Nr. 69 - 1987

Deformation holomorpher Matrizen

Wolfgang Muth
Karl Josef Ramspott

Einleitung

Zu den wichtigen Fragestellungen der Topologie gehört das Homotopieproblem. Wann sind zwei stetige Abbildungen eines topologischen Raumes in einen anderen homotop, dh. unter welchen Bedingungen läßt sich die eine Abbildung stetig in die andere deformieren? Dieselbe Frage ist auch in der Funktionentheorie von Bedeutung. Man untersucht hier, wann sich zwei holomorphe Abbildungen zwischen komplexen Räumen über lauter holomorphe Abbildungen ineinander deformieren lassen. Sind die Abbildungen auf einem Steinschen Raum definiert und ist der Bildraum eine komplexe Liesche Gruppe oder eine komplexe Mannigfaltigkeit, auf der eine komplexe Liesche Gruppe holomorph und transitiv operiert, so ist die kanonische Abbildung der Menge der Homotopieklassen aller holomorphen Abbildungen in die Menge der Homotopieklassen aller stetigen Abbildungen bijektiv. In diesem Fall ist also jede stetige Abbildung zu einer holomorphen Abbildung homotop, und zwei holomorphe Abbildungen, die als stetige Abbildungen homotop sind, lassen sich auch über lauter holomorphe Abbildungen ineinander deformieren [2], [6].

Wir werden im folgenden den Fall betrachten, daß die Abbildungen auf einer nicht-kompakten Riemannschen Fläche definiert sind. Ihre Wertebereiche sind komplexe Stiefelsche bzw. Graßmannsche Mannigfaltigkeiten, insbesondere die komplexen projektiven Räume. Holomorphe Abbildungen dieser Art sind als stetige Abbildungen unwesentlich, dh. auf konstante Abbildungen deformierbar (bis auf den Fall der invertierbaren holomorphen Matrizen, auf die wir in Satz 3 zurückkommen).

Da nicht-kompakte Riemannsche Flächen insbesondere Steinsche Mannigfaltigkeiten sind, lassen sich die Abbildungen nach dem oben erwähnten Okaschen Prinzip (Zurückführung analytischer Probleme auf topologische) auch über lauter holomorphe Abbildungen in eine konstante Abbildung deformieren. Es ist wünschenswert, diese Aussage direkt zu beweisen, also ohne den Umweg über das Okasche Prinzip. Wir werden darüber hinaus zeigen, daß eine solche Deformation mittels Anwendung einer einshomotopen invertierbaren holomorphen Matrix auf die gegebene Abbildung bewerkstelligt werden kann.

I

Mit X wird in der ganzen Arbeit eine nicht-kompakte Riemannsche Fläche bezeichnet. Auf X gelten die Sätze von Mittag-Leffler und Weierstraß über die Existenz meromorpher bzw. holomorpher Funktionen zu vorgegebenen Hauptteil- bzw. Nullstellenverteilungen [1]. Aus dem Satz von Mittag-Leffler folgt, daß man zu zwei holomorphen Funktionen f und g auf X, die keine gemeinsamen Nullstellen haben, stets zwei weitere holomorphe Funktionen φ und ψ mit $\varphi f + \psi g = 1$ finden kann. In [5] wird gezeigt, daß man zusätzlich erreichen kann, daß φ keine Nullstellen auf X hat und im Fall $g \neq 0$ einen holomorphen Logarithmus besitzt. Diese Verschärfung ist für die folgenden Überlegungen von entscheidender Bedeutung. Wir formulieren die Aussage in Hilfssatz 1 und geben der Vollständigkeit halber einen Beweis an.

Hilfssatz 1. Zu zwei holomorphen Funktionen f und g auf X ohne gemeinsame Nullstellen gibt es holomorphe Funktionen φ und ψ auf X, so daß gilt:

(a) $\varphi f + \psi g = 1$,
(b) $\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in X$.

Im Fall $g \neq 0$ läßt sich zusätzlich erreichen, daß φ einen holomorphen Logarithmus auf X besitzt.

