (1.2) folgt wegen (i) - (iii) :

$$\mathrm{Hom}\, A_c = X$$

im Sinne der Isomorphie in der Kategorie der Mengen. Aus der Stetigkeit der Einbettungsabbildung $j_A : A_c \longrightarrow C_c(X)$ folgt bei Anwendung des Funktors Hom_c die Stetigkeit von $j_A^* : \mathrm{Hom}_c C_c(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_c A_c$. Als vollständig regulärer Raum ist X c-einbettbar. Demnach gilt in der Kategorie der Limesräume $X = \mathrm{Hom}_c C_c(X)$. Ferner ist $id_{\mathrm{Hom}\, A_c} : \mathrm{Hom}_c A_c \longrightarrow \mathrm{Hom}_s A_c$ stetig. (Hierbei trägt $\mathrm{Hom}_s A_c$ die von der Algebra A auf $\mathrm{Hom}\, A_c$ induzierte schwache Topologie.) Da A die Topologie von X induziert und da mengentheoretisch $\mathrm{Hom}\, A_c = X$ gilt, folgt in der Kategorie der Limesräume $\mathrm{Hom}_s A_c = X$. Aus dem Diagramm

$$X \xrightarrow{j_A^*} \mathrm{Hom}_c A_c \xrightarrow{id} \mathrm{Hom}_s A_c \longrightarrow X \xrightarrow{j_A^*} \mathrm{Hom}_c A_c$$

folgt dann aber $X = \mathrm{Hom}_c A_c$, so daß $C_c(X) = C_c(\mathrm{Hom}_c A_c)$ die Gelfanddarstellung von A_c ist.

Bemerkung: Im Beweis zu (1.1) gehen Schlußweisen von W. Feldman und F.T.M. Schroder ein.

2. Algebraische Beschreibung von Sternräumen und deren Produkten.

Im Folgenden sei J eine nichtleere Indexmenge. Mit I werde das Einheitsintervall $[0,1]$ bezeichnet. Auf dem kartesischen Produkt $\tilde{S}(J) := I \times J$ werde eine Äquivalenzrelation $\sim$ wie folgt definiert:

Für (x_i,m_i) aus $\tilde{S}(J)$ ($i = 1,2$) gelte $(x_1,m_1) \sim (x_2,m_2)$ genau dann, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(I) $x_1 = x_2 = 0$; m_1 und m_2 sind beliebig.

(II) $x_1 = x_2$ und $m_1 = m_2$.

2.1) Definition: Der Quotientenraum $S(J) = \tilde{S}(J)/\sim$ wird Sternraum genannt.

Ein Sternraum entsteht durch Verheften der Nullpunkte einer Familie von Einheitsintervallen. Seine Elemente sind von der Form 0 (wo 0 die Äquivalenzklasse der Paare der Form $(0,m)$ ($m \in J$) ist) beziehungsweise (x,m) ($0 < x \leq 1$; $m \in J$) . Die Menge $I_m := \{0\} \cup \{ (x,m) \mid 0 < x \leq 1 \}$ wird der durch m ($m \in J$) bestimmte Strahl des Sternraumes genannt. Auf $\tilde{S}(J)$ wird eine Pseudometrik $\tilde{d}$ wie folgt definiert:

$$\tilde{d}((x_1,m_1),(x_2,m_2)) := \begin{cases} |x_1 - x_2| & m_1 = m_2 \\ x_1 + x_2 & m_1 \neq m_2 \end{cases}$$

Diese Pseudometrik ist kompatibel mit der Äquivalenzrelation. Sie definiert auf dem Sternraum $S = S(J)$ eine Metrik d , bezüglich der S vollständig ist. Im Folgenden sei S stets durch die Metrik d topologisiert. Die Punkte der Form $(1,m)$ ($m \in J$) werden Eckpunkte des Sternraumes genannt. Für zwei verschiedene Punkte $(1,m_1)$ und $(1,m_2)$ gilt $d((1,m_1),(1,m_2)) = 2$. Hieraus folgt :

Der Sternraum $S(J)$ ist genau dann kompakt, wenn die ihn definierende Indexmenge J endlich ist.

Jede abgeschlossene δ-Umgebung des Punktes 0 enthält alle Punkte der Form (δ,m) , wobei m aus J beliebig ist. Für zwei verschiedene Indizes m_1 und m_2 aus J gilt dann

$d((\delta,m_1),(\delta,m_2)) = 2\delta$. Hieraus erkennt man, daß notwendig für die Lokalkompaktheit des Sternraumes $S(J)$ die Endlichkeit der Indexmenge J ist.

<u>2.2) Bemerkung: Für einen Sternraum</u> $S(J)$ <u>sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:</u>

(a) $S(J)$ <u>ist kompakt.</u>

(b) $S(J)$ <u>ist lokalkompakt.</u>

(c) <u>Die Indexmenge</u> J <u>ist endlich.</u>

Die von der Metrik d auf S induzierte Topologie läßt sich wie folgt beschreiben:

Für einen Punkt (x,m) aus S ($(x,m) \neq 0$) gibt es eine Umgebungsbasis offener Mengen, die sämtlich in I_m liegen und mit einer Umgebungsbasis offener Mengen des Punktes x aus I identisch sind. Eine Umgebungsbasis des Punktes 0 läßt sich wie folgt beschreiben: Zu vorgegebenem $\delta > 0$ sei U_δ die Menge aller Punkte (x,m) , für die $|x| < \delta$ gelte und für die m aus J beliebig ist. Die Familie $\{ U_\delta | \delta > 0\}$ bildet dann eine Basis offener Umgebungen von 0 .

Aus dieser Betrachtung folgt: Ist J ein unendliches Indexsystem, so ist der Punkt 0 in $S(J)$ der einzige Punkt, der keine kompakte Umgebung besitzt. Hieraus folgt für die Stone-Čech-Kompaktifizierung βS von S : Die abgeschlossene Hülle von $\beta S \setminus S$ in βS ist $(\beta S \setminus S) \cup \{0\}$.

<u>2.3) Definition und Eigenschaften der Algebra</u> P .

Sei $S = S(J)$ ein Sternraum. Man unterscheide die Fälle, in denen J endlich beziehungsweise unendlich ist.

(a) Sei J von endlicher Kardinalzahl. Dann ist $S = S(J)$ kompakt. $P_o(I)$ sei die Algebra aller Polynome mit reellen Koeffizienten - aufgefaßt als Funktionen auf I - , die in

0 verschwinden, d.h., deren konstanter Term 0 ist.

Man definiere:

$$P_o(S) := \{ g \mid g: S \longrightarrow R, \; m \varepsilon J \Rightarrow g|_{I_m} \varepsilon P_o(I_m)\} .$$

Das heißt: $P_o(S)$ besteht aus allen Funktionen auf S, die in 0 verschwinden und deren Einschränkung auf jeden Strahl des Sternraumes ein Polynom der oben genannten Art ist.

Die Polynomalgebra $P(S)$ des Sternraumes S werde definiert durch $$P(S) := P_o(S) \oplus R .$$

Nach dem Satz von Stone-Weierstrass ist wegen der Kompaktheit von S die Algebra $P(S)$ dicht in $C_c(S)$. (Man beachte hierbei, daß auf Funktionenalgebren über lokalkompakten topologischen Räumen die stetige Konvergenz mit der kompakt-offenen Topologie übereinstimmt.) $P(S)$ erzeugt ferner die Topologie von S und besteht wegen der Kompaktheit von S nur aus beschränkten Funktionen. $P(S)$ erfüllt also die Voraussetzungen von (1.3) . Es gilt $\mathrm{Hom}_c P_c(S) = S$. Ferner ist $C_c(S)$ die Gelfanddarstellung von $P_c(S)$.

(b) Sei S ein Sternraum mit Indexmenge J , deren Kardinalzahl nicht endlich ist. M sei eine endliche Teilmenge von J , m_o sei aus M . Das Paar (M, m_o) werde endliche Teilmenge von J mit ausgezeichnetem Element m_o genannt. Im Folgenden sei $F(J)$ das System aller endlichen Teilmengen von J mit ausgezeichneten Elementen. Auf $F(J)$ werde eine Ordnungsrelation $\succ$ wie folgt definiert:

Für (M, m_o) und (M', m_o') aus $F(J)$ gelte $(M, m_o) \succcurlyeq (M', m_o')$ genau dann, wenn eine der beiden folgenden Relationen erfüllt ist:

(α) $\quad (M,m_o) = (M',m_o')$.

(β) $\quad M' \subset M \setminus \{m_o\}$.

