

**Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie,
Portfolio Management und Versicherungswirtschaft**

Nr. 125

**Zu den Langfristrisiken einer Aktienanlage:
Ein probabilistischer Ansatz
auf der Basis von Shortfallrisikomaßen**

von

PETER ALBRECHT, RAIMOND MAURER UND ULLA RUCKPAUL

Mannheim 11/2000

Zu den Langfristrisiken einer Aktienanlage: Ein probabilistischer Ansatz auf der Basis von Shortfallrisikomaßen

*Peter Albrecht, Raimond Maurer und Ulla Ruckpaul**

1. Einführung

Der mit der Frage nach der Existenz von Zeithorizonteffekten im Rahmen einer Aktienanlage verbundene Themenkomplex ist anhaltender Gegenstand einer intensiven und kontroversen Debatte sowohl innerhalb der Investmenttheorie als auch der Investmentpraxis.¹ Mit dem genannten Themenkomplex sind eine Reihe von teilweise eng verwandten Teilfragestellungen verbunden, wie z.B.:

- Wie kann das Langfristrisiko einer Aktienanlage angemessen konzeptualisiert werden?
- In welcher Form hängt das Risiko einer Aktienanlage vom Zeithorizont ab? (Weisen Aktien langfristig ein höheres oder geringeres Risiko auf als über die kurze Frist, oder spielt der Zeithorizont hierbei keine Rolle?)
- Inwieweit und in welcher Form hängt die „optimale“ Aktienquote in einem (typischerweise einfach strukturierten) Investmentportfolio vom Zeithorizont ab?
- Ist eine Aktienanlage langfristig anderen, kurzfristig risikoärmeren, Anlageformen (etwa: Investment in Festzinstitel) stets überlegen? (Schlagen Aktien langfristig stets Renten?² Und: Sind Anleihen also unter Langfristaspekten eigentlich eine redundante Anlageklasse

* Prof. Dr. Peter Albrecht und Dipl.-Kffr. Ulla Ruckpaul, Lehrstuhl für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft, Universität Mannheim, 68131 Mannheim, E-Mail: risk@bwl.uni-mannheim.de.

Prof. Dr. Raimond Maurer, Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre, insb. Investment, Portfolio Management und Alterssicherung, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt, 60054 Frankfurt am Main, E-Mail: rmaurer@wiwi.uni-frankfurt.de.

¹ Zu aktuellen Übersichten - mit teilweise unterschiedlichen Schwerpunktsetzungen - vgl. *Albrecht* (1999), *Ammann/Zimmermann* (1997), *Kramer/Weber* (1999), *Kritzman/Rich* (1998) sowie *Rosen* (1999).

² Vgl. hierzu aktuell insbesondere *Rosen* (1999) sowie *Stehle* (1998, 1999). Ein wesentlicher Gesichtspunkt ist hierbei auch die unterschiedliche steuerliche Behandlung von Aktien- und Rentenanlagen.

bzw. taugen nur als temporäre Flucht-Anlageklasse (safe haven) bei Krisen am Aktienmarkt?³)

- Welche Folgerungen ergeben sich hinsichtlich „optimaler“ Investmentportfolios für Langfristinvestoren, z.B. Pensionsfonds, oder im Rahmen der privaten Altersvorsorge?⁴ (Sollte man hierbei etwa sogar 100% in Aktien anlegen?⁵)

Eine enge Verwandtschaft besteht zudem zur Thematik der Höhe der empirischen Risikoprämie (der mittleren Excess-Rendite über die risikolose Anlage) eines Aktieninvestments und deren Angemessenheit aus theoretischer Sicht (equity premium puzzle⁶).

Hinsichtlich der Beiträge zu den vorstehend angesprochenen Fragestellungen sind zunächst grundsätzlich rein historische Vorgehensweisen von solchen zu unterscheiden, bei denen die empirischen Daten im Rahmen eines Modells für die Entwicklung von Aktien- bzw. Rentenkursen eingehen. Eine ausschließlich historisch orientierte Vorgehensweise in Form eines Ex-post-Renditevergleichs über verschiedene Zeithorizonte⁷ beinhaltet die Problematik⁸, dass die verwendeten 10-, 15- oder 20-Jahres-Renditen rollierende Renditen sind, d.h. aus sich (stark) überlappenden sukzessiven Perioden entsprechender Länge gewonnen werden. Dies bedingt eine hohe Autokorrelation der verwendeten Renditen. Die hieraus resultierenden Verzerrungen bei der Wahrscheinlichkeitsermittlung können beträchtlich sein. Eine hohe Schätzsicherheit würde erst die Verwendung von unabhängigen, sich nicht überlappenden 10-, 15- oder 20-Jahres-Perioden ergeben. Doch der bestehende Erfahrungshorizont ist zu kurz, um auf diese Weise eine ausreichende Datengrundlage zu gewinnen. *Navon* (1998, S. 67) schreibt in diesem Zusammenhang sehr treffend: „We mere mortals live only one life. And we haven't had sufficient ten-, twenty- or thirty-year periods that are independent of another to derive statistically significant conclusions from history.“

³ Vgl. zur Diskussion dieser Fragestellung vor allem *Navon* (1998).

⁴ Vgl. hierzu etwa *Bodie/Crane* (1998) oder *Albrecht/Maurer* (2000).

⁵ Vgl. zur Diskussion dieser Fragestellung etwa *Thaler/Williamson* (1994), *Asness* (1996) und *Biermann* (1998).

⁶ Vgl. grundlegend *Mehra/Prescott* (1985) sowie *Albrecht* (1999, S. 33) für einen knappen aktuellen Literaturüberblick.

⁷ Vgl. etwa *Thaler/Williamson* (1994) oder *Stehle* (1998, 1999).

⁸ Auf diese Problematik weisen z.B. *Bernstein* (1996) sowie aktuell *Löffler* (2000) hin.

Der Ausweg aus diesem Dilemma besteht darin, der Analyse ein geeignetes wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell, i.d.R. eine Version eines Random Walks⁹ oder eines Prozesses mit Mean Reversion-Eigenschaft¹⁰, zugrunde zu legen, dessen Parameter aus unabhängigen Beobachtungen zu ermitteln und dann die gewünschten Werte analytisch oder auf dem Wege einer stochastischen Simulation zu gewinnen.

Der zweite zentrale Unterschied der Vorgehensweise in der Literatur besteht in der Modellierung der Bewertung der (Langfrist-) Kurs- bzw. Renditeverteilungen seitens der Investoren. Dabei ist zu unterscheiden zwischen Ansätzen, bei denen die Risikonutzenfunktion des Anlegers in expliziter Form Eingang in die Analyse findet¹¹ und solchen, bei denen dies nicht bzw. zumindest nicht in expliziter Form geschieht. Zur letzten Klasse zählen Ansätze, bei denen das (Langfrist-) Risiko einer Aktienanlage im Rahmen eines optionspreistheoretischen Ansatzes¹² oder eines Shortfallrisiko-Ansatzes konzeptualisiert wird.¹³ Beide Ansätze können als präferenzfrei angesehen werden, weil die Risikonutzenfunktion der Investoren hierbei keine explizite Berücksichtigung findet. *Ammann/Zimmermann* (1997, 2000) weisen jedoch hinsichtlich des optionspreistheoretischen Ansatzes darauf hin, dass aufgrund der benutzten unterschiedlichen Absicherungsniveaus (floors) die Risikopräferenzen der Investoren zumindest implizit in die betreffenden Analysen einfließen. Analog kann bei Ansätzen, bei denen das Shortfallrisiko im Mittelpunkt steht, argumentiert werden, da auch hier unterschiedliche Targetniveaus verwendet werden. Zudem bestehen explizite Verbindungen zwischen der Bernoulli-Nutzentheorie und dem Shortfall-Ansatz.¹⁴

In dieser Arbeit werden dabei im Rahmen einer Weiterführung des Shortfall-Ansatzes Langfristrisiken einer Aktienanlage relativ zu sicheren (realen) Zielrenditen sowie relativ zu einer Rentenanlage auf analytischem Weg quantifiziert. Dabei wird unter anderem die These formuliert, dass unter einer Worst Case-Perspektive, formalisiert durch den bedingten Shortfall-Erwartungswert (Mittlerer Excess-Verlust), eine Aktienanlage ein mit dem Zeithorizont zu-

⁹ Als Standard-Referenzmodell dient hierbei in der Literatur das zeitstetige Modell der geometrischen Brownschen Bewegung (geometrischer Wiener-Prozeß), das in zeitdiskreter Sicht unabhängige und logarithmisch normalverteilte Kurszuwächse impliziert.

¹⁰ Ein aktuelles Beispiel hierfür findet sich in *Löffler* (2000, S. 355).

¹¹ Vgl. zu Übersichten etwa *Kritzman/Rich* (1998) oder *Albrecht* (1999, Kapitel 4). Auch Ansätze der stochastischen Dominanz, vgl. etwa *Levy/Cohen* (1998) sowie *Albrecht* (1999, Abschnitt 3.3) zählen hierzu.

¹² Vgl. *Bodie* (1995), *Albrecht* (1999, Abschnitt 3.2.1) sowie *Ammann/Zimmermann* (2000).

¹³ Vgl. etwa *Leibowitz/Krasker* (1998), *Zimmermann* (1991), *Albrecht* (1999, Abschnitt 3.1) sowie *Albrecht/Maurer* (2000).

¹⁴ Vgl. *Fishburn* (1977) und aktuell *Albrecht/Maurer/Möller* (1999).

nehmendes substantielles Risiko beinhaltet und hierin die eigentliche Gefahr einer Langfrist-Aktienanlage besteht.

Dabei steht nicht die Frage nach der „richtigen“, ggf. nutzentheoretisch begründeten Erfassung des Risikos im Vordergrund der Untersuchung, sondern es sollen zunächst vor allem unterschiedliche Risikodimensionen im Sinne rein probabilistischer Eigenschaften von Aktienkursentwicklungen herausgearbeitet werden. Nutzentheoretische oder verhaltenswissenschaftliche¹⁵ Analysen, die auf der Bewertung der in diesem Beitrag transparent gemachten Risikodimensionen beruhen, bilden eine nachgelagerte nächste Stufe.¹⁶

2. Design der Analyse

Im Rahmen von shortfallrisikobasierten Analysen von Zeithorizonteffekten einer Aktienanlage stand bisher die Shortfall-Wahrscheinlichkeit im Vordergrund. Formal ist die Shortfall-Wahrscheinlichkeit der Rendite R eines Investments relativ zu einer (deterministischen oder stochastischen) Benchmark z - einer Spezifikation für die Zielrendite oder aber der angestrebten Mindestrendite - definiert durch

$$SP(z) = P(R < z). \quad (1)$$

Die Shortfall-Wahrscheinlichkeit misst dabei lediglich die Wahrscheinlichkeit einer Target-Unterschreitung unabhängig von der möglichen Höhe dieser Unterschreitung.

