ÜBER DAS SYRACUSE - PROBLEM

von

Günter Meinardus

67

August 1987

Nr. 67

Einleitung: Das sog. 3n+1-Problem, auch Collatz-Problem oder Syracuse-Problem genannt, hat in der letzten Zeit an Aktualität gewonnen. Eine Reihe von Übersichtsartikeln macht dies deutlich.

Die vorliegende Note stellt die Zusammenfassung einiger Ideen dar, die im Zuge des Nachdenkens über dieses Problem entstanden sind. Die wesentliche Vermutung wird zwar nicht bewiesen, jedoch werden Beziehungen zu einer Behandlung des Problems mit analytischen Methoden aufgedeckt. Natürlich liegen weitere Versuche vor, z.B. mit L-Reihen oder mit Summationsmethoden dem Problem näherzukommen. Auch sind bereits viele Verallgemeinerungen bruchstückhaft untersucht worden.

Vielleicht können die hier ein wenig ungeordnet aufgeschriebenen Gedanken zu weiterer Beschäftigung mit dieser Fragestellung anregen.

§ 1. Problemstellung. Vermutungen.

Die Abbildung

$$\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

sei für $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$\tau(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{für gerades } n, \\ 3n+1 & \text{für ungerades } n\,. \end{cases} \tag{1}$$

Offenbar gilt auch die Darstellung

$$\tau(n) = \frac{1}{4}\left\{(7n+2)-(-1)^n(5n+2)\right\}. \tag{2}$$

Wir interessieren uns für die Iterierten:

$$\begin{aligned} \tau_1(n) &= \tau(n), \\ \tau_m(n) &= \tau(\tau_{m-1}(n)) \quad \text{für } m \geqq 2\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Gibt es zu einer natürlichen Zahl n_o eine natürliche Zahl m_o, so daß

$$\tau_{m_o}(n_o) = n_o$$

ist, und ist m_o die kleinste natürliche Zahl dieser Art, so sagen wir, daß die Zahlen

$$n_o, \tau_1(n_o)\;, \ldots, \;\tau_{m_o-1}(n_o)$$

einen Zyklus der Länge m_o bilden. Zwei Zyklen, die durch zyklische Permutationen auseinander hervorgehen, werden als gleich betrachtet.

Offenbar bilden die Zahlen 1, 4, 2 bezüglich unserer Abbildung τ einen Zyklus der Länge 3:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, "\tau"] & & 4 \arrow[dl, "\tau"] \\ & 2 \arrow[ul, "\tau"] & \end{tikzcd} .$$

Die folgenden beiden Vermutungen bestehen seit längerer Zeit:

<u>Vermutung 1:</u> *Die Abbildung* τ *besitzt nur den obigen Zyklus.*

<u>Vermutung 2:</u> *Zu jeder natürlichen Zahl* n *gibt es eine (kleinste) natürliche Zahl* m(n) *mit der Eigenschaft*

$$\tau_{m(n)}(n) = 1 . \tag{4}$$

Es ist

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
m(n)	3	1	7	2	5	8	16	3	19	6	14	9	9	17	17	4

und

$$m(27) = 111.$$

Ferner ist

$$m(2^k) = k \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Die Vermutung 2 besagt, daß die Iterierten einer beliebig vorgegebenen Zahl $n \in \mathbb{N}$ stets in den Dreierzyklus (1, 4, 2) einmünden. Diese Vermutung ist mit Hilfe von Computern für alle $n \leqq 3.10^{12}$ bestätigt worden.

Zwei weitere Vermutungen sollen noch formuliert werden:

Vermutung 3: *Es existiert eine positive Konstante* γ, *so daß für die in der Vermutung 2 eingeführte Zahl* $m(n)$ *die Ungleichung*

$$m(n) \leqq \gamma . \log n \quad , \quad n \geqq 2 \tag{5}$$

besteht.

Offenbar nimmt der Quotient

$$\frac{m(n)}{\log n} \quad , \quad n \geqq 2,$$

seinen kleinsten Wert, nämlich $\frac{1}{\log 2}$, für $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, an (und nur für diese n).

<u>Vermutung 4:</u> *Der Quotient*

$$\frac{m(n)}{\log n}\quad ,\quad n \geqq 2,$$

nimmt seinen größten Wert für n = 27 *an, d.h. es gilt für alle* $n \geqq 2$ *die Ungleichung*

$$m(n) \leqq \frac{111}{\log 27} \cdot \log n. \qquad (6)$$

Rechnungen zeigen das Phänomen, daß zwei aufeinanderfolgende Zahlen häufig den gleichen Wert m(n) besitzen.