Mit der soeben definierten Ordnung bildet $F(J)$ ein gerichtetes System.

Für eine endliche Teilmenge M von J sei S_M der kompakte Sternteilraum von S, der durch die Indizes aus M definiert wird. Für (M,m_o) aus $F(J)$ sei $S_M^{m_o}$ identisch mit S_M, wobei allerdings der durch m_o definierte Strahl I_{m_o} besonders ausgezeichnet sei. Für (M,m_o) aus $F(J)$ werde die Projektion

$$\Pi_M^{m_o} : S \longrightarrow S_M^{m_o}$$

definiert durch:

$$\Pi_M^{m_o}(x,m) = \begin{cases} (x,m) & | \; m \in M \\ (x,m_o) & | \; m \notin M \end{cases}$$

$$\Pi_M^{m_o}(0) = 0 \quad .$$

Man verifiziert sofort, daß $\Pi_M^{m_o}$ stetig ist und daß die Familie $\{ \Pi_M^{m_o} \mid (M,m_o) \in F(J)\}$ die Topologie von S induziert. Man betrachte nun den Algebrenhomomorphismus

$$(\Pi_M^{m_o})^* : C_c(S_M^{m_o}) \longrightarrow C_c(S) \quad .$$

Er führt die Algebra $P(S_M^{m_o})$ in die Algebra $P_M^{m_o} := (\Pi_M^{m_o})^*(P(S_M^{m_o}))$ über. Man rechnet nun leicht nach, daß die Algebren $P_M^{m_o}$, wo $(M,m_o) \in F(J)$, ein aufsteigend gerichtetes System von Unteralgebren von $C(S)$ bilden, so daß

$$P := \bigcup_{(M,m_o) \in F(J)} P_M^{m_o}$$

eine Unteralgebra von $C(S)$ ist. Die Elemente der Algebra P

sind stetige Funktionen auf S, deren Einschränkungen auf die Strahlen des Sternraumes Polynome sind, die auf fast allen Strahlen des Sternraumes identisch sind. Da die Unteralgebren $P(S_M^{m_o})$ die Topologien der Sternräume $S_M^{m_o}$ und die Projektionen $\Pi_M^{m_o}: S \longrightarrow S_M^{m_o}$ die Topologie von S induzieren, folgt, daß P eine topologieinduzierende Unteralgebra von $C(S)$ ist. Da alle Algebren $P_M^{m_o}$ nur beschränkte Funktionen enthalten, besteht P nur aus beschränkten Funktionen. Nach einem Theorem von W. Feldman [5] ist P eine dichte Unteralgebra von $C_c(S)$. Nach (1.3) besitzt die Algebra P_c die Algebra $C_c(S)$ als Gelfanddarstellung.

Die Punkte eines Sternraumes können durch eine Familie von Funktionen, die die Algebra P erzeugen, beschrieben werden. Hierzu definiere man für m aus J:

$$(m' \in J) \qquad p_m(x,m') := \begin{cases} x & m = m' \\ 0 & m \neq m' \end{cases}$$

$$p_m(0) := 0 .$$

Falls J unendlich ist, adjungiere man zu J ein neues Element ω, so daß man $J_\omega := J \cup \{\omega\}$ erhält und definiere

$$(m' \in J) \qquad p_\omega(x,m') := x$$

$$p_\omega(0) := 0 .$$

Die Unterscheidung zwischen endlichem und unendlichem Indexbereich ist notwendig, weil im Falle eines endlichen Systems J bei entsprechender Definition von p_ω gilt: $p_\omega = \sum_{m \in J} p_m$.

und daher das System der Funktionen p_m und p_ω algebraisch abhängig ist, was hingegen nicht der Fall ist, wenn J von unendlicher Kardinalität ist.

Es gilt, wie man leicht nachrechnet:

(i) p_m $(m \varepsilon J)$ und p_ω sind aus P.

(ii) (a) Wenn J endlich ist, so ist $\{p_m \mid m \varepsilon J\} \cup \{1\}$ ein minimales Erzeugendensystem der Algebra P.

(b) Wenn J unendlich ist, so ist $\{p_m \mid m \varepsilon J\} \cup \{p_\omega\} \cup \{1\}$ ein minimales Erzeugendensystem der Algebra P.

Zwischen den Funktionen p_m $(m \varepsilon J)$ und p_ω bestehen die folgenden Relationen:

(iii) Für m und m' aus J mit $m \neq m'$ gilt: $p_m p_{m'} = 0$.

(iv) Wenn J unendlich ist, so gilt für m aus J:

$$p_m p_\omega - p_m^2 = 0 .$$

2.4) Untersuchung des Quotienten der Stone-Čech-Kompaktifizierung βS, der durch die Algebra P definiert wird.

Im Folgenden zeigt sich, daß die Algebra P einen in gewisser Hinsicht minimalen Quotienten von βS beschreibt, wobei das Erzeugendensystem $\{p_m \mid m \varepsilon J_\omega\}$ im Hinblick auf diese Kompaktifizierung minimal ist. Im vorliegenden Falle genügt es, nur Sternräume mit unendlich vielen Strahlen zu betrachten.

Sei $S = S(J)$ ein Sternraum. Für (M, m_o) und (M', m'_o) aus $F(J)$ definiere man eine stetige Projektion

$$\Pi^{m_o m'_o}_{MM'} : S^{m_o}_M \longrightarrow S^{m'_o}_{M'}$$

durch

$$\left((x,m) \varepsilon S^{m_o}_M \right) \qquad \Pi^{m_o m'_o}_{MM'}(x,m) := \begin{cases} (x,m) \mid & m \varepsilon M' \\ (x,m_o) \mid & m \notin M' \end{cases}$$

und $\Pi_{MM'}^{m_o m'_o}(0) = 0$.

Aufgrund der Ordnung auf $F(J)$ und der Definition der Abbildungen $\Pi_{MM'}^{m_o m'_o}$ folgt für (M,m_o), (M', m'_o) und (M'',m''_o) aus $F(J)$ mit $(M, m_o) \geqslant (M',m'_o) \geqslant (M'',m''_o)$ stets

$$\Pi_{M'M''}^{m'_o m''_o} \circ \Pi_{MM'}^{m_o m'_o} = \Pi_{MM''}^{m_o m''_o} .$$

Das bedeutet: Die kompakten Räume $S_M^{m_o}$ bilden zusammen mit den stetigen, surjektiven Abbildungen $\Pi_{MM'}^{m_o m'_o}$ ein projektives System kompakter Sternräume. Nach bekannten Sätzen aus der allgemeinen Topologie existiert der projektives Limes dieses System und ist ein kompakter Hausdorffraum. Sei

$$\hat{S} := \underset{(M,m_o)\varepsilon F(J)}{\operatorname{proj}} S_M^{m_o} .$$

Man betrachte nun für (M,m_o) aus $F(J)$ die Projektionen $\Pi_M^{m_o}: S \longrightarrow S_M^{m_o}$. Wie man leicht nachrechnet, sind diese Projektionen mit den Abbildungen des projektiven Systems kompatibel. Nach der universellen Charakterisierung des projektiven Limes induzieren die Projektionen $\Pi_M^{m_o}$ eine stetige Abbildung

$$\Pi : S \longrightarrow \hat{S} .$$

<u>2.4.1) Behauptung:</u> Π <u>ist eine Einbettung von</u> S <u>in den kompakten Raum</u> $\hat{S}$, <u>deren Bild dicht in</u> S <u>liegt .</u>

<u>Beweis:</u> Π ist injektiv: Seien $(x_1,m_1) \neq (x_2,m_2)$ aus S . Setze $M = \{m_1,m_2\}$ falls $m_1 \neq m_2$ gilt, sonst $M = \{m_1\}$. Betrachte (M,m_1) aus $F(J)$. Dann folgt :

$$\Pi_M^{m_1}(x_1,m_1) = (x_1,m_1) \neq (x_2,m_2) = \Pi_M^{m_1}(x_2,m_2) ,$$

d.h., die Projektion $\Pi_M^{m_1}$ trennt die Punkte (x_1,m_1) und (x_2,m_2) . Nach der Definition bzw. Konstruktion des projektiven

Limes trennt Π dann auch diese Punkte. Folglich ist Π injektiv.