Ein Risikomaß, das die erwartete Verlusthöhe eines Investments relativ zur Benchmark quantifiziert, ist der Shortfall-Erwartungswert, formal:

$$SE(z) = E[\max(z - R, 0)]. \quad (2)$$

¹⁵ Vgl. hierzu etwa *Benartzi/Thaler* (1999) oder *Kramer/Weber* (1999).

¹⁶ Die von *Ammann/Zimmermann* (1997, 2000) deutlich gemachte implizit bestehende Verbindung zu einer nutzentheoretischen Analyse wird zwar ebenso gesehen, findet aber ebenfalls keinen Eingang in die weiteren Betrachtungen.

In den Shortfall-Erwartungswert finden sowohl die möglichen Höhen einer Zielunterschreitung als auch deren Eintrittswahrscheinlichkeiten Eingang.

Als weiteres zentrales Risikomaß findet im Rahmen der weiteren Analysen der Mittlere Excess-Verlust (Mean Excess Loss, MEL) Verwendung. Formal ist dieses Risikomaß definiert durch

$$\text{MEL}(z) = E[z - R \mid R < z], \quad (3)$$

und erfasst mithin intuitiv die mittlere Shortfall-Höhe (relativ zur Benchmark z) *unter der Bedingung*, dass ein Shortfall eintritt.

Das Risikomaß MEL, der bedingte Shortfall-Erwartungswert, ist die für die Zwecke der vorliegenden Arbeit geeignete Variante der im Rahmen der Extremwerttheorie¹⁷ entwickelten Mean Excess- bzw. Mean Excess Loss-Funktion¹⁸ $E(X - u \mid X > u)$. Zudem besteht der folgende enge Zusammenhang des MEL mit dem Tail Conditional Expectation¹⁹ (TCE), definiert durch $\text{TCE}(z) = E(R \mid R < z)$. Dieser ist gegeben durch:

$$\text{TCE}(z) = z - \text{MEL}(z).$$

MEL und TCE können daher durch eine einfache Translation ineinander überführt werden.

Im Zusammenhang mit der Analyse und Steuerung finanzieller Risiken, z.B. verallgemeinerter Value at Risk-Analysen im Rahmen des Managements von Marktrisiken oder im Rahmen des Managements von Ausfallrisiken findet der TCE zunehmend Beachtung.²⁰ Im Sinne des Axiomensystems von Artzner *et al.* (1999) ist der TCE, im Gegensatz zum traditionellen Va-

¹⁷ Zu den Methoden der Extremwerttheorie vgl. grundsätzlich *Embrechts/Klüppelberg/Mikosch* (1997). Zur Anwendung der Extremwerttheorie auf Fragen des finanzwirtschaftlichen Risikomanagements vgl. aktuell *Borkovic/Klüppelberg* (2000) sowie *Embrechts/Resnick/Samorodnitsky* (1999).

¹⁸ Vgl. vor allem *Embrechts/Klüppelberg/Mikosch* (1997, S. 160 ff.), *Borkovic/Klüppelberg* (2000, S. 228f.) sowie *Embrechts/Resnick/Samorodnitsky* (1999, S. 35 f.) und *Wirch* (1999, S. 110).

¹⁹ Vgl. hierzu etwa *Artzner et al.* (1999, S. 223), *Wirch/Hardy* (1999, S. 339) sowie *Barth* (2000, S. 126 f.). *Barth* (2000) arbeitet dabei mit der obigen allgemeinen Version des TCE, wohingegen *Artzner* (1999) und *Wirch/Hardy* (1999) einen Spezialfall behandeln, bei dem die Benchmark z dem Value at Risk entspricht. In diesem Zusammenhang wird auch von Conditional Value at Risk gesprochen, vgl. etwa *Embrechts/Resnick/Samorodnitsky* (1999, S. 40).

²⁰ Vgl. etwa *Artzner et al.* (1999), *Barth* (2000), *Embrechts et al.* (1999), *Wirch* (1999) und *Wirch/Hardy* (1999).

lue at Risk, ein kohärentes Risikomaß.²¹ Barth charakterisiert den TCE als ein Worst Case-Maß²², das sehr sensitiv auf mögliche Realisationen aus den Verteilungsenden reagiert, d.h. im vorliegenden Fall sehr hoher Shortfalls, wenn diese auch mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit eintreten.

Zwar geht beim Übergang von TCE zu MEL im allgemeinen die Eigenschaft der Kohärenz verloren, doch die Charakterisierung als Worst Case-Risikomaß bleibt erhalten, was für die Zwecke der vorliegenden Arbeit ausreichend ist.

Zwischen den zuvor eingeführten Risikomaßen besteht die folgende fundamentale, auch intuitiv naheliegende, Beziehung²³:

$$SE(z) = MEL(z) \cdot SP(z). \quad (4)$$

Die mittlere Shortfall-Höhe ist gerade das Produkt aus der mittleren Shortfall-Höhe *unter der Bedingung*, dass ein Shortfall eingetreten ist sowie der Wahrscheinlichkeit, dass sich dieses Ereignis realisiert.

Soweit zu den im Rahmen der weiteren Analyse verwendeten Risikomaßen. Offen bleibt dabei vorerst noch die Spezifikation der Benchmark-Renditen.

Der erste Teil der nachfolgenden Evaluationen besteht in der Analyse der Risiken (im vorstehend definierten Sinne) einer repräsentativen Anlage in den deutschen Aktienmarkt relativ zu risikolosen (deterministischen) Wertentwicklungen in Abhängigkeit vom Zeithorizont. Der Standard-Repräsentant für die Wertentwicklung deutscher Blue Chip-Aktien, der Deutsche Aktienindex DAX, weist dabei die Problematik auf, dass er aus Sicht eines repräsentativen Investors mit einem marginalen Steuersatz von 36% (bzw. seit 1994 von 30%) konstruiert worden ist. Grundlage der weiteren Analysen ist daher nicht die Zeitreihe der DAX-Entwicklung, sondern eine entsprechend korrigierte Zeitreihe, im weiteren als DAX/0 (DAX

²¹ Vgl. Barth (2000, S. 127) sowie Wirch/Hardy (1999, S. 330).

²² Vgl. Barth (2000, S. 127).

²³ Vgl. hierzu allgemein Maurer (2000, S. 63).

nach Stehle²⁴) bezeichnet, die einen inländischen Investor mit einem Steuersatz von 0% unterstellt.

Neben der Korrektur der DAX-Zeitreihe um steuerliche Effekte wird des Weiteren eine Inflationsbereinigung vorgenommen, d.h. sämtliche verwendeten Renditen sind im weiteren Renditen in realen Termen. Es werden damit rationale Investoren unterstellt, die keiner Geldillusion unterliegen, d.h. bei denen Veränderungen des Preisniveaus, bei der alle realen Größen unverändert bleiben, zu keinen Veränderungen führen.

Zur Generierung einer repräsentativen Verteilung von (realen, steuerkorrigierten) DAX-Renditen wird das Standard-Modell einer geometrischen Brownschen Bewegung für die DAX-Entwicklung unterstellt. Im zeitdiskreten Kontext (hier: sukzessive einjährige Perioden) impliziert²⁵ diese Annahme unabhängige und logarithmisch normalverteilte Kursänderungen bzw. unabhängige und normalverteilte Renditen in kontinuierlicher Form. Zur Gewinnung der Parameter dieser repräsentativen Verteilung von DAX-Renditen werden einerseits der zwanzigjährige Auswertungszeitraum von 1980 - 1999 zugrundegelegt, ein Zeitraum, für den die DAX-Entwicklung im historischen Vergleich eher günstig (nominale bzw. reale mittlere Renditen von 15,47 % bzw. 12,88 % aus Sicht eines Investors mit einem Steuersatz von 0 %) ausfällt. Zur Verdeutlichung der Sensitivität der Ergebnisse hinsichtlich des gewählten empirischen Beobachtungszeitraumes wird alternativ der vierzehnjährige Auswertungszeitraum von 1986 - 1999 zugrundegelegt²⁶ (nominale bzw. reale mittlere Rendite von 12,08 % bzw. 9,99 % aus Sicht eines Investors mit einem Steuersatz von 0%).

²⁴ Die angesprochene sowie weitere DAX-Korrekturen sind Bestandteil von Veröffentlichungen von Prof. Richard Stehle, Ph.D., Leiter des Instituts für Bank-, Börsen- und Versicherungswesen der Humboldt-Universität zu Berlin, vgl. etwa Stehle (1998, 1999). Aktualisierte Versionen dieser DAX-Korrekturen sind zu finden auf der Homepage des Instituts unter <http://www.wiwi.hu-berlin.de/finance>.

²⁵ Vgl. etwa Hull (1993, S. 210 ff.).

²⁶ Dabei wird im wesentlichen die „Ausreißer“-Rendite für das Jahr 1985 in Höhe von nominal 86,35% bzw. real 83,42% aus Sicht eines Anlegers mit einem Steuersatz von 0% eliminiert.

Grundlage der Evaluation ist somit nicht die betreffende historische Renditezeitreihe, sondern eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die konsistent zu den empirisch beobachteten Daten ist. Die solchermaßen identifizierten repräsentativen Dichtefunktionen der (zeitkontinuierlichen) Ein-Jahresrenditen für den Zeitraum 1980 - 1999 bzw. 1986 - 1999 sind in der nachfolgenden Abbildung 1 enthalten.

