Nr. 76 (1987)

MONOTON-KONVEXE FUNKTIONEN - EINE BEMERKUNG ZUM SATZ VON BROWDER-MINTY

W. Oettli

Diese Arbeit ist erschienen in:
Advances in Mathematical Optimization, edited by J. Guddat et al.
(Mathematical Research, Vol. 45), pp. 130-136.
Akademie-Verlag, Berlin, 1988.

Universität Mannheim, Fakultät für Mathematik und Informatik, Postfach 103462, D-6800 Mannheim 1

MONOTON-KONVEXE FUNKTIONEN - EINE BEMERKUNG ZUM SATZ VON BROWDER-MINTY

W. Oettli*)

Der Satz von Browder-Minty über die Lösbarkeit monotoner Operatorgleichungen gilt zu Recht als eindrucksvolles Beispiel für die Verbindung des Schönen mit dem Nützlichen in der Mathematik [7]. In der Literatur wird dieser Satz in der Regel mit Argumenten vom Fixpunkttyp bewiesen (Fixpunktsatz von Brouwer, KKM-Theorem). Hier soll ein Beweis gegeben werden, der als einziges strukturelles Hilfsmittel den Trennsatz für konvexe Mengen im $\mathbb{R}^n$ benutzt - genauer: eine fast offensichtliche Folgerung aus diesem Trennsatz, nämlich das sogenannte Lemma von Fan-Glicksberg-Hoffman [5]. Eine derartige Vorgehensweise kann einmal den Vorzug einer gewissen Ökonomie der eingesetzten Hilfsmittel geltend machen. Sie zeigt aber auch, daß das Existenzproblem für monotone Variationsungleichungen sich adäquat behandeln läßt durch Untersuchung einer geeignet gewählten Funktion $\varphi : B\times B\to\mathbb{R}$. Diese Funktion ist konvex im zweiten Argument und erfüllt ferner $\varphi(u,v)+\varphi(v,u)\le 0\ \ \forall u,v\in B$ sowie $\varphi(u,u)=0\ \ \forall u\in B$. Wir nennen derartige Funktionen *monoton-konvex*. Sie scheinen uns für das vorliegende Problem besser geeignet zu sein als die konkav-konvexen Funktionen, die in [4] zum gleichen Zweck herangezogen wurden.

Das bereits erwähnte Lemma von Fan-Glicksberg-Hoffman besagt:

FGH-Lemma. Sei Γ eine beliebige konvexe Menge, seien $f_i : \Gamma\to\mathbb{R}$ $(i=1,\dots,n)$ konvexe Funktionen mit der Eigenschaft, daß $\max_i f_i(x)\ge 0\ \ \forall x\in\Gamma$. Dann gibt es reelle Zahlen $\mu_i\ge 0$ $(i=1,\dots,n)$ mit $\Sigma_i\,\mu_i=1$, so daß $\Sigma_i\,\mu_i f_i(x)\ge 0\ \ \forall x\in\Gamma$.

Der *Beweis* ergibt sich unmittelbar aus dem Trennsatz im $\mathbb{R}^n$: Nach Voraussetzung ist $0\in\mathbb{R}^n$ kein innerer Punkt der konvexen Menge $D:=\{\,z\in\mathbb{R}^n \mid z_i\ge f_i(x)\ \ (i=1,\dots,n),\ x\in\Gamma\,\}$. Daher existiert im $\mathbb{R}^n$ ein lineares Funktional $\langle\mu,\cdot\rangle$ mit $\mu\ne 0$, so daß $\langle\mu,z\rangle\ge 0\ \ \forall z\in D$. Wegen $D+\mathbb{R}^n_+\subset D$ folgt $\mu\ge 0$. Man normiert auf $\Sigma_i\,\mu_i=1$ und wählt als $z\in D$ die Punkte $z=(f_1(x),\dots,f_n(x))$ mit $x\in\Gamma$. Dies liefert die Aussage des Lemmas. □

Der Satz von Browder-Minty findet sich in der Literatur in verschiedenen Varianten. Wir legen uns hier auf die folgende mengenwertige Fassung fest:

Satz 1 (Browder-Minty). Sei E ein reflexiver reeller Banach-Raum. Sei E^*, sein topologischer Dualraum, mit der schwachen* Topologie versehen. Sei $B\subset E$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Sei $\Phi : B\rightrightarrows E^*$ eine mengenwertige Abbildung mit $\Phi(u)\ne\emptyset\ \ \forall u\in B$, die den folgenden Bedingungen genügt:

(i) Φ ist monoton, d.h. $\langle u^*-v^*,u-v\rangle\ge 0\ \ \forall u,v\in B,\ \ \forall u^*\in\Phi(u),\ \ \forall v^*\in\Phi(v)$;

(ii) Φ ist hemistetig, d.h. die Abbildung $s\in[0,1]\rightrightarrows\Phi(u+s(v-u))$ ist oberhalbstetig in $s=0\ \ \forall u,v\in B$, und $\Phi(u)$ ist konvex und kompakt $\forall u\in B$;

(iii) Φ ist koerzitiv, d.h. $\exists\bar v\in B,\ \bar v^*\in\Phi(\bar v)$, so daß $\langle u^*-\bar v^*,u-\bar v\rangle\ge\gamma(\|u-\bar v\|)\cdot\|u-\bar v\|$ $\forall u\in B,\ \forall u^*\in\Phi(u)$, wobei $\gamma(s)\to\infty$ für $s\to\infty$.

Dann gibt es $u_o\in B$ und $u_o^*\in\Phi(u_o)$, so daß $\langle u_o^*,u-u_o\rangle\ge 0\ \ \forall u\in B$.