Beweis. Sei N die Menge aller Nullstellen von g. Falls N leer ist oder mit X übereinstimmt, verstehen sich die Behauptungen von selbst. Sei also N nicht leer und von X verschieden. Wegen $f(a) \neq 0$ für $a \in N$ kann man f in einer geeigneten offenen Umgebung von a in der Form $f = \exp \circ h_a$ mit einer in dieser Umgebung holomorphen

Funktion h_a schreiben. Es gibt eine auf X meromorphe und in $X \setminus N$ holomorphe Funktion h, so daß $h - \frac{h_a}{g}$ für alle $a \in N$ in einer Umgebung von a holomorph ist. (Satz von Mittag-Leffler oder trivial, falls alle $\frac{h_a}{g}$ in a holomorph ergänzbar sind.) $\lambda := gh$ ist auf X holomorph. $\frac{1}{g}(\lambda - h_a)$ ist in a holomorph ergänzbar. Folglich ist auch $\frac{1}{g}(\exp\circ\lambda - \exp\circ h_a)$ in einer Umgebung von a und damit $\frac{1}{g}(\exp\circ\lambda - f)$ auf X holomorph. Für die holomorphen Funktionen $\varphi := \exp\circ(-\lambda)$ und $\psi := \frac{\varphi}{g}(\exp\circ\lambda - f)$ gilt $\varphi f + \psi g = 1$.

<u>Hilfssatz 2.</u> Jede nicht-leere Teilmenge des Ringes aller holomorphen Funktionen auf X besitzt einen größten gemeinsamen Teiler.

<u>Beweis.</u> Sei H eine solche Teilmenge. Im Fall $H = \{0\}$ ist 0 ein größter gemeinsamer Teiler von H. Im Fall $H \neq \{0\}$ definiert die Abbildung

$$X \longrightarrow \mathbb{N},\ a \longmapsto \min\{k_a(f) : f \in H \setminus \{0\}\},$$

eine Nullstellenverteilung auf X (dabei bezeichnet $k_a(f)$ die Vielfachheit von a als Nullstelle von f, also $k_a(f) = 0$, falls $f(a) \neq 0$). Eine Lösung dieser Nullstellenverteilung, die nach dem Satz von Weierstraß existiert, ist ein größter gemeinsamer Teiler von H.

II

Sei Y eine komplexe Mannigfaltigkeit und I das abgeschlossene Einheitsintervall der reellen Achse.

Zwei holomorphe Abbildungen $f, g : X \longrightarrow Y$ heißen homotop, falls es eine stetige Abbildung $F : X \times I \longrightarrow Y$ mit folgenden

Eigenschaften gibt:

(a) $F(x,0) = f(x)$ und $F(x,1) = g(x)$ für alle $x \in X$.

(b) Für alle $t \in I$ ist die Abbildung $X \to Y$, $x \mapsto F(x,t)$, holomorph.

Ist die Abbildung g konstant, so nennt man f auch eine unwesentliche holomorphe Abbildung.

Die Gruppe der invertierbaren komplexen $n \times n$-Matrizen wird wie üblich mit $GL(n,\mathbb{C})$ bezeichnet. I_n sei die n-reihige Einheitsmatrix. Eine holomorphe Matrix auf X ist eine Matrix, deren Elemente holomorphe Funktionen auf X sind. Eine holomorphe $n \times n$-Matrix auf X heißt invertierbar, falls ihre Determinante an keiner Stelle von X verschwindet. Die inverse Matrix einer invertierbaren holomorphen Matrix ist ebenfalls holomorph. Eine invertierbare holomorphe $n \times n$-Matrix auf X ist also nichts anderes als eine holomorphe Abbildung von X in die komplexe Mannigfaltigkeit $GL(n,\mathbb{C})$. Unter einer einshomotopen holomorphen $n \times n$-Matrix auf X wird eine invertierbare holomorphe $n \times n$-Matrix verstanden, die als holomorphe Abbildung von X nach $GL(n,\mathbb{C})$ zu der konstanten Abbildung, die jedem Punkt von X die Matrix I_n zuordnet, homotop ist.