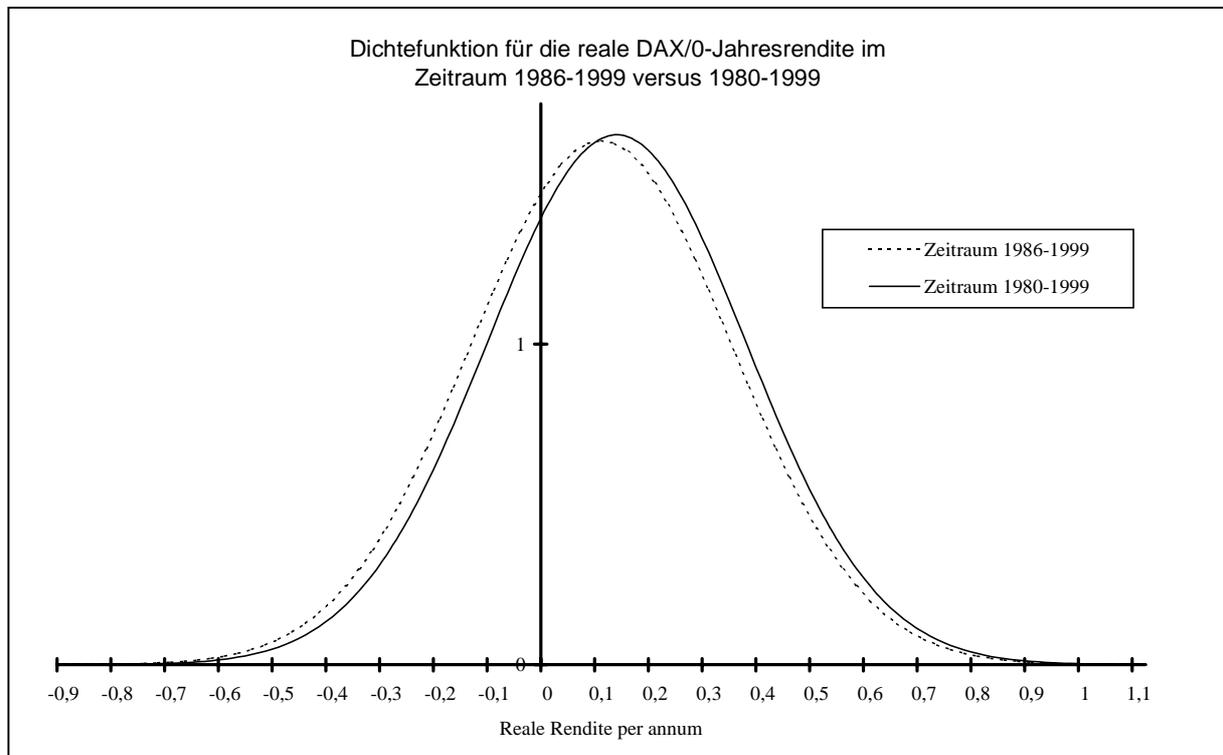


Abb. 1: Repräsentative Verteilung der kontinuierlichen DAX/0-Renditen in realen Termen; Auswertungszeitraum 1980 - 1999 bzw. 1986 - 1999

Die vorstehenden repräsentativen Renditeverteilungen bilden nun die Grundlage für die Evaluation der Shortfall-Risiken einer Aktienanlage relativ zu einer sicheren realen Wertentwicklung in Höhe der alternativen Benchmarkrenditen von real 0%, 2% bzw. 4% in Abhängigkeit vom Zeithorizont. Zur Gewährleistung einer analytischen Lösung wird dabei jeweils von der Konstellation eines Einmalinvestments in Aktien ausgegangen.²⁷

Der zweite Teil der nachfolgenden Evaluationen besteht in einer Analyse der Risiken (im bereits definierten Sinne) einer repräsentativen Anlage in den deutschen Aktienmarkt relativ zu einer repräsentativen Anlage in den deutschen Rentenmarkt. Die Konstruktion einer repräsentativen Renditeverteilung für den deutschen Aktienmarkt bleibt dabei unverändert, für den

²⁷

Im Falle eines laufenden Investments in Aktien kann die Evaluation nur noch auf dem Wege einer stochastischen Simulation erfolgen. Dies ist Gegenstand einer Folgeuntersuchung.

deutschen Rentenmarkt wird der Deutsche Renten-Performanceindex REXP verwendet. Eine Steuerbereinigung muss hierbei nicht stattfinden, da der REXP bereits aus Sicht eines Investors mit einem Steuersatz von 0% konstruiert ist. Zur Wahrung der Vergleichbarkeit wird die REXP-Zeitreihe²⁸ ebenfalls inflationsbereinigt und es werden alternative repräsentative Verteilungen der REXP-Renditen unter der Annahme einer geometrischen Brownschen Bewegung²⁹ (normalverteilte kontinuierliche Jahresrenditen) auf der Basis der Auswertungszeiträume 1980 - 1999 bzw. 1986 - 1999 identifiziert. Die nachfolgende Abbildung 2 stellt exemplarisch die Dichtefunktion der zeitkontinuierlichen Real-Renditen des REXP derjenigen des DAX/0 für den Auswertungszeitraum 1980 - 1999 gegenüber und visualisiert des weiteren die unterschiedlichen Rendite/Risiko-Profile³⁰ der beiden alternativen Investments.

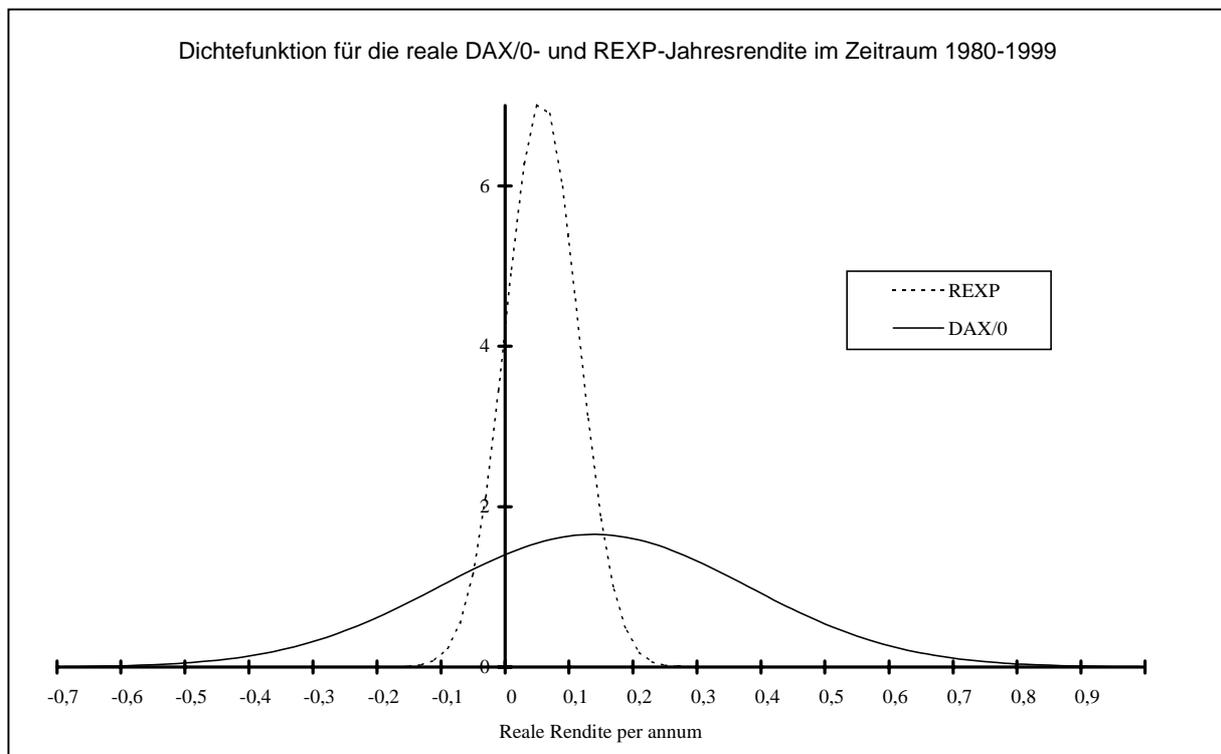


Abb. 2: Repräsentative Verteilung der kontinuierlichen DAX/0 und REXP-Renditen in realen Termen; Auswertungszeitraum 1980 - 1999

Im Rahmen der Definitionen (1) - (4) der verwendeten Shortfallrisikomaße stellt die REXP-Renditeverteilung dabei eine stochastische Benchmark z dar. Insgesamt verweisen wir für die

²⁸ Die Daten wurden uns freundlicherweise von der Deutschen Börse AG zur Verfügung gestellt.

²⁹ Zur Erfassung der Korrelation zwischen Aktien- und Rentenentwicklung wird präzise mit einer zweidimensionalen geometrischen Brownschen Bewegung bzw. mit bivariat normalverteilten kontinuierlichen Renditen gearbeitet. Die technischen Details sind im Anhang dargestellt.

³⁰ Hinsichtlich der konkreten numerischen Spezifikation von Rendite, Risiko und Korrelation sei auf den Anhang verwiesen.

technischen Details der Spezifikation und Identifizierung der Renditeverteilungen sowie die Bestimmung der analytischen Ausdrücke für die jeweiligen Shortfall-Risiken auf den Anhang.

3. Langfristrisiken einer Aktienanlage: Deterministische Benchmarkentwicklungen

Hinsichtlich der Darstellung der vorgenommenen Evaluationen beginnen wir mit den Ergebnissen für die zeitliche Entwicklung der Shortfall-Wahrscheinlichkeit des DAX/0 in realen Termen unter der Annahme eines Einmalinvestments. Die dabei verwendeten sicheren Benchmarkentwicklungen beruhen auf deterministischen realen Zielrenditen von 0%, 2% bzw. 4%. Die Abbildungen 3 und 4 illustrieren die entsprechenden Ergebnisse, wobei alternativ die repräsentative Verteilung der kontinuierlichen jährlichen Renditen auf der Basis der Auswertungszeiträume 1980 - 1999 bzw. 1986 - 1999 zugrunde liegt.

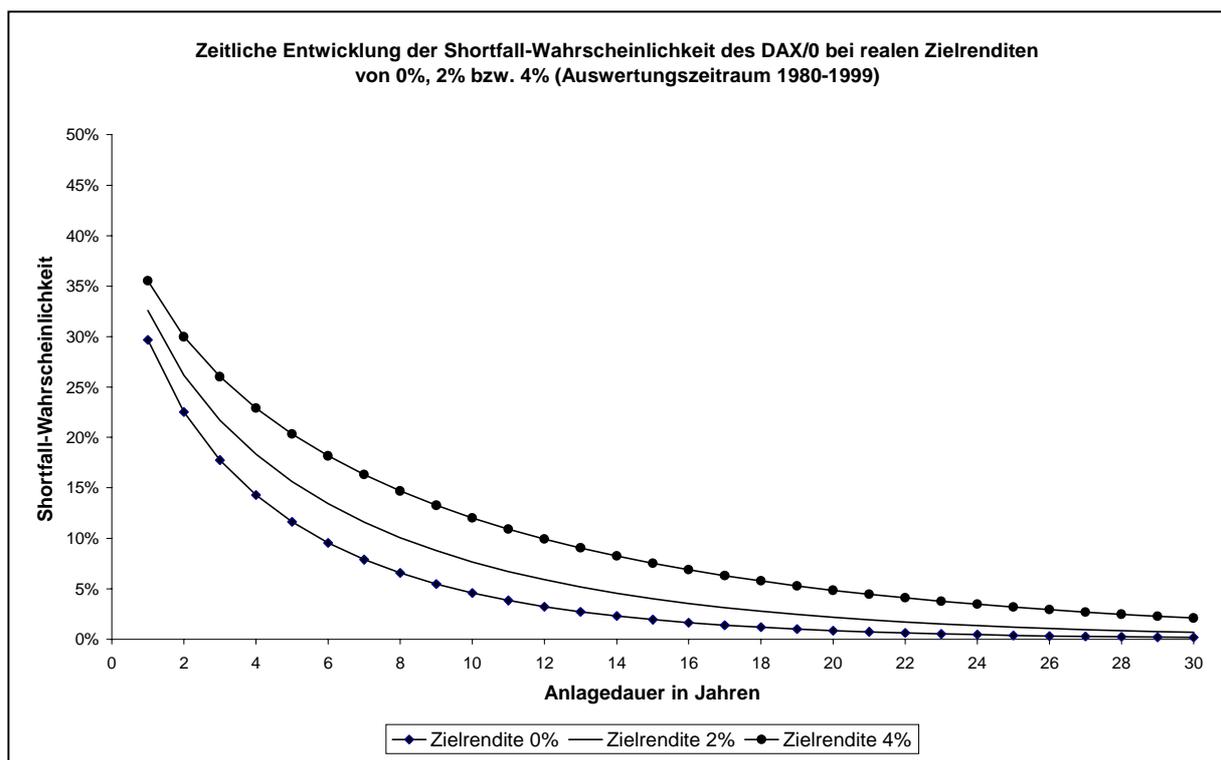


Abb. 3: Zeitliche Entwicklung der Shortfall-Wahrscheinlichkeit des DAX/0 bei variierenden Zielrenditen auf Basis der repräsentativen Rendite-Verteilung 1980 - 1999

