Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie,
Portfolio Management und Versicherungswirtschaft

Nr. 83

Ertrags- und Liquiditätsanalyse der gemischten Lebensversicherung bei liberalisierten Rechnungsgrundlagen

von
ALEXANDER KÖNIG, HEINRICH R. SCHRADIN

Universität Mannheim 1995

3.- 05/96 - 20

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Seite

1. Problemstellung

Die deutsche Lebensversicherung ist von tiefgreifenden Veränderungen gekennzeichnet. Insbesondere führt die Liberalisierung der Rechnungsgrundlagen zu einer erheblichen Ausweitung des unternehmerischen Handlungsspielraumes. Bisher galt für den deutschen Markt, daß die Rechnungsgrundlagen im Zinsbereich für die Ermittlung der Prämien und Reserven identisch sein mußten. Die Höhe dieses Zinssatzes war durch das Bundesaufsichtsamt für das Versicherungswesen mit 3 bzw. 3,5% einheitlich vorgegeben und so vorsichtig gewählt, daß ihre Erwirtschaftung durch die am Markt tatsächlich erzielbare Verzinsung fast sicher dauerhaft gewährleistet war. Mit der Aufhebung dieser Regulierung der Kalkulationszinssätze hat die Versicherungsunternehmung nunmehr die Möglichkeit, bei Ermittlung der Bedarfsprämie einen höheren Kalkulationszinssatz anzuwenden und dadurch am Wettbewerbsmarkt eine niedrigere Prämien zu fordern. Da andererseits das garantierte Zinsniveau für die Entwicklung der versicherungstechnischen Verpflichtungen innerhalb bestimmter Grenzen ebenfalls neu gestaltet werden kann, ist ein im Rahmen der Prämienerhebung potentiell erzielbarer Wettbewerbsvorteil mit bisher in Deutschland unbekannten betrieblichen Konsequenzen für die Liquiditäts- und Erfolgslage der Unternehmung verbunden. Dies resultiert aus der neu geschaffenen Vorschrift des § 341f Abs. 1 HGB, die die Verwendung der prospektiven Berechnungsmethode bei der Bemessung der Deckungsrückstellung erzwingt. Mithin hat das Versicherungsunternehmen unter bestimmten Rechnungszinskonstellationen bereits zu Vertragsbeginn eine Verpflichtung gegenüber dem Versicherungsnehmer, ohne daß diese durch entsprechende vertragsinduzierte Vermögenswerte ausgeglichen werden kann.[1)]

Ziel der Untersuchung ist es, auf der Grundlage einer konsequent risikotheoretischen Formulierung der durch einen gemischten Lebensversicherungsvertrag induzierten Zahlungsreihe unterschiedliche Zinskonstellationen in ihrer betriebswirtschaftlichen Bedeutung für die Lebensversicherungsunternehmung zu analysieren. Zu diesem Zweck werden, unter Berücksichtigung des Auseinanderfallens der Kalkulationszinssätze in der Prämien- und Reserveermittlung, Annahmen über die am Markt tatsächlich erzielbare Verzinsung der aus einem Lebensversicherungsvertrag resultierenden Vermögenswerte

---

1) Vgl. *Claus* 1994, S. 141.

getroffen. Zunächst betrachten wir unterschiedliche deterministische und zeitstabile Zinsumgebungen und diskutieren die Entwicklung der jeweiligen Reinvermögensposition der Unternehmung, wie sie sich aus der Differenz der durch den Vertrag induzierten Aktiva und Passiva ergibt. Schließlich werden Auswirkungen einer stochastischen Marktzinsentwicklung auf die Reinvermögensposition des Unternehmens untersucht.

2. Risikotheoretische Grundlagen der Lebensversicherung

2.1 Modellierung des Lebensprozesses

Als adäquates theoretisches Modell zur Beschreibung des Lebensprozesses verwenden wir zeitdiskrete, inhomogene[2)] *Markov*-Ketten mit endlich vielen Zuständen.[3)] Im allgemeinen Fall kann eine *Markov*-Kette als ein System beschrieben werden, welches zu jedem Zeitpunkt $t = 0, 1, \ldots$ einen von endlich vielen Zuständen $x_0, x_1, \ldots$ annehmen kann, mit

X_t := zufallsabhängiger Zustand des Systems zum Zeitpunkt t und

$X_t = x_t$:= zum Zeitpunkt t befindet sich das System im Zustand x_t.

Der stochastische Prozeß $\{X_0 \equiv x_0, X_1, \ldots, X_t, \ldots\}$ beschreibt die Entwicklung des Systems in der Zeit. Prinzipiell könnte die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das System zum Zeitpunkt $t+1$ im Zustand x_{t+1} befindet, von der vollständigen Prozeßgeschichte abhängig sein:

$$\Pr(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}, \ldots, X_0 = x_0) \tag{1}$$

Ein *Markov*-Prozeß jedoch zeichnet sich durch die Eigenschaft aus, wonach die Wahrscheinlichkeit, daß sich das System zum Zeitpunkt $t+1$ im Zustand x_{t+1} befindet, allein vom Zustand des Systems im vorangegangenen Zeitpunkt t abhängig ist.[4)]

$$\Pr(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t) \tag{2}$$

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten

---

2) Inhomogenität bedeutet, daß sich die Übergangswahrscheinlichkeiten im Zeitablauf verändern.

3) Vgl. *Amsler* 1988; *Wilkie* 1988; *Kojima* 1988.

4) Vgl. *Fisz* 1978, S. 311.

$$\Pr(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t) = p_{x_{t+1},x_t}(t) \;, \quad t = 0, 1, ... \tag{3}$$

heißen einperiodige Übergangswahrscheinlichkeiten von x_t nach x_{t+1} zum Zeitpunkt t. Gilt für alle t

$$p_{x_{t+1},x_t}(t) = p_{x_{t+1},x_t} \tag{4}$$

so heißt die *Markov*-Kette homogen.[5)] Dementsprechend ist das Entwicklungsgesetz einer homogenen *Markov*-Kette vollständig durch die Angabe des Startzustandes $X_0 \equiv x_0$ und der Matrix der einperiodigen Übergangswahrscheinlichkeiten $\mathbf{M}_{x_{t+1},x_t} = \mathbf{M}(1)$ bestimmt.[6)]

Übertragen auf die Modellierung der Lebensdauer einer natürlichen Person ergibt sich folgende Situation, wobei im Hinblick auf spätere Überlegungen die Ausführungen möglichst allgemein gehalten werden. Bezeichne m die Anzahl der vollendeten Perioden, die das betrachtete Individuum seit Vollendung des Alters x überlebt hat, so nimmt die betrachtete Person bei Erreichen eines jeden Lebensalters $x+m$, $m = 0, 1, 2, \ldots, \omega\text{-}x$, aus dem Zustandsraum $\Omega = \{\text{lebend, tot}\}$ genau einen Zustand an. Unterstellt man als Schlußalter der Sterbetafel ω, ergeben sich $\omega\text{-}(x+m\text{-}1)$ mögliche Zustandspfade, die der Versicherte durchlaufen kann. Abbildung 1[7)] veranschaulicht den periodenweisen Übergang zwischen den potentiellen Zuständen und damit den Lebensprozeß für den Spezialfall eines x-Jährigen ($m = 0$).

---

5) Vgl. *Fisz* 1978, S. 297.

6) Vgl. *Amsler* 1988, S. 3.

7) Für jedes einperiodige Intervall zwischen den Altern $x+m$ und $x+m+1$, $m = 0, 1, \ldots, n\text{-}1$, innerhalb des Vertragszeitraumes von n Perioden wird eine für diesen Zeitraum konstante, für die einzelnen Zeiträume jedoch differierende Überlebens- bzw. Sterbewahrscheinlichkeit angenommen.

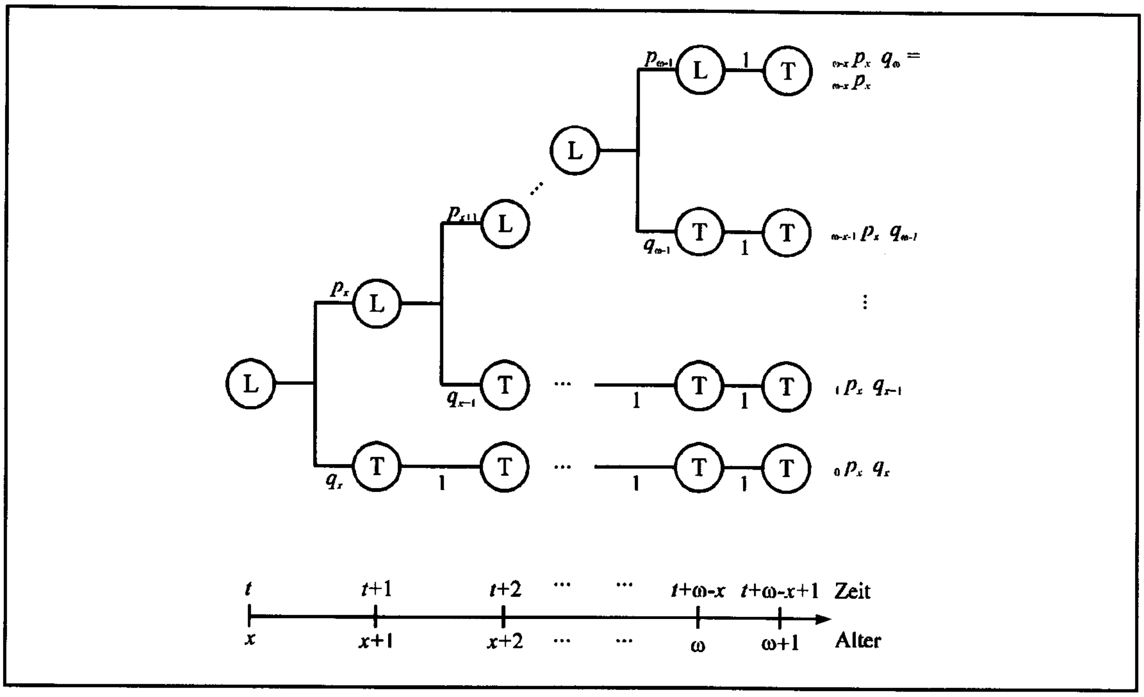

Abbildung 1: Lebensprozeß einer x-jährigen versicherten Person

Wegen der Ungewißheit des Endes eines menschlichen Lebens ist die Zustandsfolge *ex ante* (beispielsweise zu Beginn eines Versicherungsvertrages) indeterminiert. Das Phänomen des Überlebens und des Auftretens des Todeszeitpunktes ist daher als (zeitdiskreter) stochastischer Prozeß aufzufassen. Die einperiodige Übergangsmatrix $\mathbf{M}_{x+m}(1)$ quantifiziert die Sterbe- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeit vom Alter $x+m$ zum Alter $x+m+1$, bedingt auf die Beobachtung des Zustandes des Versicherungsnehmers im Alter $x+m$.

$x+m+1$ / $x+m$	lebend	tot
lebend	p_{x+m}	q_{x+m}
tot	0	1

Da lediglich zwei Zustände möglich sind, ist die Übergangsmatrix quadratisch von der Größe (2×2). Den aktuariellen Gepflogenheiten folgend bezeichnet p_{x+m} die Wahrscheinlichkeit, mit welcher eine versicherte Person des Alters $x+m$ das Alter $x+m+1$ erreicht; entsprechend formalisiert q_{x+m} die Wahrscheinlichkeit, mit der der Versicherte zwischen den Altern $x+m$ und $x+m+1$ stirbt.[8)] Das Element in der linken unteren Ecke der Matrix muß Null sein, da die Wahrscheinlichkeit, mit welcher ein Versicherter, der im Alter $x+m$ tot war, nun im Alter $x+m+1$ lebendig ist, selbstverständlich Null sein muß; der Zustand "tot" ist absorbierend.[9)] Wegen der mit zunehmendem Alter steigenden Sterblichkeit verändern sich die Übergangswahrscheinlichkeiten im Zeitablauf, wodurch die Inhomogenitätseigenschaft der *Markov*-Kette begründet ist. Der Lebensprozeß wird vollständig durch die Angabe des Startzustandes, d.h. das Alter x der Person zu Beginn der Prozeßbetrachtung und die Folge der einperiodigen Übergangsmatrizen für den möglichen restlichen Lebenszeitraum von ω-x Perioden. Infolgedessen sind ω-$x+1$ differierende einperiodige Übergangsmatrizen zu formulieren.

$$\mathbf{M}_{x+m}(1) = \begin{bmatrix} p_{x+m} & q_{x+m} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; m = 0, 1, \ldots, \omega - x - 1 \; , \qquad \mathbf{M}_{\omega}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Mit fortschreitender Lebensdauer ändert sich die Zufallsgesetzmäßigkeit der Restlebensdauer des Individuums. Im wahrscheinlichkeitstheoretischen Kontext stellt sich nun die Frage nach dem stochastischen Prozeß der Restlebensdauer einer $(x+m)$-jährigen Person im Betrachtungszeitraum.[10)] Die die Restlebensdauer für das erreichte Alter $x+m$ darstellende Zufallsvariable T_{x+m} besitzt κ Ausprägungen, wobei $\kappa(m) = 0, 1, \ldots,$ ω-$(x+m)$ gilt.[11)] Die Verteilung dieser Zufallsvariable ergibt sich als bedingte Verteilung von T_x - m, unter der Bedingung, daß der x-Jährige m Perioden überlebt hat.[12)]

Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein $(x+m)$-Jähriger das Alter $x+m+n$ unter der Bedingung erlebt, daß er das Alter $x+m$ vollendet hat, errechnet sich auf der Grundla-

---

8) Vgl. *Bowers* et al. 1986, S. 47; *Reichel* 1987, S. 163.

9) Ein Zustand wird als absorbierend bezeichnet, wenn er fast sicher nie wieder verlassen wird.

10) Dies wird sich im Zusammenhang mit den nachfolgenden Überlegungen zur Kalkulation und Reservierung in der Lebensversicherung als notwendig erweisen.

11) Die Operationalität des Parameters κ begründet sich aus der Tatsache, daß die der Analyse zugrundeliegenden Sterbewahrscheinlichkeiten q_x für $x > \omega$ auf das exogene Endalter ω konzentriert sind, woraus sich $q_\omega = 1$ begründet.

12) Formal ist dies gleichbedeutend mit $T_x > m$.

ge der Gleichung von *Chapman-Kolmogorov*.[13] Für die n-periodige Übergangsmatrix $\mathbf{M}_{x+m}(n)$, $n = 2, 3,\ldots, \omega-(x+m)$[14] findet man offenbar[15]

$$\mathbf{M}_{x+m}(n) = \prod_{\kappa(m)=0}^{n-1} \mathbf{M}_{x+m+\kappa(m)}(1) = \begin{bmatrix} \prod_{\kappa(m)=0}^{n-1} p_{x+m+\kappa(m)} & \sum_{\kappa(m)=0}^{n-1} {}_{\kappa(m)}p_{x+m}\; q_{x+m+\kappa(m)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$= \begin{bmatrix} {}_np_{x+m} & {}_nq_{x+m} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Restlebensdauer im Alter $x+m$ hat man[16]

$$\begin{aligned} {}_nq_{x+m} &= \Pr(T_{x+m} \leq n \mid T_x > m) = \Pr(T_x \leq m+n \mid T_x > m) \\ &= 1 - \frac{{}_{m+n}p_x}{{}_mp_x} = 1 - {}_np_{x+m} \end{aligned} \tag{7}$$

Die Massefunktion der Zufallsvariable "Restlebensdauer" ergibt sich dann zu $\Pr(T_{x+m} = \kappa(m) \mid T_x > m) = {}_{\kappa(m)}p_{x+m}\, q_{x+m+\kappa(m)}$ für $\kappa(m) = 0, 1,\ldots, \omega-(x+m)$.[17]

13) Vgl. *Fisz* 1978, S. 324.