*) Universität Mannheim, Fakultät für Mathematik und Informatik, Schloß, D-6800 Mannheim 1

Um den Satz zu beweisen, arbeitet man mit einer Funktion $\varphi: B\times B\to\mathbb{R}$; dabei spielen folgende Bedingungen eine Rolle:

(B1) φ ist konvex und unterhalbstetig im 2. Argument, und es gilt $\varphi(u,u)=0 \quad \forall u\in B$.

(B2) φ ist monoton, d.h. $\varphi(u,v)+\varphi(v,u)\le 0 \quad \forall u,v\in B$.

(B3) φ ist radialstetig, d.h. die Abbildung $s\in[0,1]\mapsto\varphi(u+s(v-u),v)$ ist oberhalbstetig in $s=0 \quad \forall u,v\in B$.

(B4) φ ist koerzitiv, d.h. $\exists C\subset B$ kompakt und konvex, mit $\mathrm{core}_B C\ne\emptyset$, so daß zu jedem $u\in C\setminus\mathrm{core}_B C$ ein $v\in\mathrm{core}_B C$ existiert mit $\varphi(u,v)\le 0$ (hierbei ist $v\in\mathrm{core}_B C :\Leftrightarrow \forall w\in B\ \exists\lambda_o>0$, so daß $v+\lambda(w-v)\in C \quad \forall\lambda\in[0,\lambda_o]$).

(B5) Für beliebiges $u_o\in B$ gilt $\varphi(u_o,u)\ge 0 \quad \forall u\in B$ dann und nur dann, wenn ein Element $u_o^*\in\Phi(u_o)$ existiert, so daß $\langle u_o^*,u-u_o\rangle\ge 0 \quad \forall u\in B$.

<u>Hilfssatz 1.</u> Seien die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt. Sei E mit der schwachen Topologie versehen. Sei $\varphi: B\times B\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$\varphi(u,v) := \sup_{u^*\in\Phi(u)} \langle u^*,v-u\rangle. \tag{1}$$

Dann erfüllt φ die Bedingungen (B1) bis (B5).

Beweis.

(B1): Für festes $u\in B$ ist $\varphi(u,v)$ als Supremum einer Familie von in v konvexen und unterhalbstetigen Funktionen selbst konvex und unterhalbstetig in v. Offensichtlich gilt auch $\varphi(u,u)=0 \quad \forall u\in B$.

(B2): Wegen Eigenschaft (i) in Satz 1 gilt $0\ge\langle u^*,v-u\rangle+\langle v^*,u-v\rangle \quad \forall u,v\in B, \ \forall u^*\in\Phi(u), \forall v^*\in\Phi(v)$, also auch bei Supremumsbildung $0\ge\varphi(u,v)+\varphi(v,u) \quad \forall u,v\in B$. Insbesondere ist φ reellwertig.

(B3): Es gilt $\varphi(u+s(v-u),v) = (1-s)\cdot\sup_{z\in\Gamma(s)}\langle z,v-u\rangle$, wobei $\Gamma(s):=\Phi(u+s(v-u))$. Die Oberhalbstetigkeit folgt dann aus dem Maximumtheorem von Berge [1] wegen Eigenschaft (ii) in Satz 1.

(B4): Unter Verwendung von Eigenschaft (iii) in Satz 1 wähle man $R>0$ so groß, daß $\gamma(R)\ge\|\overline{v}^*\|$, und hierauf $C:=\{u\in B \mid \|u-\overline{v}\|\le R\}$. Dann ist C konvex und schwach kompakt, und $\overline{v}\in\mathrm{core}_B C$. Sei $u\in C\setminus\mathrm{core}_B C$. Dann ist $\|u-\overline{v}\|=R$, und es gilt für alle $u^*\in\Phi(u)$, daß

$$\begin{aligned}\langle u^*,\overline{v}-u\rangle &= \langle u^*-\overline{v}^*,\overline{v}-u\rangle+\langle\overline{v}^*,\overline{v}-u\rangle\\ &\le -\gamma(\|u-\overline{v}\|)\cdot\|u-\overline{v}\|+\|\overline{v}^*\|\cdot\|u-\overline{v}\|\\ &= R\cdot(-\gamma(R)+\|\overline{v}^*\|)\le 0.\end{aligned}$$

Durch Supremumsbildung folgt $\varphi(u,\overline{v})\le 0$. Der Punkt $\overline{v}\in\mathrm{core}_B C$ hat also für alle $u\in C\setminus\mathrm{core}_B C$ die geforderte Eigenschaft.

(B5): Aus $\langle u_o^*,u-u_o\rangle\ge 0$ mit $u_o^*\in\Phi(u_o)$ folgt trivialerweise $\varphi(u_o,u)\ge 0$. Sei nun umgekehrt $\varphi(u_o,u)\ge 0 \quad \forall u\in B$. Angenommen, es existiert kein $u_o^*\in\Phi(u_o)$ mit $\langle u_o^*,u-u_o\rangle\ge 0 \quad \forall u\in B$. Dann hat die Familie der abgeschlossenen Mengen

$$F(u,\varepsilon) := \{z\in\Phi(u_o) \mid \langle z,u-u_o\rangle\ge-\varepsilon\} \quad (u\in B,\ \varepsilon>0)$$