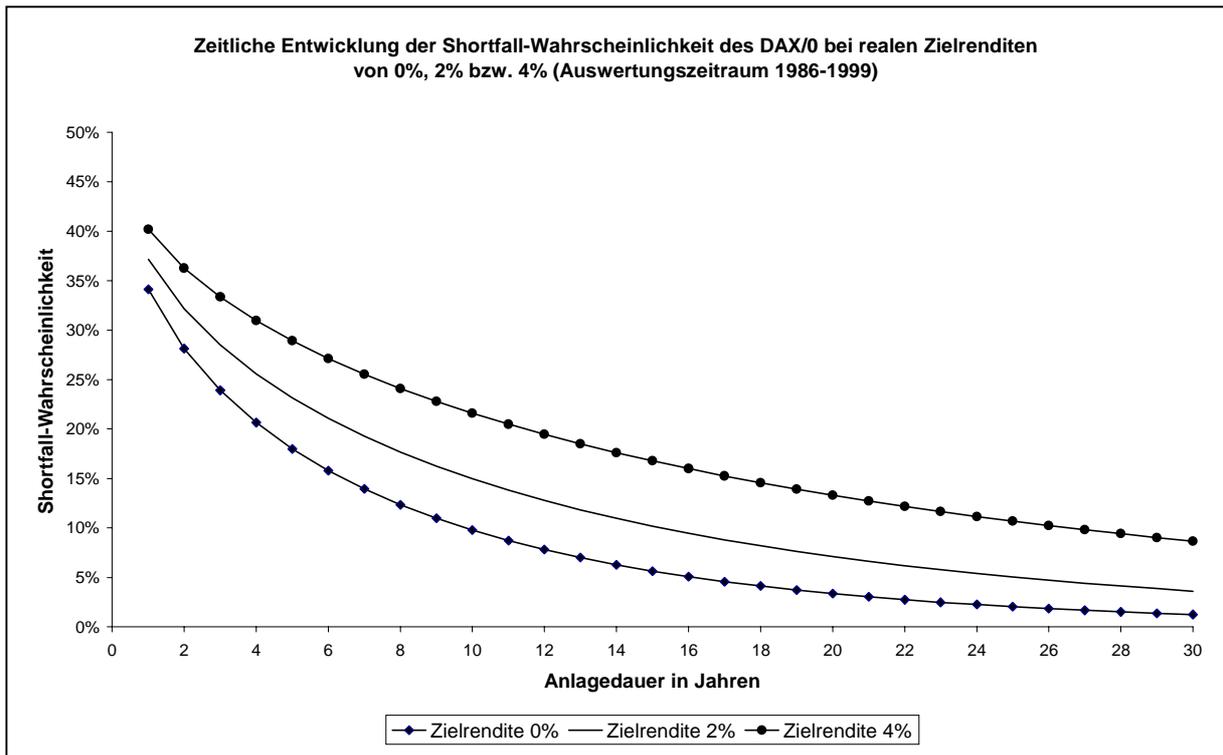


Abb. 4: Zeitliche Entwicklung der Shortfall-Wahrscheinlichkeit des DAX/0 bei variierenden Zielrenditen auf Basis der repräsentativen Rendite-Verteilung 1986 - 1999

Grundsätzlich bestätigen die Ergebnisse zunächst die von *Leibowitz/Krasker* (1988) als *Persistenz des Risikos* bezeichnete Eigenschaft, dass die Shortfall-Wahrscheinlichkeiten einer Aktienanlage in Abhängigkeit von der Zeit nicht rasch gegen null konvergieren - wie es durch rein historisch orientierte Studien nahegelegt wird - sondern dies eher langsam tun und auch über sehr große Zeithorizonte teilweise auf einem sehr substantiellen Niveau bleiben. Die Höhe des Niveaus ist dabei sowohl abhängig von der gewählten Target-Rendite als auch von der als repräsentativ unterstellten Verteilung der Aktienrenditen.

Die entsprechenden Ergebnisse hinsichtlich der zeitlichen Entwicklung des Shortfall-Erwartungswertes sind in den Abbildungen 5 und 6 festgehalten. Zur besseren Interpretierbarkeit wurde dabei die Entwicklung des Shortfall-Erwartungswertes jeweils in Relation zur entsprechenden sicheren Benchmarkentwicklung gesetzt und ist mithin als Prozentgröße ausgewiesen.

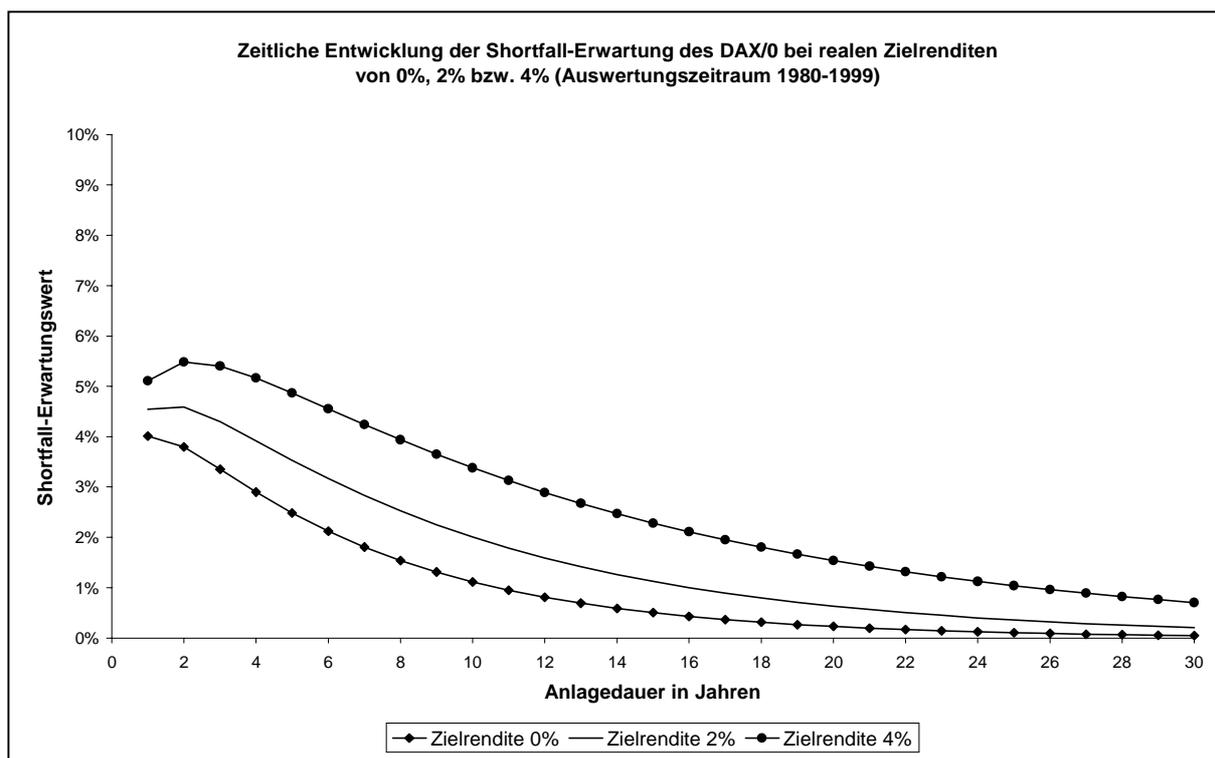


Abb. 5: Zeitliche Entwicklung der Shortfall-Erwartung des DAX/0 bei variierenden Zielrenditen auf Basis der repräsentativen Rendite-Verteilung 1980 - 1999

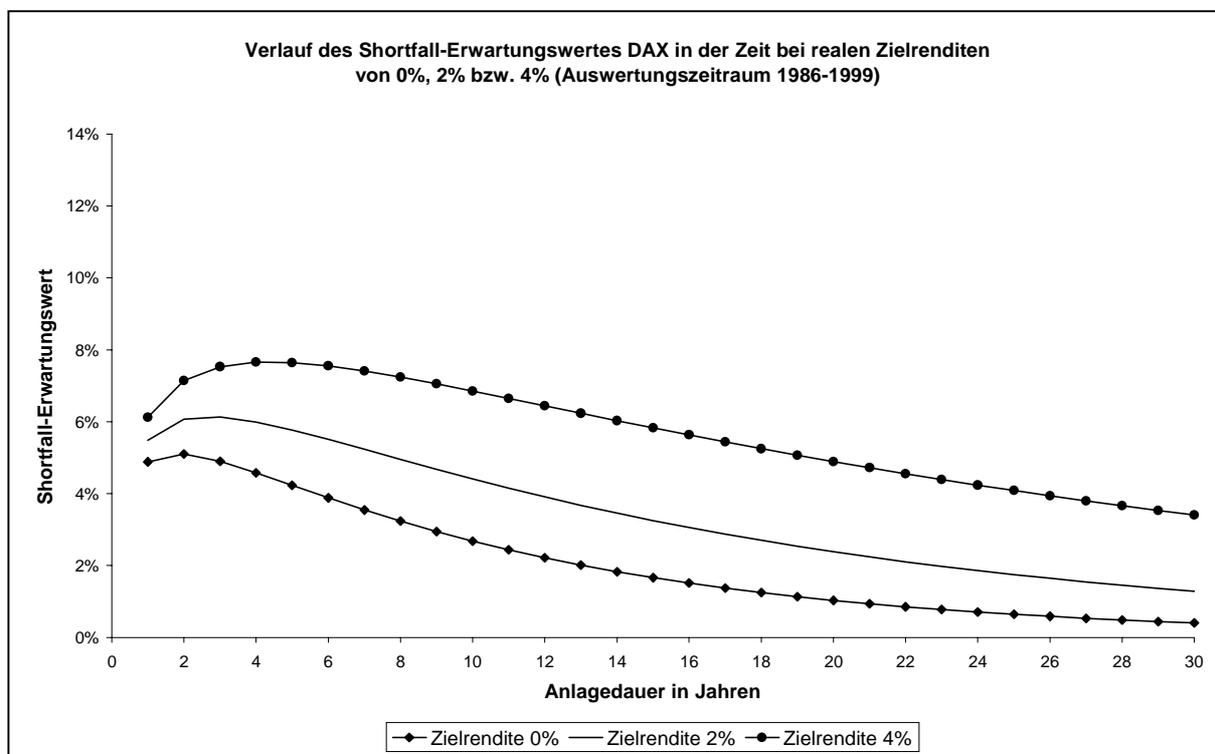


Abb. 6: Zeitliche Entwicklung der Shortfall-Erwartung des DAX/0 bei variierenden Zielrenditen auf Basis der repräsentativen Renditeverteilung 1986 - 1999

Grundsätzlich nimmt damit auch der Shortfall-Erwartungswert der Aktienanlage - nach einer anfänglichen Phase des Risikozuwachses - einen in der Zeit monoton fallenden Verlauf. Dabei ist auch hier eine Persistenz-Eigenschaft zu konstatieren, wobei das Ausmaß des verbleibenden Risikoniveaus über sehr lange Zeiträume wiederum sowohl von der gewählten Zielrendite als auch - hier sehr viel deutlicher als im Falle der Shortfall-Wahrscheinlichkeit - von der als repräsentativ unterstellten Verteilung der Aktienrenditen abhängt.