Es werde nun gezeigt, daß Π ein Homöomorphismus von S in $\hat{S}$ ist. Hierzu genügt es, ein System F von stetigen Funktionen auf $\hat{S}$ derart anzugeben, daß die Familie $\{ f\circ\Pi \mid f \in F \}$ die Topologie von S erzeugt. Seien hierfür $\hat{\Pi}_M^{m_o} : \hat{S} \longrightarrow S_M^{m_o}$ $((M, m_o) \in F(J))$ die zum projektiven System und zu dessen Limes gehörenden Projektionen. Dann folgt für $(M,m_o) \in F(J)$: $\Pi_M^{m_o} = \hat{\Pi}_M^{m_o} \circ \Pi$.

Die Abbildungen $\Pi_M^{m_o}$ induzieren aber die Topologie von S . Da für (M,m_o) aus $F(J)$ stets $\Pi_M^{m_o}(S) = S_M^{m_o} = \hat{\Pi}_M^{m_o}(S)$ gilt, folgt nach Definition des projektiven Limes, daß $\Pi(S)$ dicht in $\hat{S}$ ist. Im Folgenden werden $\Pi(S)$ und S stets miteinander identifiziert.

Der Raum $\hat{S}$ läßt sich nun auch durch einen Raum beschreiben, der Sterngestalt besitzt:

Sei ω der zu J adjungierte Index. Der zu definierende Raum S' habe die Gestalt $S' = S(J \cup \{\omega\})$, i.e. der Sternraum S mit dem adjungierten Strahl I_ω .

Die Funktionen p_m $(m \in J)$ und p_ω werden wie folgt in natürlicher Weise auf S' fortgesetzt:

$$(m \in J) \qquad p_m(x,m') = \begin{cases} x & m = m' \\ 0 & m \neq m' \end{cases} \qquad (m' \in J_\omega)$$

$$p_m(0) = 0$$

$$p_\omega(x,m') = x$$

$$p_\omega(0) = 0 \quad .$$

Diese Funktionen trennen die Punkte von S' . Demnach induzieren sie eine vollständig reguläre Topologie auf S' . Da ferner ihre Einschränkungen auf S - wie man leicht nachrechnet - die Topologie von S induzieren, folgt, daß S - versehen mit der Sternraumtopologie - ein Unterraum von S' ist. Die soeben definierte Funktionenfamilie besitzt ferner die Eigenschaft, auf jedem Strahl von S' die vom Einheitsintervall I kommende Topologie zu induzieren.

2.4.2) Behauptung: S' ist kompakt. S ist dichter Unterraum von S' .

Beweis: Sei $((x_\alpha, m_\alpha))$ eine Moore-Smith-Folge in S' .

(i) Es gebe eine Teilfolge (m_β) von (m_α) , die konstant m ist. Dann liegen die $(x_\beta, m_\beta) = (x_\beta, m)$ auf dem kompakten Strahl I_m und haben dort einen Häufungspunkt (x_o, m) . Die Folge $((x_\alpha, m_\alpha))$ besitzt demnach auch den Häufungspunkt (x_o, m) .

(ii) Die Folge $((x_\alpha, m_\alpha))$ besitze eine Teilfolge $((x_\beta, m_\beta))$ derart, daß $x_\beta \longrightarrow 0$ gilt. Da, wie man sofort erkennt, eine Nullumgebungsbasis in S' durch alle Mengen der Form $\{(x, m') \mid m' \varepsilon J_\omega, x < \delta\}$, $\delta > 0$ beschrieben wird, folgt, daß $((x_\beta, m_\beta))$ gegen 0 konvergiert und somit $((x_\alpha, m_\alpha))$ den Punkt 0 als Häufungspunkt besitzt.

(iii) Die Folge $((x_\alpha, m_\alpha))$ besitze keine Teilfolge $((x_\beta, m_\beta))$, für die (m_β) eine konstante Folge ist, bzw., die gegen 0 konvergiert. Die Folge (x_α) besitzt in $[0,1]$ einen Häufungspunkt x_o . Man betrachte nun den Punkt (x_o, ω) . Für m aus J ist $(p_m(x_\alpha, m_\alpha))$ aufgrund der Voraussetzungen eine Folge, die $0 = p_m(x_o, \omega)$ als Häufungspunkt besitzt. Andererseits besitzt die Folge $(p_\omega(x_\alpha, m_\alpha)) = (x_\alpha)$ die Zahl $x_o = p_\omega(x_o, \omega)$

als Häufungspunkt. Aufgrund der Voraussetzungen über $((x_\alpha, m_\alpha))$ folgt hieraus aber, daß (x_o, ω) Häufungspunkt von $((x_\alpha, m_\alpha))$ sein muß. Aus (i) - (iii) folgt, daß S' kompakt ist.
Die Dichtheit von S in S' folgt einerseits aus der Einbettung von S in S' und andererseits daraus, daß jeder Punkt (x, ω) aus I_ω Häufungspunkt der Teilmenge $\{(x,m) \mid m \text{ aus } J \text{ beliebig}\}$ von S ist.

<u>2.4.3) Behauptung: Die Räume</u> $\hat{S}$ <u>und</u> S' <u>sind homöomorph .</u>

<u>Beweis:</u> Definiere eine Abbildung $\Psi : S' \longrightarrow \hat{S}$ aufgrund der universellen Eigenschaften von $\hat{S}$ mit Hilfe eines Systems von stetigen Abbildungen $\Psi_M^{m_o} : S' \longrightarrow S_M^{m_o}$ ($(M, m_o) \varepsilon F(J)$), das mit dem projektiven System kompatibel ist:
Für (M, m_o) aus $F(J)$ sei

$$((x,m') \varepsilon S') \qquad \Psi_M^{m_o}(x, m') := \begin{cases} (x, m') & m' \varepsilon M \\ (x, m_o) & m' \notin M \end{cases}$$

$$\Psi_M^{m_o}(0) := 0 \quad .$$

Die Verträglichkeit der Abbildungen mit dem projektiven System ist leicht zu verfizieren. Die Abbildungen sind stetig, denn die Topologie von $S_M^{m_o}$ wird von den Funktionen p_m ($m \varepsilon M$) induziert, und es gilt :

$$p_m \circ \Psi_M^{m_o} = \begin{cases} p_m & m \neq m_o \\ p_\omega & m = m_o \end{cases} \quad .$$

Mithin ist eine stetige Abbildung $\Psi : S' \longrightarrow \hat{S}$ durch dieses System von Abbildungen definiert. Beachtet man ferner, daß $\Psi_M^{m_o}|_S = \Pi_M^{m_o}$ gilt, so folgt $\Psi|_S = \Pi$. Da S sowohl dicht in S' wie in $\hat{S}$ ist und da Π eine Einbettung ist, folgt notwendigerweise wegen der Kompaktheit der Räume $\hat{S}$ und S', daß Ψ surjektiv sein muß. Betrachtet man wiederum das Abbildungssystem $\{\Psi_M^{m_o} \mid (M,m_o) \varepsilon F(J)\}$, so verifiziert man ohne Schwierigkeiten, daß es die Punkte von S' trennt und Ψ folglich injektiv sein muß. Da S' und $\hat{S}$ kompakt sowie Ψ stetig und bijektiv sind, folgt die Homöomorphie der beiden Räume.

Nach dem soeben Bewiesenen ist S' ein Quotient der Stone-Čech-Kompaktifizierung βS von S. Das Funktionensystem $\{p_m \mid m \varepsilon J\} \cup \{p_\omega\}$ ist ein minimales System, das S' beschreibt.

Die Funktion p_ω beschreibt im Wesentlichen die Symmetrie des Sternraumes S. Die Kompaktifizierung S' besitzt nun die folgende charakteristische Eigenschaft:

2.4.4) <u>Behauptung: Für jede Kompaktifizierung</u> κS <u>von</u> S, <u>für die es eine stetige Abbildung</u> $\kappa p_\omega : \kappa S \longrightarrow I$ <u>derart gibt, daß</u>

$$\begin{tikzcd} \kappa S \arrow[rr, "\kappa p_\omega"] & & I \\ & S \arrow[ul] \arrow[ur, "p_\omega"'] & \end{tikzcd}$$

<u>kommutiert, folgt:</u> S' <u>ist ein Quotient von</u> κS.