Beispiele:

$12 \to 6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$, d.h. m(12) = 9,

$13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$, d.h. m(13) = 9,

oder

$14 \to 7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$,
d.h. m(14) = 17,

$15 \to 46 \to 23 \to 70 \to 35 \to 106 \to 53 \to 160 \to 80 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$,
d.h. m(15) = 17.

<u>Vermutung 5:</u> *Es gibt unendlich viele Zahlen* $n \in \mathbb{N}$ *mit der Eigenschaft:*

$$m(n) = m(n+1). \qquad (7)$$

§ 2. Elementare Eigenschaften der Iterierten.

Die Abbildung τ definiert auf jeder der beiden Restklassen modulo 2 ein Polynom vom Grad 1 in der diskreten Variablen n. Für die Iterierten τ_m wird damit eine analoge Eigenschaft auf den Restklassen modulo 2^m induziert.

Satz 1: *Zu jeder Zahl* $m \in \mathbb{N}$ *gibt es eindeutig bestimmte Zahlen* $a_{m,\nu} \in \mathbb{N}$ *und* $b_{m,\nu} \in \mathbb{N}_o$, $\nu \in \mathbb{N}$, *die nur von der Restklasse* $\nu \bmod 2^m$ *abhängen, so daß für alle* $n \in \mathbb{N}$ *die Darstellung*

$$\tau_m(n) = \frac{1}{2^m} \left\{ a_{m,\nu} \cdot n + b_{m,\nu} \right\} \textit{ für } n \equiv \nu \bmod 2^m \tag{8}$$

gilt.

Es ist stets

$$a_{m,o} = 1 \ , \ b_{m,o} = 0 \tag{9}$$

und für $\nu \not\equiv 0 \bmod 2^m$

$$b_{m,\nu} \in \mathbb{N}$$

sowie

$$a_{m,\nu} \not\equiv 0 \bmod 2$$

und

$$b_{m,\nu} \not\equiv 0 \bmod 2.$$

Ferner besteht für $m \in \mathbb{N}$ *die Rekursion:*

$$a_{m+1,\nu} = \begin{cases} a_{m,\frac{\nu}{2}} & \textit{für } \nu \equiv 0 \bmod 2, \\ 6a_{m,3\nu+1} & \textit{für } \nu \equiv 1 \bmod 2, \end{cases} \tag{10}$$

und

$$b_{m+1,\nu} = \begin{cases} 2b_{m,\frac{\nu}{2}} & \textit{für } \nu \equiv 0 \bmod 2, \\ 2a_{m,3\nu+1} + 2b_{m,3\nu+1} & \textit{für } \nu \equiv 1 \bmod 2. \end{cases} \tag{11}$$

Beweis: Wir führen ihn mit Hilfe vollständiger Induktion nach der Iterationsordnung m. Für m = 1 ist nach (1) die Behauptung mit

$$a_{1,o} = 1 \;,\; b_{1,o} = 0,$$

$$a_{1,1} = 6 \;,\; b_{1,1} = 2$$

offenbar richtig. Wir nehmen an, sie sei bereits für die Zahl m bewiesen. Ist

$$n \equiv 0 \bmod 2^{m+1},$$

so ist

$$\tau_{m+1}(n) = \tau(\tau_m(n))$$

$$= \tau\left(\frac{n}{2^m}\right)$$

$$= \frac{n}{2^{m+1}} \quad ,$$

d.h. für $\nu \equiv 0$ und 2^{m+1} ist die Behauptung wahr.

Nun sei allgemein

$$n \equiv \nu \bmod 2^{m+1} .$$

Ist ν gerade, so ist auch n gerade, und es folgt

$$\frac{n}{2} \equiv \frac{\nu}{2} \bmod 2^{m} .$$

Dann ergibt sich

$$\tau_{m+1}(n) = \tau_m(\tau(n)) = \tau_m\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2^m}\left\{a_{m,\frac{\nu}{2}} \cdot \frac{n}{2} + b_{m,\frac{\nu}{2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}}\left\{a_{m,\frac{\nu}{2}} \cdot n + 2b_{m,\frac{\nu}{2}}\right\} .$$

Die Behauptung ist richtig mit

$$a_{m+1,\nu} = a_{m,\frac{\nu}{2}} ,$$

$$b_{m+1,\nu} = 2b_{m,\frac{\nu}{2}} .$$

Ist aber ν ungerade, so ist auch n ungerade, und es folgt

$$3n+1 \equiv 3\nu+1 \bmod 2^{m+1}$$

$$\equiv 3\nu+1 \bmod 2^{m} .$$

In diesem Fall ergibt sich

$$\tau_{m+1}(n) = \tau_m(\tau(n)) = \tau_m(3n+1)$$

$$= \frac{1}{2^m}\left\{a_{m,3\nu+1}(3n+1) + b_{m,3\nu+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}}\left\{6a_{m,3\nu+1}\cdot n + 2a_{m,3\nu+1} + 2b_{m,3\nu+1}\right\} .$$

Die Behauptung ist richtig mit

$$a_{m+1,\nu} = 6a_{m,3\nu+1} ,$$

$$b_{m+1,\nu} = 2a_{m,3\nu+1} + 2b_{m,3\nu+1} .$$

Die Eindeutigkeit der Zahlen $a_{m,\nu}$ und $b_{m,\nu}$ ist offensichtlich. Damit ist Satz 1 bewiesen.