Die entsprechenden Ergebnisse für das Risikomaß Mittlerer Excess-Verlust sind in den Abbildungen 7 und 8 enthalten. Dabei wurde wiederum die Entwicklung des Mittleren Excess-Verlustes jeweils in Relation zur entsprechenden sicheren Benchmarkentwicklung gesetzt, d.h. ist als Prozentgröße ausgewiesen.

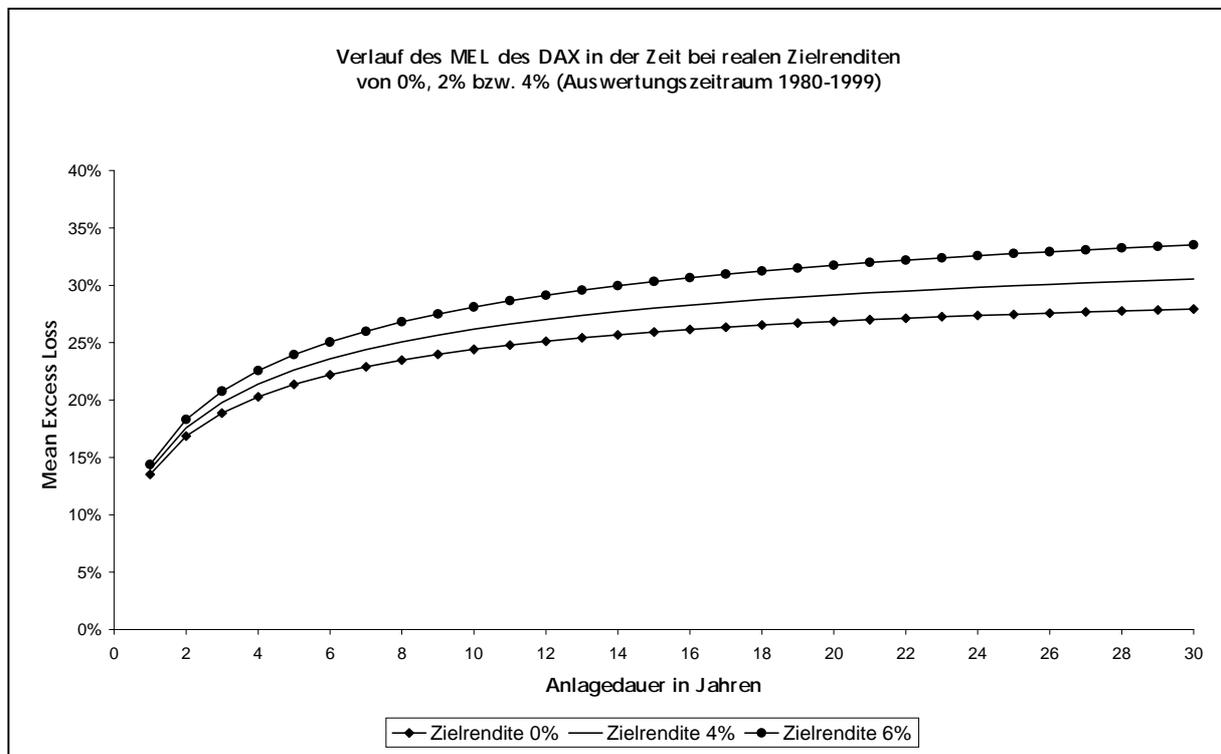


Abb. 7: Zeitliche Entwicklung des MEL des DAX/0 bei variierenden Zielrenditen auf der Basis der repräsentativen Renditeverteilung 1980 - 1999

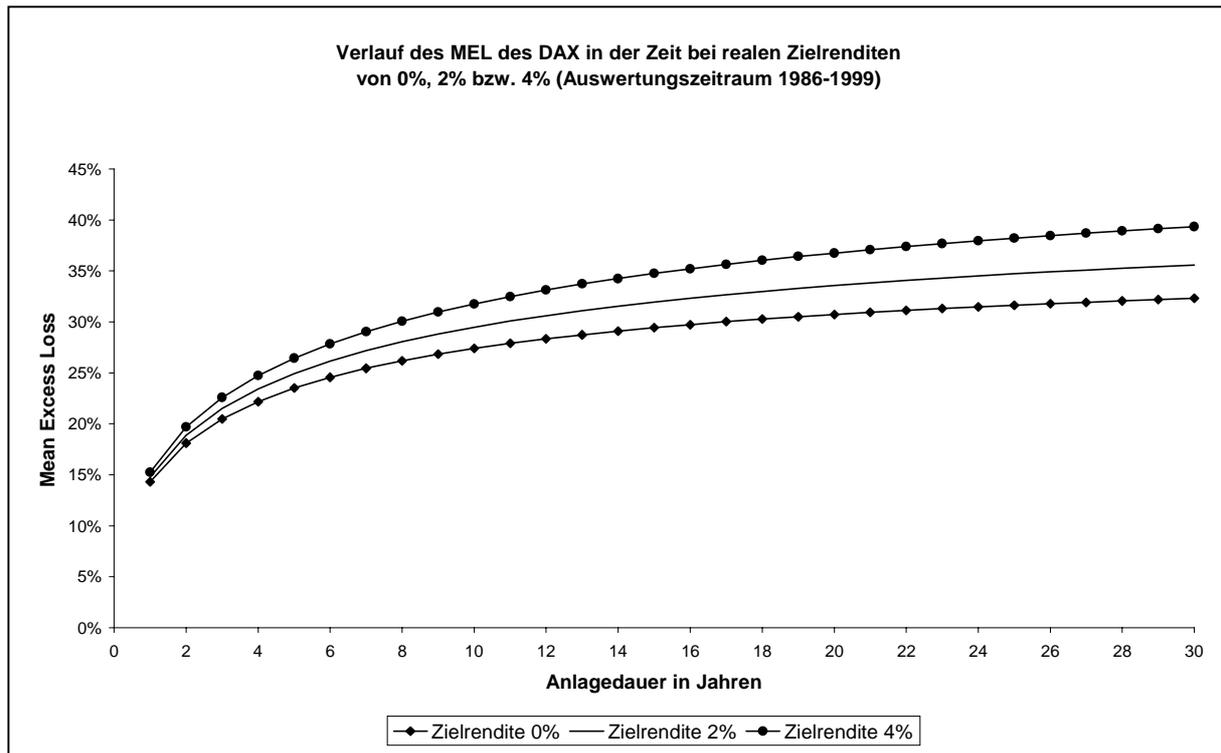


Abb. 8: Zeitliche Entwicklung des MEL des DAX/0 bei variierenden Zielrenditen auf der Basis der repräsentativen Renditeverteilung 1986 - 1999

Die Analyse des (relativen) Mittleren Excess-Verlustes enthüllt dabei ein neuartiges strukturelles Phänomen, die bedingte mittlere Shortfall-Höhe steigt monoton im Zeitablauf. Dies ist dabei unabhängig von der gewählten Benchmark-Rendite und der gewählten repräsentativen Renditeverteilung, diese bestimmen lediglich das Niveau der bedingten mittleren Shortfall-Höhe. Die Analyse des Worst Case-Risikomaßes MEL hat damit insgesamt zur Konsequenz, dass *aus einer Worst Case-Perspektive das Risiko einer Aktienanlage zunimmt und enthüllt damit u.E. die eigentliche Gefährlichkeit einer Aktienanlage.*

So beträgt etwa - je nach als repräsentativ unterstellter Verteilung der Aktienrenditen - unter der Annahme, dass ein Shortfall relativ zu einer realen Benchmark in Höhe von null eintritt und mithin keine Kapitalerhaltung in realen Termen gewährleistet ist, die mittlere Höhe dieser Verfehlung nach 30 Jahren ca. 28% - 32% der entsprechenden Wertentwicklung bei realer Kapitalerhaltung und ist damit substantiell in einem erheblichen Ausmaß.

Die Tabellen 1 und 2 verdeutlichen für ausgewählte Zeithorizonte die genauen Größenordnungen der zuvor betrachteten Shortfall-Risikomaße in Abhängigkeit von der als repräsentativ unterstellten Verteilung der Aktienrenditen.