<u>Beweis:</u> Es gilt $\bigcup_{x \varepsilon I} \kappa p_\omega^{-1}(x) = \kappa S$. Man definiere nun

$$\alpha : \kappa S \longrightarrow S'$$

durch

$$\alpha(\xi) := \begin{cases} \xi & \mid \xi \varepsilon S \\ (x,\omega) & \mid \xi \varepsilon \kappa p_\omega^{-1}(x) \setminus S \end{cases} .$$

Es ist nun zu zeigen, daß die Abbildung α stetig ist. Jede Funktion p_m $(m \varepsilon J)$ läßt sich stetig auf κS fortsetzen, indem man $\kappa p_m|_S = p_m$ und $\kappa p_m|_{\kappa S \setminus S} = 0$ definiert. Die Abbildung α ist genau dann stetig, wenn die Abbildungen $p_m \circ \alpha$ und $p_\omega \circ \alpha$ ($m \varepsilon J$) stetig sind. Aus $p_m \circ \alpha = \kappa p_m$ und $p_\omega \circ \alpha = \kappa p_\omega$ folgt die Stetigkeit von α. Da α nach Definition den dichten Unterraum S von κS homöomorph auf den dichten Unterraum S von S' abbildet, folgt, daß α surjektiv und folglich S' ein Quotient von κS ist.

2.5) Es können nun die Punkte eines Sternraumes $S = S(J)$ gekennzeichnet werden als die reellen Algebrenhomorphismen h auf der Algebra P, für die für m aus J stets die Relation $0 \leqslant h(p_m) \leqslant 1$ erfüllt ist. Wenn für alle Indizes m aus J gilt : $h(p_m) = 0$, so wähle man 0 als den repräsentierenden Punkt. Da die Familie $\{p_m | m \varepsilon J\} \cup \{p_\omega\}$ zusammen mit der Eins die Algebra P erzeugt, und aus $p_m p_\omega - p_m^2 = 0$ auch $h(p_\omega) = 0$ folgt, impliziert dies, daß für g aus P stets $h(g)$ der konstante Term von g sein muß (nach (2.3) (ii)), so daß h durch die Evaluation im Punkte 0 dargestellt wird. Ist andererseits für ein m_o aus J die Relation $h(p_{m_o}) > 0$ erfüllt, so folgt aus (2.3)(iii) , daß für m aus J mit $m \neq m_o$ gelten muß: $h(p_m) = 0$. Aus (2.3)(iv) folgt $h(p_\omega) = h(p_{m_o})$. Man betrachte den Punkt $(h(p_{m_o}), m_o)$. Es ist leicht nachzurechnen, daß die Evaluation in diesem Punkt den Homomorphismus darstellt. Da P überdies die Topologie auf S induziert, läßt sich S beschreiben als die Menge $H_S(P)$ aller Homomorphismen h auf P , die auf $\{p_m | m \varepsilon J\} \cup \{p_\omega\}$ Werte zwischen 0 und 1

annehmen, wobei $H_s(P)$ mit der von P induzierten (schwachen) Topologie versehen ist.

Es soll nun eine zu P isomorphe, abstrakte R-Algebra konstruiert werden, die ein wesentliches Hilfsmittel zur Beschreibung metrisierbarer Räume sein wird.

(I) Sei J endlich. Man betrachte die freie Algebra $R[X_m \mid m \in J]$ und definiere einen Algebrenhomorphismus

$$T : R[X_m \mid m \in J] \longrightarrow P$$

durch Vorgabe der Bildwerte von T auf dem Erzeugendensystem der freien Algebra: $T(1) = 1$ und $T(X_m) = p_m$ ($m \in J$) .

Jedes Polynom g aus $R[X_m \mid m \in J]$ ist in der Form

$$g = \sum_{n_1,\dots,n_l}^{0,\dots,k} \cdots \sum a_{n_1\dots n_l} X_{m_1}^{n_1} X_{m_2}^{n_2} \dots X_{m_l}^{n_l}$$

darstellbar, wobei $J = \{m_1,\dots,m_l\}$. Dann ist

$$Tg = \sum_{n_1,\dots,n_l}^{0,\dots,k} \cdots \sum a_{n_1\dots n_l} p_{m_1}^{n_1} \dots p_{m_l}^{n_l} .$$

Für ein l-tupel $(n_1,\dots,n_l)$, für das n_i und $n_{i'}$ ($i \neq i'$) mit $n_i, n_{i'} \neq 0$ existieren, tritt im Term

$$a_{n_1\dots n_l} p_{m_1}^{n_1} \dots p_{m_l}^{n_l}$$

der Faktor $p_{m_i} p_{m_{i'}}$ auf , der auf S nach (2.3)(iii) verschwindet. Mithin verschwindet der ganze Term, so daß - nach Weglassen überflüssiger Indizes - Tg von der folgenden Form ist:

$$Tg = a_0 + \sum_{i=1}^{l} \sum_{n=1}^{k} a_{in} p_{m_i}^{n} .$$

Bei Einschränkung von Tg auf den Strahl $I_{m_{i'}}$ ($i' = 1,\dots,l$) erhält man nach Definition der p_m :

$$Tg_{I_{m_{i'}}} = a_o + \sum_{n=1}^{k} a_{i'n} p^n_{m_{i'}} \quad .$$

Dieser Ausdruck verschwindet genau dann, wenn a_o und die $a_{i'n}$ alle verschwinden. Da $Tg = 0$ äquivalent dazu ist, daß die Einschränkung von Tg auf jeden Strahl von S verschwindet, ist für $Tg = 0$ notwendig und hinreichend, daß $a_o = a_{in} = 0$ $(i = 1,\dots,l \; ; \; n = 1,\dots,k)$ gilt. Das bedeutet, daß Tg genau dann verschwindet, wenn jeder Term von g einen Faktor der Form $X_{m_i} X_{m_{i'}}$ $(i \neq i')$ enthält. Folglich ist der Kern von T genau das von den Polynomen $X_{m_i} X_{m_{i'}}$ $(i,i' = 1,\dots,l \; ; \; i \neq i')$ erzeugte Ideal Q . Wie man sofort sieht, ist T surjektiv, so daß aufgrund des Homomorphiesatzes die Algebra P isomorph zu der Faktoralgebra

$$B := R[X_m \mid m \in J] / Q$$

ist. Die kanonische Abbildung $R[X_m | m \in J] \longrightarrow B$ werde mit $\hat{T}$, der durch T induzierte Isomorphismus $B \longrightarrow P$ mit $\tilde{T}$ bezeichnet.

(II) Für den Fall eines unendlichen Indexbereiches J betrachte man die erweiterte Indexmenge $J_\omega = J \cup \{\omega\}$ und darüber die freie Algebra $R[X_{m'} | m' \in J_\omega]$. Nun definiere man wiederum einen Homomorphismus $T: R[X_{m'} | m' \in J_\omega] \longrightarrow P$ durch $T(1) = 1$ und $T(X_{m'}) = p_{m'}$ $(m' \in J_\omega)$. Ein beliebiges Element g aus $R[X_{m'} | m' \in J_\omega]$ ist von der Form:

$$g = \sum_{n_1,\dots,n_{l+1}}^{0,\dots,k} a_{n_1 \dots n_{l+1}} X^{n_1}_{m_1} \dots X^{n_l}_{m_l} X^{n_{l+1}}_{\omega} \quad ,$$

wobei $m_1,\dots,m_l$ endlich viele Indizes aus J sind. Nach Definition von T gilt:

$$Tg = \sum_{n_1,\dots,n_{l+1}}^{0,\dots,k} a_{n_1\dots n_{l+1}} p_{m_1}^{n_1} \dots p_{m_l}^{n_l} p_\omega^{n_{l+1}} .$$

Nach denselben Überlegungen wie in (I) kann man aufgrund von (2.3)(iii) Tg auf die folgende Form reduzieren:

$$Tg = a_o + \sum_{i=1}^{l} \sum_{n=1}^{k} a_{in} p_{m_i}^n + \sum_{i=1}^{l} \sum_{n_1,n_2}^{1\dots k} b_{in_1n_2} p_{m_i}^{n_1} p_\omega^{n_2} + \sum_{n=1}^{k} c_n p_\omega^n .$$

Bezeichnet man mit Q das Ideal in $R[X_{m'} | m' \varepsilon J_\omega]$, das von den Polynomen der Form $X_{m'} X_{m''}$ ($m', m'' \varepsilon J_\omega$, $m' \neq m''$) erzeugt wird, so folgt, daß jedes g aus $R[X_{m'} | m' \varepsilon J_\omega]$ folgende Gestalt besitzt:

$$g = a_o + \sum_{i=1}^{l} \sum_{n=1}^{k} a_{in} X_{m_i}^n + \sum_{i=1}^{l} \sum_{n_1,n_2}^{1\dots k} b_{in_1n_2} X_{m_i}^{n_1} X_\omega^{n_2} + \sum_{n=1}^{k} c_n X_\omega^n + g_Q$$

ist, wobei g_Q aus Q ist. Berücksichtigt man weiter die Relation (2.3)(iv) , so erhält man als eine notwendige Bedingung dafür, daß g aus dem Kern von T ist :

$$0 = Tg = a_o + \sum_{i=1}^{l} \sum_{n=1}^{k} a_{in} p_{m_i}^n + \sum_{i=1}^{l} \sum_{n=2}^{2k} \Big(\sum_{n_1+n_2=n} b_{in_1n_2} \Big) p_{m_i}^n + \sum_{n=1}^{k} c_n p_\omega^n .$$