leeren Durchschnitt über $\Phi(u_o)$. Da $\Phi(u_o)$ als kompakt vorausgesetzt ist, gibt es dann endlich viele $u_i\in B$, $\varepsilon_i>0$ $(i=1,\dots,n)$, so daß $\bigcap_i F(u_i,\varepsilon_i)=\emptyset$. Mit $\overline{\varepsilon}:=\min_i\varepsilon_i$ folgt hieraus $\min_i\langle z,u_i-u_o\rangle\le-\overline{\varepsilon} \quad \forall z\in\Phi(u_o)$. Aus dem FGH-Lemma (übertragen auf konkave Funktionen) folgt dann die Existenz von $\mu_i\ge 0$ $(i=1,\dots,n)$ mit $\Sigma_i\,\mu_i=1$, so daß $\Sigma_i\,\mu_i\langle z,u_i-u_o\rangle\le-\overline{\varepsilon} \quad \forall z\in\Phi(u_o)$. Für $\overline{u}:=\Sigma_i\,\mu_i u_i\in B$ gilt also $\langle z,\overline{u}-u_o\rangle\le-\overline{\varepsilon} \quad \forall z\in\Phi(u_o)$, und damit auch $\varphi(u_o,\overline{u}) \le -\overline{\varepsilon}$. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung $\varphi(u_o,u) \ge 0 \ \ \forall u \in B$. □

Bemerkung. Es sei

$$\partial_2\varphi(u,u) := \{ f \in E^* \mid \varphi(u,v) - \varphi(u,u) \ge \langle f,v-u\rangle \ \ \forall v \in B \} \qquad (u \in B),$$

$$N_B(u) := \{ g \in E^* \mid \langle g,v-u\rangle \ge 0 \ \ \forall v \in B \} \qquad (u \in B).$$

Ersetzt man Φ durch $\Phi - f$, wobei $f \in E^*$, so geht $\varphi(u,v)$ gemäß (1) über in $\varphi(u,v) - \langle f,v-u\rangle$. Die Voraussetzungen (i), (ii), (iii) von Satz 1 vererben sich auf $\Phi - f$. Daher erhält man aus der Gültigkeit von (B5) sofort die weitergehende Aussage, daß

$$(\Phi - N_B)(u) = \partial_2\varphi(u,u) \quad \forall u \in B. \tag{2}$$

Der *Beweis* von Satz 1 ergibt sich nun sofort aus dem folgenden Satz 2 in Verbindung mit Hilfssatz 1.

Satz 2. Sei B eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge in einem reellen topologischen Vektorraum E. Sei $\varphi: B \times B \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die die Bedingungen (B1) - (B4) erfüllt. Dann gibt es ein $u_o \in B$, so daß $\varphi(u_o,u) \ge 0 \ \ \forall u \in B$.

Beweis.

1. Sei C die Menge aus Voraussetzung (B4), und seien $x_i \in C$ $(i=1,\dots,n)$ beliebig gewählt. Wir zeigen die Existenz von $\xi \in C$, so daß $\varphi(x_i,\xi) \le 0$ $(i=1,\dots,n)$. Sei $\Sigma^n := \{ \lambda \in \mathbb{R}^n \mid \lambda \ge 0,\ \Sigma_i\ \lambda_i = 1 \}$. Für $i = 1,\dots,n$ sei $f_i(\lambda) := \varphi(x_i, \Sigma_{j=1}^n\ \lambda_j x_j)$ $(\lambda \in \Sigma^n)$. Die Funktionen $f_i(\cdot)$ sind konvex und unterhalbstetig. Die unterhalbstetige Funktion $\max_i\ f_i(\lambda)$ nimmt ihr Minimum auf der kompakten, konvexen Menge Σ^n an, etwa in $\overline{\lambda} \in \Sigma^n$. Sei dann $\alpha := \max_i\ f_i(\overline{\lambda}) = \min_{\lambda\in\Sigma^n}\ \max_i\ f_i(\lambda)$. Wegen $\max_i\ (f_i(\lambda) - \alpha) \ge 0 \ \ \forall \lambda \in \Sigma^n$ folgt nach dem FGH-Lemma die Existenz von $\overline{\mu} \in \Sigma^n$, so daß $\Sigma_i\ \overline{\mu}_i f_i(\lambda) - \alpha \ge 0 \ \ \forall \lambda \in \Sigma^n$, insbesondere also $\alpha \le \Sigma_i\ \overline{\mu}_i f_i(\overline{\mu})$. Es gilt aber wegen der Konvexität von φ und wegen (B2) $\Sigma_i\ \overline{\mu}_i f_i(\overline{\mu}) = \Sigma_i\ \overline{\mu}_i \varphi(x_i, \Sigma_j\ \overline{\mu}_j x_j) \le \Sigma_{i,j}\ \overline{\mu}_i\overline{\mu}_j \varphi(x_i,x_j) = \frac{1}{2}\ \Sigma_{i,j}\ \overline{\mu}_i\overline{\mu}_j (\varphi(x_i,x_j) + \varphi(x_j,x_i)) \le 0$. Somit ist $\alpha \le 0$. Es folgt wegen $\max_i\ f_i(\overline{\lambda}) = \alpha$, daß $f_i(\overline{\lambda}) \le 0$ $(i=1,\dots,n)$, also $\varphi(x_i, \Sigma_j\ \overline{\lambda}_j x_j) \le 0$ $(i=1,\dots,n)$. Setzt man $\xi := \Sigma_j\ \overline{\lambda}_j x_j$, so ist $\xi \in C$, und man hat $\varphi(x_i,\xi) \le 0$ $(i=1,\dots,n)$.
2. Sei $S(x) := \{ \xi \in C \mid \varphi(x,\xi) \le 0 \}$ $(x \in C)$. Es wurde gezeigt, daß je endlich viele dieser Mengen nichtleeren Durchschnitt haben. Weil die Mengen $S(x)$ abgeschlossen in der kompakten Menge C sind, hat dann die gesamte Familie nichtleeren Durchschnitt. Es gibt also ein $u_o \in C$, so daß $\varphi(x,u_o) \le 0 \ \ \forall x \in C$.
3. Wir zeigen nun, daß mit diesem $u_o \in C$ auch gilt $\varphi(u_o,u) \ge 0 \ \ \forall u \in C$. Sei $u \in C$ beliebig, $x(t) := u_o + t(u-u_o)$, $0 < t \le 1$. Es ist $x(t) \in C$, und daher gilt, wie bereits gezeigt, $\varphi(x(t),u_o) \le 0$. Aus (B1) folgt ferner $\varphi(x(t),x(t)) = 0$. Aus der Konvexität von φ im 2. Argument folgt dann $0 = \varphi(x(t),x(t)) \le t\cdot\varphi(x(t),u) + (1-t)\cdot\varphi(x(t),u_o) \le t\cdot\varphi(x(t),u)$. Division durch t und $t \to 0$ liefert wegen (B3) $0 \le \varphi(u_o,u)$. Somit gilt $\varphi(u_o,u) \ge 0 \ \ \forall u \in C$.
4. Nun zeigen wir $\varphi(u_o,u) \ge 0 \ \ \forall u \in B$. Angenommen, es gäbe ein $u \in B \setminus C$, so daß $\varphi(u_o,u) < 0$. Dann gibt es ein $v_o \in \mathrm{core}_B C$, so daß $\varphi(u_o,v_o) \le 0$ (ist $u_o \in \mathrm{core}_B C$, so wähle man $v_o := u_o$; ist $u_o \notin \mathrm{core}_B C$, so ergibt sich v_o aus (B4)). Es folgt, weil $\varphi(u_o,\cdot)$ konvex ist, $\varphi(u_o,\xi) < 0 \ \ \forall \xi \in (v_o,u]$. Wegen $v_o \in \mathrm{core}_B C$ ist aber $C \cap (v_o,u] \ne \emptyset$. Somit gäbe es auch ein $\xi \in C$ mit $\varphi(u_o,\xi) < 0$. Dies ist ein Widerspruch zum bereits Bewiesenen. Es gilt also $\varphi(u_o,u) \ge 0 \ \ \forall u \in B$. Damit ist der Beweis vollständig. □