14) Der Fall ω-$x+1$ ist theoretisch berechenbar, aber nicht von Interesse, da man lediglich die Aussage erhält, daß der Versicherte mit dem Schlußalter verstirbt.

15) Im Modellkontext gilt ${}_{\kappa(m)}p_{x+m} = \prod_{j=0}^{\kappa(m)-1} p_{x+m+j}$.

16) Vgl. *Bowers* et al. 1986, S. 47 f.

17) Vgl. *Bowers* et al. 1986, S. 48. Es gilt ${}_{\kappa(m)}p_{x+m}\, q_{x+m+\kappa(m)} = \frac{{}_{m+\kappa(m)}p_x\; q_{x+m+\kappa(m)}}{{}_mp_x}$.

Abbildung 2 veranschaulicht die Massefunktion der Zufallsvariable "Restlebensdauer" am Beispiel eines 20-jährigen Mannes bzw. einer 20-jährigen Frau nach der Allgemeinen Sterbetafel 1986/88.[18)]

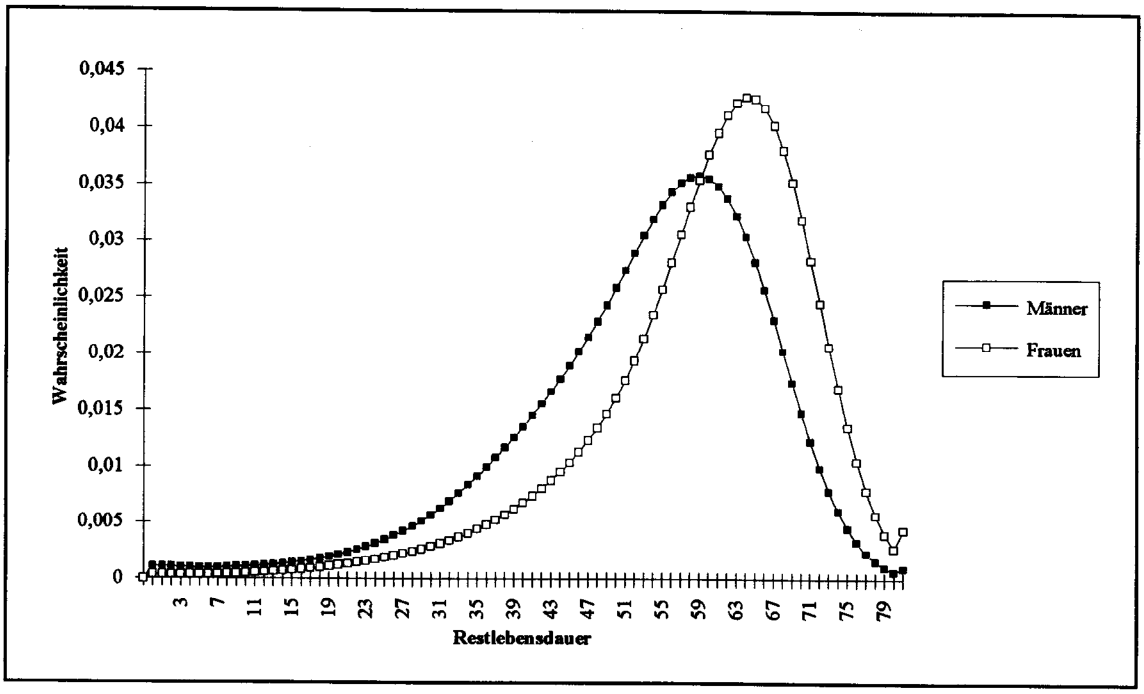

Abbildung 2: Verteilung der Restlebensdauer 20-jähriger Männer und Frauen nach der Allgemeinen Sterbetafel 1986/88

18) Vgl. *Bomsdorf* 1993, S. 274-277. Wir verwenden die Allgemeine Sterbetafel 1986/88 für die Bundesrepublik Deutschland zur vollständigen Beschreibung der Sterblichkeit; insbesondere nehmen wir an, daß die Sterblichkeit aus empirischen Daten richtig geschätzt und korrekt in die Zukunft fortgeschrieben wurde, d.h. wir blenden das Irrtumsrisiko bei unseren Überlegungen aus. Vgl. zum Begriff des Irrtumsrisikos *Albrecht* 1992, S. 7-15. Diese Vorgehensweise wäre für Rentenversicherungsverträge unangemessen, da aufgrund der Verbesserung der Sterblichkeit eine heute gültige Sterbetafel nicht zur Grundlage der Prämienberechnung für einen weit in die Zukunft reichenden Rentenversicherungvertrag gemacht werden kann; vgl. zu Lösungsansätzen dieses Problems *Schmithals/Schütz* 1995. Den Unterschied in der Periodenprämie zwischen der Allgemeinen Sterbetafel 1986/88 und der aus dieser unter Berücksichtigung von Sicherheitszuschlägen zur Sterblichkeit abgeleiteten DAV-Sterbetafel 1994 T werden wir im Rahmen der Analyse explizieren. Vgl. zur Herleitung der DAV-Sterbetafel 1994 T *Loebus* 1994.

2.2 Analyse der gemischten Lebensversicherung

2.2.1 Zahlungsstromanalyse

Um die Bedeutung des Lebensprozesses für die Zahlungsreihe eines Lebensversicherungsvertrages zu verdeutlichen, betrachte man eine gemischte Versicherung auf den Todes- und Erlebensfall, die von einer x-jährigen Person abgeschlossen wird.[19] Dieser Vertrag sei durch eine vom Todeszeitpunkt unabhängige Todes- bzw. Erlebensfalleistung in Höhe der Versicherungssumme *VS* gekennzeichnet. Überlebt der Versicherungsnehmer den n-periodigen Gesamtversicherungszeitraum, so erhält er die Erlebensfalleistung *VS*. Im Zeitpunkt $t+\kappa+1$ zahlt der Versicherer ebenfalls *VS*, falls der Versicherte das Alter $x+\kappa$, nicht jedoch das Alter $x+\kappa+1$ vollendet. Überlebt der Versicherte eine Periode und erreicht das Alter $x+\kappa+1$, habe er eine konstante Prämie π zu entrichten[20]. Stirbt er hingegen vor dem $x+\kappa+$ersten Geburtstag, entfällt die Prämienzahlungspflicht im Zeitpunkt $t+\kappa+1$, und zu diesem Zeitpunkt werde die Versicherungssumme an den Bezugsberechtigten ausgezahlt. Für die modellhafte Erfassung unterstellen wir, daß Prämienzahlungen vorschüssig, Versicherungsleistungen hingegen nachschüssig erfolgen.[21]

Der Lebensversicherungsvertrag kann als Zahlungsreihe zwischen Versicherungsunternehmen und Versicherungsnehmer interpretiert werden[22]: Einer ein- oder mehrperiodigen Einzahlung des Versicherungsnehmers steht eine einmalige Auszahlung des Versicherers gegenüber. Aufgrund der Indeterminiertheit des Todeszeitpunktes des Versicherungsnehmers steht nicht fest, wieviele Periodenprämien bezahlt werden und wann die Versicherungssumme zur Auszahlung gelangt. Mit jeder möglichen Zustandsfolge, d.h. mit jedem potentiellen Pfad in Abbildung 1, ist genau eine Zahlungsreihe

---

19) Vgl. allgemein zur gemischten Lebensversicherung und ihren Unterformen *Hagelschuer* 1987, S. 38 ff. sowie *Heidemann* 1994, S. 57 f.

20) Der Einfachheit halber sei angenommen, daß der Versicherungsnehmer die Police an seinem Geburtstag abgeschlossen hat und somit der Beginn der Versicherungsperiode und der Beginn eines neuen Lebensjahres auf den gleichen Zeitpunkt fallen.

21) Damit folgen wir der Standardannahme bei der diskreten Modellierung der Zahlungsreihe des Lebensversicherungsvertrages; vgl. *Wolfsdorf* 1986, S. 138, 158; *Reichel* 1987, S. 22 f.

22) Die Zahlungsreihe wird aus Sicht des Versicherten formuliert: Versicherungsleistungen gehen mit positivem, Beitragszahlungen mit negativem Vorzeichen ein.

verbunden.[23] Die unterschiedliche zeitliche Struktur der potentiellen Beiträge und Versicherungsleistungen erzwingt für Prämien- und Reserveberechnungen den Bezug sämtlicher Zahlungen auf einen einheitlichen Zeitpunkt. Für Fragen der Prämiengestaltung wird als Bezugszeitpunkt der Vertragsbeginn herangezogen; Bezugszeitpunkte der Reserveberechnung sind dagegen sämtliche erlebte Periodenenden. Durch entsprechende Barwertbetrachtungen wird es möglich, jede potentielle Zahlungsreihe komplexitätsreduzierend durch ihren Gegenwartswert zu ersetzen. Als Ergebnis der Barwertbildung erhält man für jeden möglichen Todeszeitpunkt innerhalb des n-periodigen Versicherungszeitraumes einen Gegenwartswert, dem eindeutig eine Eintrittswahrscheinlichkeit zugeordnet ist. Somit kann der Lebensversicherungsvertrag als Verteilungsfunktion des Barwertes seiner Zahlungsreihe operationalisiert werden.

Im folgenden wird die gemischte Versicherung hinsichtlich ihres stochastischen Barwertes nach m Perioden Versicherungslaufzeit formal charakterisiert, woraus einerseits ein Prämienkalkulationsprinzip zur Ermittlung einer Preisuntergrenze und andererseits ein Reservierungsprinzip gewonnen werden kann. Da wir einen konstanten und deterministischen Zinssatz zur Diskontierung der Zahlungsreihe verwenden, blenden wir die Zinsunsicherheit aus und explizieren die aus der Sterblichkeit resultierende Stochastizität als einzige Unsicherheitsquelle, die der Versicherer bewältigen muß.

Den Ansatzpunkt der allgemeinen Analyse bildet die (Rest-)Zahlungsreihe aus einer gemischten Versicherung, wobei der Versicherungsnehmer bereits m Perioden überlebt habe. Durch diese Konstruktion kann die zukünftige Zahlungsreihe aus dem Vertrag zu jedem beliebigen Zeitpunkt innerhalb des Versicherungszeitraumes analysiert werden, insbesondere erhält man durch die Wahl von $m = 0$ die Perspektive des Vertragsabschlußzeitpunktes. Mit der Festlegung des zur Diskontierung verwendeten konstanten und deterministischen Zinssatzes i[24] kann aus der Zahlungsreihe ihr Gesamtbarwert ${}_mBW_x$ gewonnen werden. Dieser ist wegen der Indeterminiertheit des Todeszeitpunktes des Versicherten, ebenso wie die Zahlungsreihe selbst, als Zufallsvariable zu formulie-

23) Sofern die Vertragslaufzeit n kürzer ist als die durch die Sterbetafel unterstellte maximale Restlebensdauer, endet die Zahlungsreihe bei Vollendung des Alters $x+n$ mit der Auszahlung der Erlebensfalleistung *VS* und ist unabhängig vom weiteren Verlauf des Lebensprozesses.

24) Den versicherungsmathematischen Gepflogenheiten folgend wird in den formalen Ableitungen der einperiodige Diskontierungsfaktor $v = (1+i)^{-1}$ verwendet; vgl. *Wolfsdorf* 1986, S. 5; *Isenbart/Münzner* 1987, S. 13; *Reichel* 1987, S. 35.

ren, die für die möglichen zukünftigen Lebensdauern des Versicherten einen positiven oder negativen diskontierten Zahlungsüberschuß aus dem Vertrag quantifiziert.

Der stochastische Gesamtbarwert für einen Versicherungsnehmer mit Eintrittsalter x nach m Perioden zerfällt in einen "Todes- und Erlebensfallbarwert" und kann als[25]

$$
{}_mBW_x = \begin{cases} VS\ v^{T_{x+m}+1} - \pi \dfrac{1-v^{T_{x+m}+1}}{1-v}; & T_{x+m} = 0,1,\dots,n-m-1 \\[2ex] VS\ v^{n-m} - \pi \dfrac{1-v^{n-m}}{1-v}; & T_{x+m} = n-m, n-m+1,\dots,\omega-(x+m) \end{cases} \tag{8}
$$

dargestellt werden. Die aus diesem stochastischen Barwert resultierende Massefunktion ergibt sich zu:[26]

$$
\Pr\left({}_mBW_x = {}_mbw_x\right) = \begin{cases} {}_{\kappa(m)}p_{x+m}\ q_{x+m+\kappa(m)}; & {}_mbw_x = VS\ v^{\kappa(m)+1} - \pi \dfrac{1-v^{\kappa(m)+1}}{1-v} \\ & \kappa(m) = 0,1,\dots,n-m-1 \\[2ex] {}_{n-m}p_{x+m}; & {}_mbw_x = VS\ v^{n-m} - \pi \dfrac{1-v^{n-m}}{1-v} \\ & \kappa(m) = n-m, n-m+1,\dots,\omega-(x+m). \end{cases} \tag{9}
$$

Die Möglichkeit, den Gesamtbarwert nach m Versicherungsperioden einerseits in einen stochastischen Schadenbarwert ${}_mSBW_x$ und andererseits einen stochastischen Prämienbarwert ${}_mPBW_x$ zu trennen, werden wir uns bei der Prämien- und Reservekalkulation zunutze machen.

Für die Schadenseite ergibt sich mithin

$$
{}_mSBW_x = \begin{cases} VS\ v^{T_{x+m}+1}; & T_{x+m} = 0,1,\dots,n-m-1 \\ VS\ v^{n-m}; & T_{x+m} = n-m, n-m+1,\dots,\omega-(x+m), \end{cases} \tag{10}
$$

während man für den Prämienbarwert

25) Vgl. *Bowers* et al. 1986, S. 101.

26) Vgl. *Gerber* 1986, S. 24-26.

$$
{}_mPBW_x = \begin{cases} \pi \dfrac{1-v^{T_{x+m}+1}}{1-v}; & T_{x+m} = 0,1,\dots,n-m-1 \\ \pi \dfrac{1-v^{n-m}}{1-v}; & T_{x+m} = n-m, n-m+1, \dots, \omega-(x+m) \end{cases} \tag{11}
$$

erhält.[27] Schließlich gilt für den Gesamtbarwert des Lebensversicherungsvertrages die Beziehung

$$
{}_mBW_x = {}_mSBW_x - {}_mPBW_x. \tag{12}
$$

2.2.2 Prämienermittlung auf der Grundlage des individuellen Versicherungstechnischen Äquivalenzprinzips

Für Zwecke der Prämienkalkulation begeben wir uns in die Vertragsabschlußperspektive, d.h. wir wählen $m = 0$. Nach dem Versicherungstechnischen Äquivalenzprinzip, das die Gleichheit des Erwartungswertes des Schadenbarwertes und des Erwartungswertes des Prämienbarwertes zu Vertragsbeginn fordert, entspricht die zu leistende Einmalprämie dem erwarteten Schadenbarwert zu Vertragsbeginn.[28]

Mit der Massefunktion des Schadenbarwertes aus (10) in Verbindung mit (9) für $m = 0$ ergibt sich die Einmalprämie π^E zu[29]

$$
\begin{aligned}
\pi^E = \mathrm{E}\left({}_0SBW_x\right) &= VS \left[\sum_{\kappa=0}^{n-1} v^{\kappa+1}\, {}_\kappa p_x\, q_{x+\kappa} + v^n\, {}_n p_x\right] \\
&= VS\, ({}_{|n}A_x + {}_nE_x) = VS\, A_{x,n\rceil} \,.
\end{aligned} \tag{13}
$$

27) Aufgrund der offensichtlichen Identität der stochastischen Gesetzmäßigkeiten der angesprochenen Barwerte mit dem Gesamtbarwert des Versicherungsvertrages, verzichten wir auf die explizite Darstellung der Massefunktionen und verweisen auf Formel (9).