Wählt man nun m aus J so, daß $m \neq m_i$ ($i = 1,\dots,l$) gilt, was möglich ist, da J unendlich ist, so ist $Tg|_{I_m} = 0$. Hieraus ergibt sich insbesondere $a_o = c_n = 0$ ($n = 1,\dots,k$) . Für g aus Kern(T) kann man also annehmen, daß gilt:

$$0 = Tg = \sum_{i=1}^{l} \sum_{n=1}^{2k} a_{in} p_{m_i}^n + \sum_{i=1}^{l} \sum_{n=2}^{2k} \Big(\sum_{n_1+n_2=n} b_{in_1n_2} \Big) p_{m_i}^n =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} a_{i1} p_{m_i} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{n=2}^{2k} (a_{in} + \sum_{n_1+n_2=n} b_{in_1n_2}) p_{m_i}^{n} ,$$

wobei $a_{in} = 0$ für $n = k+1 , \ldots , 2k$ und $i = 1,\ldots,l$ gesetzt wurde. Für festen Index m_i gilt dann:

$$0 = Tg|_{I_{m_i}} = a_{i1} p_{m_i} + \sum_{n=2}^{2k} (a_{in} + \sum_{n_1+n_2=n} b_{in_1n_2}) p_{m_i}^{n} ,$$

woraus $a_{i1} = a_{in} + \sum_{n_1+n_2=n} b_{in_1n_2} = 0$ für $i = 1,\ldots,l$ und $n = 2,\ldots,2k$ folgt. Ein Polynom g aus $R[X_{m'} | m' \in J_\omega]$ liegt demnach genau dann im Kern von T, wenn es in der Form

$$g = \sum_{i=1}^{l} \sum_{n=2}^{2k} a_{in} X_{m_i}^{n} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{n_1,n_2}^{1,\ldots,k} b_{in_1n_2} X_{m_i}^{n_1} X_\omega^{n_2} + g_Q$$

darstellbar ist und die Relationen

$$a_{in} + \sum_{n_1+n_2=n} b_{in_1n_2} = 0 \qquad (n = 2,\ldots,2k)$$

erfüllt sind. Dann folgt:

$$g = \sum_{i=1}^{l} \{ \sum_{n=2}^{2k} (- \sum_{n_1+n_2=n} b_{in_1n_2} X_{m_i}^{n_1} X_{m_i}^{n_2}) + \sum_{n_1,n_2}^{1,\ldots,k} b_{in_1n_2} X_{m_i}^{n_1} X_\omega^{n_2} \} + $$
$$+ g_Q =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \sum_{n_1,n_2}^{1,\ldots,k} b_{in_1n_2} X_{m_i}^{n_1} (X_\omega^{n_2} - X_{m_i}^{n_2}) + g_Q =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \sum_{n_1,n_2}^{1,\ldots,k} b_{in_1n_2} X_{m_i} (X_\omega - X_{m_i})(X_\omega^{n_2-1} + \ldots + X_{m_i}^{n_2-1}) + g_Q =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} (X_{m_i} X_\omega - X_{m_i}^2) \sum_{n_1,n_2}^{1,\ldots,k} b_{in_1n_2} X_{m_i}^{n_1-1} (X_\omega^{n_2-1} + \ldots + X_{m_i}^{n_2-1}) + g_Q .$$

Hieraus ergibt sich: Notwendig dafür, daß g im Kern von T liegt, ist die Bedingung, daß g in dem von den Polynomen

$X_m X_{m'}$ und $X_m X_\omega - X_m^2$ erzeugten Ideal Q_ω liegt, wo $m, m' \in J$ und $m \neq m'$ gelte. Umgekehrt erkennt man wegen der Beziehungen (2.3) (iii) - (iv) sofort, daß jedes Polynom aus diesem Ideal Q_ω auch ein Element des Kernes von T ist, so daß $\mathrm{Kern}(T) = Q_\omega$ gilt. Da man sofort sieht, daß T auch surjektiv ist, folgt unmittelbar nach dem Homomorphiesatz, daß die Algebren $R[X_{m'} | m' \in J_\omega]/Q_\omega$ und P isomorph sind. Es ergibt sich folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} R[X_{m'} | m' \in J_\omega] \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\hat{T}"'] & & P \\ & R[X_{m'} | m' \in J_\omega]/Q_\omega \arrow[ur, "\tilde{T}"'] & \end{tikzcd}$$

Die Algebra $R[X_{m'} | m' \in J_\omega]/Q_\omega$ werde wiederum mit B bezeichnet. Die kanonische Abbildung von $R[X_{m'} | m' \in J_\omega] \longrightarrow B$ sei wiederum $\hat{T}$. Der konstruierte Isomorphismus $B \longrightarrow P$ sei $\tilde{T}$. Es induziert $\tilde{T}$ eine bijektive Abbildung $\tilde{T}^*$ der Menge der reellen Homomorphismen auf P in die Menge der reellen Homomorphismen auf B vermöge $\tilde{T}^*(h)(g) = h \circ \tilde{T}(g)$, wobei h ein reeller Homomorphismus auf P und g ein Element aus B seien. Man erkennt nun unmittelbar, daß die reellen Homomorphismen auf B, die auf den Klassen $\hat{T}(X_{m'})$, wo m' aus J_ω sei, stets Werte zwischen 0 und 1 annehmen, in bijektiver Beziehung zu den Homomorphismen aus $H(P)$ stehen. Man definiere:

$$H(B) = \tilde{T}^*(H(P)) = \{h \mid h \text{ reeller Homomorphismus, } m \in J \text{ impliziert } 0 \leq h(T(X_m)) \leq 1\} .$$

Nach den vorangegangenen Betrachtungen entsprechen sich $H(B)$ und S bijektiv und zwar so, daß für h aus $H(B)$ und g aus B gilt:

$$h(g) = h(\tilde{T}^{-1} \circ \tilde{T}(g)) = (\tilde{T}^{-1})^{*}(h)(\tilde{T}(g)) \quad .$$

Hieraus folgt: $H_S(B)$ ist - mit der von B induzierten Topologie versehen - homöomorph zu einem Sternraum S .
Dieses Ergebnis werde als Satz formuliert:

2.5.1) Satz: Sei J eine nichtleere Indexmenge. Ein topologischer Raum X ist genau dann homöomorph zu dem zur Indexmenge J gehörenden Sternraum $S(J)$, wenn er homöomorph zu $H_S(B)$ ist , wobei B eine Algebra vom Typ
$B = R[X_m \mid m \in J]/Q$ (J endlich) beziehungsweise
$B = R[X_{m'} \mid m' \in J_\omega]/Q_\omega$ (J unendlich) ist .

Sei S ein Sternraum und B wieder zu S konstruiert. Versieht man nun B mit der von der Evaluation $\omega: B \times H_S(B) \longrightarrow R$ induzierten stetigen Konvergenz und bezeichnet man die so erhaltene Limesalgebra mit B_c , so sind B_c und P_c bistetig isomorph. Da nun $C_c(S)$ Gelfanddarstellung von P_c und somit von B_c ist, kann man aufgrund der universellen Eigenschaften der Gelfanddarstellung als Folgerung zu (2.5.1) formulieren:

2.5.2) Korollar: Ein c-einbettbarer Limesraum X ist genau dann ein Sternraum, wenn seine Algebra stetiger Funktionen $C_c(X)$ Gelfanddarstellung einer Algebra vom Typ B_c ist .

2.6) Bemerkung: Bei dieser Charakterisierung eines Sternraumes wurde der Versuch unternommen, diesen Raum durch eine "minimale" Unteralgebra der Algebra aller stetigen Funktionen zu charakterisieren. Aufgrund der Struktur des Sternraumes liegt dabei die Verwendung von Funktionen nahe, die Polynomcharakter besitzen. Zur Beschreibung der Punkte des Sternraumes allein würden die Funktionen p_m , wo m aus J ist , genügen. Diese Funktionen induzieren aber im Falle eines unendlichen Sternraumes nicht die Topologie des Sternraumes sondern eine gröbere Initialtopologie, mit der der Sternraum S ein kompakter Hausdorffraum wird. Aus diesem Grunde wird im Falle des unendlichen Sternraumes die Funktion p_ω hinzugenommen , die insbesondere auch die Symmetrie des Sternraumes beschreibt, damit man so ein topologieerzeugendes System von Funktionen für die metrische Topologie erhält.

