**Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie,
Portfolio Management und Versicherungswirtschaft**

Nr. 156

Finanzmathematische Überlegungen zur Prüfung der marktbezogenen Gewährleistung des Rechnungszinses in der PKV

von
Peter Albrecht

Mannheim 01/2004

Finanzmathematische Überlegungen zur Prüfung der marktbezogenen Gewährleistung des Rechnungszinses in der PKV

Prof. Dr. Peter Albrecht, Universität Mannheim

1. Einleitung

Die vorliegende Ausarbeitung hat als Zielsetzung die Erarbeitung eines methodischen Instrumentariums, das als Grundlage für die Prüfung der marktbezogenen[1] Gewährleistung des (Höchst-)Rechnungszinses[2] in der Privaten Krankenversicherung verwendet werden kann. Dabei wird im Rahmen der weiteren Überlegungen in einschränkender Weise ausschließlich auf das Kapitalanlageergebnis als Beurteilungsgrundlage abgestellt[3]. Hierzu werden[4] zwei Konzeptionen für eine gewährleistbare Renditehöhe aus der modernen Finanzmathematik für die Zwecke der Untersuchung adaptiert. Es sind dies der Value-at-Risk (VaR) sowie der Conditional Value-at-Risk (CVaR). Der VaR stellt (rein) auf die Unterschreitungswahrscheinlichkeit bzw. –häufigkeit ab und ist vor allem geeignet, das risikopolitische Instrumentarium im Hinblick auf eine "normale" Volatilität auf den Kapitalmärkten abzugleichen. Der CVaR stellt ab auf die mittlere Rendite in Extremszenarien und ist dazu geeignet, das risikopolitische Instrumentarium im Hinblick auf Worst Case- bzw. Stress-Ereignisse auf den Kapitalmärkten abzustimmen. Der CVaR bzw. seine entsprechende Adaption kann insbesondere als Ergebnis eines probabilistischen Stress-Tests[5] verstanden werden.

---

1 Betrachtet werden somit nur die Verhältnisse auf der Ebene des Marktdurchschnitts der privaten Krankenversicherer. Die Analyse auf Einzelunternehmensebene bleibt einer weiteren Ausarbeitung vorbehalten.

2 Der Rechnungszins ist ein zentrales Element der Rechnungsgrundlagen in der privaten Krankenversicherung und wird aktuell geregelt in Par. 12(1) Versicherungsaufsichtsgesetz (VAG) sowie im Rahmen der Verordnung über die versicherungsmathematischen Methoden zur Prämienkalkulation und zur Berechnung der Alterungsrückstellung in der privaten Krankenversicherung (Kalkulationsverordnung – KalV). Gemäß Par. 3 KalV ist der Rechnungszins in einheitlicher Höhe für die Prämienberechnung und Kalkulation der Alterungsrückstellung zu verwenden. Gemäß Par. 4 KalV darf der Rechnungszins 3.5% nicht überschreiten, d.h. er ist als Höchstrechnungszins zu verstehen.

3 Darüber hinaus ist zunächst zu beachten, dass der Rechnungszins nur auf die Alterungsrückstellung und nicht auf den gesamten Kapitalanlagebestand zu erwirtschaften ist. Im Rahmen der Verhältnisse der Jahre 1998 – 2002 liegt der marktdurchschnittliche Wert der Alterungsrückstellung bezogen auf den marktdurchschnittlichen Wert des mittleren Kapitalanlagebestandes nach Auskunft des PKV-Verbandes zwischen ca. 75% und ca. 85%, wobei hier ein zeitlich monoton steigender Verlauf festzustellen ist. Des Weiteren ist zu beachten, dass die private Krankenversicherung generell alle Rechnungsgrundlagen mit ausreichender Sicherheitsmarge anzusetzen hat (Par. 2(3) KalV) und überdies explizit mit einem Sicherheitszuschlag von mindestens 5% auf die Bruttoprämie operieren muss (Par. 7 KalV). Insofern spiegelt ein positives Verhältnis von versicherungsgeschäftlichem Ergebnis und Bruttoprämie ("Ergebnisquote") insbesondere die nicht verbrauchten Teile der einkalkulierten Sicherheitsmargen wider. Eine positive Ergebnisquote kann somit als Puffer zur partiellen Finanzierung des Rechnungszinses verwendet werden. Im Durchschnitt der Jahre 1998 – 2002 beträgt die marktdurchschnittliche Ergebnisquote nach Auskunft des PKV-Verbandes ca. 6%. Die dargestellten Aspekte werden aber im Rahmen der vorliegenden Ausarbeitung nicht weiter berücksichtigt und führen damit in der Konsequenz zu einem höheren Sicherheitsniveau.