28) Damit fordert das Versicherungstechnische Äquivalenzprinzip auf der Modellebene, daß der Versicherer im Erwartungswert aus dem Vertrag weder einen Gewinn erzielt, noch einen Verlust erleidet. Wegen der implizit in die Prämienforderung eingerechneten Sicherheitszuschläge gilt dies in der Realität natürlich nicht. Die Explizierung des angedeuteten Zusammenhanges ist Gegenstand des Kapitels Drei.

29) Vgl. z.B. *Wolfsdorf* 1986, S. 155.

Im Einklang mit der aktuariellen Symbolik bezeichnet ${}_{|n}A_x$ den erwarteten Schadenbarwert einer n-periodigen Risikolebensversicherung, ${}_nE_x$ den erwarteten Schadenbarwert einer n-periodigen Erlebensfallversicherung und $A_{x,\overline{n}|}$ den erwarteten Schadenbarwert einer n-periodigen gemischten Lebensversicherung, jeweils bezogen auf eine x-jährigen Person und auf eine Versicherungssumme in Höhe von einer Geldeinheit.

Auch bei der Ermittlung einer im Zeitablauf konstanten Periodenprämie π, muß auf der Grundlage des individuellen Versicherungstechnischen Äquivalenzprinzips der Erwartungswert des Gesamtbarwertes aus dem Versicherungsvertrag im Abschlußzeitpunkt den Wert Null annehmen. Formal gilt

$$\begin{aligned} E\left[{}_0BW_x\right] = \sum_{\kappa=0}^{n-1} \left[VS\ v^{\kappa+1} - \pi\ \frac{1-v^{\kappa+1}}{1-v}\right] {}_\kappa p_x\ q_{x+\kappa} \\ + \left[VS\ v^{n} - \pi\ \frac{1-v^{n}}{1-v}\right] {}_n p_x \overset{!}{=} 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Die geforderte versicherungstechnische Äquivalenz erhält man aus obigem Ausdruck durch einige algebraische Umformungen als[30)31)]

$$VS \left[\sum_{\kappa=0}^{n-1} v^{\kappa+1}\ {}_\kappa p_x\ q_{x+\kappa} + v^n\ {}_n p_x\right] = \pi \sum_{\kappa=0}^{n-1} v^{\kappa}\ {}_\kappa p_x , \tag{15}$$

wobei die Gleichung besagt, daß der erwartete Barwert der Versicherungsleistungen am Vertragsbeginn gerade dem erwarteten Barwert der Prämieneinzahlungen entspricht. Durch Auflösung nach π findet man die Periodenprämie:

30) Die linke Seite der Gleichung stellt den Erwartungswert des anfänglichen Schadenbarwertes, die rechte Seite den Erwartungswert des anfänglichen Prämienbarwertes dar. Mit Gleichung (12) ergibt sich nochmals, daß nach dem individuellen Versicherungstechnischen Äquivalenzprinzip der Erwartungswert des anfänglichen Barwertes gleich Null sein muß.

31) Die Verwendung des Theorems 3.2 in *Bowers* et al. 1986, S. 64, erleichtert den Berechnungsvorgang.

$$\pi = VS \frac{\sum_{\kappa=0}^{n-1} v^{\kappa+1} \; {}_{\kappa}p_x \; q_{x+\kappa} + v^n \; {}_{n}p_x}{\sum_{\kappa=0}^{n-1} v^{\kappa} \; {}_{\kappa}p_x} = VS \frac{A_{x,\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x,\overline{n}|}} \tag{16}$$

Das aktuarielle Symbol $\ddot{a}_{x,\overline{n}|}$ bezeichnet den bezüglich der Sterblichkeit verallgemeinerten Rentenbarwertfaktor. Die konstante Periodenprämie π ist damit als stochastisch verrentete Einmalprämie zu interpretieren.

2.2.3 Reservestellung auf der Grundlage des individuellen Versicherungstechnischen Äquivalenzprinzips

Während der Laufzeit des Versicherungsvertrages ($m > 0$) ist die periodische Äquivalenz des erwarteten Barwertes der Versicherungsleistungen und des erwarteten Barwertes der Prämienzahlungen aufgehoben. Im Falle der gemischten Lebensversicherung ist dies auf zwei Ursachen zurückzuführen.

Einerseits ist zu konstatieren, daß eine am Lebensprozeß anknüpfende (natürliche) Prämienzahlung im Zeitablauf steigen würde, während die tatsächlich eingeworbene Periodenprämie π im Zeitablauf konstant bleibt. Daraus folgt, daß in einer ersten Phase nach Vertragsabschluß relativ zur gegebenen Sterblichkeit eine überhohe Prämie zu entrichten ist, während in einer zweiten Phase die tatsächliche Prämie nicht mehr ausreicht, das gestiegene Sterblichkeitsrisiko zu finanzieren. Die in der ersten Phase zur Risikotragung nicht benötigten Prämienbestandteile werden in einer Reserveposition akkumuliert und verzinst, um in der zweiten Phase sukzessive zur Finanzierung des erhöhten Sterblichkeitsrisikos herangezogen zu werden.[32] Andererseits wird in der gemischten Lebensversicherung über die Vertragslaufzeit hinweg periodisch die Erlebensfalleistung aufgebaut. Derjenige Teil der Periodenprämie π, der dem Aufbau der Erlebensfalleistung gewidmet ist, wird ebenfalls der Reserveposition periodisch zugeführt und dort verzinslich akkumuliert. Die so charakterisierte versicherungs-

---

32) Erfolgt die Beitragszahlung durch periodenweise vorschüssige Bezahlung des erwarteten Schadenbarwertes der Versicherung in dieser Periode ist eine Reservestellung nicht notwendig. Die natürliche Prämie wächst bei einem 30-Jährigen, der eine Vertragslaufzeit von 35 Jahren vereinbart, bis zum Ende der Vertragslaufzeit auf das 15-fache des ursprüngliches Betrages an; vgl. *Wolfsdorf* 1986, S. 189.

spezifische Reserveposition wird als Deckungsrückstellung bezeichnet[33] und bildet die Entwicklung der Verpflichtungsstruktur des Versicherers gegenüber dem einzelnen Versicherungsnehmer ab.

Nach dem individuellen Versicherungstechnischen Äquivalenzprinzip wird die Deckungsrückstellung für jeden Versicherungsvertrag gesondert ermittelt, wobei wiederum eine Erwartungswertbetrachtung vorgenommen wird. Die nach dem Versicherungstechnischen Äquivalenzprinzip berechnete Deckungsrückstellung kann retrospektiv[34] und prospektiv formuliert werden.[35] Für unsere weiteren Ausführungen ist jedoch nur die prospektive Betrachtungsweise von Belang. Bei der prospektiven Ermittlungsform entspricht der einzustellende Betrag nach m Versicherungsperioden der Differenz zwischen dem erwarteten Schadenbarwert und dem erwarteten Prämienbarwert.[36] Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß für $m > 0$ die individuelle versicherungstechnische Äquivalenz von erwartetem Schadenbarwert und der Summe aus erwartetem Prämienbarwert und prospektiv ermittelter Deckungsrückstellung erfüllt ist.

Die Zufallsvariable "Gesamtbarwert" einer gemischten Lebensversicherung für eine versicherte Person mit Eintrittsalter x legt den Betrag fest, der nach m Perioden vorzuhalten ist, um den Verpflichtungen bis zum Ende des Vertrages nachkommen zu können. Die kalkulatorische Ermittlung der Deckungsrückstellung mit dem Erwartungswert des Gesamtbarwertes des Versicherungsvertrages nach m Perioden ergibt sich in konsistenter Fortführung der Bewertungssystematik zu Vertragsbeginn. Unter Fortführung der Notation aus dem vorangegangenen Abschnitt und unter Verwendung der in Formel (9) definierten Massefunktion des Gesamtbarwertes ${}_{m}BW_{x}$ ergibt sich für den kalkulatorischen Wert der Deckungsrückstellung folgender Ausdruck, wobei die

---

33) Die Rechtsgrundlage zur Bilanzierung der Deckungsrückstellung befindet sich im § 341f HGB.

34) In retrospektiver Betrachtungsweise ergibt sich die Deckungsrückstellung nach m Versicherungsjahren als Differenz der bis zum Alter $x+m$ aufgezinsten und vererbten Beitragseinnahmen und der ebenso behandelten Versicherungsleistungen.

35) Zur EU-weiten Regelung vgl. *Dritte Richtlinie Leben* 1993, Artikel 18, Abs. 1, A i, ii, S. 50 f. Die Übernahme in nationales Recht ist durch § 341f Abs.1 HGB erfolgt.

36) Vgl. *Sasse* 1978, S. 314.

klassische aktuarielle Darstellung nach einigen algebraischen Umformungen erzielt werden kann:[37)]

$$
\begin{aligned}
{}_{m}V_{x} = \mathrm{E}\left[{}_{m}BW_{x}\right] &= \sum_{\kappa(m)=0}^{n-m-1}\left[VS\ v^{\kappa(m)+1} - \pi\ \frac{1-v^{\kappa(m)+1}}{1-v}\right]{}_{\kappa(m)}p_{x+m}\ q_{x+m+\kappa(m)} \\
&\quad + \left[VS\ v^{n-m} - \pi\ \frac{1-v^{n-m}}{1-v}\right]{}_{n-m}p_{x+m} \qquad (17)\\
&= VS\ A_{x+m,\overline{n-m}|} - \pi\ \ddot{a}_{x+m,\overline{n-m}|}\,.
\end{aligned}
$$

Zur Umsetzung der Analyse in Kapitel Drei benötigen wir eine rekursive Beziehung für die Deckungsrückstellung, mit deren Hilfe die Entwicklung der Verpflichtungsstruktur modelliert werden kann. Unter der Bedingung, daß die versicherte Person m-1 Perioden überlebt hat, ist bei Vollendung des Alters $x+m$-1 die Deckungsrückstellung in Höhe von ${}_{m-1}V_x$ vorhanden. Gleichzeitig fließt dem Versicherer mit Sicherheit die Periodenprämie π zu.[38)] Damit ist es möglich, eine Zufallsvariable zu formulieren, die für den Fall, daß die versicherte Person zwischen den Altern $x+m$-1 und $x+m$ stirbt, den damit einhergehenden Auszahlungsüberschuß als auf das Alter $x+m$-1 diskontierten Verlust (riskiertes Kapital) formalisiert. Diese Zufallsvariable sei als L_{x+m-1} bezeichnet.[39)40)]

$$
L_{x+m-1} = \begin{cases} VS\ v - \left[{}_{m-1}V_x + \pi\right], & 0 < T_{x+m-1} \le 1 \\ {}_{m}V_x\ v - \left[{}_{m-1}V_x + \pi\right], & T_{x+m-1} > 1 \end{cases} \qquad (18)
$$

Von dem nach m Perioden vorhandenen Kapital muß nach dem Versicherungstechnischen Äquivalenzprinzip im Erwartungswert die Todesfalleistung und die Reservestellung im Erlebensfall finanzierbar sein.[41)] Mit anderen Worten handelt es sich um die

37) Wiederum ermöglicht Theorem 3.2 in *Bowers* et al. 1986, S. 64, eine zügige Berechnung des Erwartungswertes.

38) Hat die versicherte Person m-1 Versicherungsperioden überlebt, wird annahmegemäß zu Beginn der m-ten Periode die Periodenprämie π fällig.

39) Vgl. *Bowers* et al. 1986, S. 167.

40) Die Zufallsvariable L_{x+m-1} unterfällt einer Zweipunktverteilung mit Pr $(0 < T_{x+m-1} \le 1 \mid T_x > m\text{-}1) = q_{x+m-1}$ und Pr $(T_{x+m-1} > 1 \mid T_x > m\text{-}1) = p_{x+m-1}$.

41) Vgl. *Wolfsdorf* 1986, S. 196.

Einhaltung der periodischen Äquivalenzbedingung zwischen erwartetem Schadenbarwert und der Summe aus erwartetem Prämienbarwert sowie akkumuliertem Deckungskapital. Errechnet wird ein bedingter Erwartungswert, gegeben das Überleben der versicherten Person bis zum Alter $x+m$-1. Setzt man im Einklang mit dem Versicherungstechnischen Äquivalenzprinzip den Erwartungswert von L_{x+m-1} gleich Null, dann gilt folgende Gleichung[42]

$$\mathrm{E}(L_{x+m-1} \mid T_{x+m-1} > 0) = 0 \Leftrightarrow \left[{}_{m-1}V_x + \pi\right](1+i) = p_{x+m-1}\ {}_mV_x + q_{x+m-1}\ VS. \tag{19}$$

Die Verpflichtung des Versicherungsunternehmens gegenüber der versicherten Person am Ende der Periode ergibt sich als mit dem im Versicherungsvertrag vereinbarten Zinssatz i verzinster und vererbter Anfangsbestand abzüglich der erwarteten und vererbten Todesfalleistung.[43]

$${}_mV_x = \frac{1}{p_{x+m-1}}\left[{}_{m-1}V_x + \pi\right](1+i) - \frac{q_{x+m-1}}{p_{x+m-1}}\ VS \tag{20}$$

Mit Hilfe der Anfangsbedingung ${}_0V_x = 0$ ist es möglich, die Verpflichtung des Versicherers gegenüber der versicherten Person retrospektiv als Differenz der bisher fälligen, erwarteten Prämieneinzahlungen und Versicherungsleistungen darzustellen

$${}_mV_x = \pi \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{{}_{m-j}p_{x+j}}(1+i)^{m-j} - VS \sum_{j=0}^{m-1} \frac{q_{x+j}}{{}_{m-j}p_{x+j}}(1+i)^{m-j-1}. \tag{21}$$

3. Ökonomische Aspekte der liberalisierten Rechnungsgrundlagen "Zins" und "Sterblichkeit"

3.1 Der Zusammenhang zwischen Prämienzahlung, Deckungsrückstellung und Deckungsstock

Die bisherigen Ausführungen dienten dem Aufbau eines einheitlichen Modellrahmens für die gemischte Lebensversicherung. Dabei wurde aus komplexitätsreduzierenden Erwägungen für die Prämienermittlung in Abschnitt 2.2.2 und für die Kalkulation der

---

42) Vgl. *Wolfsdorf* 1986, S. 196 f.

43) Vgl. *Gerber* 1986, S. 59. Der Terminus der *Vererbung*, formal als $1/p_{x+m-1}$ gekennzeichnet, ergibt sich aus der retrospektiven und auf das Versichertenkollektiv bezogenen Interpretation der Entwicklung des einzelvertraglichen Deckungskapitals.