<u>Beispiele:</u> Es ist

$$\tau_2(n) = \frac{1}{4}\cdot\begin{cases} n & \text{für } n\equiv 0 \bmod 4 ,\\ 6n+2 & \text{für } n\equiv 1 \bmod 4 ,\\ 6n+4 & \text{für } n\equiv 2 \bmod 4 ,\\ 6n+2 & \text{für } n\equiv 3 \bmod 4 ,\end{cases}$$

und

$$\tau_3(n) = \frac{1}{8}\cdot\begin{cases} n & \text{für } n\equiv 0 \bmod 8 ,\\ 6n+2 & \text{für } n\equiv 1 \bmod 8 ,\\ 6n+4 & \text{für } n\equiv 2 \bmod 8 ,\\ 36n+20 & \text{für } n\equiv 3 \bmod 8 ,\\ 6n+8 & \text{für } n\equiv 4 \bmod 8 ,\\ 6n+2 & \text{für } n\equiv 5 \bmod 8 ,\\ 6n+4 & \text{für } n\equiv 6 \bmod 8 ,\\ 36n+20 & \text{für } n\equiv 7 \bmod 8 .\end{cases}$$

Die diskrete Fourier-Transformation liefert eine Verallgemeinerung der Darstellung (2).

Satz 2: *Zu jeder Zahl* $m \in \mathbb{N}$ *gibt es eindeutig bestimmte komplexe Zahlen* $\alpha_{m,\mu}$ *und* $\beta_{m,\mu}$, $\mu = 0,1,\ldots,2^m-1$,

so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ *die Darstellung*

$$\tau_m(n) = \frac{1}{4^m} \sum_{\mu=0}^{2^m-1} (\alpha_{m,\mu} \cdot n + \beta_{m,\mu}) \, \zeta_m^{\mu n} \tag{12}$$

gilt. Hier bedeutet ζ_m *die folgende* 2^m-te *Einheitswurzel:*

$$\zeta_m = e^{\frac{2\pi i}{2^m}} .$$

Beweis: Es ist offensichtlich, daß es höchstens eine solche Darstellung gibt. Wir definieren mit den Bezeichnungen von Satz 1 für $\mu = 0,1,\ldots,2^m-1$ die Zahlen:

$$\alpha_{m,\mu} = \sum_{\lambda=0}^{2^m-1} a_{m,\lambda} \zeta_m^{-\lambda\mu}$$

und (13)

$$\beta_{m,\mu} = \sum_{\lambda=0}^{2^m-1} b_{m,\lambda} \zeta_m^{-\lambda\mu} .$$

Dann folgt für $n \equiv \nu \bmod 2^m$ nach kurzer Rechnung:

$$\frac{1}{4^m} \sum_{\mu=0}^{2^m-1} (\alpha_{m,\mu} n + \beta_{m,\mu}) \zeta_m^{\mu n} = \frac{1}{4^m} \sum_{\mu=0}^{2^m-1} (\alpha_{m,\mu} n + \beta_{m,\mu}) \zeta_m^{\mu\nu} =$$

$$= \frac{n}{2^m} \left(\frac{1}{2^m} \sum_{\mu=0}^{2^m-1} \alpha_{m,\mu} \zeta_m^{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2^m} \left(\frac{1}{2^m} \sum_{\mu=0}^{2^m-1} \beta_{m,\mu} \zeta_m^{\mu\nu} \right) =$$

$$= \frac{1}{2^m} (a_{m\nu} n + b_{m,\nu}) = \tau_m(n).$$

<u>Beispiele:</u> Es ist

$$\tau_2(n) = \frac{1}{16} \left\{ (19n+8) - i^n(5n+4) - (-1)^n.5 - (n-i)^n(5n+4) \right\}$$

und

$$\tau_3(n) = \frac{1}{64} \left\{ (103n+60) - \zeta_3^n(5n+8) - \zeta_3^{2n}((5-60i)n - 36i) - \zeta_3^{3n}(5n+8) - \right.$$

$$\left. - \zeta_3^{4n}(65n+28) - \zeta_3^{5n}(5n+8) - \zeta_3^{6n}((5+60i)n+36i) - \zeta_3^{7n}(5n+8) \right\} .$$

<u>Bemerkungen:</u> 1. Es ist sicher nicht schwer zu zeigen, daß $\alpha_{m,\mu}$ und $\beta_{m,\mu}$ ganze algebraische Zahlen des Kreiskörpers $P(\zeta_{m-1})$ sind.