4 Man vgl. Abschnitt 3 sowie die Anhänge B und C.

5 Im Gegensatz zu einem "normalen" Stress-Test, bei dem gewisse Extremszenarien ohne Bezug auf ihre Eintrittswahrscheinlichkeit und letztlich in subjektiver Weise vorgegeben werden, berücksichtigt ein probabilistischer Stress-Test wesentlich auch die Eintrittswahrscheinlichkeiten von Worst Case-Entwicklungen und kann in objektiver Weise statistisch fundiert werden.

Die privaten Krankenversicherer verfügen über eine Reihe von Glättungsmöglichkeiten zur zeitlichen Stabilisierung des Kapitalanlageergebnisses[6]. Insofern erscheint es zweckmäßig, zur statistischen Fundierung gewährleistbarer Renditehöhen von einer Zeitreihe auszugehen, die den Einsatz dieser Glättungsmechanismen konstruktionsbedingt[7] bereits widerspiegelt. Es ist dies die Zeitreihe der (marktdurchschnittlichen) Nettoverzinsungen[8] in der privaten Krankenversicherung.

2. Datenbasis und bereinigte Parameterschätzung

Ausgangspunkt der weiteren Überlegungen ist somit die Zeitreihe der Nettoverzinsungen für den Marktdurchschnitt der deutschen Privaten Krankenversicherer, die seitens des Verbandes der Privaten Krankenversicherung ab dem Jahr 1990 zur Verfügung steht. Die nachfolgende Tabelle 1 gibt einen Überblick über die Entwicklung dieser Zeitreihe.

Jahr	**Nettoverzinsung**	**Jahr**	**Nettoverzinsung**
1990	6.51%	1997	7.73%
1991	7.60%	1998	7.83%
1992	7.74%	1999	7.57%
1993	7.78%	2000	7.21%
1994	7.04%	2001	6.21%
1995	7.23%	2002	4.53%
1996	7.63%		

Tabelle 1: Zeitreihe der Nettoverzinsungen in der PKV (Marktdurchschnitt)

Aufgrund der bereits in Abschnitt 1 erwähnten Glättungsmöglichkeiten der Privaten Krankenversicherungsunternehmen im Bereich der Kapitalanlage ist dabei nicht davon auszuge-

---

6 Ähnlich wie im Falle der Lebensversicherer – vgl. hierzu etwa *Albrecht/Maurer/Schradin*, Die Kapitalanlageperformance der Lebensversicherer im Vergleich zur Fondsanlage unter Rendite- und Risikoaspekten 1999, 58 f. – sind dies etwa die Möglichkeit zur Bildung und Auflösung von Bewertungsreserven, die Möglichkeit der Bilanzierung von Festzinstiteln zum Anschaffungswert (Kategorie der Schuldscheindarlehen sowie die Anwendung des Par. 341 b HGB für Zinstitel), die Möglichkeit des Investments in Spezialfonds mit den hierbei spezifisch möglichen Ansatzpunkten einer Ertragssteuerung – vgl. hierzu etwa *Maurer*, Kontrolle und Entlohnung von Spezialfonds als Instrument der Vermögensanlage von Versicherungsunternehmen 1996, 58 ff. und *Pflaum*, Wertpapier-Investmentfonds in Lebensversicherungsunternehmen 1992, 93 ff. –, die Möglichkeit der Inanspruchnahme des Par. 341 b HGB für Aktieninvestments (Abschreibungsnotwendigkeit nur bei dauerhafter Wertminderung) sowie grundsätzlich die Langfristigkeit der zugrundeliegenden Versicherungsverhältnisse, mit der ein erheblicher Bodensatz zu Zwecken einer langfristig orientierten Kapitalanlage einhergeht.