Bemerkung. Seien B und E wie im Satz 2, und sei $\varphi: B\times B \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die den Bedingungen (B1), (B2) genügt. Dann ist jede der folgenden Bedingungen (K1) bis (K4) hinreichend für die Gültigkeit der Koerzitivitätsbedingung (B4) (wobei wir bei (K1) voraussetzen wollen, daß $\overline{v}$ nicht bereits der Folgerung von Satz 2 genügt):

(K1) Es existiere $\overline{v}\in B$ derart, daß die Menge $K:=\{u\in B \mid \varphi(\overline{v},u)\leq 0\}$ kompakt ist.

(K2) Es sei E ein reflexiver Banach-Raum, und es existiere $\overline{v}\in B$ derart, daß $\varphi(u,\overline{v})+\varphi(\overline{v},u)\leq -\gamma(\|u-\overline{v}\|)\cdot\|u-\overline{v}\|\quad \forall u\in B$, wobei $\gamma(s)\to\infty$ für $s\to\infty$.

(K3) Es sei E ein reflexiver Banach-Raum, und es existiere $\overline{v}\in B$ derart, daß $\inf_{u\in B}\varphi(\overline{v},u)>-\infty$ und daß $\varphi(u,\overline{v})+\varphi(\overline{v},u)\leq -\gamma\cdot\|u-\overline{v}\|\quad \forall u\in B$ mit $\|u-\overline{v}\|\geq 1$, wobei $\gamma>0$.

(K4) Es sei $E=\mathbb{R}^n$; φ sei stetig in jedem der beiden Argumente, und es gelte $\varphi(u,u+\lambda(v-u))=\lambda\varphi(u,v)\quad\forall u,v\in B,\ \forall\lambda\in[0,1]$; ferner existiere $\overline{v}\in B$ derart, daß $\inf_{u\in B}\varphi(\overline{v},u)>-\infty$ und daß $\varphi(u,\overline{v})+\varphi(\overline{v},u)<0\quad\forall u\in B,\ u\neq\overline{v}$.

Beweis. Wir zeigen, daß jede dieser Bedingungen (B4) impliziert.

(K1): Falls $\varphi(\overline{v},u)\geq 0\quad\forall u\in K$, so liefert die Definition von K, daß $\varphi(\overline{v},u)\geq 0\quad\forall u\in B$. Schließt man diesen Fall aus, so gibt es also ein $u^*\in K$ mit $\varphi(\overline{v},u^*)\leq -\varepsilon<0$. Man setzt $C:=\{u\in B \mid \varphi(\overline{v},u)\leq 1\}$. Dann ist C konvex und abgeschlossen. Ferner gilt $C-u^*\subset\varepsilon^{-1}(1+\varepsilon)\cdot(K-u^*)$; daher ist C kompakt. Wegen $\varphi(\overline{v},\overline{v})=0$ ist $\overline{v}\in\operatorname{core}_B C$. Dann gilt $\varphi(u,\overline{v})\leq-\varphi(\overline{v},u)\leq 0$ für alle $u\in B$ mit $\varphi(\overline{v},u)=1$, mithin für alle $u\in C\setminus\operatorname{core}_B C$. (B4) ist erfüllt.