2. Auf Besonderheiten der Darstellung (12), wie sie in den Beispielen hervortreten, gehen wir später ein.

Die Abbildung τ kann durch die gleiche Vorschrift (1) für alle $n \in \mathbb{Z}$ erklärt, d.h. zu einer Abbildung von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$ fortgesetzt werden. Dabei wird die Null auf die Null und die Menge der negativen Zahlen auf sich abgebildet. Wir bezeichnen daher diese Fortsetzung wieder mit τ. Die Iterierten von τ besitzen die gleichen Darstellungen (8) und (12). Es sei aber bemerkt, daß es dann mehrere Zyklen gibt:

1. Den Zyklus der Länge 2:

$$-1 \underset{\tau}{\overset{\tau}{\rightleftarrows}} -2 \quad ,$$

2. Den Zyklus der Länge 5:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & -5 \arrow[dr, "\tau"] & \\ -10 \arrow[ur, "\tau"] & & -14 \arrow[d, "\tau"] \\ -20 \arrow[u, "\tau"] & & -7 \arrow[ll, "\tau"] \end{tikzcd} \quad ,$$

3. Den Zyklus der Länge 18:

$$\begin{array}{r} -17 \\ -50 \\ -25 \\ -74 \\ -37 \\ -110 \\ -55 \\ -164 \\ -82 \\ -41 \\ -122 \\ -61 \\ -182 \\ -91 \\ -272 \\ -136 \\ -68 \\ -34 \end{array}$$

Es ist nicht bekannt, ob dies alle Zyklen sind, und ob zu jeder negativen ganzen Zahl n die Folge der Iterierten stets in einen dieser Zyklen einmündet.- Wir benutzen die Fortsetzung von τ hier zunächst nur zur bequemeren Darstellung der folgenden Rekursionsformel (und später an einigen Stellen bei der Diskussion der erzeugenden Funktion).

Satz 3: *Für alle* $n \in \mathbb{Z}$ *gilt:*

$$\tau_m(n) = 2\tau_m(n-2^m) - \tau_m(n-2^{m+1}) \ . \tag{14}$$

Beweis: Wir fassen die Beziehung (14) als lineare homogene Differenzengleichung der Ordnung 2^{m+1} auf. Das zugehörige charakteristische Polynom lautet

$$(z^{2^m}-1)^2 \ .$$

Die allgemeine Lösung ist von der Form

$$\sum_{\mu=0}^{2^m-1} (A_\mu . n+B_\mu)\zeta_m^{\mu n} \ .$$

Da nach Satz 2 die iterierte Abbildung $\tau_m(n)$ von dieser Form ist, folgt die Gültigkeit von (14). Man kann das Bestehen von (14) auch durch Nachrechnen aus der Darstellung (12) beweisen.

§ 3. Erzeugende Funktionen.

Wir benutzen manchmal für die identische Abbildung die Abkürzung τ_o. Zur Einführung erzeugender Funktionen benötigen wir eine elementare Abschätzung von $\tau_m(n)$.

Satz 4: *Für alle* $m,n\in\mathbb{N}$ *gilt*

$$\tau_m(n) \leqq \sqrt{6}\,\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{m}{2}} (n+2) \tag{15}$$

Beweis: Zunächst sei $m = 2r$, $r\in\mathbb{N}_o$. Aus (1) folgt die Ungleichung

$$\tau_{m+2}(n) \leqq \frac{3}{2}\tau_m(n)+1 .$$

Hieraus ergibt sich induktiv die Abschätzung

$$\tau_m(n) \leqq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{m}{2}} (n+2)-2 . \tag{16}$$

Ist aber $m = 2r+1$, $r\in\mathbb{N}_o,$ so wird nach (1) und (16) sicher

$$\tau_m(n) = \tau(\tau_{2r}(n)) \leqq 3\tau_{2r}(n)+1$$

$$\leqq 3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{r} (n+2)-2\right)+1 ,$$

also

$$\tau_m(n) \leqq \sqrt{6}\,.\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{m}{2}} (n+2)-5 . \tag{17}$$

Zusammengefaßt ergibt sich aus (16) und (17) die Behauptung von Satz 4.

Wir definieren zwei Typen von erzeugenden Funktionen durch die Potenzreihen:

$$f_m(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \tau_m(n) z^n \quad , \; m \in \mathbb{N}_0 \; ; \tag{18}$$

$$g_n(w) := \sum_{m=0}^{\infty} \tau_m(n) w^m \quad , \; n \in \mathbb{N}_0 \; . \tag{19}$$

Satz 5: 1. *Die Potenzreihe* (18) *konvergiert für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z|<1$.