7 Insbesondere beinhaltet dies die Abstellung auf bilanzielle Werte und nicht auf reine Marktwerte.

8 Vgl. zur Nettoverzinsung etwa *Albrecht/Maurer/Schradin* aaO, 23 ff., *Benölken/Honsel*, Kapitalanlagen-Management und Kapitalanlagen-Controlling, VW 1991, 352 (353) oder *Schwebler*, Vermögensanlage und Anlagevorschriften der Versicherungsunternehmen, in: *Schwebler*, Vermögensanlagepraxis in der Versicherungswirtschaft 1991, 536.

hen, dass diese Zeitreihe Realisation eines Random Walk ist und damit insbesondere stochastisch unabhängige Jahresrenditen vorliegen, sondern dass hier – im Gegenteil – ein stark autokorrelierter Prozess vorliegt. Dies ist im Rahmen einer methodisch sauberen Parameterschätzung angemessen zu berücksichtigen. Die Vermutung wird bestätigt durch die Bestimmung des Korrelogramms der ersten Differenzen der Zeitreihe. Abbildung 1 enthält das mit EViews 4.1 erstellte entsprechende Korrelogramm.

Sample: 1990 2002
Included observations: 12

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.339	0.339	1.7600	0.185
		2	0.066	-0.056	1.8324	0.400
		3	-0.127	-0.150	2.1357	0.545
		4	-0.043	0.061	2.1750	0.704
		5	-0.006	0.000	2.1759	0.824
		6	-0.114	-0.161	2.5419	0.864
		7	0.031	0.146	2.5745	0.921
		8	0.095	0.070	2.9569	0.937
		9	-0.141	-0.315	4.0760	0.906
		10	-0.260	-0.121	9.7336	0.464

Abbildung 1: Korrelogramm der ersten Differenzen der Zeitreihe der Nettoverzinsungen

Das Korrelogramm enthält insbesondere die Autokorrelationen[9] bis zur Ordnung 10 der ersten Differenzen der Zeitreihe der Nettoverzinsungen. Es zeigt sich, dass zwar die *einzelnen* Autokorrelationen nicht signifikant (unter dem von EViews verwendeten Standard-Signifikanzniveau von 5%) sind. Zieht man aber die bestehenden Korrelationen in ihrer Gesamtheit in Betracht, so liegt eine Signifikanz vor. Dies offenbart der *Ljung/Box*-Test[10] (Q-Statistik). Die entsprechenden p-Werte in der letzten Spalte der Abbildung 1 zeigen, dass die Nullhypothese

H_0: *Alle Autokorrelationen bis einschließlich der Ordnung n sind null*

[9] Zur Autokorrelationsfunktion vgl. etwa *Buscher*, Angewandte Zeitreihenanalyse, in *Schröder*, Finanzmarkt-Ökonometrie 2002, 131 (156) oder *Hamilton*, Time Series Analysis 1994, 110 f.

[10] Zum *Ljung/Box*-Test vgl. etwa *Buscher* aaO, 150 f. oder *Campbell/Lo/MacKinlay*, The Econometrics of Financial Markets 1997, 47.

für alle Ordnungen bis n = 10 insbesondere zu allen Signifikanzniveaus kleiner oder gleich 10% abgelehnt wird. Bei Vorliegen eines Random Walk müssten hingegen sämtliche Autokorrelationen der ersten Differenzen gleich null sein, da im Falle des Random Walk die ersten Differenzen einem White Noise-Prozess entsprechen.

Hinsichtlich der Prozessstruktur wird daher im Weiteren grundsätzlich von einer autoregressiven[11] Struktur ausgegangen. In Anhang A werden unterschiedliche mögliche Prozessstrukturen analysiert und dann insbesondere eine Prozessstruktur spezifiziert, die eine hohe Erklärungskraft und Modellvalidität beinhaltet. Hieraus resultieren als bereinigte Schätzwerte[12] für den Mittelwert und die Standardabweichung der Zeitreihe der Nettoverzinsungen die Werte $m = 7.001\%$ und $s = 1.044\%$. Von dieser Parameterkonstellation gehen wir im weiteren Verlauf der Ausführungen aus.