<u>Hilfssatz 3.</u> Jede zweireihige holomorphe Diagonalmatrix mit Determinante 1 ist einshomotop.

<u>Beweis.</u> Sei $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ eine solche Matrix. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} a\cos\frac{\pi}{2}t & -\sin\frac{\pi}{2}t \\ \sin\frac{\pi}{2}t & b\cos\frac{\pi}{2}t \end{pmatrix}, \quad t \in I,$$

ist auf $X \times I$ stetig und für jedes feste $t \in I$ auf X holomorph. Ihre Determinante hat überall den Wert 1. Für $t = 0$ liefert sie M, für t = 1 die konstante Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

die ihrerseits zu I_2 homotop ist.

<u>Hilfssatz 4.</u> Zu zwei holomorphen Funktionen f und g auf X ohne gemeinsame Nullstellen gibt es eine einshomotope holomorphe 2×2-Matrix T auf X mit

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} .$$

<u>Beweis.</u> Nach Hilfssatz 1 gibt es zwei holomorphe Funktionen φ und ψ auf X mit $\varphi f + \psi g = 1$ und $\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in X$. Die holomorphe Matrix

$$T := \begin{pmatrix} f & -\psi \\ g & \varphi \end{pmatrix}$$

hat die Determinante 1. Es bleibt zu zeigen, daß sie einshomotop ist. Dazu wird die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{t}{\varphi} + (1-t)f & -\psi \\ (1-t)g & \varphi \end{pmatrix}, \quad t \in I,$$

betrachtet. Sie ist auf $X \times I$ stetig und für jedes feste $t \in I$ auf X holomorph. Ihre Determinante hat überall den Wert 1. Für t = 0 liefert sie T und für t = 1 die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\varphi} & -\psi \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}.$$

Diese wiederum ist zu der Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\varphi} & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}$$

homotop. Man bekommt eine Deformationsmatrix, indem man $-\psi$ durch $(t-1)\psi$ ersetzt. Der Rest folgt aus Hilfssatz 3 (und der Transitivität der Homotopiebeziehung).

Satz 1. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zu jedem n-tupel holomorpher Funktionen auf X, die keine gemeinsamen Nullstellen haben, gibt es eine einshomotope holomorphe $n \times n$-Matrix auf X, deren erste Spalte das gegebene n-tupel ist.

Beweis. Wir wenden vollständige Induktion nach n an. Der Fall $n = 2$ ist in Hilfssatz 3 bewiesen. Sei also $n \geq 3$, und seien $f_1, \ldots, f_n$ auf X holomorphe Funktionen ohne gemeinsame Nullstellen. Falls $f_i = 0$ für alle $i = 2, \ldots, n$, so hat f_1 keine Nullstellen. Die n-reihige Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} f_1 & & & & \\ & \frac{1}{f_1} & & \text{\huge 0} & \\ & & 1 & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

hat dann die verlangten Eigenschaften. (Ihre Einshomotopie folgt aus Hilfssatz 3.) Verschwindet wenigstens eine der Funktionen $f_2, \ldots, f_n$ nicht identisch und ist d ein größter gemeinsamer Teiler der Funktionen $f_2, \ldots, f_n$ (Hilfssatz 2), so haben die holomorphen Funktionen $\frac{f_2}{d}, \ldots, \frac{f_n}{d}$ keine gemeinsamen Nullstellen. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine einshomotope holomorphe $(n-1)$-reihige Matrix M auf X mit

$$M\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_2/d\\\vdots\\f_n/d\end{pmatrix} .$$

Die Funktionen f_1 und d haben ebenfalls keine gemeinsamen Nullstellen auf X. Also gibt es nach Hilfssatz 4 eine einshomotope holomorphe 2×2-Matrix N mit

$$N\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_1\\d\end{pmatrix} .$$

Die holomorphe $n\times n$-Matrix

$$T := \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N & 0\\0 & I_{n-2}\end{pmatrix}$$

ist invertierbar und einshomotop; außerdem genügt sie der Beziehung

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_1\\\vdots\\f_n\end{pmatrix} .$$

<u>Bemerkung.</u> Der Beweis zeigt, daß man T mit Determinante 1 konstruieren kann.