(K2): Wir können annehmen, daß E mit der schwachen Topologie versehen ist. Sei $\alpha:=\inf\{\varphi(\overline{v},u) \mid u\in B,\ \|u-\overline{v}\|\leq 1\}$. Dann ist $-\infty<\alpha\leq 0$, und es gilt für alle $u\in B$ mit $\|u-\overline{v}\|\geq 1$, daß $\varphi(\overline{v},u)\geq\alpha\cdot\|u-\overline{v}\|$ und damit auch $\varphi(u,\overline{v})\leq\|u-\overline{v}\|\cdot(-\alpha-\gamma(\|u-\overline{v}\|))$. Man wählt $R\geq 1$ so groß, daß $-\alpha-\gamma(R)\leq 0$, und setzt $C:=\{u\in B \mid \|u-\overline{v}\|\leq R\}$. Es ist $\overline{v}\in\operatorname{core}_B C$, und es gilt $\varphi(u,\overline{v})\leq 0$ für alle $u\in B$ mit $\|u-\overline{v}\|=R$, mithin für alle $u\in C\setminus\operatorname{core}_B C$. (B4) ist erfüllt.

(K3): Wegen $\varphi(\overline{v},u)\geq M\quad\forall u\in B$ folgt für alle $u\in B$ mit $\|u-\overline{v}\|\geq 1$, daß $\varphi(u,\overline{v})\leq-\varphi(\overline{v},u)-\gamma\cdot\|u-\overline{v}\|\leq -M-\gamma\cdot\|u-\overline{v}\|$. Man wählt $R\geq 1$ so groß, daß $-M-\gamma R\leq 0$, und $C:=\{u\in B \mid \|u-\overline{v}\|\leq R\}$. Dann ist wieder (B4) erfüllt.

(K4): Sei $\alpha:=\max\{\varphi(u,\overline{v})+\varphi(\overline{v},u) \mid u\in B,\ \|u-\overline{v}\|=1\}$. Es ist $\alpha<0$, und für alle $u\in B$ mit $\|u-\overline{v}\|\geq 1$ gilt dann $\varphi(u,\overline{v})+\varphi(\overline{v},u)\leq\alpha\cdot\|u-\overline{v}\|$. Sei nämlich $u\in B$ mit $k:=\|u-\overline{v}\|\geq 1$. Setze $w:=\frac{1}{k}u+\frac{k-1}{k}\overline{v}$. Dann ist

$$0=\frac{k^2}{k-1}\varphi(w,w)\leq\frac{k^2}{k-1}\left(\frac{1}{k}\varphi(w,u)+\frac{k-1}{k}\varphi(w,\overline{v})\right)=\frac{k}{k-1}\varphi(w,u)+k\varphi(w,\overline{v})=:L.$$

Wegen $\overline{v}=u+\frac{k}{k-1}(w-u)$, $u=\overline{v}+k(w-\overline{v})$, $\|w-\overline{v}\|=1$ folgt dann $\varphi(u,\overline{v})+\varphi(\overline{v},u)=\frac{k}{k-1}\varphi(u,w)+k\varphi(\overline{v},w)$

$$\leq\frac{k}{k-1}\varphi(u,w)+k\varphi(\overline{v},w)+L=\frac{k}{k-1}(\varphi(u,w)+\varphi(w,u))+k(\varphi(\overline{v},w)+\varphi(w,\overline{v}))\leq k(\varphi(\overline{v},w)+\varphi(w,\overline{v}))$$

$\leq k\alpha$. Damit befindet man sich wieder in der Situation von (K3). □

Im Zusammenhang mit (K3) und (K4) verweisen wir auf den Fall, daß B ein konvexer Kegel ist mit zugehörigem Polarkegel $B^*:=\{u^*\in E^* \mid \langle u^*,u\rangle\geq 0\quad\forall u\in B\}$, und $\varphi(u,v):=\langle\Phi(u),v-u\rangle$ $(\Phi: B\to E^*)$. In diesem Fall ist die Bedingung $\overline{v}\in B$, $\inf_{u\in B}\varphi(\overline{v},u)>-\infty$ äquivalent zu $\overline{v}\in B$, $\Phi(\overline{v})\in B^*$, während die Aussage $u_o\in B$, $\varphi(u_o,u)\geq 0\quad\forall u\in B$ (die in der Konklusion von Satz 2 auftritt) äquivalent ist zu $u_o\in B$, $\Phi(u_o)\in B^*$, $\langle\Phi(u_o),u_o\rangle=0$ (Komplementaritätsbedingung).

Der folgende Satz kommt mit einer recht schwachen Koerzitivitätsbedingung aus.

<u>Satz 3.</u> Sei $E = E^*$ ein Hilbert-Raum, sei $B \subset E$ abgeschlossen, konvex, nichtleer. $\varphi : B \times B \to \mathbb{R}$ erfülle die Bedingungen (B1), (B2), (B3) sowie $\varphi(u,v) + \varphi(v,u) \le -p(\| u-v \|) \cdot \| u-v \|^2 \quad \forall u,v \in B$, wobei $p(s) > 0$ für $s > 0$ und monoton nicht wachsend ist. Dann gibt es ein $u_o \in B$ mit $\varphi(u_o,u) \ge 0 \quad \forall u \in B$.

Beweis. Sei $f \in E$ beliebig. Mit $\psi_f(u,v) := \varphi(u,v) + \langle u,v-u\rangle - \langle f,v-u\rangle$ gilt, daß ψ_f die Voraussetzungen (B1), (B2), (B3) erfüllt. Weiter gilt $\psi_f(u,v) + \psi_f(v,u) = \varphi(u,v) + \varphi(v,u) + \langle u-v,v-u\rangle \le -\| u-v \|^2$. Somit erfüllt ψ_f auch (K2) und damit (B4). Satz 2 ist auf ψ_f anwendbar und liefert ein $u \in B$ mit

$$\psi_f(u,v) \ge 0 \quad \forall v \in B. \tag{3}$$

u ist eindeutig. Sei $T : E \to B$ die Abbildung, die jedem $f \in E$ das $u \in B$ gemäß (3) zuordnet. Ist $u_1 = T(f_1)$, $u_2 = T(f_2)$, so gilt insbesondere

$$0 \le \psi_{f_1}(u_1,u_2) + \psi_{f_2}(u_2,u_1) = \varphi(u_1,u_2) + \varphi(u_2,u_1) + \langle u_1-u_2,u_2-u_1\rangle + \langle f_1-f_2,u_1-u_2\rangle$$
$$\le (-p(\| u_1-u_2 \|) \cdot \| u_1-u_2 \| - \| u_1-u_2 \| + \| f_1-f_2 \|) \cdot \| u_1-u_2 \|.$$