3. Konzeptionen für die gewährleistbare Renditehöhe

Ziel der Untersuchung ist die Ableitung von kritischen Renditehöhen aus finanzmathematischer Sicht, die im Rahmen des den realisierten Nettoverzinsungen gemäß Tabelle 1 zugrundeliegenden Renditeprozesses in einer noch zu definierenden Art und Weise gewährleistet werden können. Hierzu greifen wir[13] auf zwei Konzeptionen einer gewährleistbaren Rendite zurück, die aus der modernen Finanzmathematik für den vorliegenden Zweck adaptiert werden. Es sind dies zum einen die Konzeption der wahrscheinlichen Mindestrendite (Probable Minimum Return, PMR) und zum anderen die Konzeption der Worst Case-Durchschnittsrendite (Worst Case-Average Return, WCAR). Beide Konzeptionen sollen im Folgenden kurz intuitiv erläutert werden, die exakten finanzmathematischen Grundlagen sind in den Anhängen B und C dargelegt.

Die erste verwendete Konzeption ist eine Adaption des *Value-at-Risk* (VaR) und kann im vorliegenden Fall als *wahrscheinliche Mindestrendite* interpretiert werden. Vorzugeben ist zunächst ein Konfidenzniveau (z.B. 5%, 10%). Der 5%-PMR entspricht dann intuitiv derjenigen

---

11 Vgl. etwa *Buscher* aaO, 161 ff. oder *Hamilton* aaO, 53 ff.

12 Im Unterschied dazu ergibt eine direkte Schätzung einen Wert für das Stichprobenmittel von 7.126% und für die Stichprobenstandardabweichung von 0.925%. Ohne die vorgenommene Bereinigung im Hinblick auf die autoregressive Struktur des Prozesses werden daher der Mittelwert zu hoch und die Standardabweichung zu niedrig angesetzt.

13 In Anlehnung an *Albrecht*, Produktgarantien und Aktienkrise – Implikationen für die Kapitalanlagepolitik von Lebensversicherungsunternehmen, ZversWiss 2003, 725 (739 f.).

Renditehöhe, die (im Durchschnitt) nur in 5% der Fälle[14] *unter*schritten bzw. komplementär in 95% der Fälle *über*schritten wird. Entsprechend würde der 10%-PMR (im Durchschnitt) nur in 10% der Fälle *unter*schritten bzw. in 90% der Fälle *über*schritten werden[15].

Die gemäß der PMR-Konzeption bestimmte Renditehöhe bemisst sich an der vorgegebenen (tolerierten) Unterschreitungs*wahrscheinlichkeit*. Der PMR bzw. der zugrundeliegende VaR können als Standard-Risikomaße zur Kontrolle der „normalen“ Volatilität angesehen werden. Über das *Ausmaß* der möglichen Renditehöhen in den nur mit einer kontrollierten Unterschreitungswahrscheinlichkeit eintretenden Fällen („Worst Case-Fälle“) wird jedoch keine Aussage getroffen. Dies gelingt erst auf der Grundlage der *Worst Case-Durchschnittsrendite*, einer Adaption des auf *Artzner/Delbaen/Eber/Heath*[16] zurückgehenden Conditional Value-at-Risk (CVaR).

Auch der WCAR ist einer intuitiven Interpretation zugänglich. Bestimmt wird der Mittelwert derjenigen Renditerealisationen, die unterhalb des PMR (zu einem vorgegebenen Konfidenzniveau) liegen. Unter Rückgriff auf die vorstehende intuitive Häufigkeitsinterpretation des PMR („Renditehöhe, die nur in 100α% der Fälle unterschritten wird“), kann der WCAR dann als die mittlere Rendite bezogen auf die 100α% „schlechtesten Fälle“ (diejenigen Fälle mit der geringsten Rendite) interpretiert werden. *Der 5%-WCAR entspricht somit der im Durchschnitt der 5% schlechtesten Fälle und entsprechend der 10%-WCAR der im Durchschnitt der 10% schlechtesten Fälle erzielten Rendite.*

Damit stehen für die weiteren Untersuchungen zwei Konzeptionen zur Bestimmung einer gewährleistbaren Renditehöhe zur Verfügung, zum einen orientiert rein an der Unterschreitungswahrscheinlichkeit bzw. –häufigkeit (PMR) und zum anderen orientiert an der Renditehöhe im Rahmen eines Worst Case-Szenarios (probabilistischer Stress-Test). **Ein (Höchst-) Rechnungszins kann dann so lange als kredibel gewährleistet bzw. belastbar angesehen werden, wie er unterhalb dieser Renditen liegt.**

---

[14] Bei einer Rendite auf Jahresbasis somit in durchschnittlich einem von zwanzig Jahren bzw. komplementär (Überschreitungsfälle) in neunzehn von zwanzig Jahren.