Wir wollen Satz 1 von holomorphen $n\times 1$-Matrizen auf $n\times k$-Matrizen $(k<n)$ maximalen Rangs verallgemeinern.

<u>Satz 2.</u> Seien $1\leq k<n$ natürliche Zahlen. Jede holomorphe $n\times k$-Matrix auf X, die an allen Stellen von X den Rang k hat, läßt sich zu einer einshomotopen holomorphen $n\times n$-Matrix auf X ergänzen.

<u>Beweis.</u> Wir haben zu zeigen, daß es zu jeder holomorphen $n \times k$-Matrix M auf X mit Rang $M(x) = k$ für alle $x \in X$ eine einshomotope holomorphe $n \times n$-Matrix T mit

$$T \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix} = M$$

gibt. Für $k = 1$ ist das gerade der Inhalt von Satz 1. Sei also M eine holomorphe $n \times k$-Matrix $(1 < k < n)$ auf X, die in jedem Punkt von X maximalen Rang hat, und nehmen wir an, die Aussage sei für entsprechende Matrizen mit $k-1$ Spalten richtig. Wir bezeichnen die letzte Spalte von M mit a und die Matrix, die aus M durch Streichen der letzten Spalte hervorgeht, mit N. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine einshomotope holomorphe $n \times n$-Matrix S auf X mit

$$S \begin{pmatrix} I_{k-1} \\ 0 \end{pmatrix} = N.$$

Sind $\beta_1, \dots, \beta_n$ die Komponenten des Spaltenvektors $S^{-1}a$, so haben die Funktionen $\beta_k, \dots, \beta_n$ keine gemeinsamen Nullstellen auf X. Deshalb gibt es nach Satz 1 eine einshomotope holomorphe $(n-k+1)$-reihige Matrix R mit

$$R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_k \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} .$$

Die holomorphe $n \times n$-Matrix

$$T := S \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \beta_1 & & \\ & \ddots & \vdots & & 0 \\ & & \beta_{k-1} & & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

ist einshomotop. Es gilt

$$T \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \beta_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & \beta_{k-1} \\ & & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= S \begin{pmatrix} I_{k-1} & \beta_1 \\ & \vdots \\ 0 & \beta_n \end{pmatrix} = M.$$

Bemerkung. Der Beweis zeigt, daß man die Matrix T überdies so konstruieren kann, daß ihre Determinante überall den Wert 1 hat.

Satz 3. Jede invertierbare holomorphe $n \times n$-Matrix auf X ist zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \det M \end{pmatrix}$$

homotop.

Beweis. Sei N die Matrix, die aus M durch Streichen der letzten Spalte entsteht. Nach Satz 2 gibt es eine einshomotope holomorphe $n \times n$-Matrix S mit

$$S \begin{pmatrix} I_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = N.$$

Ist a die letzte Spalte von M, so gilt mit

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} := S^{-1}a$$

die Beziehung

$$S \cdot \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \beta_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \vdots \\ & & & \beta_n \end{pmatrix} = M.$$

Daraus folgt, daß β_n als holomorphe Funktion ohne Nullstellen zu der holomorphen Funktion det M homotop ist. Außerdem ist M zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & \beta_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \vdots \\ & & & \beta_n \end{pmatrix}$$

und diese wiederum zu der Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \beta_n \end{pmatrix}$$

homotop, woraus insgesamt die Behauptung folgt.

Corollar. Zwei invertierbare holomorphe $n \times n$-Matrizen auf X sind genau dann homotop, wenn ihre Determinanten als holomorphe Abbildungen von X in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ homotop sind. Insbesondere ist jede holomorphe $n \times n$-Matrix auf X, deren Determinante überall den Wert 1 hat, einshomotop.

III

Wir schließen noch einige Bemerkungen an.