Man kann nun das n-fache Tensorprodukt $\overset{n}{\underset{1}{\otimes}} B$ der Algebra B bilden. Es werde mit B_n bezeichnet. B_n ist in natürlicher Weise eine kommutative R-Algebra mit Einselement, wenn man die Multiplikation wie folgt definiert:

$$(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)(g_1 \otimes \ldots \otimes g_n) = f_1 g_1 \otimes \ldots \otimes f_n g_n \ .$$

Das Einselement ist der Tensor $1 \otimes \ldots \otimes 1$. Für jede natürliche Zahl n erhält man eine Einbettung $j_{n,n+1} : B_n \longrightarrow B_{n+1}$ definiert durch

$$j_{n,n+1}(\sum_i f_1^{(i)} \otimes \ldots \otimes f_n^{(i)}) = \sum_i f_1^{(i)} \otimes \ldots \otimes f_n^{(i)} \otimes 1 \ .$$

Die Algebren B_n mit den Einbettungen $j_{n,n+1}$ bilden ein induktives System, wenn man die Einbettungen $j_{n,n+k}$ durch $j_{n,n+k} = j_{(n+k-1),n+k} \circ \ldots \circ j_{n,n+1}$ definiert . Der induktive Limes dieses Systems werde mit $\bar{B}$ bezeichnet. $\bar{B}$ ist eine kommutative Algebra mit Eins, deren Elemente wir in der Form

$$\sum_{i=1}^{k} f_1^{(i)} \otimes \ldots \otimes f_{n_i}^{(i)} \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes \ldots \qquad (n_i \varepsilon N)$$

darstellen, wobei die einzelnen Summanden formal Tensoren mit abzählbar vielen Faktoren sind, von denen fast alle gleich 1 sind.

Für natürliche Zahlen n und n' mit $n' \leq n$ kann man Einbettungen $j^n_{n'}: B \longrightarrow B_n$, $j_{n'}: B \longrightarrow \bar{B}$ definieren durch

$$j^n_{n'}(g) := \underbrace{1\otimes\ldots\otimes 1}_{(n'-1)\text{-mal}}\otimes g\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1 \qquad j_{n'}(g) := \underbrace{1\otimes\ldots\otimes 1}_{(n'-1)\text{-mal}}\otimes g\otimes 1\ldots$$

Man kann ferner für $n \geq n'$ Projektionen $\pi_{n,n'}: B_n \longrightarrow B$ definieren durch

$$\pi_{n,n'}\left(\sum_{i=1}^{k} f_1^{(i)}\otimes\ldots\otimes f_n^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{k} f_{n'}^{(i)} .$$

Analog definiert man $\pi_{n'}: \bar{B} \longrightarrow B$. Es gelten die folgenden Relationen:

$$\pi_{n,n'}\circ j^n_{n'} = id_B \qquad \pi_{n'}\circ j_{n'} = id_B .$$

Hieraus folgt, daß die $j^n_{n'}$, $j_{n'}$ injektiv und die $\pi_{n,n'}$, $\pi_{n'}$ surjektiv sind. Da 1 und die $\hat{T}(X_m)$, wo $m\in J$ bzw. $m \in J_\omega$, ein minimales Erzeugendensystem der Algebra B bilden, erhält man durch die Tensoren der Form $g_1\otimes\ldots\otimes g_n$ beziehungsweise $\bigotimes_1^\infty g_k$, wobei fast alle g_k gleich 1 und die übrigen von der Form $\hat{T}(X_m)$ sind, ein minimales Erzeugendensystem der Algebra B_n beziehungsweise der Algebra $\bar{B}$. Dieses Erzeugendensystem werde mit $E(B_n)$ beziehungsweise $E(\bar{B})$ bezeichnet. Man definiere nun $H(B_n)$ als die Mengen aller reellwertigen Algebrenhomomorphismen , die auf $E(B_n)$ Werte zwischen 0 und 1 annehmen. Analog definiere man $H(\bar{B})$. Aus den Definitionen der Abbildungen $j^n_{n'}$, $j_{n'}$, $\pi_{n,n'}$, $\pi_{n'}$ erkennt man sofort, daß sie surjektive Abbildungen

$$(j^n_{n'})^*: H(B_n) \longrightarrow H(B) \qquad (j_{n'})^*: H(\bar{B}) \longrightarrow H(B)$$

beziehungsweise injektive Abbildungen

$$(\pi_{n,n'})^*: H(B) \longrightarrow H(B_n) \qquad (\pi_{n'})^*: H(B) \longrightarrow H(\bar{B})$$

induzieren, die den Bedingungen

$$(j^{n}_{n'})^{*}\circ(\pi_{n,n'})^{*} = \mathrm{id}_{H(B)} \quad ; \quad j^{*}_{n'}\circ\pi^{*}_{n'} = \mathrm{id}_{H(B)}$$

genügen. Diese Abbildungen induzieren wiederum Abbildungen

$$\bar{j}^{*}_{n}: H(B_n) \longrightarrow \overset{n}{\underset{1}{\times}} H(B) \quad , \quad \bar{j}^{*}: H(\bar{B}) \longrightarrow \overset{\infty}{\underset{1}{\times}} H(B)$$

$$\bar{\pi}^{*}_{n}: \overset{n}{\underset{1}{\times}} H(B) \longrightarrow H(B_n) \quad , \quad \bar{\pi}^{*}: \overset{\infty}{\underset{1}{\times}} H(B) \longrightarrow H(\bar{B})$$

definiert durch

$$\bar{j}^{*}_{n}(h) := ((j^{n}_{1})^{*}(h),\ldots,(j^{n}_{n})^{*}(h)) \quad , \quad \bar{j}^{*}(h) := (j^{*}_{n'}(h))$$

$$\bar{\pi}^{*}_{n}(h_1,\ldots,h_n)\Big(\sum_i f^{(i)}_1\otimes\ldots\otimes f^{(i)}_n\Big) := \sum_i h_1(f^{(i)}_1)\ldots h_n(f^{(i)}_n)$$

$$\bar{\pi}^{*}(h_n)\Big(\sum_i \overset{\infty}{\underset{1}{\otimes}} f^{(i)}_n\Big) := \sum_i \prod_{n=1}^{\infty} h_n(f^{(i)}_n) \quad \text{respektive .}$$

Man beachte hierbei, daß $\bar{\pi}^{*}$ wohldefiniert ist, da in dem Ausdruck $\overset{\infty}{\underset{1}{\otimes}} f^{(i)}_n$ fast alle $f^{(i)}_n$ gleich 1 und somit in dem Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} h_n(f^{(i)}_n)$ fast alle Faktoren gleich 1 sind. Folgende Beziehungen lassen sich leicht verifiziern:

$$\bar{\pi}^{*}_{n}\circ\bar{j}^{*}_{n} = \mathrm{id}_{H(B_n)} \quad , \quad \bar{j}^{*}_{n}\circ\bar{\pi}^{*}_{n} = \mathrm{id}_{\overset{n}{\underset{1}{\times}} H(B)}$$

$$\bar{\pi}^{*}\circ\bar{j}^{*} = \mathrm{id}_{H(\bar{B})} \quad , \quad \bar{j}^{*}\circ\bar{\pi}^{*} = \mathrm{id}_{\overset{\infty}{\underset{1}{\times}} H(B)} \quad .$$

Das bedeutet: Die Mengen $H(B_n)$ und $\overset{n}{\underset{1}{\times}} H(B)$ beziehungsweise $H(\bar{B})$ und $\overset{\infty}{\underset{1}{\times}} H(B)$ sind in der Kategorie der Mengen isomorph. Man erkennt nun ferner, daß die Erzeugendensysteme $E(B_n)$ vermöge $\bar{\pi}^{*}_{n}$ auf $\overset{n}{\underset{1}{\times}} H(B)$ beziehungsweise $E(\bar{B})$ vermöge $\bar{\pi}^{*}$ auf $\overset{\infty}{\underset{1}{\times}} H(B)$ die Produkttopologie induzieren. Folglich erhält man:

<u>2.7.1) Satz: Ein topologischer Raum</u> X <u>ist genau dann homöomorph zu einem endlichen (abzählbaren) Produkt eines Sternraumes, wenn er homöomorph zu einem Raum vom Typ</u> $H_s(B_n)$

(bzw. $H_s(\bar{B})$) ist.