[15] Bei einer Rendite auf Jahresbasis findet somit durchschnittlich in einem von zehn Jahren eine *Unter*schreitung statt bzw. in neun von zehn Jahren eine *Über*schreitung.

[16] *Artzner/Delbaen/Eber/Heath*, Coherent Measures of Risk, Mathematical Finance 1999, 203 gehen aus von einem Axiomensystem, das Gütekriterien für Risikomaße (sog. kohärente Risikomaße) beinhaltet. Für eine breite Klasse von Verteilungen (Existenz einer Dichtefunktion) ist der CVaR ein kohärentes Risikomaß.

4. Evaluation des Probable Minimum Return und des Worst Case-Average Return

Die Bestimmung der gewährleistbaren Renditehöhen (gemäß Abschnitt 3) im Falle des vorliegenden Renditeprozesses der Nettoverzinsungen in der Krankenversicherung (dessen Parameter gemäß Abschnitt 2 in Verbindung mit Anhang A identifiziert worden sind) erfolgt nun im Weiteren unter der Annahme zweier alternativer standardmäßiger Verteilungsannahmen[17] für die Rendite, zum einen der Normalverteilung und zum anderen der logarithmischen Normalverteilung (Lognormalverteilung). Zu spezifizieren sind zusätzlich die vorzugebenden Konfidenzniveaus. Generell ist die Wahl des angemessenen Konfidenzniveaus abhängig von der jeweiligen Fragestellung. Im vorliegenden Kontext ist dabei zu beachten, dass eine gegebenenfalls notwendige Anpassung des Rechnungszinses relativ kurzfristig zu einer hohen Bestandswirksamkeit führt, da sie im Unterschied etwa zur Lebensversicherung nicht nur auf das Neugeschäft wirkt, sondern auf den Gesamtbestand. Es ist also nicht eine Gewährleistung des Rechnungszinses über die (durchschnittliche) Restlaufzeit des Bestandes sicherzustellen. *Die Wahl eines Konfidenzniveaus von 10%, d.h. die Abstellung auf einen kritischen Fall, der einmal in zehn Jahren auftritt, erscheint damit als vollständig angemessen*[18]. Unabhängig von diesem Gesichtspunkt der Wahl eines angemessenen Konfidenzniveaus sollen aber im Folgenden, um einen vollständigen Überblick über die Risikoverhältnisse zu geben, die Resultate für die Konfidenzniveaus 10%, 5% und 1% wiedergegeben werden.

Die nachfolgenden Tabellen 2 und 3 enthalten die entsprechenden Auswertungen[19] [20] jeweils für den Normal- bzw. Lognormalverteilungsfall und für die (bereinigte) Parameterkonstellation gemäß Abschnitt 2.

---

[17] Zu Normal- bzw. Lognormalverteilung vgl. etwa *Albrecht/Maurer*, Investment- und Risikomanagement 2002, 93 ff.

[18] Hinzu kommt, dass das Kapitalanlageergebnis des Jahres 2002 bereits Resultat eines "Jahrhundertereignisses" ist und vor diesem Hintergrund eine zeitlich kumulative "Aufschaukelung" des Sicherheitsniveaus nicht angemessen erscheint. Die Kapitalmarktverhältnisse des Jahres 2003 bestätigen diesen Gesichtspunkt.

[19] Ich danke meinem Mitarbeiter, Herrn Dr. Sven Koryciorz, für die Entwicklung eines entsprechenden DV-Programms und die Durchführung der Berechnungen.

[20] Die methodische Grundlagen dieser Auswertungen sind in den Anhängen B – C dargelegt.