2. *Die Potenzreihe* (19) *konvergiert für alle* $w \in \mathbb{C}$ *mit* $|w|<\sqrt{\frac{2}{3}}$ $(\approx 0.816\ldots)$.

Beweis: Dies folgt per Majorantenkriterium unmittelbar aus der Abschätzung (15).

Satz 6: *Es sei* $m \in \mathbb{N}_0$. *Dann stellt* $f_m(z)$ *die Potenzreihe einer rationalen Funktion von der Form*

$$f_m(z) = \frac{p_m(z)}{(z^{2^m}-1)^2} \tag{20}$$

dar. Hier ist $p_m(z)$ *ein Polynom vom Grad* $2^{m+1}-1$,

$$p_m(z) = \sum_{\nu=1}^{2^{m+1}-1} c_{m,\nu} z^\nu \tag{21}$$

mit Koeffizienten $c_{m,\nu} \in \mathbb{N}$, $\nu = 1,2,\ldots,2^{m+1}-1$.

Ferner gilt:

$$c_{m,\nu} = \begin{cases} \tau_m(\nu) & \textit{für } \nu = 1,2,\ldots,2^m , \\ \tau_m(\nu)-2\tau_m(\nu-2^m) & \textit{für } \nu = 2^m+1,\ldots,2^{m+1}-1 . \end{cases} \tag{22}$$

<u>Beweis:</u> Für $|z|<1$ betrachten wir das Produkt

$$(z^{2^m}-1)^2 f_m(z) = (z^{2^{m+1}} - 2z^{2^m}+1) \sum_{n=1}^{\infty} \tau_m(n) z^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{2^m} \tau_m(n) z^n + \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} (\tau_m(n) - 2\tau_m(n-2^m)) z^n +$$

$$+ \sum_{n=2^{m+1}+1}^{\infty} (\tau_m(n) - 2\tau_m(n-2^m) + \tau_m(n-2^{m+1})) z^n .$$

Die an dritter Stelle stehende Reihe verschwindet wegen (14) identisch. Im zweiten Summanden braucht nur (z.B. wegen $\tau_m(2^{m+1}) = 2$, $\tau_m(2^m) = 1$) bis $2^{m+1}-1$ summiert zu werden. Es bleibt zu zeigen, daß

$$\tau_m(\nu)-2\tau_m(\nu-2^m)>0$$

ist für $\nu = 2^m+1,\dots,2^{m+1}-1$. Dies folgt aber ebenfalls aus (14), denn es gilt für diese Werte von ν, wenn wir unter τ_m die Fortsetzung auf $\mathbb{Z}$ verstehen,

$$\tau_m(\nu)-2\tau_m(\nu-2^m) = -\tau_m(\nu-2^{m+1}) \quad .$$

Hier ist

$$\nu-2^{m+1}<0 \quad ,$$

also

$$\tau_m(\nu-2^{m+1})<0 \quad .$$

<u>Vermutung 6:</u> *Es sei* $n\in\mathbb{N}$. *Dann stellt* $g_n(w)$ *die Potenzreihe einer rationalen Funktion*

$$g_n(w) = \frac{q_n(w)}{1-w^3}$$

dar. Hier $q_n(w)$ *ein Polynom in* w, *dessen Koeffizienten ganze rationale Zahlen sind.*

Beispiele: Es ist

$$f_o(z) = \frac{z}{(z-1)^2} ,$$

$$f_1(z) = \frac{4z+z^2+2z^3}{(z^2-1)^2} ,$$

$$f_2(z) = \frac{2z+4z^2+5z^3+z^4+4z^5+2z^6+z^7}{(z^4-1)^2} ,$$

$$f_3(z) = \frac{1}{(z^8-1)^2} \Big\{z+2z^2+16z^3+4z^4+4z^5+5z^6+34z^7+z^8 + \\ +5z^9+4z^{10}+20z^{11}+2z^{12}+2z^{13}+z^{14}+2z^{15}\Big\} .$$

$$g_o(w) = 0 ,$$

$$g_1(w) = \frac{1+4w+2w^2}{1-w^3} ,$$

$$g_2(w) = \frac{2+w+4w^2}{1-w^3} ,$$

$$g_3(w) = 1+9w+w^2+14w^3+7w^4 + \frac{2+w+4w^2}{1-w^3} ,$$

$$g_4(w) = \frac{4+2w+w^2}{1-w^3} ,$$

$$g_5(w) = 1+14w+7w^2 + \frac{4+2w+w^2}{1-w^3} ,$$

$$g_6(w) = 2+w+9w^2+w^3+14w^4+7w^5 + \frac{4+2w+w^2}{1-w^3} ,$$

$$g_7(w) = 5+11w+7w^2+32w^3+16w^4+48w^5+24w^6+12w^7+36w^8 + \\ + 18w^9+9w^{10}+w^{11}+14w^{12}+7w^{13} + \frac{2w+4w^2}{1-w^3} ,$$