Anlagezeitraum	1 Jahr	5 Jahre	10 Jahre	15 Jahre	20 Jahre	25 Jahre	30 Jahre
Zielrendite 0% p.a.							
SW	29,68	11,63	4,57	1,94	0,85	0,38	0,17
SE	4,01	2,48	1,12	0,50	0,23	0,10	0,05
MEL	13,52	21,36	24,41	25,93	26,85	27,48	27,93
Zielrendite 2% p.a.							
SW	32,58	15,63	7,66	4,01	2,17	1,20	0,67
SE	4,54	3,53	2,01	1,12	0,63	0,36	0,20
MEL	13,95	22,60	26,17	28,01	29,16	29,95	30,54
Zielrendite 4% p.a.							
SW	35,53	20,33	12,02	7,53	4,85	3,17	2,10
SE	5,11	4,87	3,38	2,28	1,54	1,04	0,70
MEL	14,38	23,94	28,11	30,33	31,75	32,76	33,52

Tab. 1: Shortfall-Risiken (in %) eines DAX/0-Einmalinvestments in realen Termen für unterschiedliche Zielrenditen und ausgewählte Zeithorizonte auf der Basis der repräsentativen Renditeverteilung 1980 - 1999

Anlagezeitraum	1 Jahr	5 Jahre	10 Jahre	15 Jahre	20 Jahre	25 Jahre	30 Jahre
Zielrendite 0% p.a.							
SW	34,11	18,00	9,77	5,64	3,36	2,03	1,25
SE	4,88	4,23	2,68	1,66	1,03	0,64	0,40
MEL	14,32	23,50	27,39	29,43	30,72	31,63	32,30
Zielrendite 2% p.a.							
SW	37,14	23,15	14,96	10,18	7,10	5,04	3,61
SE	5,49	5,77	4,41	3,25	2,38	1,75	1,28
MEL	14,77	24,92	29,47	31,94	33,56	34,71	35,58
Zielrendite 4% p.a.							
SW	40,18	28,91	21,58	16,77	13,30	10,68	8,66
SE	6,12	7,64	6,85	5,83	4,89	4,08	3,41
MEL	15,24	26,44	31,76	34,75	36,76	38,22	39,35

Tab. 2: Shortfall-Risiken (in %) eines DAX/0-Einmalinvestments in realen Termen für unterschiedliche Zielrenditen und ausgewählte Zeithorizonte auf der Basis der repräsentativen Renditeverteilung 1986 - 1999

Kritzman (1994, S. 15) liefert die folgende intuitive Begründung für das klassische Resultat von *Samuelson* (1963) über die Irrelevanz des Zeithorizontes für die Höhe der Aktienquote: „The growing improbability of a loss is offset by the increasing magnitude of potential losses.“

Das zentrale Argument lautet somit, dass das Eintreten eines Verlustes aus einer Aktienanlage zwar immer unwahrscheinlicher wird, aber einhergeht mit einem immer größer werdenden Verlustrisiko der Höhe nach. Dies verdeutlicht zugleich, dass die alleinige Verwendung der Shortfall-Wahrscheinlichkeit bei der Beurteilung des Langfristrisikos einer Aktienanlage unzureichend ist. Nicht nur die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Verlustes bzw. Shortfalls muss hierbei eine Rolle spielen, sondern auch die mögliche Verlusthöhe.

Die vorstehende intuitive Begründung von *Kritzman* kann im Lichte der Beziehung (4) und den vorstehend dokumentierten Ergebnissen auf eine präzise theoretische Basis gestellt werden und zugleich hinsichtlich der Betrachtung von Shortfall-Ereignissen (im Vergleich zu Verlustereignissen) verallgemeinert werden. Es ist in der Tat so, dass die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes bzw. Shortfalls im Zeitablauf abnimmt. Die mittlere Verlust- bzw. Shortfall-Höhe, gegeben, dass ein solcher Verlust bzw. Shortfall eintritt, nimmt hingegen zu. Im Saldo wirkt dieser Effekt, zumindest³¹ auf der Ebene der rein wahrscheinlichkeitstheoretischen Beziehung (4) allerdings nicht kompensatorisch, der Verlauf der Shortfall-Wahrscheinlichkeit überkompensiert den Verlauf des bedingten Shortfall-Erwartungswertes bis zu einem gewissen Grad. Der Worst Case-Aspekt einer Langfristanlage in Aktien wird damit durch die alleinige Betrachtung der Shortfall-Wahrscheinlichkeit zumindest teilweise verdeckt. Die Verdeutlichung des einer Langfristanlage in Aktien immanenten Worst Case-Risikos ist somit für die Investoren als wesentliche Zusatzinformation über die reine Shortfall-Wahrscheinlichkeit hinaus anzusehen.

Insgesamt erweist sich die Beurteilung des Langfristrisikos einer Aktienanlage damit als entscheidend abhängig von der Art des benutzten Risikomaßes und damit der Perspektive der Risikobeurteilung. In der vorliegenden Arbeit soll dabei kein abschließendes Urteil über das „richtige“ Risikomaß gefällt, sondern zunächst nur eine größere Transparenz hinsichtlich unterschiedlicher Facetten des Risikos erreicht werden.

³¹ Ein Trade-off hinsichtlich der Teilnutzen dieser beiden Komponenten könnte andersartig ausfallen. Allerdings fehlt zur Zeit noch ein methodischer Ansatz, dies auf nutzentheoretischer Basis zu explizieren.

4. Langfristrisiken einer Aktienanlage relativ zu einer Rentenanlage

Wie in Abschnitt 2 angekündigt, bezieht sich der zweite Teil der vorgenommenen Evaluation auf eine stochastische Benchmark, deren Basis eine repräsentative Verteilung der REXP-Renditen (in realen Termen) ist. Die nachfolgenden Abbildungen 9 bis 11 enthalten zunächst eine graphische Illustration der zeitlichen Entwicklung der Risikomaße Shortfall-Wahrscheinlichkeit, Shortfall-Erwartungswert und Mittlerer Excess-Verlust des DAX/0 relativ zum REXP, wobei die jeweiligen repräsentativen Verteilungen alternativ auf der Basis der Auswertungszeiträume 1980 - 1999 bzw. 1986 - 1999 identifiziert werden. Tabelle 3 enthält ferner die entsprechenden numerischen Resultate für ausgewählte Zeithorizonte.

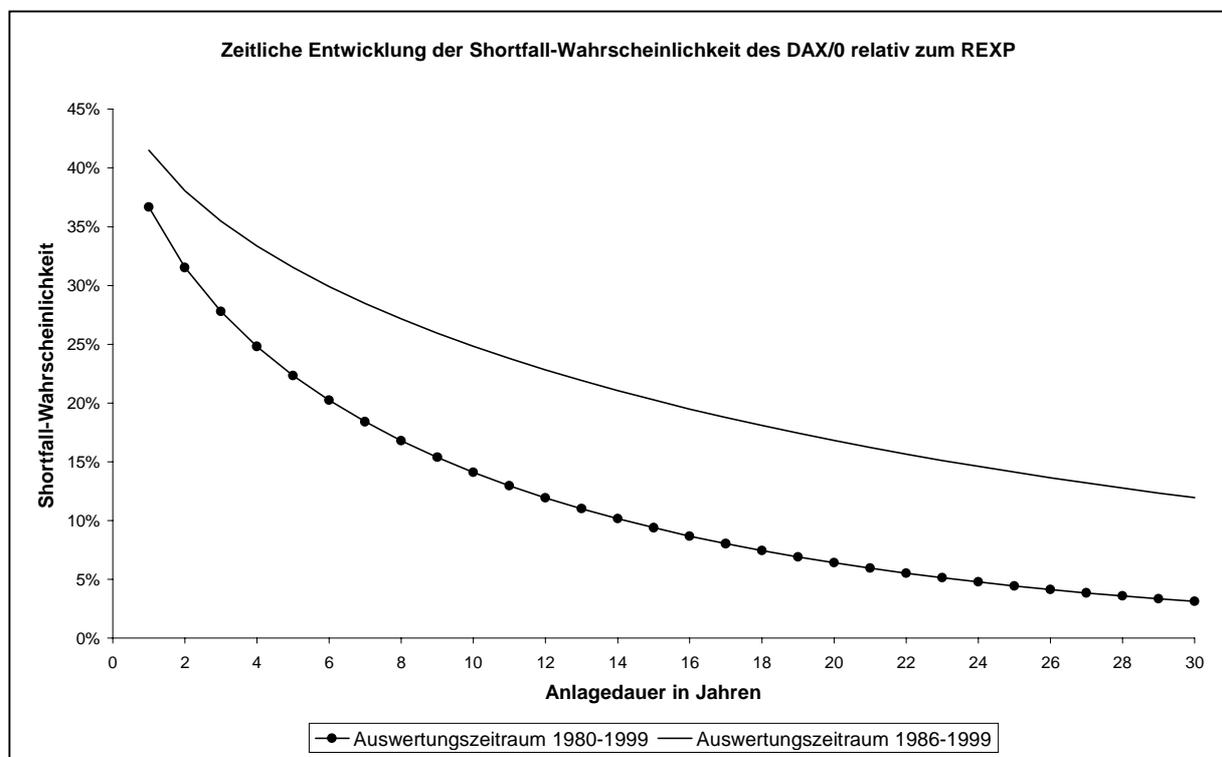


Abb. 9: Zeitliche Entwicklung der Shortfall-Wahrscheinlichkeit des DAX/0 relativ zum REXP auf der Basis der repräsentativen Renditeverteilungen 1980 - 1999 bzw. 1986 - 1999

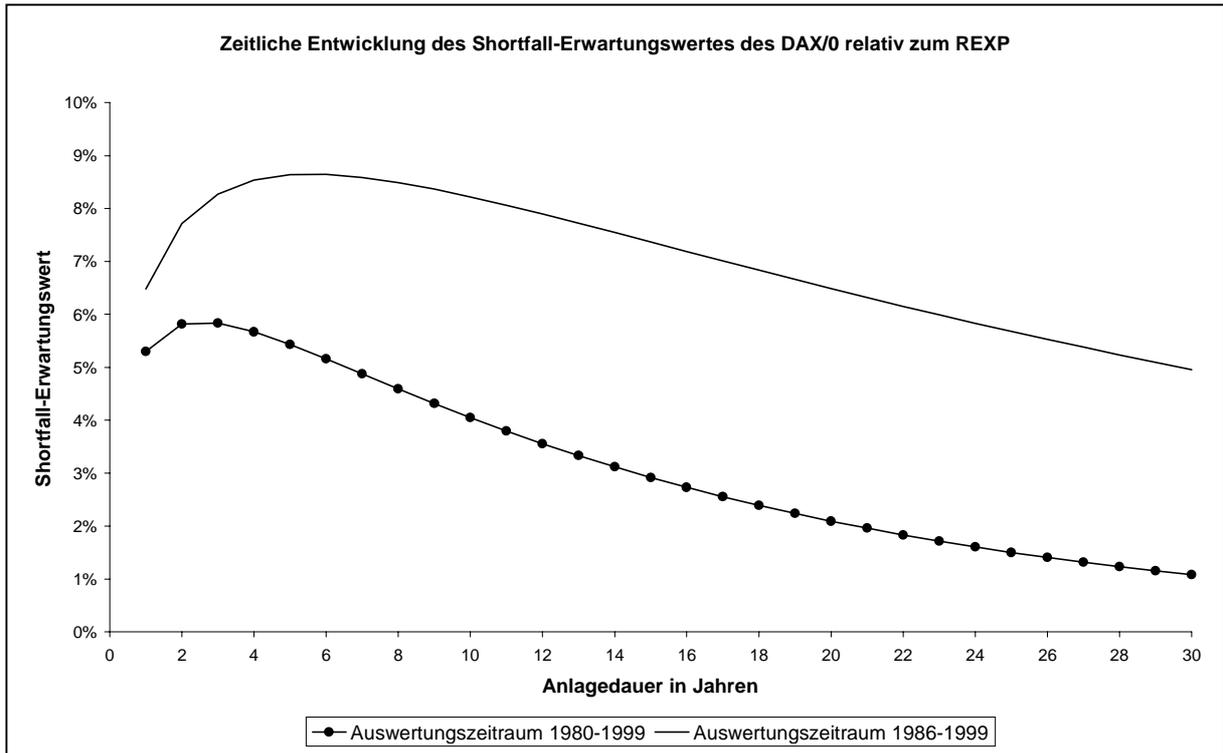


Abb. 10: Zeitliche Entwicklung der Shortfall-Erwartungswertes des DAX/0 relativ zum REXP auf der Basis der repräsentativen Renditeverteilungen 1980 - 1999 bzw. 1986 - 1999