Sei nun S der zur Algebra B gehörige Sternraum. Für jede natürliche Zahl n bilde man S^n und definiere $\pi_k^n : S^n \longrightarrow S$ als die k-te Projektion, wo $1 \leq k \leq n$ gelte. Analog definiere man die k-te Projektion $\pi_k : S^N \longrightarrow S$. Dann läßt sich die zu B_n isomorphe Algebra $\bigotimes_1^n P$ in der Form

$$P_n := \bigotimes_1^n P = \{ \sum_i (f_1^{(i)} \circ \pi_1^n) \ldots (f_n^{(i)} \circ \pi_n^n) \mid f_k^{(i)} \varepsilon P \}$$

darstellen. Analog ist die zu $\bar{B}$ isomorphe Algebra $\bar{P} := \operatorname{ind}_{n \in N} P_n$ darstellbar in der Form

$$\bar{P} = \{ \sum_i (f_1^{(i)} \circ \pi_1) \ldots (f_{n'}^{(i)} \circ \pi_{n'}) \mid f_k^{(i)} \varepsilon P , n' \varepsilon N \} .$$

Diese Algebren sind topologieinduzierende Algebren stetiger, beschränkter Funktionen auf S^n beziehungsweise S^N . Versieht man B_n beziehungsweise $\bar{B}$ mit der stetigen Konvergenz, die von den Evaluationen $\omega_n : B_n \times H_s(B_n) \longrightarrow R$ beziehungsweise $\bar{\omega} : \bar{B} \times H_s(\bar{B}) \longrightarrow R$ induziert wird, so sind wegen der Homöomorphie von S^n und $H_s(B_n)$ beziehungsweise S^N und $H_s(\bar{B})$ sowie der Isomorphie der Algebren B_n und P_n beziehungsweise $\bar{P}$ und $\bar{B}$ die Algebren $(B_n)_c$ und $(P_n)_c$ beziehungsweise $\bar{B}_c$ und $\bar{P}_c$ bistetig isomorph. Man erhält mit (1.1) - (1.3) somit das Analogon zu Korollar (2.5.2) :

<u>2.7.2) Korollar: Ein c-einbettbarer Limesraum</u> X <u>ist genau dann homöomorph zum endlichen (abzählbaren) Produkt eines Sternraumes, wenn</u> $C_c(X)$ <u>Gelfanddarstellung einer Algebra vom Typ</u> $(B_n)_c$ (<u>bzw.</u> $\bar{B}_c$) <u>ist.</u>

3. Charakterisierung metrisierbarer Räume.

Im Folgenden sollen nun metrisierbare Räume charakterisiert werden. Hierzu wird der in der Einleitung zitierte Satz über metrisierbare Räume und Sternräume verwendet. Demnach ist ein topologischer Raum X genau dann metrisierbar, wenn es eine Algebra von dem in (2) eingeführten Typ B gibt, so daß X homöomorph zu einem Unterraum von $H_s(\bar{B})$ ist.

Sei $H: X \longrightarrow H_s(\bar{\bar{B}})$ die Einbettung für einen metrisierbaren Raum X. Sie induziert einen stetigen Algebrenhomomorphismus

$$H^*: C_c(H_s(\bar{B})) \longrightarrow C_c(X) \quad .$$

Andererseits sei $d_1: \bar{B}_c \longrightarrow C_c(H_s(\bar{B}))$ die Gelfanddarstellung, die nach den Ergebnissen von (2) (bistetige Isomorphie von $\bar{B}_c$ und $\bar{P}_c$) eine homöomorphe Einbettung ist.

Durch $H^* \circ d_1$ wird die Algebra $\bar{B}$ auf eine topologieinduzierende Unteralgebra A beschränkter Funktionen in $C_c(X)$ abgebildet. A ist nach dem schon zitierten Ergebnis von W. Feldman eine dichte Unteralgebra von $C_c(X)$. Nach (1.3) besitzt A_c die Algebra $C_c(X)$ als Gelfanddarstellung.

Sei nun umgekehrt $G: \bar{B}_c \longrightarrow C_c(X)$ (X topologisch) ein stetiger Algebrenhomomorphismus. Dann existiert wegen der universellen Eigenschaft der Gelfanddarstellung ein stetiger Algebrenhomomorphismus $(G')^*: C_c(H_s(\bar{B})) \longrightarrow C_c(X)$ derart, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \bar{B}_c \arrow[r, "d_1"] \arrow[dr, "G"'] & C_c(H_s(\bar{B})) \arrow[d, "(G')^*"] \\ & C_c(X) \end{tikzcd}$$

Es werde nun angenommen, daß A die Topologie von X induziere, so daß nach (1.3) $C_c(X)$ die Gelfanddarstellung von A_c ist. Da die Gelfandabbildung $d_2: A_c \longrightarrow C_c(X)$ mit der Einbettung identisch ist, erhält man das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \bar{B}_c \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "G"'] & C_c(H_s(\bar{B})) \arrow[d, "(G')^*"] \\ A_c \arrow[r] & C_c(X) \end{tikzcd}$$

Die Anwendung des Funktors Hom_c ergibt das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} H_s(\bar{B}) \arrow[r, "id"] & H_s(\bar{B}) \\ X = \mathrm{Hom}_c A_c \arrow[u, "G'"] \arrow[r, "id"] & X \arrow[u, "G'"'] \end{tikzcd}$$

Nun ist A_c eine Unteralgebra beschränkter Funktionen von $C_c(X)$, die zudem die Topologie von X erzeugt, also nach dem Ergebnis von W. Feldman eine dichte Unteralgebra von $C_c(X)$. Da A das Bild von $\bar{B}$ unter G ist, muß aufgrund der Kommutativität des ersten Diagramms $(G')^*(C_c(H_s(\bar{B})))$ die Algebra A umfassen und folglich auch dicht in $C_c(X)$ sein. Hieraus folgt, daß $(G')^*$ ein Epimorphismus ist. Das wiederum impliziert, daß G' ein Monomorphismus ist. Da andererseits die Algebra A die Topologie von X induziert, folgt, daß G' ein Homöomorphismus in $H_s(\bar{B})$ ist. Das ergibt den folgenden Satz:

3.1) Satz: Ein topologischer Raum X ist genau dann metrisierbar, wenn es eine Algebra vom Typ $\bar{B}_c$ und einen stetigen Algebrenhomomorphismus $G:\bar{B}_c \longrightarrow C_c(X)$ derart gibt, daß die Algebra $G(\bar{B})$ die Topologie von X erzeugt.

Bemerkung: Wenn X metrisch ist, so ist $G(\bar{B}) \subset C_c(X)$ dicht.

3.2) Bemerkung: Es werde an die in (2.4) gegebene Definition des kompakten Hausdorffraumes S' erinnert. Da der Sternraum S ein dichter Unterraum von S' ist, ist auch S^N ein dichter Unterraum des kompakten Raumes $(S')^N$. Zu jedem metrisierbaren Raum X gibt es einen Sternraum S derart, daß X homöomorph zu einem Unterraum von S^N ist. Folglich ist X auch homöomorph zu einem Unterraum von $(S')^N$. Die Einbettung $X \longrightarrow (S')^N$ gestattet nun eine Kompaktifizierung αX von X, indem man die abgeschlossene Hülle des Bildes von X in $(S')^N$ bildet. Diese Kompaktifizierung verläuft analog der Kompaktifizierung eines separablen, metrisierbaren Raumes, wenn man ihn nach dem Urysohnschen Metrisationstheorem in I^N einbettet und dort abschließt.

Die separablen, metrisierbaren Räume können wie folgt charakterisiert werden:

3.3) Satz: Für einen topologischen Raum X sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) X ist ein separabler, metrisierbarer Raum.

(2) Es existieren eine Algebra vom Typ $\bar{B}_c$ und ein stetiger Algebrenhomomorphismus $G:\bar{B}_c \longrightarrow C_c(X)$, so daß das Erzeugendensystem $E(\bar{B})$ abzählbar ist und $G(\bar{B})$ die Topologie von X induziert.

(3) Es existieren eine Algebra $(\bar{B}_1)_c$ und ein stetiger Algebrenhomomorphismus $G:(\bar{B}_1)_c \longrightarrow C_c(X)$ derart, daß die

Algebra B_1 von der Eins und nur einem weiteren Element χ_1 erzeugt wird und $G(\bar{B}_1)$ die Topologie von X induziert.