$$g_8(w) = 7 + \frac{1+4w+2w^2}{1-w^3} .$$

Satz 7: *Die Abbildung τ besitzt nur einen einzigen Zyklus der Länge 3, nämlich den bereits bekannten Zyklus*

$$(1,4,2) .$$

Beweis: Wir diskutieren die Gleichung

$$\tau_3(n) = n$$

in $\mathbb{Z}$ für $n \not\equiv 0 \bmod 8$.

Für $n \equiv 1 \mod 8$ lautet sie:

$$6n+2 = 8n$$

mit der einzigen Lösung $n = 1$.

Für $n \equiv 2 \mod 8$ lautet sie:

$$6n+4 = 8n$$

mit der einzigen Lösung $n = 2$.

Für $n \equiv 3 \mod 8$ lautet sie:

$$36n+20 = 8n \ .$$

Hier gibt es keine Lösung in $\mathbb{Z}$.

Für $n \equiv 4 \mod 8$ lautet sie:

$$6n+8 = 8n$$

mit der einzigen Lösung $n = 4$.

Für $n \equiv 5 \mod 8$ lautet sie:

$$6n+2 = 8n \ .$$

Hier gibt es keine Lösung in der Restklasse 5 modulo 8.

Für $n \equiv 6 \mod 8$ lautet sie:

$$6n+4 = 8n \ .$$

Hier gibt es keine Lösung in der Restklasse 6 modulo 8.

Für $n \equiv 7 \mod 8$ lautet sie:

$$36n+20 = 8n \ .$$

Hier gibt es keine ganzzahlige Lösung.
Jetzt folgt die Behauptung unmittelbar.

<u>Bemerkung:</u> Natürlich kann dieser Beweis beträchtlich verkürzt werden. Auf die Frage nach der Existenz von Zyklen kommen wir im allgemeineren Zusammenhang zurück.

<u>Satz 8:</u> *Die Vermutungen* 2 *und* 6 *sind äquivalent.*

<u>Beweis:</u> Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn es eine Zahl $m(n)$, die wir jetzt mit k bezeichnen, gibt, so daß

$$\tau_k(n) = 1$$

ist, so wird

$$g_n(w) = \sum_{m=0}^{k-1} \tau_m(n) w^m + \frac{w^k + 4w^{k+1} + 2w^{k+2}}{1-w^3}$$

$$= \frac{q_n(w)}{1-w^3}$$

mit einem Polynom q_n.

Gibt es umgekehrt eine Darstellung

$$g_n(w) = \frac{q_n(w)}{1-w^3}$$

mit einem Polynom

$$q_n(w) = \sum_{\nu=0}^{r} d_\nu w^\nu \; ,$$

so wird

$$g_n(w) = \sum_{\nu=o}^{r} d_\nu w^\nu \, . \, (1+w^3+w^6+\ldots) \, .$$

Hieraus ergibt sich nach Definition von $g_n(w)$ sofort:
Es ist

$$\tau_r(n) = d_r+d_{r-3}+d_{r-6}+\ldots$$

$$= \tau_{r+3}(n) \, ,$$

d.h. es entsteht der Zyklus der Länge 3:

$$(\tau_r(n), \; \tau_{r+1}(n), \; \tau_{r+2}(n)) \, .$$

Nach Satz 7 gilt, daß

$$\tau_r(n) = 1, \; 4 \text{ oder } 2$$

sein muß. Somit ist die Existenz einer Zahl (m(n)
gefolgert mit

$$m(n) = r, \; r+2 \text{ oder } r+1 \, ,$$

sodaß

$$\tau_{m(n)}(n) = 1$$

ist. Dies sollte aber gezeigt werden.

Wir führen noch die bivariate erzeugende Funktion $F(z,w)$ für $|z|<1$ und $|w|<\sqrt{\frac{2}{3}}$ ein durch

$$F(z,w) := \sum_{m,n=0}^{\infty} \tau_m(n) z^n w^m . \tag{23}$$

Offenbar gilt sowohl

$$F(z,w) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z) w^m \quad , \quad |w| < \sqrt{\frac{2}{3}} \; , \tag{24}$$

als auch

$$F(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(w) z^n \quad , \quad |z|<1 \; . \tag{25}$$

§ 4. Funktionalgleichungen.