Hieraus folgt mit $q(\cdot) := (1 + p(\cdot))^{-1}$, daß $\| u_1-u_2 \| \le q(\| u_1-u_2 \|) \cdot \| f_1-f_2 \|$. Wegen $q(\cdot) \le 1$ folgt hieraus $\| u_1-u_2 \| \le \| f_1-f_2 \|$, und weil $q(\cdot)$ monoton nicht fallend ist, folgt dann $\| u_1-u_2 \| \le q(\| f_1-f_2 \|) \cdot \| f_1-f_2 \|$. Insgesamt gilt dann $\| T(f_1)-T(f_2) \| \le q(\| f_1-f_2 \|) \cdot \| f_1-f_2 \|$ mit $q(s) < 1$ für $s > 0$. $T : B \to B$ genügt also der abgeschwächten Kontraktionsvoraussetzung des Fixpunktsatzes aus [2] und hat damit einen Fixpunkt $u_o = T(u_o)$. Mit $u := f := u_o$ besagt (3) aber gerade $\varphi(u_o,v) \ge 0 \quad \forall v \in B$. □

Im Zusammenhang mit dem Satz von Browder-Minty wird häufig anstelle der Hemistetigkeit von Φ maximale Monotonie vorausgesetzt. Wir gehen kurz auf diesen Fall ein.

Eine monotone Abbildung $\Phi : B \rightrightarrows E^*$ heißt bekanntlich maximal monoton über B, wenn aus $v \in B$, $v^* \in E^*$ und $\langle u^*-v^*,u-v\rangle \ge 0 \quad \forall u \in B, \ \forall u^* \in \Phi(u)$ folgt, daß $v^* \in \Phi(v)$. Dies legt für eine Funktion $\varphi : B \times B \to \mathbb{R}$, die den Bedingungen (B1), (B2) genügt, die folgende *Definition* nahe:

Die Funktion $\varphi : B \times B \to \mathbb{R}$ heißt maximal monoton, wenn für alle $v \in B$ und $v^* \in E^*$ aus $\varphi(u,v) + \langle v^*,u-v\rangle \le 0 \quad \forall u \in B$ folgt, daß $\varphi(v,u) + \langle v^*,v-u\rangle \ge 0 \quad \forall u \in B$.

Seien nun B und E wie im Satz 2, und $\varphi : B \times B \to \mathbb{R}$ genüge den Bedingungen (B1), (B2). Wir definieren $T_\varphi : B \rightrightarrows E^*$ als $T_\varphi(u) := \partial_2\varphi(u,u)$. Wegen $\varphi(u,v) \ge \langle u^*,v-u\rangle \quad \forall u \in B, \ \forall u^* \in T_\varphi(u)$ folgt sofort, daß T_φ monoton über B ist. Ist T_φ maximal monoton über B, so ist φ maximal monoton im Sinne der obigen Definition. In der Tat: Aus $\varphi(u,v) + \langle v^*,u-v\rangle \le 0 \quad \forall u \in B$ folgt $\langle u^*-v^*,u-v\rangle \ge 0 \quad \forall u \in B, \ \forall u^* \in T_\varphi(u)$, hieraus folgt dann $v^* \in T_\varphi(v)$, und hieraus $\varphi(v,u) + \langle v^*,v-u\rangle \ge 0 \quad \forall u \in B$. □

Ferner ist φ maximal monoton, wenn (B3) erfüllt ist. In der Tat: Die Bedingungen (B1), (B2), (B3) vererben sich auf die Funktion $\psi_{v^*}(u,v) := \varphi(u,v) + \langle v^*,u-v\rangle$, und aus $\psi_{v^*}(u,v) \le 0 \quad \forall u \in B$ folgt dann wie im Schritt 3 des Beweises von Satz 2, daß $\psi_{v^*}(v,u) \ge 0 \quad \forall u \in B$. □

Ist $E = E^*$ ein Hilbert-Raum, so sieht man auch leicht, daß aus (B1), (B2), (B3) die maximale Monotonie von T_φ folgt. In der Tat: Sei $v \in B$, $v^* \in E$ so, daß

$$(*) \qquad \langle u^*-v^*,u-v\rangle \ge 0 \quad \forall u \in B, \ \forall u^* \in T_\varphi(u).$$

Setze $f := v + v^*$ und $\psi_f(u,w) := \varphi(u,w) + \langle u,w-u\rangle - \langle f,w-u\rangle$ $(u,w \in B)$. Es folgt wie im Beweis zu Satz 3 - siehe (3) - die Existenz von $u_o \in B$, so daß $\psi_f(u_o,w) \geq 0 \ \forall w \in B$, also

$$(**) \qquad \varphi(u_o,w) + \langle u_o, w-u_o\rangle - \langle v+v^*, w-u_o\rangle \geq 0 \ \ \forall w \in B.$$

Hieraus folgt $-u_o + v + v^* \in T_\varphi(u_o)$. Man wählt in (*) $u := u_o$ und $u^* := -u_o + v + v^* \in T_\varphi(u)$ und erhält $0 \leq \langle v-u_o, u_o-v\rangle = -\| u_o - v \|^2$. Es ist also $u_o = v$, und dies in (**) eingesetzt ergibt $\varphi(v,w) - \langle v^*, w-v\rangle \geq 0 \ \ \forall w \in B$, also $v^* \in T_\varphi(v)$. □

Es gilt nun die folgende Variante zu Satz 2.