Verteilung: Normal Mittelwert: 7,001% Standardabweichung: 1.044%		
Niveau	PMR	WCAR
10%	5.66%	5.17%
5%	5.28%	4.85%
1%	4.57%	4.22%

Tabelle 2: Evaluation 1

Verteilung: Lognormal Mittelwert: 7.001% Standardabweichung: 1.044%		
Niveau	PMR	WCAR
1%	5.66%	5.18%
5%	5.29%	4.86%
1%	4.59%	4.25%

Tabelle 3: Evaluation 2

Grundsätzlich ist anzumerken, dass die Worst Case-Durchschnittsrendite (WCAR) stets unterhalb der wahrscheinlichen Mindestrendite (PMR) liegt, dies ist konsistent mit den generellen Verhältnissen[21]. Zum anderen zeigt sich, dass die Normalverteilung im vorliegenden Fall (leicht) "gefährlicher" ist als die Lognormalverteilung, insofern als hier geringere gewährleistbare Renditehöhen resultieren. Auch dies ist ein bekanntes Phänomen[22] und liegt darin begründet, dass die Normalverteilung einen nach unten unbegrenzten Wertebereich aufweist[23]. Schließlich sind die gewährleistbaren Renditehöhen umso geringer, je höher die geforderte Konfidenz der Gewährleistung (je geringer das Konfidenzniveau) ist.

Orientiert man den Grad der Gewährleistung an einem Jahrhundertereignis und hier zunächst an der Überschreitungshäufigkeit 99% (Unterschreitungshäufigkeit 1%), so ist mindestens eine Rendite in Höhe von 4.57% gewährleistbar. Orientiert man sich im Weiteren im Rahmen eines probabilistischen Stress-Tests an der Durchschnittsrendite in den 1% schlechtesten Fällen (mit den geringsten Renditen), so ist mindestens eine Renditehöhe von 4.22% gewährleistbar. Beide gewährleistbaren Renditehöhen liegen deutlich oberhalb des zur Zeit für die

---

21 Vgl. etwa *Albrecht/Maurer* aaO, 675.

22 Vgl. etwa *Albrecht/Maurer* aaO, 114 f.

23 D.h. es können beliebig hohe negative Renditen auftreten, wohingegen faktisch eine Renditehöhe von -1 die untere Grenze darstellt.

Krankenversicherung gültigen Rechnungszinses in Höhe von 3.5%. Aus finanzmathematischer Sicht kann dieser Rechnungszins damit (auf Marktebene) eindeutig auch weiterhin als uneingeschränkt gewährleistbar angesehen werden.

5. Résumé

Ausgangspunkt der Untersuchung ist die die Glättungsmöglichkeiten der Krankenversicherer im Rahmen ihrer Kapitalanlage adäquat widerspiegelnde Zeitreihe der Nettoverzinsungen für den Marktdurchschnitt der Privaten Krankenversicherer. Aufgrund dieser Glättungsmöglichkeiten besitzt diese Zeitreihe eine autoregressive Struktur, die im Rahmen einer methodisch sauberen Parameterschätzung bereinigt werden muss. Nachdem dies erfolgt ist, können zwei aus der Finanzmathematik adaptierte Konzeptionen für eine gewährleistbare Renditehöhe eingesetzt werden, um für den Fall der Privaten Krankenversicherer sowohl im Rahmen einer normalen Marktvolatilität als auch im Rahmen eines probabilistischen Stress-Tests gewährleistbare Renditehöhen zu ermitteln. Selbst bei Unterstellung eines (weiteren)[24] "Jahrhundertereignisses" (Unterschreitungshäufigkeit von 1% bzw. Betrachtung der 1% schlechtesten Fälle) ist eine Mindest-Renditehöhe von über 4% gesichert. **Damit kann ein Rechnungszins von 3.5% aus finanzmathematischer Sicht auf Marktebene auch weiterhin als uneingeschränkt gewährleistbar angesehen werden**.

---

[24] Man vgl. nochmals die Ausführungen in Fußnote 18.

Anhang A: Identifikation der autoregressiven Prozessstruktur der Zeitreihe

Im Rahmen von EViews 4.1 besteht die Möglichkeit, auf der Basis der Durchführung von Regressionsanalysen unterschiedliche autoregressive Strukturen auf ihre Erklärungskraft hin zu prüfen. Untersucht werden dabei grundsätzlich Erklärungsansätze der Form

$$R_t = f(t, R_{t-1}, R_{t-2}, ..., R_{t-i}) \,, \tag{A1}$$

wobei R_t die Nettoverzinsung der Periode t (hier: $t = 1,...,13$) und f eine lineare Funktion bezeichnet.