Wir verstehen unter η die 6-te Einheitswurzel

$$\eta = e^{\frac{2\pi i}{6}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} .$$

Satz 9: *Für* $m \in \mathbb{N}$ *und* $0<|z|<1$ *gilt die Rekursionsformel:*

$$f_m(z) = f_{m-1}(z^2) + \frac{z^{-1/3}}{6} \sum_{\mu=0}^{5} \eta^{-4\mu} f_{m-1}(\eta^{\mu} z^{1/3}) . \qquad (26)$$

Hier wählen wir einen beliebigen aber festen Zweig der Funktion $z^{1/3}$.

Beweis: Es ist

$$\tau_m(n) = \tau_{m-1}(\tau(n)) = \begin{cases} \tau_m(\frac{n}{2}) & \text{für } n\equiv 0 \bmod 2 , \\ \tau_m(3n+1) & \text{für } n\equiv 1 \bmod 2 . \end{cases}$$

Somit wird

$$f_m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_m(n) z^n = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_{m-1}(k) z^{2k} + \sum_{r=0}^{\infty} \tau_{m-1}(6r+4) z^{2r+1} .$$

Offenbar ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau_{m-1}(k) z^{2k} = f_{m-1}(z^2) .$$

Weiter wird

$$\frac{1}{6}\sum_{\mu=0}^{5} \eta^{-4\mu} f_{m-1}(\eta^{\mu} z^{1/3}) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{m-1}(n) \left(\frac{1}{6}\sum_{\mu=0}^{5} \eta^{(n-4)\mu}\right) z^{\frac{n}{3}} .$$

Wegen

$$\frac{1}{6}\sum_{\mu=0}^{5} \eta^{(n-4)\mu} = \begin{cases} 1 & \text{für } n \equiv 4 \bmod 6 , \\ 0 & \text{für } n \not\equiv 4 \bmod 6 \end{cases}$$

folgt mit $n = 6r+4$ weiter

$$\frac{1}{6}\sum_{\mu=0}^{5} \eta^{-4\mu} f_{m-1}(\eta^{\mu} z^{1/3}) = z^{1/3} \sum_{r=0}^{\infty} \tau_{m-1}(6r+4) z^{2r+1} .$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung sofort.

In diesem Zusammenhang ist folgendes interessant:
Es sei A der Vektorraum der auf dem Kreisgebiet $|z|<1$ holomorphen Funktionen. Mit $h \in A$ sei die Abbildung

$$T: A \to A$$

durch

$$(Th)(z) := h(z^2) + \frac{z^{-1/3}}{6} \sum_{\mu=0}^{5} \eta^{-4\mu} h(\eta^{\mu} z^{1/3}) \qquad (27)$$

definiert.

Ist h durch die Potenzreihe

$$h(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu z^\nu \tag{28}$$

gegeben, so wird

$$(Th)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{2n} + \sum_{r=0}^{\infty} h_{6r+4} z^{2r+1} . \tag{29}$$

Einige spezielle Werte der Abbildung T seien hier aufgeführt:

h	Th
1	1
$\frac{1}{1-z}$	$\frac{1}{1-z}$
$\frac{z}{(1-z^2)^2}$	$\frac{z^2}{(1-z^4)^2}$
$\frac{z^2}{(1-z^2)^2}$	$\frac{2z+5z^3+z^4+4z^5+z^7}{(1-z^4)^2}$
$\frac{z^3}{(1-z^2)^2}$	$\frac{z^6}{(1-z^4)^2}$

Die folgende Vermutung ist äquivalent zur Vermutung 2.

Vermutung 7: *Die Fixpunkte der Abbildung T haben alle die Form*

$$\gamma_o+\gamma_1 \cdot \frac{z}{1-z} \ .$$

Die behauptete Äquivalenz sieht man so: Aus (29) folgt zunächst

$$(Th)(z) = h_o + \sum_{\nu=1}^{\infty} h_{\tau(\nu)} z^{\nu} \tag{30}$$

Ein Fixpunkt h(z) von T in der Form (28) ist also durch die Eigenschaft

$$h_\nu = h_{\tau(\nu)} \ , \quad \nu \in \mathbb{N} \ ,$$

gekennzeichnet.