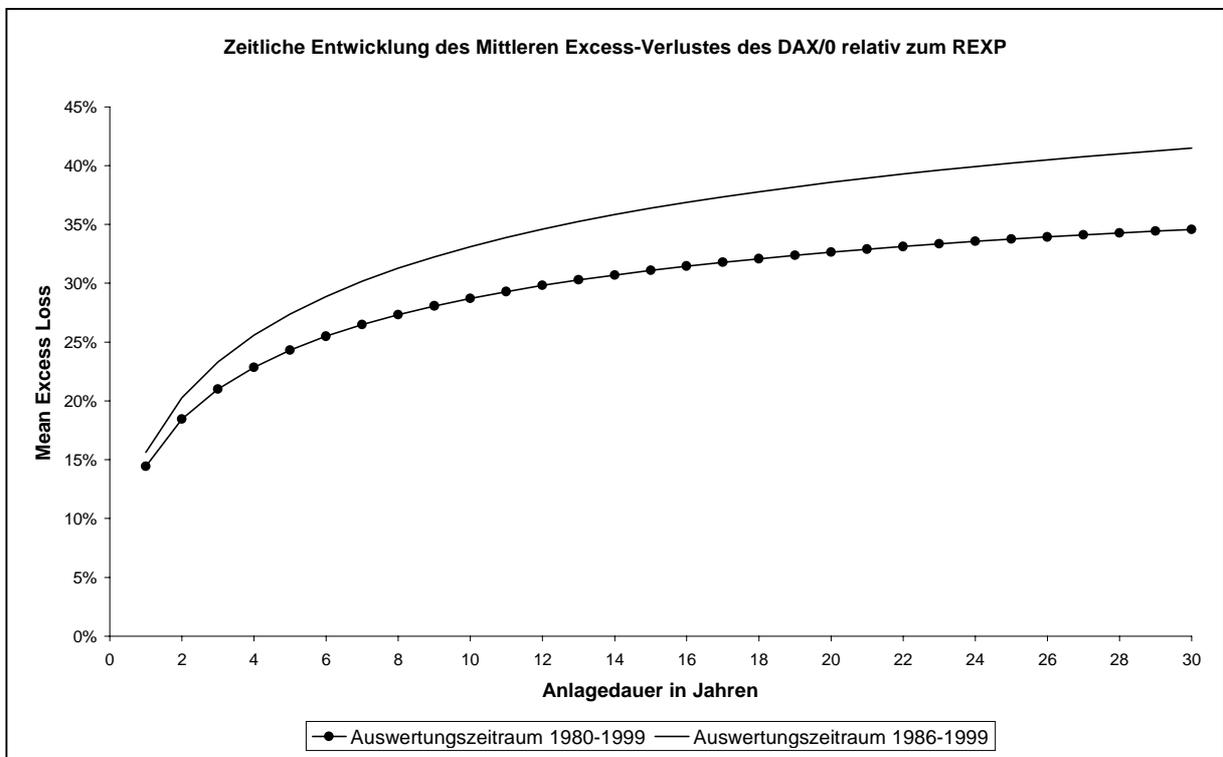


Abb. 11: Zeitliche Entwicklung des Mittleren Excess-Verlustes des DAX/0 relativ zum REXP auf der Basis der repräsentativen Renditeverteilungen 1980 - 1999 bzw. 1986 - 1999

Anlagezeitraum	1 Jahr	5 Jahre	10 Jahre	15 Jahre	20 Jahre	25 Jahre	30 Jahre
Repräsentative Verteilung 1980 - 1999							
SW	36,69	22,34	14,10	9,38	6,41	4,45	3,12
SE	5,30	5,43	4,05	2,92	2,09	1,50	1,08
MEL	14,44	24,30	28,71	31,09	32,64	33,75	34,58
Repräsentative Verteilung 1986 - 1999							
SW	41,49	31,53	24,83	20,25	16,81	14,12	11,95
SE	6,48	8,64	8,22	7,36	6,49	5,68	4,95
MEL	15,62	27,39	33,11	36,37	38,58	40,21	41,47

Tab. 3: Shortfall-Risiken (in %) eines Einmalinvestments DAX/0 relativ zum REXP in realen Termen für ausgewählte Zeithorizonte auf der Basis der repräsentativen Renditeverteilungen 1980 - 1999 bzw. 1986 - 1999

Insgesamt bestätigen die vorstehend dargestellten Resultate in struktureller Hinsicht die Ergebnisse des Abschnittes 3 - dort im Falle deterministischer Benchmarkentwicklungen - in vollem Umfang, wobei die Abhängigkeit der Ergebnisse vom zugrundeliegenden Auswertungszeitraum noch deutlicher zu Tage tritt. Die Shortfall-Wahrscheinlichkeit des DAX/0 relativ zum REXP nimmt grundsätzlich einen monoton fallenden Verlauf in Abhängigkeit vom Zeithorizont und weist dabei eine Persistenzeigenschaft auf, die bei Zugrundelegung des Auswertungszeitraumes 1986 - 1999 zudem sehr substantiell ausfällt. Der Shortfall-Erwartungswert des DAX/0 relativ zum REXP ist strukturell „zunächst“³² ansteigend, dann monoton fallend und weist ebenfalls eine Persistenzeigenschaft auf, die bei Zugrundelegung des Auswertungszeitraumes 1986 - 1999 wiederum sehr substantiell ist. Die zeitliche Entwicklung des Mittleren Excess-Verlustes des DAX/0 relativ zum REXP ist schließlich monoton steigender Natur. Dabei beträgt - je nach zugrundegelegter repräsentativer Verteilung - unter der Annahme, dass die Entwicklung des DAX/0 die Entwicklung des REXP unterschreitet, die mittlere Höhe dieser Verfehlung ca. 37 - 47% und ist damit wiederum substantiell in einem erheblichen Ausmaß.

³² Die „Wartezeit“ auf das Absinken des Shortfall-Erwartungswertes unter sein Anfangsniveau beträgt aber im Falle der Zugrundelegung des Auswertungszeitraumes 1986 - 1999 immerhin ca. 20 Jahre.

5. Résumé

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden Langfristrisiken einer repräsentativen Einmal-Aktienanlage (DAX/0) in realen Termen relativ zu unterschiedlichen sicheren Wertentwicklungen (reale Verzinsungen von 0%, 2% bzw. 4%) sowie relativ zu einer repräsentativen Entwicklung von festverzinslichen Wertpapieren (REXP) untersucht. Als zugrundeliegende Risikomaße wurden die Shortfall-Wahrscheinlichkeit, der Mittlere Excess-Verlust (bedingter Shortfall-Erwartungswert) sowie das Produkt aus diesen beiden Größen, der Shortfall-Erwartungswert, verwendet. Aus struktureller Sicht weisen sowohl die Shortfall-Wahrscheinlichkeit als auch der Shortfall-Erwartungswert (dieser allerdings erst nach einer anfänglichen Phase steigender Werte) ein im Zeitablauf monoton fallendes Verhalten auf. Allerdings liegt hierbei jeweils eine Persistenz-Eigenschaft des Risikos vor, d.h. das betreffende Risikomaß konvergiert nicht rasch gegen null, sondern dies geschieht eher langsam und bleibt auch über sehr große Zeithorizonte (30 Jahre) auf einem durchaus substantiellen Niveau.

Die Analyse des Mittleren Excess-Verlustes enthüllt u.E. die eigentliche Gefährlichkeit einer Langfristanlage in Aktien. Unter Worst Case-Gesichtspunkten nimmt das Risiko einer Aktienanlage strukturell im Zeitablauf zu und nimmt dabei substantielle Größenordnungen an. Dieser Effekt wird bei alleiniger Analyse des Shortfall-Erwartungswertes verdeckt, da er durch die relativ höhere Konvergenzgeschwindigkeit der Shortfall-Wahrscheinlichkeit überkompensiert wird.

Die strukturelle Verhaltensweise des Mittleren Excess-Verlustes liefert dem Investor eine zentrale Information über das Langfristrisiko einer Aktienanlage. Zwar wird die Wahrscheinlichkeit eines Shortfalls mit zunehmendem Zeithorizont immer geringer. Wenn dieser Fall dann aber doch eintritt, dann kann es zu einer durchaus substantiellen Unterschreitung der Benchmark kommen, die auch mit zunehmendem Zeithorizont nicht verschwindet, sondern sich im Mittel sogar ausweitet.

Diese Worst Case-Charakteristik einer Aktienanlage unterliegt keinem zeitlichen Diversifikationseffekt. Folgt man der These, dass ein Langfristinvestment in Aktien (z.B. im Bereich der Altersvorsorge) zumindest in Teilen auch unter Worst Case-Gesichtspunkten zu beurteilen ist, so ist das Risiko einer langfristigen Anlage in Aktien in einem neuen Licht zu sehen.

Methodischer Anhang

Es bezeichne im folgenden $\{D(t); t \geq 0\}$ die Entwicklung des DAX und $\{R(t); t \geq 0\}$ entsprechend die Entwicklung des REXP über die Zeit t . Wir nehmen dabei an, dass der Prozess $\{(D(t), R(t)); t \geq 0\}$ einer zweidimensionalen geometrischen Brownschen Bewegung folgt.

Betrachtet man nun die kontinuierlichen Einperioden-Renditen

$$I_D(t) := \ln\{D(t) / D(t-1)\}$$

bzw.

$$I_R(t) := \ln\{R(t) / R(t-1)\}$$

für eine Folge von Zeitpunkten $t = 1, \dots, T$, dann sind $(I_D(t), I_R(t))$ stochastisch unabhängige und normalverteilte zweidimensionale Zufallsvariablen. Die empirischen Beobachtungen $(i_D(t), i_R(t))$, $t = 1, \dots, T$, können daher als Stichprobe zu einer bivariaten Normalverteilung mit

Erwartungsvektor $u = \begin{pmatrix} u_D \\ u_R \end{pmatrix}$ und Varianz-Kovarianz-Matrix $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_D^2 & \rho\sigma_D\sigma_R \\ \rho\sigma_D\sigma_R & \sigma_R^2 \end{pmatrix}$ angesehen werden.

Entsprechend können die betreffenden Parameter durch ihrer Stichprobengegenstücke Stichprobenmittelwert, (korrigierte) Stichprobenvarianz bzw. -standardabweichung und Stichprobenkorrelationskoeffizient geschätzt werden. Im Falle des Auswertungszeitraumes 1980 - 1999 führt dies auf die Größen $u_D = 0,1288$, $s_D = 0,2413$, $u_R = 0,0475$, $s_R = 0,054$ sowie $\rho = 0,1545$. Im Falle des Auswertungszeitraumes 1986 - 1999 führt dies auf die Größen $u_D = 0,0999$, $s_D = 0,2440$, $u_R = 0,0467$, $s_R = 0,0562$ sowie $\rho = 0,057$.