Es stellt sich zunächst heraus, dass für i kleiner oder gleich 3 keine hinreichende Erklärungskraft erzielt werden kann. Im Folgenden werden daher zwei Spezifikationen für $i = 5$ und für $i = 4$ näher betrachtet, die eine solche hohe Erklärungskraft besitzen. Die erste dieser Modellspezifikationen ist

$$R_t = c + a_0 t + a_1 R_{t-1} + a_2 R_{t-2} + a_3 R_{t-3} + a_4 R_{t-4} + a_5 R_{t-5} + e_t \,. \tag{A2}$$

Tabelle A1 enthält den entsprechenden EViews-Ausdruck hinsichtlich der Auswertung dieser Regressionsgleichung.

Dependent Variable: KVNV
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 1995 2002

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.085516	0.101935	-0.838926	0.5556
TIME	-0.002578	0.000649	-3.975680	0.1569
KVNV(-1)	1.553421	0.260410	5.965282	0.1057
KVNV(-2)	0.169835	0.694215	0.244643	0.8473
KVNV(-3)	0.363349	0.394396	0.921280	0.5261
KVNV(-4)	-0.008837	0.435527	-0.020291	0.9871
KVNV(-5)	0.362375	0.473221	0.765762	0.5840
R-squared	0.994424	Mean dependent var		0.069962
S.E. of regression	0.002205	S.D. dependent var		0.011161
Durbin-Watson stat	3.385455			

Tabelle A1: Auswertung der Modellspezifikation (A2)

Es zeigt sich, dass die Modellspezifikation (A2) einen Erklärungsgehalt von über 99%, gemessen am Standardgütemaß R^2, besitzt. Allerdings wird dieses Ergebnis getrübt durch einen Wert der Durbin-Watson-Statistik von 3.385. Dies liegt äußerst deutlich über dem "Idealwert" der Statistik[25] in Höhe von 2 (Fall unkorrelierter Residuen) und deutet auf stark negativ korrelierte Residuen hin, was die Validität der gewonnenen Ergebnisse deutlich beeinträchtigt. Aus diesem Grunde soll noch die folgende zweite Modellspezifikation betrachtet werden:

$$R_t = a_0 t + a_1 R_{t-1} + a_2 R_{t-2} + a_3 R_{t-3} + a_4 R_{t-4} + e_t \quad . \tag{A3}$$

Tabelle A2 enthält den entsprechenden EViews-Ausdruck hinsichtlich der Auswertung dieser Regressionsgleichung.

Dependent Variable: KVNV Method: Least Squares Date: 10/16/03 Time: 16:17 Sample(adjusted): 1994 2002 Included observations: 9 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TIME	-0.001595	0.000879	-1.814751	0.1438
KVNV(-1)	1.551236	0.486361	3.189475	0.0332
KVNV(-2)	-0.397659	0.855160	-0.465012	0.6661
KVNV(-3)	-0.545317	0.786509	-0.693339	0.5263
KVNV(-4)	0.555818	0.464722	1.196022	0.2977
R-squared	0.857460	Mean dependent var		0.070011
S.E. of regression	0.005575	S.D. dependent var		0.010441
Durbin-Watson stat	1.914232			

Tabelle A2: Auswertung der Modellspezifikation (A3)

Die Erklärungskraft dieser Modellspezifikation, gemessen am Standardgütemaß R^2, ist mit ca. 85.75% zwar relativ geringer als bei der Spezifikation (A2), in absoluten Termen aber immer noch sehr hoch und vor allem flankiert durch einen Wert der Durbin-Watson-Statistik sehr in der Nähe des Idealwertes von 2. Dies unterstreicht die Validität der gewonnen Ergebnisse. In diesem Falle sind die resultierenden bereinigten Schätzwerte 7.001% für den Mittelwert und 1.044% für die Standardabweichung. Im Haupttext wird diese Variante der Modellspezifikation weiterverfolgt.