Wäre nun die Vermutung 2 richtig, so gäbe es zu jedem $n\in\mathbb{N}$ eine Zahl $m\in\mathbb{N}$ mit $\tau_m(n) = 1$, d.h. es wäre

$$h_n = h_{\tau(n)} = h_{\tau_2(n)} = \ldots = h_{\tau_m(n)} = h_1 \ .$$

Damit hätte h notwendigerweise die Gestalt

$$h(z) = h_o+h_1 \frac{z}{1-z} \ .$$

Nun sei umgekehrt die Vermutung 7 richtig. Wir nehmen an, daß es Zahlen $\nu \in \mathbb{N}$ gibt, zu denen es keine natürliche Zahl m der obigen Form gibt, d.h.

$$\tau_m(\nu) \neq 1 \text{ für alle } m \in \mathbb{N} .$$

Die Menge dieser Zahlen ν sei mit M bezeichnet. Sicher gehört die Zahl 1 nicht zu M. Nun betrachten wir die nicht-identisch verschwindende Potenzreihe

$$\hat{h}(z) = \sum_{\nu \in M} z^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{h}_\nu z^\nu ,$$

also

$$\hat{h}_\nu = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu \in M , \\ 0 & \text{für } \nu \in \mathbb{N} , \ \nu \notin M . \end{cases}$$

Dann ist auch

$$\hat{h}_{\tau(\nu)} = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu \in M , \\ 0 & \text{für } \nu \in \mathbb{N} , \ \nu \notin M , \end{cases}$$

d.h. es ist nach (30) sicher

$$T\hat{h} = \hat{h} .$$

Andererseits ist $\hat{h}$ nicht von der in der Vermutung 7 angegebenen Form. Die indirekte Annahme, daß

$$M \neq \phi$$

ist, führt daher zum Widerspruch.

<u>Bemerkung:</u> Mit

$$\lambda = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

kann man die Fixpunktgleichung auch in der Form

$$h(z) = h(z^2) + \frac{1}{3z^{1/3}} \left\{ h(z^{2/3}) + \lambda h(\lambda z^{2/3}) + \lambda^2 h(\lambda^2 z^{2/3}) \right\}$$

schreiben.

§ 5. Ein Zusatz.

Das in den Formeln (20) und (21) eingeführte Polynom $p_m(z)$ kann an den relevanten Einheitswurzeln ζ_m^ν berechnet werden. Dies ist in Verbindung mit der Darstellung (12) von Interesse. Wir geben hier nur die Werte für $z = \pm 1$ an.

Satz 10: *Es gilt:*

$$p_m(1) = \frac{1}{7}\left\{10.4^m-3(-3)^m\right\} , \tag{31}$$

und

$$p_m(-1) = \frac{1}{7}\left\{-5.4^m+5(-3)^m\right\} , \tag{32}$$

für $m = 1,2,\ldots$.

Beweis: Man verwende die rationale Darstellung (20) von $f_m(z)$ in Verbindung mit der Rekursionsformel (26). Wenn man mit dem Nenner

$$(z^{2^m}-1)^2$$

multipliziert und dann $z\to 1$ und $z\to -1$ streben läßt, erhält man für $m\geq 2$ die Rekursionsformeln

$$p_m(1) = 7p_{m-1}(1) + 6p_{m-1}(-1) ,$$

$$p_m(-1) = -5p_{m-1}(1) - 6p_{m-1}(-1) .$$

Mit

$$p_1(1) = 7 \; , \; p_1(-1) = -5$$

erhält man (31) und (32) .

Literatur, chronologisch angeordnet.

1. TERRAS, R.: A stopping time problem on the positive integers. Acta Arithmetica 30, 241-252, 1976.

2. STEINER, R.P.: A theorem on the Syracuse problem. Congressus Numerantium XX, Proc. 7th Conf. Manitoba, 553-559, 1977.

3. BÖHM, C., und SONTACCHI, G.: On the existence of cycles of given length in integer sequences like $x_{n+1} = x_n/2$ if x_n even and $x_{n+1} = 3x_n+1$ otherwise. Accad. Nazion. dei Lincei, Rendiconti, Classe di Scienze Fisiche, Math. e Naturali (serie 8), Roma, 64, 260-264, 1978.

4. CRANDALL, R.E.: On the "3x+1" problem. Math. of Comput. 32, 1281-1292, 1978.

5. HEPPNER, E.: Eine Bemerkung zum Hasse-Syracuse-Algorithmus. Arch. d. Math., 31, 317-320, 1978.

6. MÖLLER, H.: Über Hasse's Verallgemeinerung des Syracuse-Algorithmus (Kakutani's Problem). Acta Arithmetica 34, 219-226, 1978.

7. GARNER, L.E.: On the Collatz 3n+1 Algorithm. Proceed. Am. Math. Soc. 82, 19-22, 1981.

8. GUY, R.K.: Unsolved Problems in Number Theory, Springer-Verlag New York, 1981.

9. GUY, R.K.: Don't try to solve these problems. Am. Math. Monthly, 90, 35-41, 1983.

10. WAGON, S.: The Collatz Problem. The Mathematical Intelligencer 7, 72-76, 1985.

11. LAGARIAS, J.C.: The 3x+1 problem and its generalizations. Am. Math. Monthly, 92, 3-23, 1985.