Stellt nun $R(t)$ eine stochastische Benchmark dar, relativ zu der der Shortfall von $D(t)$ gemessen werden soll, so gilt: $D(t) < R(t) \Leftrightarrow \frac{D(t)}{R(t)} < 1$, d.h. betrachtet wird äquivalent der Shortfall

von $\frac{D(t)}{R(t)}$ relativ zu 1 und wir sind damit im Falle einer deterministischen Benchmark.

Da nun $\ln\left(\frac{D(t)}{R(t)}\right) = \sum_{\tau=1}^t I_D(\tau) - \sum_{\tau=1}^t I_R(\tau)$ und damit eine Summe normalverteilte Zufallsgrößen

ist, ist der Quotient $D(t)/R(t)$ zu jedem Zeitpunkt logarithmisch normalverteilt mit den Parametern m_t und v_t , d.h.

$$\ln\left(\frac{D(t)}{R(t)}\right) \sim N(m_t, v_t).$$

Insbesondere gilt:

$$m_t = t(u_D - u_R) + \ln(D_0/R_0)$$

$$v_t^2 = t[\sigma_D^2 + \sigma_R^2 - 2\rho\sigma_D\sigma_R].$$

Ist nun zum Zeitpunkt $t = 0$ die Anfangsinvestition in den DAX sowie den REXP gleich hoch, d.h. $D_0 = R_0$, so gilt weiterhin:

$$m_t = t(u_D - u_R).$$

Die Shortfall-Risikomaße des DAX relativ zum REXP ergeben sich dann wie folgt:

$$SE_{D/R}(1) = E\left[\max\left(1 - \frac{D(t)}{R(t)}, 0\right)\right],$$

$$SP_{D/R}(1) = P\left(1 - \frac{D(t)}{R(t)} < 1\right)$$

und

$$MEL_{D/R}(1) = E\left[1 - \frac{D(t)}{R(t)} \mid \frac{D(t)}{R(t)} < 1\right]$$

$$= \frac{SE_{D/R}(1)}{SP_{D/R}(1)}.$$

Ergibt sich beispielsweise $MEL_{D/R}(1) = 0,25$, so ist dieses Ergebnis folgendermaßen zu interpretieren: Wenn $D(t) < R(t)$, dann liegt $D(t)$ im Mittel 25% unter $R(t)$.

Die analytisch geschlossene Betrachtung von $SE_{D/R}$, $SW_{D/R}$ und damit $MEL_{D/R}$ erfolgt auf der Basis von $D(t)/R(t) \sim LN(m_t, v_t)$ etwa gemäß den Ergebnissen von *Maurer* (2000, S. 73) bei Wahl von $z = 1$ und $q_t = (\ln z - m_t) / v_t = -m_t / v_t$ und $SP_z(t) = \Phi(q_t)$ sowie $SE_z(t) = z\Phi(q_t) - \exp(m_t + \frac{1}{2}v_t^2) \phi(q_t - v_t)$, wobei $\phi(x)$ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung bezeichne.

Der Fall deterministischer Targets ergibt sich bei Wahl von $R(t) = D(0)e^{rt}$, insbesondere gilt dabei $\sigma_R = \rho = 0$ und $u_R = r$. Es folgt zunächst

$$\begin{aligned} & E\left[1 - \frac{D(t)}{D(0)e^{rt}} \mid D(t) < D(0)e^{rt}\right] \\ &= \frac{E[D(0)e^{rt} - D(t) \mid D(t) < D(0)e^{rt}]}{D(0)e^{rt}} \\ &= \frac{\text{MEL}_{D(t)}(D(0)e^{rt})}{D(0)e^{rt}}. \end{aligned}$$

Dies entspricht somit dem MEL von $D(t)$ bzgl. $z = D(0)e^{rt}$ relativ zur Benchmarkentwicklung $D(0)e^{rt}$.

Analog gilt:

$$\begin{aligned} \text{SE}_{D/R}(1) &= E\left[\max\left(1 - \frac{D(t)}{D(0)e^{rt}}, 0\right)\right] \\ &= \frac{E[\max(D(0)e^{rt} - D(t), 0)]}{D(0)e^{rt}}. \end{aligned}$$

Literatur

- Albrecht, P., R. Maurer, M. Möller* (1999): Shortfall-Risiko/Excess-Chance-Entscheidungskalküle: Grundlagen und Beziehungen zum Bernoulli-Prinzip, *Zeitschrift für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften* 118, S. 249 – 274.
- Albrecht, P., R. Maurer* (2000): 100% Aktien zur Altersvorsorge? - Über die Langfristrisiken einer Aktienanlage, in: *AbsolventUm Universität Mannheim* (Hrsg.): 1. Mannheimer Alumni-Tag, Mannheim, S. 241 - 271.
- Albrecht, T.* (1999): Asset Allocation und Zeithorizont, Bad Soden/Ts.
- Ammann, M., H. Zimmermann* (1997): Bemerkungen zur Zeithorizontdiskussion, *Finanzmarkt und Portfolio Management* 11, S. 205 - 210.
- Ammann, M., H. Zimmermann* (2000): Evaluating the Long-Term Risk of Equity Investments in a Portfolio Insurance Framework, *Geneva Papers on Risk and Insurance* 25, S. 424 - 438.
- Artzner, Ph., F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath* (1999): Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance* 9, S. 203 – 228.
- Asness, C.S.* (1996): Why not 100% equities?, *Journal of Portfolio Management*, Winter 1996, S. 29 – 34.
- Barth, J.* (2000): Worst-Case Analysen des Ausfallrisikos eines Portfolios aus marktabhängigen Finanzderivaten, in: *Oehler, A.* (Hrsg.): *Kreditrisikomanagement - Portfoliomodelle und Derivate*, Stuttgart, S. 107 - 148.
- Benartzi, S., R.H. Thaler* (1999): Risk Aversion or Myopia? Choices in Repeated Gambles and Retirement Investment, *Management Science* 45, s. 364 - 381.
- Bernstein, P.L.* (1996): Are stocks the best place to be in the long run? A contrary opinion, *Journal of Investing* 5, S. 9 - 12.
- Biermann, H., Jr.* (1998): Why not 100% equities?: Comment, *Journal of Portfolio Management*, Winter 1998, S. 70 – 73.
- Bodie, Z.* (1995): On the risks of stocks in the long run, *Financial Analysts' Journal*, May/June 1995, S. 18 – 22.
- Bodie, Z., D.B. Crane* (1998): The Design and Production of New Retirement Saving Products, *Journal of Portfolio Management*, Winter 1998, S. 77 – 82.
- Borkovic, M., C. Klüppelberg* (2000): Extremwerttheorie für Finanzzeitreihen- ein unverzichtbares Werkzeug im Risikomanagement, in: *Johanning, L., B. Rudolph* (Hrsg.) (2000): *Handbuch Risikomanagement*, Bad Soden/Taunus, Band 1, S. 219 - 244.
- Embrechts, P., C. Klüppelberg, T. Mikosch* (1997): *Modelling Extremal Events*, Berlin u.a.

- Embrechts, P., S. Resnick, G. Samorodnitsky* (1999): Extreme Value Theory as a Risk Management Tool, *North American Actuarial Journal* 3, S. 30 – 41.
- Fishburn, P.C.* (1977): Mean Risk Analysis Associated with Below Target Return, *American Economic Review* 67, S. 116 - 126.
- Hull, J.C.* (1993): *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, 2nd ed., Englewood Cliffs, N.J.
- Kramer, E.B., M. Weber* (1999): Über kurz oder lang – Spielt der Anlagehorizont eine berechnete Rolle bei der Beurteilung von Investments? Working Paper, Sonderforschungsbereich 504, Universität Mannheim.
- Kritzman, M.* (1994): What practitioners need to know about time diversification, *Financial Analysts' Journal*, January/February 1994, S. 14 – 18.
- Kritzman, M., D. Rich* (1998): Beware of dogma: The truth about time diversification, *Journal of Portfolio Management*, Summer 1998, S. 66 – 77.
- Leibowitz, M.L., W.S. Krasker* (1988): The persistence of risk: Stocks versus bonds over the long term, *Financial Analysts' Journal*, November/December 1988, S. 40 – 47.
- Löffler, G.* (2000): Bestimmung von Anlagerisiken bei Aktiensparplänen, *Die Betriebswirtschaft* 60, S. 350 - 361.
- Levy, H., A. Cohen* (1998): On the Risk of Stocks in the Long Run: Revisited, *Journal of Portfolio Management*, Spring 1998, S. 60 - 69.
- Maurer, R.* (2000): Integrierte Erfolgssteuerung in der Schadenversicherung auf der Basis von Risiko-Wert-Modellen, Karlsruhe.
- Mehra, R., E.C. Prescott* (1985): The Equity Premium: A Puzzle, *Journal of Monetary Economics*, March 1985, S. 145 - 161.
- Navon, J.* (1998): A bond manager's apology, *Journal of Portfolio Management*, Winter 1998, S. 65 – 69.
- Rosen, R.v.* (1999, Hrsg.): *Aktie versus Rente*, Studien des Deutschen Aktieninstituts, Heft 6, Frankfurt.
- Samuelson, P.A.* (1963): Risk and uncertainty: A fallacy of large numbers, *Scientia*, April/May 1963, S. 1 – 6, abgedruckt in: *Collected Scientific Papers of P.A. Samuelson*, Vol. 1, Kapitel 17, S. 153 – 158.
- Scherreick, S.* (1998): Why it makes sense to check out inflation-indexed bonds, *Money* 27, March 1998, S. 27.
- Stehle, R.* (1998): Aktien versus Renten, in: *Cramer, J.E., W. Förster, F. Ruland* (Hrsg.): *Handbuch zur Altersversorgung*, Frankfurt/Main, S. 815 - 831.

- Stehle, R.* (1999): Renditevergleich von Aktien und festverzinslichen Wertpapieren auf Basis des DAX und des REXP, Arbeitspapier, Humboldt-Universität zu Berlin, April 1999.
- Thaler, R.H., J.P. Williamson* (1994): College and university endowment funds: Why not 100% equities?, *Journal of Portfolio Management*, Fall 1994, S. 27 – 38.
- Wirch, J.L.* (1999): Raising Value-at-Risk, *North American Actuarial Journal* 3, S. 106 – 115.
- Wirch, J.L., M.R. Hardy* (1999): A Synthesis of Risk Measures for Capital Adequacy, *Insurance: Mathematics and Economics* 25, S. 337 – 347.
- Zimmermann, H.* (1991): Zeithorizont, Risiko und Performance: Eine Übersicht, *Finanzmarkt und Portfolio Management* 5, S. 164 - 181.