(4) Es existieren eine Algebra vom Typ $\bar{B}_c$, so daß die stetige Konvergenz auf $\bar{B}_c$ normierbar ist, und ein stetiger Algebrenhomomorphismus $G:\bar{B}_c \longrightarrow C_c(X)$ derart, daß $G(\bar{B})$ die Topologie von X induziert.

Beweis: (1)$\Rightarrow$(2) : Zu X existiert ein Sterraum $S = S(J)$ derart, daß X als ein Unterraum von S^N aufgefaßt werden kann. Da X separabel ist, existiert eine dichte, abzählbare Teilmenge $\{ x_n | n \varepsilon N\}$ in X. Für jede natürliche Zahl k sei $\pi_k : S^N \longrightarrow S$ die k-te Projektion. Definiere nun die Indexteilmenge J^0 von J wie folgt:

$J^0 := \{ m | m \varepsilon J$, es existieren $k,n \varepsilon N$, so daß $\pi_k(x_n) \varepsilon I_m\}$.

Es ist sofort ersichtlich, daß J^0 eine abzählbare Teilmenge von J ist. Sei S^0 der von J^0 definierte Sternteilraum von S . S^0 ist ein abgeschlossener Unterraum von S . Hieraus folgt, daß $(S^0)^N$ ein abgeschlossener Unterraum von S^N ist. Man erkennt ferner aus der Definition von J^0, daß $(S^0)^N$ die Menge $\{x_n | n \varepsilon N\}$ und folglich auch deren Abschluß in S^N enthält. Wegen $X \subset \{ x_n | n \varepsilon N \}^-$ folgt dann aber, daß X in $(S^0)^N$ liegt . Die zu dem Sternraum S^0 gehörige Polynomalgebra P besitzt dann aber nach ihrer Definition ein abzählbares Erzeugendensystem. Demnach ist das Erzeugendensystem $E(B)$ der zu P isomorphen Algebra B ebenfalls abzählbar. Nach Konstruktion der Algebra $\bar{B}$ folgt, daß dann auch $E(\bar{B})$ abzählbar sein muß. Es gilt dann $H_s(\bar{B}) \cong (S^0)^N$. Sei $d:\bar{B}_c \longrightarrow C_c((S^0)^N)$ die Gelfanddarstellung und $(G')^{*}: C_c((S)^N) \longrightarrow C_c(X)$ die Restriktionsabbildung. Dann ist $G: = (G')^{*} \circ d: \bar{B}_c \longrightarrow C_c(X)$ ein stetiger Algebrenhomomorphismus und $G(\bar{B})$ induziert die Topologie von X.

(2)=>(3) : Da die Algebra $G(\bar{B})$ die Topologie von X induziert, induziert auch schon das höchstens abzählbare Erzeugendensystem $G(E(\bar{B}))$ die Topologie von X. Sei $G(E(\bar{B})) = \{f_n \mid n \in N\}$. Man betrachte das Gelfanddiagramm

$$\begin{tikzcd} \bar{B}_c \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "G"'] & C_c(H_s(\bar{B})) \arrow[d, "(G')^{*}"] \\ & C_c(X) \end{tikzcd} .$$

Nach Definition des Erzeugendensystems $E(\bar{B})$ gilt für g aus $E(\bar{B})$ und für h aus $H_s(\bar{B})$ stets $d(g)(h) = h(g) \in I$. Hieraus folgt für x aus X: $G(g)(x) = (G')^{*}(d(g))(x) = = d(g)(G'(x)) \in I$. Das bedeutet, daß alle Funktionen f_n aus $G(E(\bar{B}))$ ihre Werte in I annehmen. Man definiere nun eine Abbildung $T: X \longrightarrow I^N$ durch $T(x) := (f_n(x))$, wo x aus X sei. Trivialerweise ist T stetig. Da andererseits die Familie $\{f_n \mid n \in N\}$ die Topologie von X induziert, ist T eine Einbettung von X in I^N. Also kann X als ein Unterraum von I^N aufgefaßt werden. Sei nun B_1 die zum Sternraum I gehörende Algebra. Sie wird von der Eins und dem Element X_1 erzeugt. Die Algebra $(\bar{B}_1)_c$ beschreibt dann I^N. Konstruiert man nun den stetigen Algebrenhomomorphismus $G: (\bar{B}_1)_c \longrightarrow C_c(X)$ wie im Schluß (1)=>(2), so wird von $G(\bar{B})$ die Topologie von X erzeugt.

(3)=>(4): Man betrachte nun die Algebra $(\bar{B}_1)_c$. Es ist $H_s(\bar{B}_1) = I^N$ ein kompakter Hausdorffraum. Folglich ist die von $H_s(\bar{B}_1)$ auf $\bar{B}_1$ induzierte stetige Konvergenz die gleichmäßige Konvergenz auf $H_s(\bar{B}_1)$. Also ist $(\bar{B}_1)_c$ normierbar. Die Aussagen in (4) sind somit erfüllt.

(4)=>(1): Sei $\bar{B}_c$ normierbar. Die Vervollständigung A von $\bar{B}_c$ bezüglich der Norm ist dann eine Banachalgebra. Da $\bar{B}_c$ dicht in A ist, gilt $\mathrm{Hom}\, A = \mathrm{Hom}\, \bar{B}_c$. Da A eine Banachalgebra ist, ist $\mathrm{Hom}_s A$ ein kompakter Hausdorffraum. Die Einbettung $\bar{B}_c \longrightarrow A$ definiert eine stetige, bijektive Abbildung $\mathrm{Hom}_s A = \mathrm{Hom}_c A \longrightarrow \mathrm{Hom}_c \bar{B}_c$. Nach (1.3) und dem im Beweis von (1.3) auftretenden Diagramm ist $\mathrm{Hom}_c \bar{B}_c = \mathrm{Hom}_s \bar{B}_c = H_s(\bar{B})$. Also ist $H_s(\bar{B})$ ein kompakter Hausdorffraum. Da die Algebra $\bar{B}_c$ das abzählbare Produkt S^N eines Sternraumes S durch $H_s(\bar{B}) \cong S^N$ beschreibt, folgt, daß S^N kompakt sein muß . Dies wiederum impliziert, daß auch der Sternraum S kompakt sein muß. Nach den Betrachtungen in Abschnitt 2 über Sternräume folgt, daß S nur endlich viele Strahlen besitzt, woraus folgt, daß die Algebra B , die S beschreibt, ein endliches Erzeugendensystem $E(B)$ besitzt. Nach Konstruktion von $\bar{B}$ ist dann aber $E(\bar{B})$ abzählbar. Nach Voraussetzung induziert $G(\bar{B})$ und folglich auch $G(E(\bar{B}))$ die Topologie von X . Sei wiederum $G(E(\bar{B})) = \{f_n \mid n \in N\}$. Definiere wiederum $T: X \longrightarrow R^N$ durch $T(x) := (f_n(x))$, wo x aus X sei . Die Abbildung T ist stetig. Da die Familie $G(E(\bar{B}))$ aber auch die Topologie von X induziert, ist T ein Homöomorphismus von X

in R^N. Da jeder Unterraum von R^N separabel und metrisierbar ist, folgt, daß X separabel und metrisierbar ist.

Bemerkungen: (a) Bei genauerer Betrachtung der hier durchgeführten Schlußweisen erkennt man sofort, daß gleichzeitig aus dem hier verwendeten allgemeinen Metrisationssatz das Urysohnsche Metrisationstheorem hergeleitet wurde.

(b) Die zweite Aussage von (3.3) besagt insbesondere, daß für einen separablen, metrischen Raum X die Algebra $C_c(X)$ separabel ist. Dieses Ergebnis wurde in anderem Zusammenahng mit Untersuchungen über das zweite Abzählbarkeitsaxiom für $C_c(X)$ von W. Feldman gefunden.

Literaturverzeichnis

[1] E.Binz: "Kompakte Limesräume und limitierte Funktionenalgebren." Comm. Math. Helv. 43 (2), pp. 195 - 203, 1968.

[2] E.Binz: "Bemerkungen zu limitierten Funktionenalgebren." Math. Ann. 175, pp. 169 - 184, 1968.

[3] E.Binz: "Zu den Beziehungen zwischen c-einbettbaren Limesräumen und ihren Funktionenalgebren." Math. Ann. 181, pp. 45 - 52, 1969.

[4] N.Bourbaki: "General Topology", Addison Wesley.

[5] W.Feldman: Dissertation.

[6] H.J. Kowalsky: "Topologie", Birkhäuser-Verlag.

[7] F.T.M. Schroder: Dissertation.