Satz 4. Seien B und E wie im Satz 2. $\varphi: B\times B \to \mathbb{R}$ genüge den Bedingungen (B1), (B2), (K1), ferner sei φ maximal monoton. Dann gibt es ein $u_o \in B$, so daß $\varphi(u_o,u) \geq 0 \ \ \forall u \in B$.

Beweis. Wir erwähnen nur die Änderungen, die im Beweis zu Satz 2 vorgenommen werden müssen. Im Schritt 1 zeigt man jetzt, daß für je endlich viele Punkte $x_i \in B$ $(i=1,\ldots,n)$, unter denen der Punkt $\overline{v}$ aus Voraussetzung (K1) enthalten sei, ein $\xi \in B$ existiert mit $\varphi(x_i,\xi) \leq 0$ $(i=1,\ldots,n)$. Aus $\varphi(\overline{v},\xi) \leq 0$ folgt insbesondere $\xi \in K$, K aus Voraussetzung (K1). In Schritt 2 erhält man dann wegen der Kompaktheit von K ein $u_o \in K$, so daß $\varphi(x,u_o) \leq 0$ $\forall x \in B$. Hieraus folgt im Schritt 3 unmittelbar $\varphi(u_o,u) \geq 0 \ \ \forall u \in B$ aufgrund der maximalen Monotonie von φ. Schritt 4 entfällt. □

Seien schließlich B und E wie im Satz 1. Sei $\Phi: B \rightrightarrows E^*$ eine Abbildung mit $\Phi(u) \neq \emptyset$ $\forall u \in B$, die der Bedingung (i) aus Satz 1 genügt. Sei $\Phi_B(u) := (\Phi - N_B)(u)$ für $u \in B$, $\varphi: B\times B \to \mathbb{R}$ sei durch (1) definiert, T_φ wie zuvor. Man sieht unmittelbar, daß dann auch $\varphi(u,v) = \sup\limits_{u^*\in\Phi_B(u)} \langle u^*, v-u\rangle$, und $\Phi_B(u) \subset T_\varphi(u)$. Ferner ist T_φ monoton, weil φ die Bedingungen (B1), (B2) erfüllt.

Es gilt nun: Wenn Φ der Bedingung (ii) aus Satz 1 genügt, oder wenn Φ_B maximal monoton über B ist, dann ist $\Phi_B(u) = T_\varphi(u) \ \ \forall u \in B$, und T_φ ist maximal monoton über B (insbesondere also φ maximal monoton). *Beweis*. Wenn Φ der Bedingung (ii) genügt, so genügt φ, wie im Beweis von Hilfssatz 1 gezeigt, der Bedingung (B3), und es gilt die Aussage (2), also $\Phi_B(u) = T_\varphi(u) \ \ \forall u \in B$. Um die maximale Monotonie von T_φ zu zeigen, sei $v \in B$, $v^* \in E^*$ mit $\langle u^*-v^*, u-v\rangle \geq 0 \ \ \forall u \in B, \ \forall u^* \in T_\varphi(u)$. Hieraus folgt, weil jetzt $\varphi(u,v) = \sup\limits_{u^*\in T_\varphi(u)} \langle u^*, v-u\rangle$, daß $\psi_{v^*}(u,v) := \varphi(u,v) + \langle v^*, u-v\rangle \leq 0 \ \ \forall u \in B$. Weil ψ_{v^*} ebenfalls der Bedingung (B3) genügt, folgt wie im Schritt 3 des Beweises zu Satz 2, daß dann auch $\psi_{v^*}(v,u) = \varphi(v,u) + \langle v^*, v-u\rangle \geq 0 \ \ \forall u \in B$. Somit ist $v^* \in T_\varphi(v)$, und T_φ ist maximal monoton. Ist Φ_B maximal monoton, so folgt die Behauptung sofort aus $\Phi_B(u) \subset T_\varphi(u)$ und der Monotonie von T_φ. □

Minty [6] hat sein Resultat ursprünglich mittels eines Satzes von Kirszbraun über die Fortsetzbarkeit einer Lipschitz-stetigen Abbildung bewiesen. Der folgende Satz enthält den Satz von Kirszbraun als Sonderfall und läßt sich ebenfalls mittels des FGH-Lemmas beweisen. conv A bezeichne im folgenden die konvexe Hülle von A.

Satz 5. Sei X eine konvexe Untermenge eines reellen topologischen Vektorraums. Seien $x_i \in X$ $(i=1,\ldots,n)$. Seien $\varphi: X\times X \to \mathbb{R}$ und $\psi: X\times X \to \mathbb{R}$ Funktionen mit folgenden Eigenschaften: φ sei im 2. Argument konvex und unterhalbstetig; es gelte $\varphi(x_i,x_j) + \varphi(x_j,x_i) \leq 0$ $(i,j=1,\ldots,n)$; ψ sei im 2. Argument konvex und unterhalbstetig und im 1. Argument konkav; es gelte $\psi(x,x) \leq 0 \ \ \forall x \in X$. Dann existiert ein

$\xi \in \operatorname{conv}\{x_1,\dots,x_n\}$, so daß $\varphi(x_i,\xi)+\psi(x_i,\xi)\le 0$ $(i=1,\dots,n)$.