Deckungsrückstellung in Abschnitt 2.2.3 ein einheitlicher Zinssatz angenommen. Diese Vorgehensweise entspricht der bis zur Umsetzung der Dritten Lebensversicherungsrichtlinie in deutsches Recht allein zulässigen Praxis. So war für den *Altbestand* ein Rechnungszinssatz erster Ordnung in Höhe von 3% und seit der Tarifreform von 1987 ein Zinssatz in Höhe von 3,5% aufsichtsamtlich vorgeschrieben.[44)] Seit dem 29. Juli 1994 ist es den Lebensversicherungsunternehmen in Deutschland möglich, Prämienermittlung und Deckungsrückstellungskalkulation mit differierenden Zinssätzen durchzuführen.[45)] Die aus diesem Gestaltungsspielraum resultierenden Liquiditäts- und Ertragswirkungen für das Lebensversicherungsunternehmen werden in den nachfolgenden Abschnitten einer differenzierten Analyse unterzogen und schließlich um die Betrachtung der am Wettbewerbsmarkt erzielbaren Verzinsung des Deckungsstockvermögens erweitert.

Es ergibt sich zunächst offensichtlich, daß die *Periodenprämie* bei unveränderter Leistungsstruktur umso geringer sein muß, je größer der in der Prämienkalkulation zur Anwendung kommende Zinssatz gewählt wird. Tabelle 1 zeigt die Wirkung eines steigenden Prämienkalkulationszinssatzes i_p jeweils bezogen auf 1000 DM Versicherungssumme einer gemischten Lebensversicherung für eine 30-jährige männliche Person und eine Laufzeit von 30 Jahren. Hier offenbart sich der preispolitische Gestaltungsspielraum der Lebensversicherungsunternehmung, denn ein Erhöhung des Prämienkalkulationszinssatzes von beispielsweise 3% auf 7% hat nahezu eine Halbierung der risikoäquivalenten Bedarfsprämie von 21,97 DM auf 11,57 DM zur Konsequenz.[46)]

---

44) Vgl. *Hagelschuer* 1987, S. 119.

45) Vgl. *Claus* 1994, S. 140.

46) Sicherheitszuschläge in der Ausscheidordnung wurden nicht berücksichtigt; die mit der reduzierten Periodenprämie einhergehenden Ertrags- und Liquiditätsgefahren für das Lebensversicherungsunternehmen sind Gegenstand der nachfolgenden Analyseabschnitte.

Prämienkalkulationszinssatz i_p	Periodenprämie π in DM
3%	21,97
4%	18,75
5%	15,98
7%	11,57

Tabelle 1: Periodenprämie pro TDM Versicherungssumme bei variierenden Prämienberechnungszinssätzen

Der Gestaltungsspielraum der Lebensversicherungsunternehmen bei der Festsetzung des Kalkulationszinssatzes bei der Prämienermittlung findet jedoch seine erste Grenze in § 11 Abs. 1 VAG, wonach die Prämie unter Zugrundelegung angemessener versicherungsmathematischer Annahmen so kalkuliert sein muß, daß die korrespondierenden Verpflichtungen, d.h. insbesondere die Wertentwicklung der Deckungsrückstellung, ohne den Einsatz fremder Mittel finanziert werden können.[47)]

Die Rechtsgrundlage zur Bilanzierung der *Deckungsrückstellung* dem Grunde und der Höhe nach befindet sich im § 341f HGB, dessen Absatz 1 die Verwendung der prospektiven Methode zur Bemessung der Deckungsrückstellung vorschreibt.[48)] Für die gemischte Lebensversicherung stellt der neue § 65 Abs. 1 Nr. 1a) erster Halbsatz VAG eine Schranke für den Höchstzinssatz bei der Reservekalkulation, i_d, dar. Hiernach darf der für die Berechnung der Deckungsrückstellung verwendete Zinssatz 60% der Rendite von Staatsanleihen nicht überschreiten. Das BAV wird voraussichtlich im Sinne einer vorsichtigen Annäherung an die Vorschrift des § 65 VAG den Höchstzinssatz für die Berechnung der Deckungsrückstellung in § 1 Abs. 1 Rückstellungs-VO auf 4% festlegen.[49)] § 1 Abs. 2 des Entwurfes der Rückstellungs-VO schreibt darüber hinaus ausdrücklich fest, daß dieser einmal gewählte Zinssatz für die gesamte Laufzeit des

47) Vgl. *Claus* 1994, S. 114.

48) Nur in Fällen, in denen die Ermittlung des künftigen Wertes der Verpflichtungen und künftigen Beiträge nicht möglich ist, muß die retrospektive Methode verwendet werden, wobei die Berechnung auf Grund der aufgezinsten Einnahmen und Ausgaben der vergangenen Geschäftsjahre erfolgt. Vgl. die Herleitung des Zusammenhangs zwischen prospektiver und retrospektiver Deckungsrückstellung in *Reichel* 1986, S. 68-71.

49) Die Verordnung über den Höchstzinssatz bei der Berechnung der Deckungsrückstellung liegt bislang lediglich im Entwurf vor. Da die Verordnung vom Bundesrat gebilligt werden muß, hat sich das Verordnungsgebungsverfahren verzögert. Die Verordnung wird voraussichtlich im Herbst 1995 in Kraft treten.

Versicherungsvertrages Gültigkeit besitzt. Diese Normen wirken aufgrund von § 11 Abs. 1 VAG mittelbar auch auf die maximale Höhe des bei der Prämienkalkulation zulässigen Zinssatzes.[50)]

Nachfolgende Abbildung 3 verdeutlicht die Auswirkungen abweichender Kalkulationssätze für die rechtmäßig prospektiv ermittelte Wertentwicklung der Deckungsrückstellung.

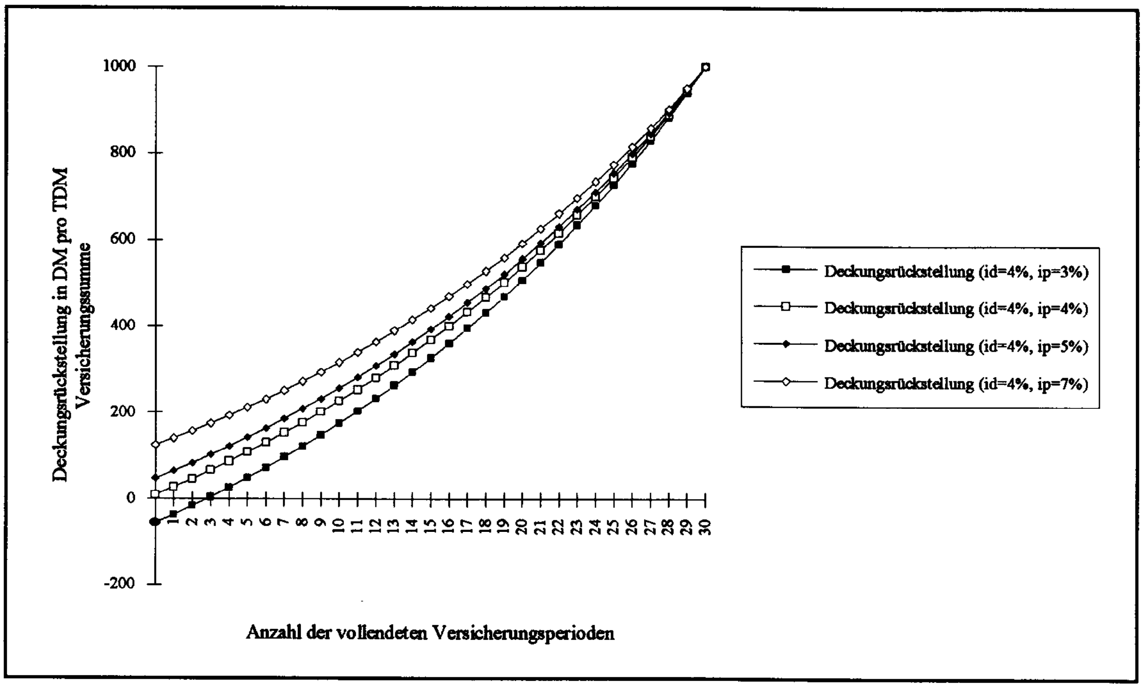

Abbildung 3: Wertentwicklung der Deckungsrückstellung bei abweichenden Kalkulationszinssätzen für die Prämienermittlung

Hier zeigt sich, daß für die in der Vergangenheit gültige Situation identischer Kalkulationssätze ($i_p = i_d$) der Wert der Deckungsrückstellung zu Vertragsbeginn stets gerade den Wert Null annimmt.[51)] Damit ist es auf der Grundlage der traditionellen Kalkulationsansätze in der gemischten Lebensversicherung möglich, im Erwartungswert die

---

50) Vgl. *Claus* 1994, S. 141.

51) Unter der Voraussetzung der Identität der Zinssätze für die Prämienberechnung und die Berechnung der Deckungsrückstellung ($i_p = i_d$) führen die prospektive und retrospektive Methode zur Ermittlung der Deckungsrückstellung zu demselben Ergebnis; vgl. *Wolfsdorf* 1986, S. 193 f.

Entwicklung der Verpflichtungen gegenüber dem Versicherungsnehmer aus dessen Prämienzahlungen zu finanzieren.[52)]

Jede positive Differenz zwischen Prämien- und Reservezinssatz ($i_p > i_d$) führt allerdings aufgrund der prospektiven Ermittlungsvorschrift dazu, daß die erforderliche kalkulatorische Anfangsdeckungsrückstellung einen positiven Wert annimmt und damit nicht aus den erwarteten Prämieneinnahmen des fraglichen Vertrages finanziert werden kann, sondern anderweitig gedeckt werden muß. Aber auch während der Vertragslaufzeit verharrt das in der Deckungsrückstellung abgebildete Verpflichtungsvolumen im Falle $i_p > i_d$ auf durchweg höherem Niveau als in der Situation einheitlicher Kalkulationszinssätze; lediglich zum Ablaufzeitpunkt des Vertrages, d.h. bei Fälligkeit der Erlebensfalleistung hat sich das Verpflichtungsvolumen wieder angeglichen. Damit gilt auch für die Folgeperioden, daß die Finanzierung der einzelvertraglichen Verpflichtungen den Einsatz fremder Mittel erfordert. Ob damit jedoch bereits ein Verstoß gegen die Vorschrift des § 11 Abs. 1 VAG vorliegt, kann nicht abschließend beurteilt werden, denn der Alimentationsbedarf der betroffenen Verträge ist zunächst rein kalkulatorisch, zeitlich befristet und gleicht sich im Erwartungswert zum Ablaufzeitpunkt des Einzelvertrages aus. Grundsätzlich halten wir jedoch fest, daß in denjenigen Fällen, in denen $i_p > i_d$ gilt, insbesondere in den ersten Perioden nach Vertragsabschluß ein nicht unerheblicher Finanzierungsbedarf entsteht, der zu einer Belastung der Eigenkapitalausstattung der Lebensversicherungsunternehmung führen kann. Wie stark diese Eigenkapitalbelastung jedoch ausfällt, d.h. welcher Zeitabschnitt aus der Gesamtlaufzeit des Vertrages betroffen ist, um welchen absoluten Betrag es sich dabei handelt und wie dies vor dem Hintergrund der eher geringen Eigenkapitalausstattung deutscher Lebensversicherungsunternehmen einzuschätzen ist, kann erst unter Beachtung der am Wettbewerbsmarkt erreichbaren Verzinsung i_w des Deckungsstockvermögens näher beurteilt werden.[53)]

---

52) Die Darstellung abstrahiert insoweit von der Berücksichtigung der Betriebskosten und der Abschlußprovisionen. Insbesondere letztere führen im Falle sog. *gezillmerter* Tarife *realiter* dazu, daß der kalkulatorische Wert der Deckungsrückstellung in den ersten Versicherungsperioden negativ ist.

53) Die Problematik einer zu Vertragsbeginn positiven Deckungsrückstellung bei gleichzeitig unzureichender Vermögensbildung könnte vermieden werden, wenn die Bemessung der Deckungsrückstellung auf der Grundlage der retrospektiven Methode gemäß § 341f Abs. 1 Satz 2 HGB zulässig wäre. Die Anwendung dieser Vorschrift setzt voraus, daß die Ermittlung des Wertes der künftigen Verpflichtungen nicht möglich ist. Dies trifft unseres Erachtens allerdings nur auf diejenigen Fälle zu, bei denen sich die Garantieerklärung des

Damit ist die aus der Sicht mancher Experten allein sinnvolle Konstellation auseinanderfallender Kalkulationszinssätze durch einen im Vergleich zum Reservekalkulationszinssatz niedrigeren Prämienberechnungszinssatz ($i_p < i_d$) charakterisiert. In diesem Falle ist das kalkulatorische Verpflichtungsvolumen - ohne Berücksichtigung *gezillmerter* Abschlußprovisionen - in den ersten Versicherungsperioden negativ[54)], während der Vertragslaufzeit stets geringer als in der Situation einheitlicher Kalkulationszinssätze, und zum Ablaufzeitpunkt des Vertrages wird gerade die garantierte Erlebensfalleistung erreicht. Die Problematik dieser Konstellation liegt u.E. nicht in ihrer aufsichtsrechtlichen Zulässigkeit, sondern viel mehr in ihrer betriebswirtschaftlichen Durchsetzbarkeit auf den Wettbewerbsmärkten der Lebensversicherung. Ein relativ geringer Rechnungszinssatz in der Prämienkalkulation erhöht zunächst die Periodenprämie des Versicherungsnehmers und führt darüber hinaus bei Einbeziehung der Wertwentwicklung des Deckungsstockvermögens *ceteris paribus* zu einer Erhöhung der rechnungsmäßigen Überschüsse der Unternehmung.

Für die über die reine Kalkulationsperspektive hinausreichende, ökonomisch relevante Beurteilung der *tatsächlichen* Ertrags- und Liquiditätslage der Lebensversicherungsunternehmung ist, wie bereits mehrfach angedeutet, auf die Entwicklung des Deckungsstockvermögens unter Berücksichtigung der am Markt erzielbaren Verzinsung, i_w, zu rekurrieren. Der Deckungsstock ist ein Vermögensblock, der der Absicherung der Versicherungsnehmer dient und ein internes Sondervermögen darstellt, das die Gesamtheit derjenigen Vermögenswerte umfaßt, die zur Bedeckung der Deckungsrückstellung erworben wurden.[55)] Daher bestimmt sich die Höhe des Deckungsstock-Solls in erster Linie nach dem in der Deckungsrückstellung abgebildeten Verpflichtungsvolumen aus den Verträgen.[56)] Zur Beschreibung der Entwicklung des Deckungsstockvermögens

---

Versicherungsunternehmens nicht auf den Gesamtversicherungszeitraum bezieht, sondern im Zeitablauf an die *ex ante* unsicheren Marktkonditionen angepaßt wird.

54) Der Vermögensbildungsvorgang beginnt demzufolge mit einer Verbindlichkeit des Versicherungsnehmers gegen seinen Versicherer, wobei letzterer eine Aktivposition (noch nicht fällige Forderung gegen Versicherungsnehmer) auszuweisen hätte.

55) Vgl. *Schmidt/Frey* 1989, § 66 VAG, Tz. 2.