1. Die Menge aller Homotopieklassen der invertierbaren holomorphen $n \times n$-Matrizen auf X steht also mittels Übergang zur Determinante in bijektiver Beziehung zur Menge der Homotopieklassen der nullstellenfreien holomorphen Funktionen auf X. Diese Menge wird bekanntlich durch die Gruppe $\mathrm{Hom}(H_1(X), \mathbb{Z})$ klassifiziert, indem man jeder holomorphen Funktion f ohne Nullstellen auf X und jedem geschlossenen Weg γ auf X die ganze Zahl $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{df}{f}$ zuordnet.

2. Man kann die Homotopieaussagen des vorhergehenden Abschnitts auch dadurch bekommen, daß man die Eigenschaft "einshomotop" durch die Eigenschaft "Produkt von holomorphen Elementarmatrizen" ersetzt [4]. Holomorphe Elementarmatrizen haben die Determinante 1 und sind natürlich einshomotop. Der Beweis von Hilfssatz 3 für diesen Fall folgt aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix},$$

wobei ab = 1 zu beachten ist. Hilfssatz 4 benutzt die Zerlegung

$$\begin{pmatrix} f & -\psi \\ g & \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\psi/\varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g\varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}$$

und die vorhergehende Gleichung für die rechts stehende Diagonalmatrix (sowie $\varphi f + \psi g = 1$ und $\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in X$).

Der Beweis der Sätze 1 und 2 verläuft nach dem angegebenen Muster. (Die in der Definition von T im Beweis von Satz 2 auftretende Matrix mit den Funktionen $\beta_1,\dots,\beta_{k-1},1,0,\dots,0$ in der k-ten Spalte ist natürlich ein Produkt von holomorphen Elementarmatrizen.)

Satz 3 ist wie folgt zu formulieren (und auf die angegebene Weise problemlos zu beweisen):

Jede invertierbare holomorphe $n \times n$-Matrix M auf X hat die Form

$$M = P \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \det M \end{pmatrix},$$

wobei P ein Produkt von holomorphen Elementarmatrizen ist.

3. Als einshomotope holomorphe Matrix auf X mit Determinante 1, deren erste Spalte aus n vorgegebenen holomorphen Funktionen $f_1,\dots,f_n$ ohne gemeinsame Nullstellen besteht ($n \geq 2$), kann man stets eine Matrix T der folgenden relativ einfachen Bauart finden (vgl. hierzu [3]): Im Fall $f_2 = \dots = f_n = 0$ und folglich $f_1(x) \neq 0$ für alle $x \in X$ hat die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} f_1 & & & & \\ & \frac{1}{f_1} & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

die gewünschten Eigenschaften. Im Fall $(f_2,\dots,f_n) \neq (0,\dots,0)$ leistet die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} f_1 & -\psi_1 & & & & \\ f_2 & e^{\varphi_1} & -\psi_2 & & \bigcirc & \\ \cdot & & \ddots & \ddots & & \\ \cdot & & & \ddots & \ddots & \\ \cdot & & & & \ddots & \\ f_{n-1} & & \bigcirc & & e^{\varphi_{n-2}} & -\psi_{n-1} \\ f_n & & & & & e^{\varphi_{n-1}} \end{pmatrix}$$

das Verlangte, sofern die holomorphen Funktionen $\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}$, $\psi_1,\dots,\psi_{n-1}$ der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} f_k e^{\sum\limits_{i=k}^{n-1} \varphi_i} \prod_{j=1}^{k-1} \psi_j = 1$$

genügen. Die linke Seite dieser Gleichung ergibt sich gerade, wenn man die Determinante von T durch Entwicklung nach der ersten Spalte berechnet. Es gilt also det T = 1. Es bleibt zu zeigen, daß es überhaupt holomorphe Funktionen φ_i, ψ_i gibt, die der Gleichung genügen, und daß T einshomotop ist.