Beweis. Sei $\Sigma^n := \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid \lambda \ge 0,\ \Sigma_i\, \lambda_i = 1\}$. Für $i=1,\dots,n$ definiert man auf Σ^n konvexe, unterhalbstetige Funktionen $f_i(\lambda) := \varphi(x_i,\Sigma_j\, \lambda_j x_j)+\psi(x_i,\Sigma_j\, \lambda_j x_j)$ $(\lambda\in\Sigma^n)$ und hat dann die Existenz von $\bar\lambda \in \Sigma^n$ zu zeigen, so daß $\max_i f_i(\bar\lambda)\le 0$. Dies folgt aus dem FGH-Lemma analog zum Schritt 1 des Beweises von Satz 2. Die hierbei benötigte Ungleichung $\Sigma_i\, \mu_i f_i(\mu)\le 0$ für beliebiges $\mu\in\Sigma^n$ ergibt sich jetzt folgendermaßen:

$$\Sigma_i\, \mu_i f_i(\mu) = \Sigma_i\, \mu_i\varphi(x_i,\Sigma_j\, \mu_j x_j) + \Sigma_i\, \mu_i\psi(x_i,\Sigma_j\, \mu_j x_j) \le$$
$$\le \Sigma_{i,j}\, \mu_i\mu_j\varphi(x_i,x_j) + \psi(\Sigma_i\, \mu_i x_i,\Sigma_j\, \mu_j x_j) =$$
$$= \frac{1}{2}\Sigma_{i,j}\, \mu_i\mu_j(\varphi(x_i,x_j)+\varphi(x_j,x_i)) + \psi(\Sigma_i\, \mu_i x_i,\Sigma_i\, \mu_i x_i) \le 0. \quad \square$$

Seien nun $Y := \mathbb{R}^k$, $Z := \mathbb{R}^\ell$, versehen mit der euklidischen Norm. Seien $(y_i,z_i)\in Y\times Z$ $(i=1,\dots,n)$ und $y_o\in Y$. Man setzt im vorangehenden Satz $X := Y\times Z$, $x_i := (y_i,z_i)\in X$ $(i=1,\dots,n)$ und definiert mit $x=(y,z)\in X$ und $\xi=(\eta,\zeta)\in X$ die Funktionen φ und ψ auf $X\times X$ folgendermaßen:

$$\varphi(x,\xi) := \|z\|^2 - \|y\|^2 - \langle z,\zeta\rangle + \langle y,\eta\rangle,$$
$$\psi(x,\xi) := \|\zeta\|^2 - \langle z,\zeta\rangle - \langle y,\eta\rangle + 2\langle y,y_o\rangle - \|y_o\|^2.$$

Dann ist $\varphi(x,\xi)+\varphi(\xi,x) = \|z-\zeta\|^2 - \|y-\eta\|^2$, $\varphi(x,\xi)+\psi(x,\xi) = \|z-\zeta\|^2 - \|y-y_o\|^2$, insbesondere also $\varphi(x_i,x_j)+\varphi(x_j,x_i) = \|z_i-z_j\|^2 - \|y_i-y_j\|^2$, $\varphi(x_i,\xi)+\psi(x_i,\xi) = \|z_i-\zeta\|^2 - \|y_i-y_o\|^2$. Damit erhält man aus Satz 5 das folgende Resultat:

> Für $(y_i,z_i)\in Y\times Z$ $(i=1,\dots,n)$ gelte $\|z_i-z_j\|\le\|y_i-y_j\|$ $(i,j=1,\dots,n)$. Dann gibt es zu jedem $y_o\in Y$ ein $\zeta\in\operatorname{conv}\{z_1,\dots,z_n\}$, so daß $\|z_i-\zeta\|\le\|y_i-y_o\|$ $(i=1,\dots,n)$.

Dies ist der *Satz von Kirszbraun* über die Fortsetzbarkeit einer Lipschitz-stetigen Abbildung. Man vergleiche hierzu auch [3].

Ist $Z=Y^*$, und setzt man mit den gleichen Verabredungen wie zuvor $\varphi(x,\xi) := -\langle z-\zeta,y\rangle$, $\psi(x,\xi) := \langle z-\zeta,y_o\rangle$, so ist $\varphi(x,\xi)+\varphi(\xi,x) = -\langle z-\zeta,y-\eta\rangle$ und $\varphi(x,\xi)+\psi(x,\xi) = -\langle z-\zeta,y-y_o\rangle$. Damit liefert Satz 5 das folgende Resultat:

> Für $(y_i,z_i)\in Y\times Y^*$ $(i=1,\dots,n)$ gelte $\langle z_i-z_j,y_i-y_j\rangle\ge 0$ $(i,j=1,\dots,n)$. Dann gibt es zu jedem $y_o\in Y$ ein $\zeta\in\operatorname{conv}\{z_1,\dots,z_n\}$, so daß $\langle z_i-\zeta,y_i-y_o\rangle\ge 0$ $(i=1,\dots,n)$.

Dies ist der *Satz von Debrunner-Flor* über die Fortsetzbarkeit einer monotonen Abbildung.

[1] C. Berge: Espaces topologiques. Fonctions multivoques. Dunod, Paris, 1966^2.

[2] D.W. Boyd, J.S.W. Wong: On nonlinear contractions. Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), 458-464.

[3] S. Karamardian: A further generalization of Kirszbraun's theorem. In: Inequalities III, edited by O. Shisha. Academic Press, New York, 1972.

[4] E. Krauss: A representation of maximal monotone operators by saddle functions. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 30 (1985), 823-837.

[5] O.L. Mangasarian: Nonlinear Programming. McGraw-Hill, New York, 1969.

[6] G.J. Minty: Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space. Duke Math. J. 29 (1962), 341-346.

[7] J. Naas, W. Tutschke: Große Sätze und schöne Beweise der Mathematik. Identität des Schönen, Allgemeinen, Anwendbaren. Akademie-Verlag, Berlin, 1986.