56) Vgl. *Schmidt/Frey* 1989, § 54a VAG, Tz. 16. Ein Vermögensgegenstand gehört erst zum Deckungsstock, wenn die Eintragung in ein alle Vermögenswerte des Deckungsstocks umfassendes Verzeichnis erfolgt ist (Deckungsstockverzeichnis). Für die Zugehörigkeit zum Deckungsstock ist die Eintragung konstitutiv; vgl. *Schmidt/Frey* 1989, § 66 VAG, Tz. 5. Die Verzeichnisführung dient dem Zweck, das Vermögen des Deckungsstocks vom übrigen Vermögen exakt zu trennen.

eines x-jährigen Versicherungsnehmers nach m Perioden Vertragslaufzeit ${}_mD_x$ verwenden wir die nachfolgende Rekursionsbeziehung.

$$ {}_mD_x = \frac{1}{p_{x+m-1}} \left[{}_{m-1}D_x + \pi \right] (1+i_w) - \frac{q_{x+m-1}}{p_{x+m-1}} VS \tag{22} $$

Die Reinvermögensposition ${}_mR_x$, die die Veränderung der Eigenkapitalposition des Lebensversicherers vor Überschußbeteiligung der Versicherten widerspiegelt, ergibt sich nach dieser Überlegung aus der Differenz zwischen dem Deckungsstockvermögen und der Deckungsrückstellung, berechnet jeweils nach m Perioden Vertragslaufzeit.[57)]

$$ {}_mR_x = {}_mD_x - {}_mV_x \tag{23} $$

3.2 Analyse der Ertrags- und Liquiditätslage des Lebensversicherungsunternehmens bei auseinanderfallenden Kalkualtions- und Marktzinsen

3.2.1 Konstellation ohne Sicherheitszuschlag im Rechnungszins

Die nachfolgenden Überlegungen fokussieren betriebswirtschaftliche Konsequenzen, die für eine Lebensversicherungsunternehmung dadurch entstehen können, daß die verwendeten Kalkulationszinssätze und die auf den Wettbewerbsmärkten erzielbaren Marktzinsen voneinander abweichen.[58)] Die Analyse geht dabei zunächst davon aus, daß die zu Kalkulationszwecken verwendete Sterbetafel die tatsächliche natürliche Sterblichkeit der versicherten Personen realistisch abbildet.[59)] Für unterschiedliche Zinskonstellationen wird so die Entwicklung der Reinvermögensposition der Unternehmung im Zeitablauf analysiert. Dabei bezeichnen Perioden mit negativem Reinvermögen eine erwartete Finanzierungslücke der versicherungstechnischen Verpflichtungen, d.h. die aus den vereinnahmten und zu Marktzinsniveau investierten Prämien erwirtschafteten

57) Sobald die Reinvermögensposition negativ wird, überschreitet die Deckungsrückstellung die Bestände des Deckungsstockes. Diese Situation wird *realiter* durch die Aufforderung des BAV an den entsprechenden Versicherer, dem Deckungsstock Vermögenswerte in einem Umfang zuzuführen, so daß mindestens die Höhe der Deckungsrückstellung erreicht wird, vermieden. Wenn also in der Analyse eine negative Reinvermögensposition auftritt, so bedeutet dies für den Versicherer eine Finanzierungsnotwendigkeit der Versicherungsverpflichtungen aus alternativen Quellen.

58) Die nachfolgenden Zahlenwerte und Abbildung beziehen sich einheitlich auf eine gemischte Lebensversicherung für eine männliche versicherte Person mit Eintrittsalter 30 Jahren und einer Vertragslaufzeit von ebenfalls 30 Jahren.

59) Den Berechnungen wurde insoweit die Allgemeine Sterbetafel 1986/88 zugrunde gelegt.

Aktiva reichen nicht zur Bedeckung der korrespondieren Passiva aus. Ein positiver Wert des Reinvermögens kennzeichnet eine Situation des Versicherers, bei dem die erwirtschafteten Aktiva den kalkulatorischen Wert der versicherungstechnischen Verpflichtungen überkompensieren, in der m.a.W. versicherungstechnische Überschüsse entstehen. Schließlich werden die Betrachtungen um die Darstellung der Reinvermögensentwicklung unter der realitätsnäheren Annahme impliziter Sicherheitszuschläge in der kalkulatorischen Sterbetafel ergänzt.[60)]

In der Ausgangssituation sei angenommen, daß die betrachteten Zinssätze für die Prämien- und Reservekalkulaiton sowie für die Verzinsung des Deckungsstockvermögens identisch seien ($i_d = i_p = i_w$). Die Entwicklung des Reinvermögens mit und ohne Sicherheitszuschlag in der verwendeten Sterbetafel visualisiert Abbildung 4.

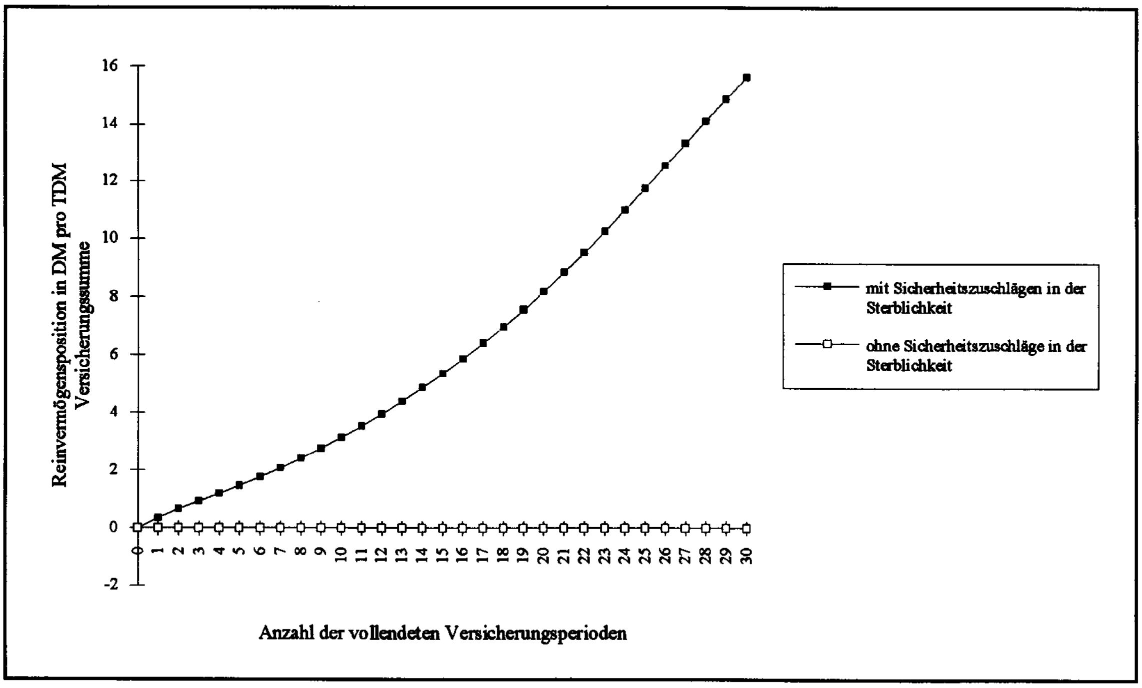

Abbildung 4: Reinvermögensposition für den Fall einheitlicher Zinssätze ($i_d = i_p = i_w = 3{,}5\%$)

Wie bereits unsere Vorüberlegungen in Abschnitt 3.1 zeigten, nimmt wegen $i_d = i_p$ die kalkulatorische Deckungsrückstellung zu Vertragsbeginn gerade den Wert Null an. Die kalkulatorischen Verpflichtungen werden zu jedem Zeitpunkt während der Vertragslaufzeit durch die kalkulierten Prämieneinnahmen vollständig abgedeckt. Aufgrund von

60) Der Kalkulation liegt die DAV-Sterbetafel 1994 T zugrunde; siehe *Loebus* 1994.

$i_p = i_w$ wird die in der Prämienkalkulation angenommene Verzinsung am Markt tatsächlich gerade erreicht. Der Zinssatz der Prämienkalkulation enthält keinen impliziten Sicherheitsabschlag. Aus der Identität von i_d und i_w folgt, daß die Wertentwicklung des Deckungsstocks stets derjenigen der versicherungstechnischen Verpflichtungen entspricht. Die Prämienerträge und die induzierten Marktzinserträge sind betragsmäßig mit den periodischen Aufwendungen für die Erhöhung der Deckungsrückstellung identisch. Es entsteht kein systematischer Überschuß, und die erwartete Reinvermögensposition ist zu jedem Zeitpunkt während der Vertragslaufzeit ausgeglichen.

Enthält die in der Kalkulation eingesetzte Sterbetafel jedoch einen impliziten Sicherheitszuschlag, entstehen für die Lebensversicherungunternehmung systematische Überschüsse. In unserem Beispiel wird, bezogen auf den Ablaufzeitpunkt des Vertrages, ein *Sterblichkeitsgewinn* in Höhe von 15,61 DM je TDM Versicherungssumme erwartet. Die Überschußentstehung ist auf folgende Effekte zurückzuführen:

- Der Erwartungswert der tatsächlichen Prämienzahlungen ist höher als ihr kalkulatorischer (überschußerhöhende Wirkung),
- der Erwartungswert der Todesfalleistung des Versicherers ist geringer als der kalkulatorische (überschußerhöhende Wirkung) und
- die erwartete Erlebensfalleistung des Versicherers ist höher als die kalkulatorische (gegenläufiger Effekt mit überschußreduzierender Wirkung).[61]

3.2.2 Traditionelle Konstellation einheitlicher Rechnungszinsen mit implizitem Sicherheitszuschlag

Wenn wir uns die Ausführungen des zweiten Kapitels in Erinnerung rufen, mag es zunächst erstaunen, daß mit dem Prinzip der individuellen Versicherungstechnischen Äquivalenz von erwarteter Prämienzahlung und erwarteter Versicherungsfalleistung in der Lebensversicherung ein Kalkulationskriterium Anwendung findet, welches auf einen Sicherheitszuschlag verzichtet. Ein kalkulatorischer Sicherheitszuschlag in der Prämienermittlung wird jedoch nicht explizit, sondern durch eine sehr vorsichtige Wahl der

---

61) Dieser Effekt wird jedoch durch die tatsächlich höheren erwarteten Prämieneinnahmen kompensiert. Als Nettowirkung verbleiben daher die überschußbildenden Folgen einer - gemessen an ihrem Erwartungswert - höheren Todesfallprämie und einer geringeren Todesfalleistung. Vgl. zu Kriterien der Charakterisierung einer Versicherung als Todes- bzw. Erlebensfallpolice *Reichel* 1987, S. 89 ff.

Rechnungsgrundlagen Zins implizit berücksichtigt.[62] In Deutschland waren vor dem 29. Juli 1994 nur solche Tarife genehmigungfähig, die einen Rechnungszinssatz von maximal 3,5% vorsahen und deren Sterblichkeitsannahmen im Falle von Todesfallversicherungen so modifiziert wurden, daß die Sterblichkeit höher veranschlagt wurde als die empirischen Schätzungen dies verlangten. Damit stellte man einerseits den Ausgleich von Schätzfehlern und Zufallseinflüssen im Bereich der Sterblichkeit sicher. Andererseits war die Verzinsungshypothese so niedrig, daß sie von den Gesellschaften im Rahmen ihrer Vermögensanlage auch in Zeiten niedriger Marktverzinsung stets übertroffen werden konnte. Durch die implizite Integration der Sicherheitszuschläge in die Prämie approximierte man die Preisfindung von der sicheren Seite her. Eine die Verhältnisse in der gemischten Lebensversicherung in Deutschland für die letzten Jahren charakterisierende Zinskonstellation zeigt Abbildung 5.

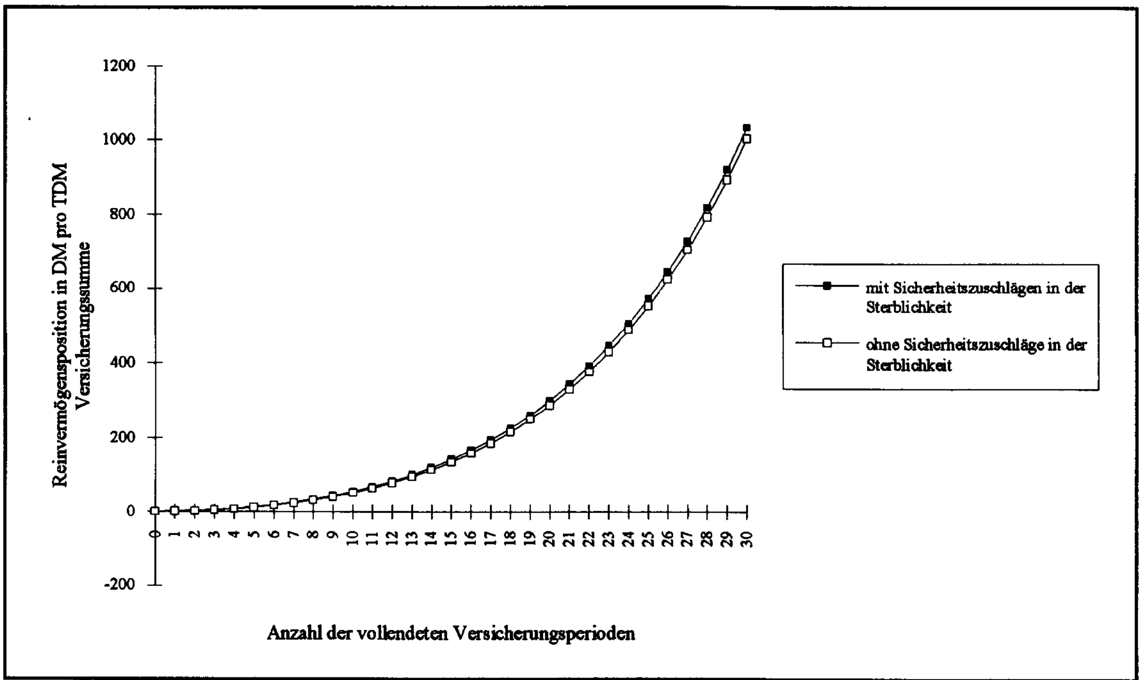

Abbildung 5: Reinvermögensposition für den Fall $i_d = i_p = 3{,}5\% < i_w = 7\%$

Wiederum wissen wir aufgrund der Identität von i_d und i_p, daß die kalkulatorischen Verpflichtungen durch die kalkulierten Prämieneinnahmen zu jedem Zeitpunkt vollständig abgedeckt werden. Allerdings wird die in der Prämienkalkulation angenommene

62) Vgl. *Albrecht/Lippe* 1988, S. 530. Für die Isolierung der Wirkungen des impliziten Sicherheitszuschlages in der Sterblichkeit siehe die Ausführungen im vorangegangen Unterabschnitt.

Verzinsung am Markt tatsächlich sehr weit überschritten ($i_p < i_w$). Die Zinsannahme der Prämienkalkulation enthält mithin einen umfangreichen impliziten Sicherheitsabschlag. In Verbindung mit der, gemessen an der Entwicklung der versicherungstechnischen Verpflichtungen, auskömmlichen Prämieneinnahme und aufgrund der im Vergleich zur Entwicklung der kalkulatorischen Deckungsrückstellung höheren Verzinsung des Deckungsstockvermögens, $i_d < i_w$, ist, beginnend mit der ersten Versicherungsperiode, die Reinvermögensposition stets positiv. Die Erträge aus Prämien- und induzierten Marktzinseinnahmen sind größer als die Aufwendungen für die Erhöhung der Deckungsrückstellung. Zinsbedingt und im Erwartungswert entsteht somit sukzessive ein systematischer Überschuß, im Beispiel auf den Ablaufzeitpunkt des Vertrages bezogen in Höhe von 1.002,87 DM je TDM Versicherungssumme (*Zinsüberschuß*). Durch Verwendung der DAV-Sterbetafel 1994 T erhöht sich der Überschuß im Erwartungswert um 29,77 DM auf 1.032,64 DM. Die Sterblichkeitsgewinne sind hier offensichtlich von untergeordneter Bedeutung.