Wir wenden vollständige Induktion nach n an. Der Induktionsanfang n = 2 folgt aus Hilfssatz 1: f_1, f_2 haben keine gemeinsamen Nullstellen und f_2 ist nicht die Nullfunktion. Also gibt es holomorphe Funktionen φ_1, ψ_1 auf X mit

$$e^{\varphi_1} f_1 + \psi_1 f_2 = 1.$$

Seien $f_1,\dots,f_{n+1}$, $n \geq 2$, holomorphe Funktionen auf X ohne gemeinsame Nullstellen und $(f_2,\dots,f_{n+1}) \neq (0,\dots,0)$. Ist d ein größter gemeinsamer Teiler von $f_2,\dots,f_{n+1}$, so haben f_1,d sowie $\frac{f_2}{d},\dots,\frac{f_{n+1}}{d}$ keine gemeinsamen Nullstellen. d verschwindet nicht identisch, also gibt es nach Hilfssatz 1 holomorphe Funktionen φ, ψ auf X mit

(✱) $\quad e^{\varphi} f_1 + \psi d = 1.$

Im Fall $(f_3,\dots,f_{n+1}) \neq (0,\dots,0)$ gibt es nach Induktionsvoraussetzung holomorphe Funktionen φ_i, ψ_i, $i = 2,\dots,n$, so daß gilt:

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{f_k}{d} e^{\sum_{i=k}^{n} \varphi_i} \prod_{j=2}^{k-1} \psi_j = 1,$$

also

$$d = \sum_{k=2}^{n+1} f_k e^{\sum_{i=k}^{n} \varphi_i} \prod_{j=2}^{k-1} \psi_j .$$

Setzt man diesen Ausdruck in (✱) ein, bekommt man mit $\varphi_1 := \varphi - \sum_{i=2}^{n} \varphi_i$ und $\psi_1 := \psi$ die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n+1} f_k e^{\sum_{i=k}^{n} \varphi_i} \prod_{j=1}^{k-1} \psi_j = 1.$$

Gilt aber $f_3 = \dots = f_{n+1} = 0$, so hat $\frac{f_2}{d}$ keine Nullstellen. Die letzte Gleichung folgt dann aus (✱), wenn man $\varphi_1 := \varphi$, $\psi_1 := \frac{d}{f_2}\psi$, $\varphi_2 = \dots = \varphi_n := 0$ und $\psi_2 = \dots = \psi_n := 1$ setzt.

Um die Einshomotopie von T zu zeigen, ersetzen wir die erste Spalte von T durch den Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} (1-t)f_1 + te^{-\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_i} \\ (1-t)f_2 \\ \vdots \\ (1-t)f_n \end{pmatrix}, \quad t\in I.$$

Die so entstehende Matrix ist auf $X\times I$ stetig und für jedes feste $t\in I$ auf X holomorph. Ihre Determinante hat überall den Wert 1. Für $t = 0$ liefert sie T und für $t = 1$ die Matrix S, die aus T entsteht, wenn man die erste Spalte von T durch den Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} e^{-\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ersetzt. Multipliziert man in S alle Funktionen φ_i und ψ_i mit dem Faktor $1-t$, $t\in I$, so bekommt man eine Deformationsmatrix, deren Determinante den Wert 1 hat und die für $t = 0$ mit S und für $t = 1$ mit I_n übereinstimmt.

IV

Seien $1\leq k\leq n$ natürliche Zahlen. Mit $V_k(\mathbb{C}^n)$ bezeichnen wir die Stiefelsche Mannigfaltigkeit aller komplexen $n\times k$-Matrizen vom Rang k. $V_k(\mathbb{C}^n)$ ist als offene Teilmenge von $(\mathbb{C}^n)^k$ eine kn-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, auf der die Gruppe $GL(n,\mathbb{C})$ durch Linksmultiplikation holomorph und transitiv operiert.

Satz 4. Zu jeder holomorphen Abbildung $f : X \longrightarrow V_k(\mathbb{C}^n)$ mit $1 \leq k < n$ gibt es eine einshomotope holomorphe Matrix $T : X \longrightarrow GL(n,\mathbb{C})$ mit

$$T(x)\begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix} = f(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Die Aussage ist nur eine Umformulierung von Satz 2.