[25] Vgl. hierzu etwa *Poddig/Dichtl/Petersmeier*, Statistik, Ökonometrie, Optimierung 2000, 304.

Anhang B: Probable Minimum Return

Der Probable Minimum Return (PMR) ist eine für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung angepasste Variante des Value-at-Risk[26] (VaR). Unter Vorgabe eines Konfidenzniveaus a (z.B. $a = 0.05,\ 0.1$) ist für eine zufallsabhängige Einperiodenrendite R der Probable Minimum Return zum Niveau a definiert durch die folgende strukturelle Bedingung

$$P\left[R < PMR_a\right] = a \quad . \tag{B1}$$

Hieraus folgt offenbar komplementär:

$$P\left[R \geq PMR_a\right] = 1 - a \quad . \tag{B2}$$

Anschaulich findet daher eine Unterschreitung des PMR zum Niveau a (im Durchschnitt) nur in $100a\%$ der Realisierungen von R statt bzw. eine Überschreitung (im Durchschnitt) in $100(1-a)\%$ der Realisierungen.

Wird für die Einperiodenrendite R eine Normalverteilung unterstellt, so berechnet sich der PMR_a in einfacher Weise zu:

$$PMR_a = E(R) - N_{1-a}\ s\ (R) \ . \tag{B3}$$

Dabei bezeichnet N_{1-a} das $(1-a)$ -Quantil der Standardnormalverteilung[27].

Im Falle der Annahme einer logarithmischen Normalverteilung etwa der Form $\ln(1+R) \sim N(m, v^2)$, gilt hingegen[28] [29]:

$$PMR_a = \exp\left(m - N_{1-a}\ v\right) - 1 \ . \tag{B4}$$

---

[26] Zu formalen Aspekten des Value-at-Risk vgl. etwa *Albrecht/Maurer* aaO, Par. 3.6.5 oder *Koryciorz*, Sicherheitskapitalbestimmung und –allokation in der Schadenversicherung 2004, 21 ff.

[27] Vgl. hierzu etwa *Albrecht/Maurer* aaO, 113.

[28] Grundlage für diese Berechnung ist das entsprechende Quantil der Lognormalverteilung, das etwa in *Albrecht/Maurer* aaO, 114 angegeben ist.

[29] Zur Umrechnung der Parameter E(R) und σ(R) in die Parameter m und v vgl. *Albrecht/Maurer* aaO, 96.

Anhang C: Worst Case-Average Return

Der Worst Case-Average Return (WCAR) ist eine für die Zwecke der vorliegenden Arbeit angepasste Variante des Conditional Value-at-Risk[30] (CVaR). Wiederum unter Vorgabe eines Konfidenzniveaus a ist für eine zufallsabhängige Einperiodenrendite R der Worst Case-Average Return zum Niveau a definiert durch

$$WCAR_a := E\left[R | R < PMR_a\right] . \tag{C1}$$

Anschaulich beinhaltet der Worst Case-Average Return daher die mittlere Rendite *unter der Bedingung*, dass der Probable Minimum Return unterschritten wird. Unter Beachtung der in Anhang B gegebenen Interpretation des PMR kann der WCAR zum Konfidenzniveau a daher insgesamt als „mittlere Rendite in den $100a\%$ schlechtesten Fällen“ interpretiert werden.

Im Falle einer normalverteilten Einperiodenrendite R gilt[31]

$$WCAR_a = E(R) - \frac{j\left(N_{1-a}\right)}{a} s(R) . \tag{C2}$$

Dabei bezeichnet wiederum N_{1-a} das $(1-a)$-Quantil der Standardnormalverteilung und $j(x)$ die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung.

Im Falle der Annahme einer logarithmischen Normalverteilung, etwa der Form $\ln(1+R) \sim N(m, v^2)$, gilt hingegen

$$WCAR_a = \left[1 + E(R)\right] \frac{\Phi(-N_{1-a} - v)}{a} - 1 . \tag{C3}$$

---

30 Vgl. hierzu eingehender *Albrecht*, Risk Measures, in Encyclopedia of Actuarial Science, erscheint 2004, oder *Koryciorz* aaO, 59 ff.

31 Zur Berechnung des WCAR bzw. des CVaR vgl. grundsätzlich *Koryciorz* aaO, 72 ff.