Das Schutzversprechen der traditionellen Erscheinungsform der gemischten Lebensversicherung in Deutschland bezieht sich allein auf die mit 3,5% kalkulierte Todes- und Erlebensfalleistung in der Höhe der vereinbarten Versicherungssumme. Die darüber hinaus entstehenden systematischen Überschüsse sind nach den Vorgaben des BAV zu mindestens 90% den Versicherungsnehmern zuzuweisen.[63] Da die Bemessung des zu verteilenden Überschusses *realiter* nach Abzug der Kosten der Lebensversicherungsunternehmung erfolgt, entsteht insoweit kein unmittelbares Ertrags- oder Liquiditätsrisiko. Traditionelle Aufgabe des Versicherungsmanagements ist deshalb die sichere und ertragreiche Investition der durch die Versicherungsverträge vereinnahmten finanziellen Mittel. Dieses Ergebnis ist jedoch bei einer umfassenderen Analyse der Wirkungsmechanismen zu relativeren. Eine unter Wettbewerbsgesichtspunkten geringe Überschußbeteiligung der Versicherungsnehmer kann erhebliche Nachteile für die Entwicklung des Neugeschäfts und damit das Erfolgspotential der Unternehmung zur

---

63) Vgl. *Kurzendörfer* 1993, S. 183; vgl. allgemein zur Überschußbeteiligung und den zur Anwendung gelangenden Überschußbeteiligungssystemen *Hagelschuer* 1987, S. 178-198; *Schierenbeck/Hölscher 1992*, S. 509-523; *Hölscher* 1994, S.79-148. Künftig werden nicht mehr 90% des Rohüberschusses den Versicherungsnehmern gutzubringen sein, sondern voraussichtlich, unter Anrechnung der rechnungsmäßigen Zinsen und der Direktgutschrift, 90% der Nettokapitalerträge, wobei über die Details der Verordnung noch keine Einigkeit erzielt werden konnte. Die Angemessenheit der Überschußbeteiligung wird mit Hilfe der neuen Z-Quote gemäß § 81c Abs. 1 VAG kontrolliert werden; vgl. *Claus* 1994, S. 661.

Folge haben. Die korrespondierenden geringeren Prämieneinnahmen können desweiteren dazu führen, daß der periodisch erwartete Auszahlungsbedarf der Lebensversicherungsunternehmung nicht mehr durch die laufenden erwarteten Einzahlungen gedeckt sind, womit auf der Grundlage einer differenzierten Liquiditätsplanung eine bewußte und schrittweise Auflösung des gebundenen Vermögens erforderlich wird.

Im folgenden soll aufgrund der erhöhten Komplexität der Berechnungen die Überschußbeteiligung außer acht gelassen werden. Bei der Interpretation der Ergebnisse muß aber berücksichtigt werden, daß wir die Reinvermögensposition *vor* Dotierung der Überschußbeteiligung modellieren, m.a.W. der *tatsächliche* finanzielle Spielraum des Lebensversicherers wesentlich enger ist.

3.2.3 Konstellation bei Anhebung des Prämienkalkulationszinssatzes

Vor dem Hintergrund des erweiterten Gestaltungsspielraumes der deutschen Lebensversicherungsunternehmen und mit Blick auf das in der traditionellen gemischten Lebensversicherung beobachtbare wettbewerbsrelevante Spannungsfeld zwischen außerordentlich hohen planmäßigen Überschüssen einerseits und erheblichem Preissenkungspotential andererseits, werden Kalkulationsmodelle diskutiert, die eine Anhebug des Zinssatzes für die Prämienermittlung gegenüber dem Zinssatz für die Reserveermittlung zum Gegenstand haben.[64)]

Wie zuvor erörtert, ist unter der Bedingung $i_d < i_p$ der Wert der kalkulatorischen Deckungsrückstellung von Vertragsbeginn an positiv, ohne daß aus den vereinnahmten Prämien entsprechende Finanzierungsmittel bereitstehen, d.h. die kalkulatorischen Verpflichtungen werden durch die kalkulierten Prämieneinnahmen nicht vollständig abgedeckt. Damit wird eine Alimentierung der nicht auskömmlichen Prämieneinzahlungen durch eine am Markt zu erzielende höhere Verzinsung impliziert. M.a.W. ein Teil der planmäßig erwarteten Zinsüberschüsse wird *ex ante* in der Prämienermittlung

64) Da das Aufsichtsamt für die Kalkulation der Deckungsrückstellung einen höchstzulässigen Zinssatz von 4% gemäß § 1 Abs. 1 Rückstellungs-VO festlegen wird, ist davon auszugehen, daß der Prämienberechnungszinssatz in Zukunft zwischen 4 und 5% liegen wird. Für unsere Darstellung haben wir aus Gründen der besseren Vergleichbarkeit der Ergebnisse den Zinssatz der Deckungsrückstellung unverändert bei 3,5% belassen. Die Argumentationssystematik bleibt jedoch erhalten.

berücksichtigt. Dies führt zu einer aus Wettbewerbsaspekten günstigeren, weil geringeren Prämienforderung. Selbstverständlich fällt andererseits das Überschußpotential solcher Verträge *ceteris paribus* geringer aus, denn die in der Prämienkalkulation angenommene Verzinsung wird zwar am Markt tatsächlich deutlich überschritten ($i_p < i_w$), aber der in der Prämienkalkulation enthaltene implizite Sicherheitszuschlag ist geringer als unter den traditionellen Bedingungen des Abschnittes 3.2.2.

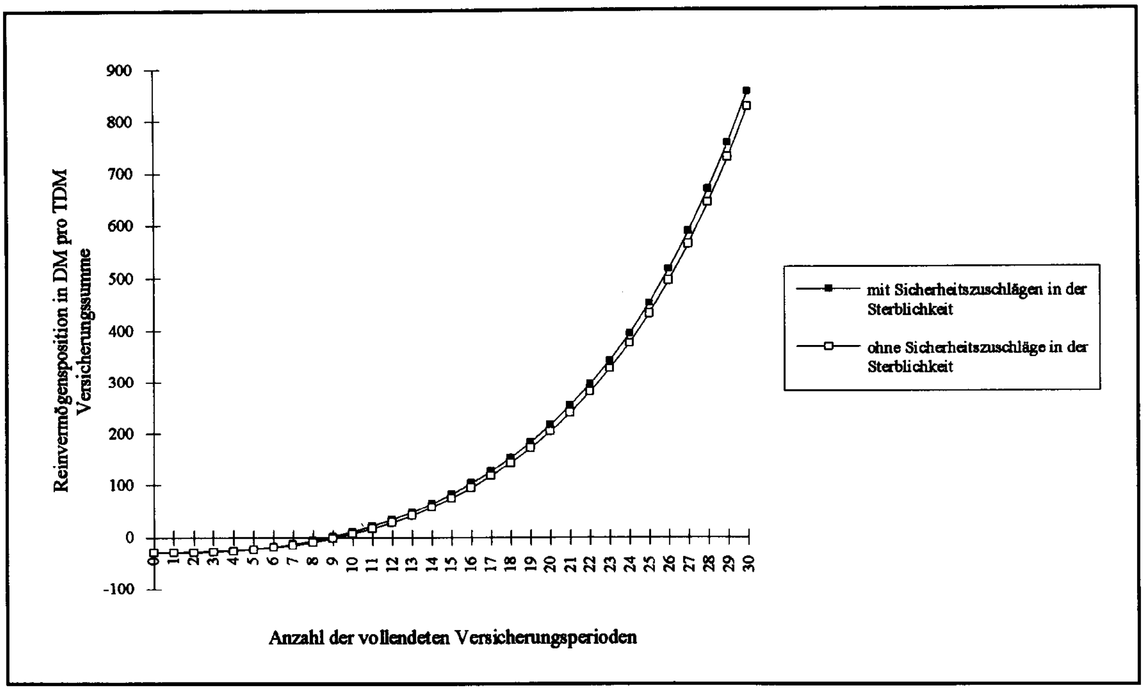

Abbildung 6: Reinvermögensposition für den Fall $i_d = 3{,}5\% < i_p = 4\% < i_w = 7\%$

Von entscheidender Bedeutung für das Lebensversicherungsunternehmen dürfte jedoch die Reinvermögensanalyse sein, wie sie in Abbildung 6 dargestellt ist. Selbst unter den eher vorsichtig gewählten Annahmen, wonach der in der Prämienkalkulation angesetzte Zinssatz $i_p = 4\%$ den Kalkulationszinssatz für die versicherungstechnischen Verpflichtungen $i_d = 3{,}5\%$ nur geringfügig übersteigt und gleichzeitig zu dem am Wettbewerbsmarkt erzielbaren Zinssatz $i_w = 7\%$ ein respektabler Sicherheitsabschlag besteht, ist die erwartete Reinvermögensposition für die ersten neun Versicherungsperioden (unter Einbeziehung der erwarteten Sterblichkeitsgewinne sind es die ersten acht Versicherungsperioden) negativ. In diesem Zeitraum ist das aus den Verträgen im Erwartungswert erwirtschaftete Vermögen als Summe aus Prämieneinnahmen und darauf erzielten Marktzinseinnahmen abzüglich der erwarteten Versicherungsleistungen nicht ausreichend, um die kalkulatorischen Verpflichtungen finanzieren zu können. Der

Bedeckungsvorschrift des § 66 Abs. 1a VAG folgend, ist es erforderlich, diese Finanzierungslücke aus anderen Quellen zu schließen und dem Deckungsstock zusätzliche Mittel zuzuführen.

Aus der Analyse des Periodenerfolges einer Lebensversicherungsunternehmung ergibt sich nun im Erwartungswert, daß in den ersten Versicherungsperioden die Prämienerträge und die darauf erzielten anteiligen Vermögensanlageerträge geringer sind als die Aufwendungen für die Bildung der Deckungsrückstellung. Dies führt *ceteris paribus* zunächst zu einer Reduzierung des periodischen Rohüberschusses mit den möglichen Konsequenzen, daß entweder den Versicherungsverträgen der anderen Abrechnungsverbände eine geringere Überschußbeteiligung zugewiesen werden kann oder daß der ausgewiesene Jahresüberschuß der Unternehmung sinkt mit den entsprechenden Folgen für die Eigenkapitalentwicklung. Letzteres ist mit Blick auf die, gemessen am technischen Geschäftsvolumen, geringe Eigenkapitalausstattung deutscher Lebensversicherungsunternehmen sicherlich eine nur sehr beschränkt wirksame Gestaltungsalternative. Im Rahmen der Vermögensanalyse zeigt sich für die Phase des negativen Reinvermögens das Erfordernis einer entsprechenden Deklaration von bisher nicht gebundenen Vermögenswerten. Stehen dem Versicherer freie Vermögensanteile nicht im erforderlichen Ausmaße zur Verfügung, werden zusätzlich weitere Anpassungen sowohl auf der Kapital- als auch auf der Vermögensseite erforderlich.[65]

Der Passivüberhang und die entsprechende Periodenerfolgsbelastung kann erst nach einigen Jahren durch die auf das durch den Vertrag induzierte Vermögen erwirtschafteten *überrechnungsmäßigen* Marktzinserträge vollständig zurückgeführt werden. Die im weiteren Verlauf erreichbaren Überschußvolumina überkompensieren zwar die aufgelaufenen Periodenverluste aus den ersten Versicherungsjahren, sie sind insgesamt aber wesentlich geringer als in Abschnitt 3.2.2. Bezogen auf das von uns verwendete Beispiel beträgt der auf den Ablaufzeitpunkt bezogene erwartete Überschuß 824,90 DM je TDM Versicherungssumme, bei Berücksichtigung der Sterblichkeitsgewinne 855,21 DM je TDM Versicherungssumme.

---

65) Z.B. eine Verringerung der Wertansätze in den übrigen versicherungstechnischen Verpflichtungs- und Rückstellungspositionen oder Liquiditation von Finanzaktiva zur Auflösung Stiller Reserven.

Wir variieren im folgenden die Analysesituation und betrachten die Auswirkungen eines Absinkens der am Wettbewerbsmarkt erreichbaren Verzinsung auf das Niveau des Prämienkalkulationszinssatzes.[66] Dieser keineswegs patologische Fall ist sogar im Rahmen der Neuformulierung des HGB berücksichtigt worden. § 341f Abs. 2 HGB erzwingt die Berücksichtigung von Zinssatzverpflichtungen gegenüber dem Versicherungsnehmer bei der Bemessung der Deckungsrückstellung, sofern die derzeitigen oder zu erwartenden Erträge aus der Vermögensanlage des Versicherungsunternehmens für die Deckung der zugesagten Verpflichtungen nicht ausreichen.

Wiederum ist der Wert der kalkulatorischen Deckungsrückstellung von Vertragsbeginn an positiv, ohne daß aus den vereinnahmten Prämien entsprechende Finanzierungsmittel bereitstehen. Die Prämienkalkulation enthält keinen impliziten Sicherheitszuschlag, der daraus resultierende dauerhafte Passivüberhang kann nicht durch *überrechnungsmäßige* Zinserträge kompensiert werden. Erst zum Ende der Vertragslaufzeit ergibt sich im Erwartungswert ein ausgeglichenes Reinvermögen, dann haben die über den in der Deckungsrückstellung kalkulierten Zinsansprüchen der Versicherungsnehmer liegenden erwirtschafteten Marktzinsen das Finanzierungsdefizit im Erwartungswert ausgeglichen (Abbildung 7). Während der gesamten Laufzeit ist von einer Reduktion des Rohüberschusses resp. einer Belastung des Eigenkapitals der Unternehmung auszugehen, lediglich unter Berücksichtigung von Sterblichkeitszuschlägen kann zu Vertragsende (erstmals in der 27. Versicherungsperiode) ein postiver Ergebnisbeitrag erwartet werden. In diesem Falle beträgt die erwartete Reinvermögensposition am Ende der Vertragslaufzeit nur 17,38 DM.

---

66) Eine solche, hier sicherlich überzeichnete Konstellation ist umso wahrscheinlicher je höher der gewählte Prämienkalkulationszinssatz ist und je volatiler die Marktzinsen sind. Eine differenziertere Analyse stochastischer Marktzinsentwicklungen erfolgt im vierten Kapitel dieser Ausarbeitung.