Bemerkung. Die holomorphe Abbildung f ist also insbesondere unwesentlich. Im Fall $k = 1$ handelt es sich um eine Abbildung nach $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Wir haben gesehen, daß man die Matrix T so finden kann, daß ihre Determinante den Wert 1 hat und daß sie sogar ein Produkt von Elementarmatrizen ist.

Mit $G_k(\mathbb{C}^n)$ bezeichnen wir die Graßmannsche Mannigfaltigkeit aller k-dimensionalen Untervektorräume des komplexen Vektorraums $\mathbb{C}^n$. Man hat eine kanonische Abbildung

$$p : V_k(\mathbb{C}^n) \longrightarrow G_k(\mathbb{C}^n),$$

die jeder Matrix $A \in V_k(\mathbb{C}^n)$ den von Spalten von A erzeugten Untervektorraum von $\mathbb{C}^n$ zuordnet. Mit der zugehörigen Quotiententopologie ist $G_k(\mathbb{C}^n)$ ein kompakter Raum; die Abbildung p ist stetig und offen. Überdies ist $G_k(\mathbb{C}^n)$ eine komplexe Mannigfaltigkeit, deren komplexe Struktur für $k < n$ wie folgt definiert wird:

Für $A \in V_k(\mathbb{C}^n)$ und $\alpha = (i_1,\dots,i_k)$ mit $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ bezeichne A_α die $k \times k$-Matrix, deren ν-te Zeile gerade die i_ν-te Zeile von A ist. $\tilde{A}_\alpha$ sei diejenige Matrix, die aus A durch Streichen der i_ν-ten Zeilen, $\nu = 1,\dots,k$, entsteht. Die Mengen $\{A \in V_k(\mathbb{C}^n) : \det A_\alpha \neq 0\}$ für alle k-tupel α der angegebenen Art bilden eine offene Überdeckung von $V_k(\mathbb{C}^n)$, also wird durch ihre Bilder U_α bei der Abbildung p eine offene Überdeckung von $G_k(\mathbb{C}^n)$ gegeben. Die wohldefinierten Abbildungen

$$U_\alpha \to \mathbb{C}^{k(n-k)}\;,\quad p(A) \mapsto \tilde{A}_\alpha A_\alpha^{-1},$$

sind Homöomorphismen und biholomorph verträglich. Man bekommt auf diese Weise einen komplexen Atlas, der $G_k(\mathbb{C}^n)$ zu einer $k(n-k)$-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit und p zu einer holomorphen Abbildung macht.

Satz 5. Zu jeder holomorphen Abbildung $g : X \to G_k(\mathbb{C}^n)$ gibt es eine holomorphe Abbildung $f : X \to V_k(\mathbb{C}^n)$ mit $g = p \circ f$.

Beweis. Wir setzen $k < n$ voraus (der Fall $k = n$ ist trivial). Sicher läßt sich g über der offenen Menge $W_\alpha = g^{-1}(U_\alpha)$ liften. Man wählt dazu an jeder Stelle $x \in W_\alpha$ eine Matrix $A \in V_k(\mathbb{C}^n)$ mit $p(A) = g(x)$. Dann ist $f_\alpha(x) := AA_\alpha^{-1}$ unabhängig von der Auswahl von A. Die Abbildung $f_\alpha = W_\alpha \to V_k(\mathbb{C}^n)$ ist holomorph, und es gilt $p(f_\alpha(x)) = g(x)$ für alle $x \in W_\alpha$. Über dem Durchschnitt $W_\alpha \cap W_\beta$ gibt es genau eine invertierbare holomorphe $k \times k$-Matrix $g_{\alpha\beta}$ mit $f_\beta = f_\alpha g_{\alpha\beta}$. Über $W_\alpha \cap W_\beta \cap W_\gamma$ gilt $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$. Der Cozyklus $(g_{\alpha\beta})$ zerfällt, dh. es gibt über jedem W_α eine invertierbare holomorphe $k \times k$-Matrix g_α mit $g_{\alpha\beta} = g_\alpha g_\beta^{-1}$ über $W_\alpha \cap W_\beta$ [1]. Dann wird durch

$$f(x) := f_\alpha(x) g_\alpha(x) \quad \text{für alle } x \in W_\alpha$$

eine holomorphe Abbildung

$$f : X \to V_k(\mathbb{C}^n)$$

definiert, denn über $W_\alpha \cap W_\beta$ gilt

$$f_\alpha g_\alpha = f_\alpha g_{\alpha\beta} g_\beta = f_\beta g_\beta .$$

Wegen $p \circ f = g$ ist f eine gesuchte Abbildung.

Eine Matrix $T \in GL(n,\mathbb{C})$ bildet (aufgefaßt als lineare Abbildung $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $z \longmapsto Tz$) jeden k-dimensionalen Untervektorraum L von $\mathbb{C}^n$ auf einen k-dimensionalen Untervektorraum ab, den wir mit $T \mathbin{\square} L$ bezeichnen. Die so definierte Wirkung von $GL(n,\mathbb{C})$ auf $G_k(\mathbb{C}^n)$ ist holomorph und transitiv. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} GL(n,\mathbb{C}) \times V_k(\mathbb{C}^n) & \longrightarrow & V_k(\mathbb{C}^n) \\ {\scriptstyle id \times p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ GL(n,\mathbb{C}) \times G_k(\mathbb{C}^n) & \longrightarrow & G_k(\mathbb{C}^n) \end{array}$$

ist kommutativ, wobei die waagerechten Pfeile die Wirkungsabbildungen bezeichnen (der obere also die Bildung des Matrizenprodukts, der untere die Abbildung $\square$).

E sei die k-dimensionale Koordinatenebene, die von den ersten k Einheitsvektoren des $\mathbb{C}^n$ aufgespannt wird.

Satz 6. Zu jeder holomorphen Abbildung $g : X \longrightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$ gibt es eine einshomotope holomorphe Matrix $T : X \longrightarrow GL(n,\mathbb{C})$ mit $T(x) \mathbin{\square} E = g(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis. Wir setzen $k < n$ voraus (für $k = n$ ist nichts zu zeigen). Es gibt eine holomorphe Abbildung $f : X \longrightarrow V_k(\mathbb{C}^n)$ mit $p \circ f = g$ (Satz 5) und eine einshomotope holomorphe Matrix $T : X \longrightarrow GL(n,\mathbb{C})$ mit $T(x)\begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix} = f(x)$ für alle $x \in X$ (Satz 4). Da die Abbildung p der Matrix $\begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}$ den Untervektorraum E zuordnet, folgt $T(x) \mathbin{\square} E = g(x)$ für alle $x \in X$.

Bemerkung. Jede holomorphe Abbildung $X \longrightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$ ist also unwesentlich. Im Fall $k = 1$, $n > 1$ handelt es sich um eine Abbildung in den komplexen projektiven Raum $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$, im Fall

$k = 1$, $n = 2$ kann die Abbildung als meromorphe Funktion aufgefaßt werden. Die Deformation der Abbildung in eine konstante Abbildung kann durch Anwendung einer einshomotopen holomorphen Matrix bewerkstelligt werden. Man darf sogar annehmen, daß die Matrix ein Produkt von holomorphen Elementarmatrizen ist.

Literatur

[1] O. Forster: Riemannsche Flächen. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977.

[2] H. Grauert: Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen. Math. Ann. 133, 450-472 (1957).

[3] M. Klein: Transformationssätze für holomorphe Erzeugendensysteme. Dissertation Mannheim 1987.

[4] M. Klein und K.J. Ramspott: Ein Transformationssatz für Idealbasen holomorpher Funktionen. Erscheint in Sb. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl. 1987.

[5] R. Narasimhan: Complex analysis in one variable. Boston-Basel-Stuttgart: Birkhäuser 1985.

[6] K.J. Ramspott: Stetige und holomorphe Schnitte in Bündeln mit homogener Faser. Math. Z. 89, 234-246 (1963).