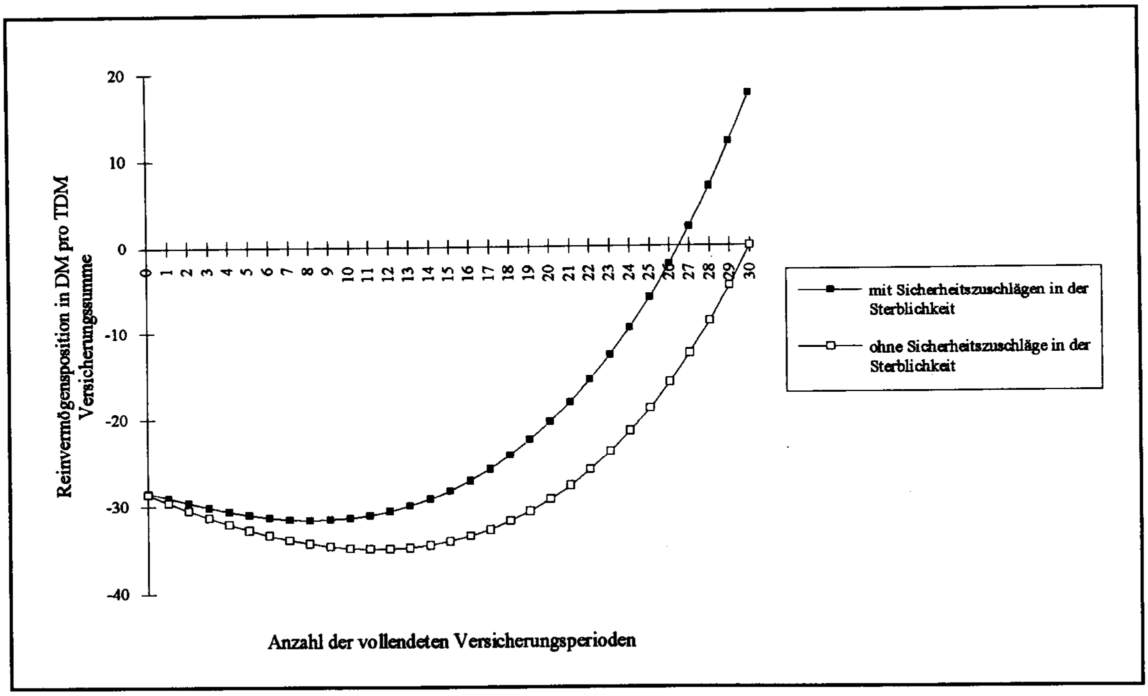

Abbildung 7: Reinvermögensposition für den Fall $i_d = 3{,}5\% < i_p = i_w = 4\%$

3.2.4 Konstellation der Erhöhung systematischer Überschüsse

Die zuvor besprochene und aus Wettbewerbsgründen attraktiv erscheinende Möglichkeit, künftige Zinsüberschüsse in der Prämienkalkulation vorwegzunehmen ist insbesondere durch die Periodenerfolgsbelastung in den ersten Versicherungsperioden und durch die Gefahr eines Absinkens der Marktzinsen mit erheblichen Nachteilen verbunden. Es erscheint daher nicht nur aus Gründen einer umfassenden Systematik unserer Analyse angemessen, auch den Fall zu beleuchten, in dem das Auseinanderfallen der Kalkulationszinssätze durch eine Absenkung des Prämienzinssatzes unter das Niveau des Zinssatzes für die Deckungsrückstellung charakterisiert wird und beide Zinssätze deutlich unter dem Marktzinsniveau liegen $i_p < i_d < i_w$. Die außerordentlich geringen kalkulatorische Zinsen der Prämienermittlung haben eine aus Wettbewerbsaspekten sicherlich problematische Prämienhöhe zur Folge. Abbildung 8 visualisiert die Reinvermögensentwicklung dieser Konstellation.

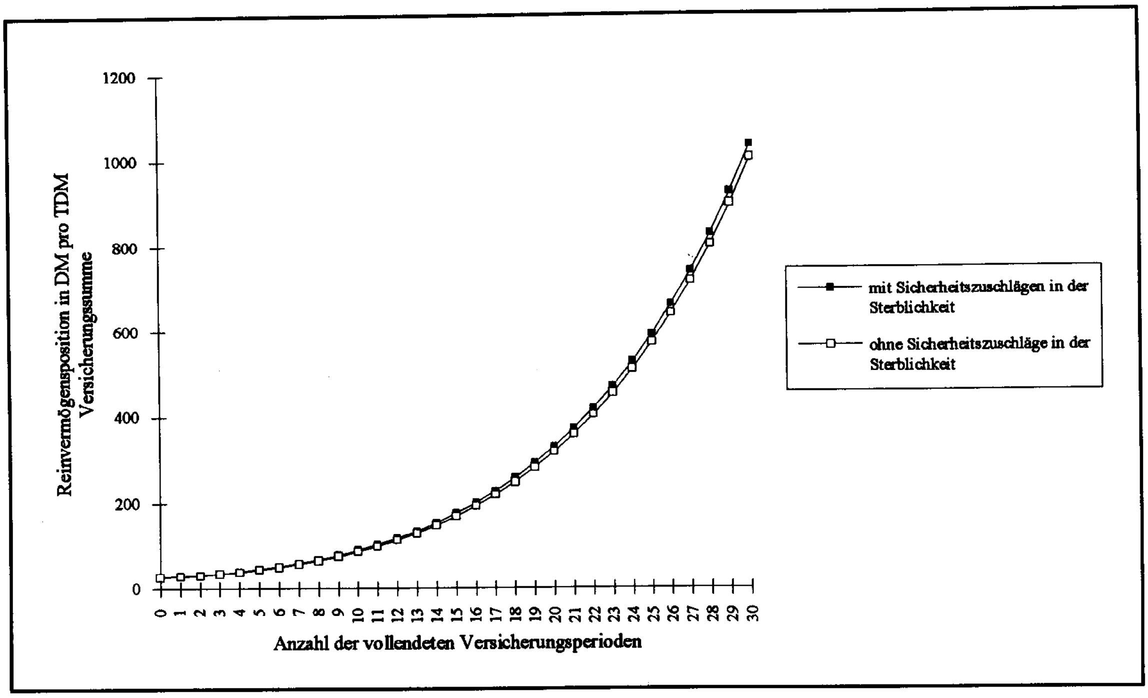

Abbildung 8: Reinvermögensposition für den Fall $i_p = 3{,}5\% < i_d = 4\% < i_w = 7\%$

Zunächst ist mit Bezug auf Abschnitt 3.1 zu konstatieren, daß der Wert der kalkulatorischen Deckungsrückstellung zu Vertragsbeginn negativ ist, m.a.W. die Prämieneinnahmen der ersten Perioden werden nicht zur Finanzierung von versicherungstechnischen Verpflichtungen benötigt, denn in dieser Phase besitzt das Versicherungsunternehmen eine negative Verbindlichkeit - mithin eine kalkulatorische Forderung - gegenüber dem Versicherungsnehmer ($i_d > i_p$). Den Prämien- und induzierten Vermögensanlageerträgen stehen keine entsprechenden Aufwendungen gegenüber. Damit wird der Rohüberschuß der ersten Versicherungsperioden, gemessen an den traditionellen Verhältnissen, um den "Prämienanteil" erhöht. Zusätzlich wird, da die in der Prämienkalkulation angenommene Verzinsung am Markt tatsächlich sehr weit überschritten wird, der laufende *Zinsüberschuß* deutlich erhöht ($i_p < i_w$). Bereits bei Beginn der Vertragslaufzeit entstehen im Lebensversicherungsunternehmen über das erforderliche Volumen an Deckungsstockvermögen hinaus freie Vermögensanteile, die in den ersten Versicherungsperioden im Wege einer außergewöhnlich hohen Überschußbeteiligung den Versicherungsnehmern *ex post* gewidmet werden ($i_d < i_w$). Im Beispiel entwickelt sich die erwartete Reinvermögensposition im Falle der Berücksichtigung von Sicherheitszuschlägen in der Sterbetafel von 26,89 DM pro TDM Versicherungssumme zu Vertragsbeginn bis auf 1.032,64 DM. Ohne Sicherheitszuschläge ergibt sich im

Erwartungswert zu Vertragsbeginn eine positive Reinvermögensposition von 27,10 DM und am Vertragsende 1.002,87 DM pro TDM Versicherungssumme.[67)]

4. Analyse bei stochastischer Marktzinsentwicklung

4.1 Einleitende Bemerkungen

Die Untersuchung der Liquiditäts- und Ertragssituation eines Lebensversicherers im vorangegangenen Kapitel war von deterministischen und im Zeitablauf unveränderten Zinssätzen für die Prämienkalkulation, die Reserveermittlung und für die Verzinsung des Deckungsstocks ausgegangen. Soweit diese Annahmen die Prämien- und Reservenberechnung betreffen sind sie durchaus realistisch, denn einerseits ist die zeitliche Konstanz der Periodenprämie ein konstitutives Merkmal für die gemischte Lebensversicherung in Deutschland und andererseits hat das Bundesaufsichtsamt in seinem Entwurf zur Rückstellungsverordnung ausdrücklich auf die Einmaligkeit der Festlegung des Reserveermittlungszinssatzes hingewiesen.[68)] Lediglich für die Betrachtung der am Markt tatsächlich erzielbaren Verzinsung des Deckungsstockvermögens handelte es sich um eine die Realität stark simplifizierende Annahme. Weiterführende Betrachtungen beschäftigen sich deshalb mit der Liquiditäts- und Ertragsanalyse unter der sehr viel realistischeren Prämisse, daß die Marktzinsen im Zeitablauf Schwankungen unterliegen.

Bei der stochastischen Modellierung der Anlagerendite werden die Aktiva des Lebensversicherers global betrachtet. Es erfolgt keine Differenzierung zwischen den Asset-Klassen, und daher formulieren wir auch nicht für jede Asset-Klasse ein gesondertes Modell zur Beschreibung der stochastischen Entwicklung der korrespondierenden Renditen im Zeitablauf.[69)] Wir begnügen uns vielmehr mit der stochastischen Modellierung des Aufzinsungsfaktors $(1+i_w)$, der in der Rekursionsbeziehung der Formel (22)

---

67) Aus dem Vergleich dieser Konstellation mit den traditionellen Verhältnissen in Abschnitt 3.2.2 erkennt man, daß der Zinssatz zur Berechnung der Deckungsrückstellung die erwartete Reinvermögensposition zu Vertragsende nicht beeinflußt. Unter den genannten Bedingungen gilt, daß ein höherer Zinssatz für die Verzinsung der Deckungsrückstellung zu einem geringeren Wachstum der erwarteten Reinvermögensposition führt.

68) § 1 Abs. 2 des Entwurfes zur Rückstellungs-VO.

69) Wollte man eine bestimmte Anlagestrategie testen, so müßte eine differenzierte Modellierung der stochastischen Gesetzmäßigkeiten der einzelnen Asset-Klassen erfolgen; insbesondere wäre ein Modell zur Abbildung der Aktienkursbewegungen und ein Zinsstrukturkurvenmodell erforderlich.

Verwendung findet, um die wertmäßige Entwicklung der durch den analysierten Versicherungsvertrag induzierten Aktiva zu beschreiben.[70)]

Erkenntnisziel ist eine komparative Analyse der Ergebnisse der stochastischen Simulation mit den Aussagen im quasi-determinstischen Fall des Abschnittes 3.2.3. Auf diese Weise soll die Gefahr verdeutlicht werden, daß auch bei positiven *erwarteten* Reinvermögenspositionen mit einer nicht unerheblichen Wahrscheinlichkeit die Entwicklung des Deckungsstockes hinter der der Deckungsrückstellung zurückbleibt, woraus für die Versicherungsunternehmung entsprechende negative Liquiditäts- und Erfolgswirkungen resultieren.

4.2 Stochastische Modellierung des Aufzinsungsfaktors

Zur modellhaften Erfassung der Verzinsung der Vermögensgegenstände des Lebensversicherungsunternehmens unterstellen wir, daß der logarithmierte Aufzinsungsfaktor $\delta_t := \ln\,(1+i_{w,t})$ einem autoregressiven Moving-Average-Prozeß der Ordnung (1,1) folge.[71)] Mit dieser Prozeßwahl steht ein relativ allgemeines stochastisches Modell zur Verfügung, welches in der Lage ist, eine Vielzahl empirischer Zeitreihen adäquat zu modellieren. Die Realisation des logarithmierten Aufzinsungsfaktors der t-ten Periode ist damit von

- der Realisation des logarithmierten Aufzinsungsfaktors der Vorperiode t-1,
- einer Störvariable ε_t,
- der Störvariable der Vorperiode t-1

abhängig. Für den logarithmierten Aufzinsungsfaktor δ_t wählen wir den Prozeßansatz

---

70) Hierbei sei daran erinnert, daß diese Rekursion die Sterblichkeitsproblematik ausblendet. Wir argumentieren auf Basis einer Erwartungswertbetrachtung und nehmen daher an, daß das korrespondierende Versichertenkollektiv hinreichend groß und homogen ist, so daß die Erwartungswertbetrachtung einen zuverlässigen Schätzer für die wahre Sterblichkeitsentwicklung mit den verbundenen Ertrags- und Liquiditätswirkungen darstellt.

71) Vgl. allgemein zu autoregressiven Moving-Average-Prozessen *Box/Jenkins* 1970, S. 73-84; *Abraham/Ledolter* 1983, S. 219-224; *Lütkepohl* 1991, Kapitel 6, dort verallgemeinert als Vektor-autoregressive Moving-Average-Prozesse (VARMA); *Greene* 1993, S. 550 ff.

$$\delta_t = \theta + \phi\left[\delta_{t-1} - \theta\right] + \varepsilon_t - \beta\varepsilon_{t-1}, \tag{24}$$

wobei die Störvariablen ε_t in jeder Periode unabhängig identisch normalverteilt mit Erwartungswert Null und Varianz γ^2 seien. Es kann nun mit Hilfe einer vollständigen Moving-Average-Darstellung[72)] des Prozesses leicht nachgewiesen werden, daß $E(\delta_t) = \theta$ gilt. Definieren wir zusätzlich mit $Y_t := \delta_t - \theta$ den um den konstanten Driftterm bereinigten Prozeß des logarithmierten Aufzinsungsfaktors, so wird dieser zu

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t - \beta\varepsilon_{t-1}. \tag{25}$$

Es ist unmittelbar offensichtlich, daß der Erwartungswert des logarithmierten und zentrierten Aufzinsungsfaktors unabhängig von der Periode Null beträgt.[73)] Die Varianz von Y_t ergibt sich zu[74)75)]

$$\mathrm{Var}(Y_t) = \frac{1 + \beta^2 - 2\phi\beta}{1 - \phi^2}\,\gamma^2, \tag{26}$$

was kurz als $\mathrm{Var}(Y_t) = \sigma^2$ bezeichnet werden soll. Für die Autokovarianzen gilt:[76)]

$$\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \frac{(1 - \phi\beta)\,(\phi - \beta)}{1 - \phi^2}\,\gamma^2 \tag{27}$$

sowie

$$\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) = \phi\;\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-k+1}) \quad \text{für } k \geq 2. \tag{28}$$

Für den ersten Autokorrelationskoeffizienten ergibt sich mit den obigen Ergebnissen[77)]

---

72) Der Prozeß kann als vollständiger Moving-Average-Prozeß unendlicher Ordnung dargestellt werden, wenn die Invertibilitätsbedingung $|\beta| < 1$ erfüllt ist; vgl. *Abraham/Ledolter* 1983, S. 221. In den von uns vorgenommenen stochastischen Simulationen wird diese Bedingung durch eine geeignete Parameterwahl stets sichergestellt.

73) Da es sich bei dem von uns verwendeten ARMA(1,1)-Prozeß um einen schwach stationären Prozeß handelt, sind Erwartungswert und Varianz des Prozesses unabhängig von t. Die Autokovarianzen hängen lediglich von der Länge des Lags ab, nicht jedoch von der absoluten Lage auf der Zeitachse. Schwache Stationarität des Prozesses ist gegeben, wenn $|\phi| < 1$ gilt; vgl. *Abraham/Ledolter* 1983, S. 221.

74) Man beachte, daß die Varianzen und Kovarianzen von Y und δ identisch sind, da der Parameter θ nicht zufallsabhängig ist.

75) Vgl. *Box/Jenkins* 1970, S. 76; *Abraham/Ledolter* 1983, S. 222.

76) Vgl. *Box/Jenkins* 1970, S. 76; *Abraham/Ledolter* 1983, S. 222.

77) Vgl. *Box/Jenkins* 1970, S. 77; *Abraham/Ledolter* 1983, S. 222.

$$\rho(Y_t, Y_{t-1}) = \frac{(1 - \phi\beta)\,(\phi - \beta)}{1 + \beta^2 - 2\phi\beta} \tag{29}$$

Wenn ln $(1+i_{w,t})$ normalverteilt ist, so folgt der Aufzinsungsfaktor aufgrund des Modellierungsansatzes einer logarithmischen Normalverteilung mit den Parametern θ und σ^2.[78)] Infolgedessen ergeben sich die für die weitere Analyse relevanten Verteilungsmerkmale Erwartungswert, Varianz und ε-Quantil der Verteilung des Aufzinsungsfaktors mit

$$E\left[(1+i_{w,t})\right] = \exp\left[\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\right] \tag{30}$$

und

$$\mathrm{Var}\left[(1+i_{w,t})\right] = \exp\left(2\theta + \sigma^2\right)\left[\exp(\sigma^2) - 1\right] \tag{31}$$

sowie[79)][80)]

$$F_\varepsilon\left[(1+i_{w,t})\right] = \exp\left[\theta + N_\varepsilon\,\sigma\right]. \tag{32}$$

In der folgenden Analyse soll nun ausgehend von der stochastischen Modellierung des Aufzinsungsfaktors die Verteilungsfunktion der Reinvermögensposition, d.h. des Überschusses der Aktivwerte über die versicherungstechnischen Verpflichtungen, für den Fall ermittelt werden, daß der Prämienberechnungszinssatz den zur Berechnung der Deckungsrückstellung verwendeten Zinssatz überschreitet. Konkret führen wir das Beispiel aus Kapitel 3 fort und unterstellen $i_p = 4\%$ und $i_d = 3{,}5\%$. Somit ist der kalkulatorische Wert der Deckungsrückstellung bei Vertragsabschluß nicht Null, sondern nimmt, wie wir aus der Analyse des deterministischen Falles bereits wissen, einen positiven Wert an.[81)] Weiterhin nehmen wir an, daß der Prämienberechnung die DAV-Sterbetafel 1994 T zugrunde liegt, wodurch Sicherheitszuschläge bezüglich der Sterblichkeit gegeben sind. Im Rahmen der Analyse auf Basis einer stochastischen

---

78) Die Parameter ϕ und β werden für die Untersuchungssituation so bestimmt, daß die Varianz des logarithmierten Aufzinsungsfaktors mit dem Parameter der zugrundeliegenden Normalverteilung übereinstimmt.

79) F bezeichne hier die Verteilungsfunktion des Aufzinsungsfaktors, N_ε kennzeichnet das ε-Quantil der Standardnormalverteilung.

80) Vgl. *Johnson/Kotz* 1970, S. 117.

81) Die anfängliche Deckungsrückstellung beträgt bei Zugrundelegung eines Reservierungszinssatzes in Höhe von $i_d = 3{,}5\%$, bei Berücksichtigung von Sicherheitszuschlägen für die Sterblichkeit im Rahmen der Prämienermittlung sowie $i_p = 4\%$ 28,42 DM.

Simulation der durch den Versicherungsvertrag induzierten Aktiva untersuchen wir die Verteilungsfunktion der Reinvermögensposition des Lebensversicherers *vor* Dotierung der Überschußbeteiligung nach 5, 10, 20 und 30 Jahren Vertragslaufzeit, wobei eine Erwartungsrendite von 7% unterstellt wird. Eine stochastische Simulation zur Bestimmung der Verteilungsfunktion des Reinvermögens ist der angemessene Weg zur Lösung des Problems, da analytische Ergebnisse aufgrund der durch periodische Prämienzahlungen und Versicherungsleistungen erzeugten Komplexität nicht möglich sind.

Eine periodische Berücksichtigung der Überschußbeteiligung an die Versicherungsnehmer führt bei stochastischer Modellierung der Marktzinsentwicklung zu folgender Problematik: Sinkt die in einer Periode erzielte Marktrendite unter den in der Prämienkalkulation verwendeten Zinssatz, so entstehen in dieser Periode keine zinsinduzierten Überschüsse. Wird auch der für die Entwicklung der Deckungsrückstellung garantierte Zinssatz nicht erreicht, so ist die entsprechende Finanzierungslücke durch andere Unternehmensreserven auszugleichen. Die Gestaltung des Überschußbeteiligungssystems entscheidet darüber, inwiefern dann künftige Zinsüberschüsse zur gegebenenfalls prioritätischen Kompensation der akkumulierten Finanzierungslücke herangezogen werden müssen.

4.3 Simulationsergebnisse

Die Stochastizität des Verzinsungsverlaufes bewirkt, daß auch zinsinduziert die Reinvermögensposition aus dem Vertrag mehrwertig ist.[82] Damit unterscheidet sich die Interpretation der Simulationsergebnisse von den quasi-deterministischen Fällen substantiell. Die aus der Simulation abgeleitete Schätzgröße des Erwartungswertes für die Reinvermögensposition nach 5, 10, 15, 20, 25 und 30 Jahren Vertragslaufzeit zeigt Tabelle 2. Während die absolute Abweichung der Realisationen um ihren Erwartungswert, gemessen durch die Standardabweichung, mit zunehmender Vertragslaufzeit wächst, vermindert sich die relative Streuung (gemessen im Variationskoeffizient). Bereits hier zeigt die Analyse, daß beispielsweise die Reinvermögensposition nach 10 Versicherungsjahren R(10) im Erwartungswert 12,35 DM pro TDM Versicherungs-

---

82) Die Mehrwertigkeit der Reinvermögensposition eines einzelnen Vertrages, die sich aufgrund der Stochastizität der Sterblichkeit ergibt, bleibt davon unberührt.

summe beträgt, die in der Standardabweichung gemessene Schwankung jedoch mit 23,37 DM einen Wert annimmt, der eine hohe Gefahr negativer Ergebnisse beinhaltet. Für spätere Versicherungsjahre führt die so abgebildete Abweichungsgefahr lediglich zu einer Reduzierung oder Erhöhung der im Reinvermögen akkumulierten Überschüsse.

Die Symmetrie des Risikomaßes Standardabweichung unterstellt, daß Abweichungen von der erwarteten Reinvermögensposition nach oben und nach unten vom Entscheidungsträger als gleichermaßen gefährlich eingeschätzt werden. Dies erscheint der tatsächlichen Problemlage wenig angemessen, da vor allen Dingen die Möglichkeit einer negativen Reinvermögensposition eine Alimentierung durch Eigenkapital erfordert. Zur Darstellung der aus dem stochastischen Verzinsungsverlauf resultierenden Gefahr einer Unterdeckung der versicherungstechnischen Verpflichtungen durch die induzierten Vermögenswerte erweisen sich deshalb asymmetrische Risikomaße als besonders geeignet. Als allgemeine Klasse sollen dabei untere partielle Momente der Verteilung der Reinvermögensposition R an einem bestimmten Zeitpunkt t Verwendung finden. Hierbei gilt für das k-te untere partielle Moment $M_k[R(t)]$ und einer nichtnegativen Reinvermögensposition als Zielwert (0 als obere Integrationsgrenze):[83]

$$M_k[R(t)] = \int_{-\infty}^{0} r^k(t)\, f(r)\, \mathrm{d}r \tag{33}$$

Im Rahmen der stochastischen Simulation approximieren wir dieses Integral durch eine entsprechende Schätzfunktion in folgender Weise

$$\hat{M}_k[R(t)] = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^{H} r^k(t)\; I(h), \tag{34}$$

wobei $I(h)$ eine Indikatorvariable darstellt, die den Wert 1 annimmt, wenn die Reinvermögensposition des h-ten Simulationslaufs negativ ist und den Wert 0, falls diese einen positiven Wert annimmt. H bezeichnet die Anzahl der durchgeführten Simulationsläufe.[84]

Im folgenden betrachten wir für unterschiedliche Auswertungszeitpunkte jeweils das nullte untere partielle Moment (Shortfall-Wahrscheinlichkeit) und das erste untere partielle Moment (Shortfall-Erwartungswert). Aus Abbildung 9 erkennt man, daß unter

83) Siehe für eine allgemeine Formulierung *Albrecht* 1994, *Albrecht* 1994a.

84) In der hier vorgestellten Analyse gilt $H = 1000$.

den gegebenen Bedingungen zum Auswertungszeitpunkt $t = 5$ mit nahezu 100%-iger Wahrscheinlichkeit die akkumulierten Vermögenswerte nicht ausreichen, die aufgelaufenen Verpflichtungen aus dem Vertrag zu finanzieren. Im Erwartungswert beträgt der autonome Finanzierungsbedarf 21,05 DM pro TDM Versicherungssumme.

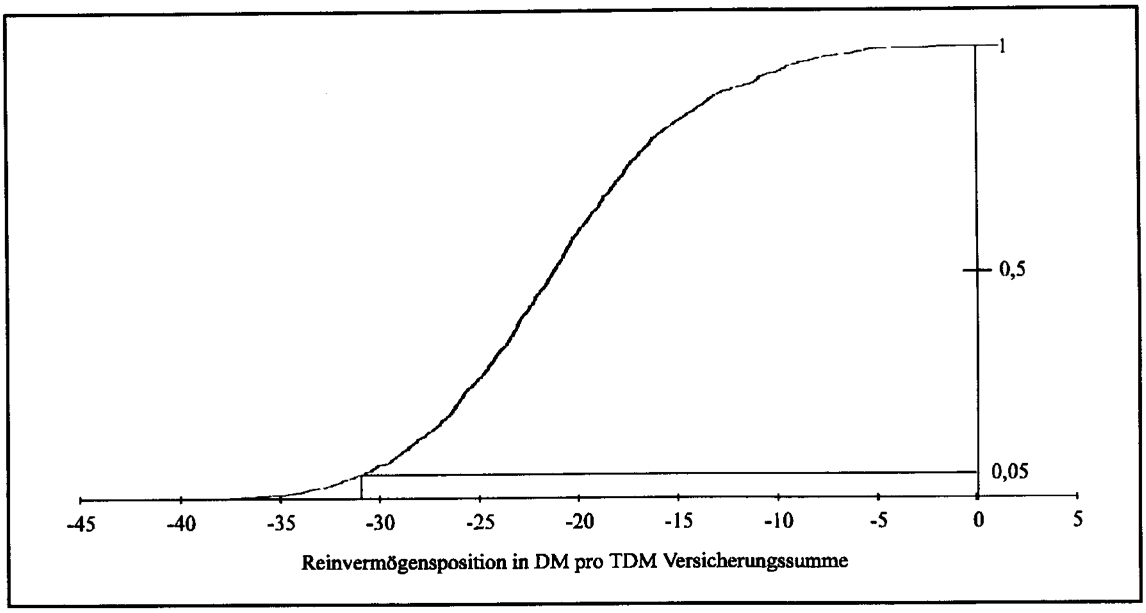

Abbildung 9: Verteilungsfunktion der Reinvermögensposition nach Ablauf von fünf Versicherungsperioden

Abbildung 10 verdeutlicht, daß nach zehnjähriger Vertragslaufzeit die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Unterdeckung der versicherungstechnischen Verpflichtungen eintritt 31,3% beträgt und die erwartete Unterdeckung einen Wert von 4,14 DM pro TDM Versicherungssumme annimmt.

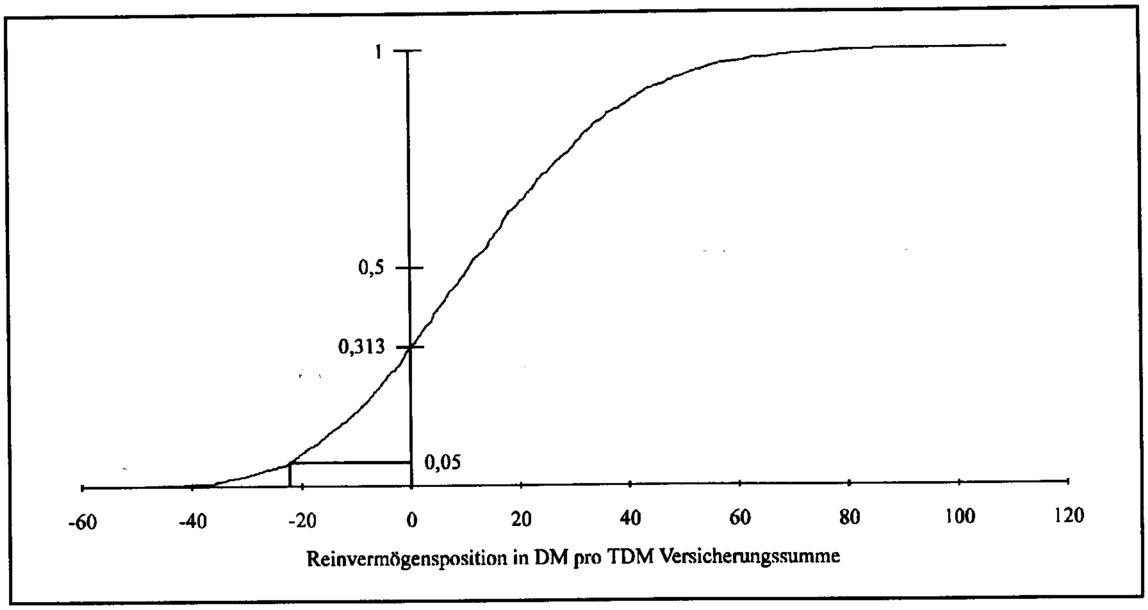

Abbildung 10: Verteilungsfunktion der Reinvermögensposition nach Ablauf von zehn Versicherungsperioden

Die entsprechenden Zahlenwerte für die weiteren Auswertungszeitpunkte t = 15, 20, 25 und 30 können der nachfolgenden Tabelle 2 entnommen werden.

Aus der Simulation abgeleitete Schätzgrößen für	$R(5)$	$R(10)$	$R(15)$	$R(20)$	$R(25)$	$R(30)$
Erwartungswert [DM]	-21,05	12,35	86,29	221,18	464,23	878,72
Standardabweichung [DM]	6,34	23,37	55,10	107,82	204,85	361,38
Variationskoeffizient	-0,301	1,893	0,639	0,487	0,441	0,411
Shortfall-Wahrscheinlichkeit	0,999	0,313	0,04	0,008	0,001	0
Shortfall-Erwartungswert [DM]	-21,05	-4,14	-0,66	-0,26	-0,004	0
5%-Quantil [DM]	-31,24	-22,76	7,74	65,78	168,32	357,35

Tabelle 2: Statistische Kennzahlen bei $E(i_w)$ = 0,07

Die Auswertungen der Verteilungsfunktion des Reinvermögens an der Stelle des 5%-Quantils zeigt, daß beispielsweise nach 10 Versicherungsperioden mit Wahrscheinlichkeit 0,05 die Reinvermögensposition pro TDM Versicherungssumme den Wert von -22,76 DM unterschreitet.

5. Zusammenfassung der Ergebnisse

Mit der Ausweitung der aufsichtsrechtlich zulässigen Zinssätze für die Prämien- und Reserveberechnung in der Lebensversicherung sind für die Ertrags- und Liquiditätslage bisher unbekannte Gefahren verbunden. Auf der Grundlage einer konsequent wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellierung des Kalkulationsmechanismus in der gemischten Lebensversicherung konnte für unterschiedliche Zinskonstellationen die Entwicklung des einzelvertraglich induzierten erwarteten Reinvermögens abgeleitet werden. Dabei wurde insbesondere für den Fall des Überschreitens des Prämienkalkulationszinssatzes über den Zinssatz zur Berechnung der Deckungsrückstellung gezeigt, daß sich für die ersten Versicherungsperioden im Erwartungswert, d.h. unter der Annahme eines nicht außergewöhnlichen Geschäftsverlaufes, eine erhebliche Liquiditäts- und Ertragsbelastung der Unternehmung ergibt. Selbst wenn die am Markt erzielbare Verzinsung der Aktiva den Prämienkalkulationszinssatz deutlich übersteigt, reicht dies in den ersten Perioden nicht aus, die versicherungstechnischen Verpflichtungen vollständig zu alimentieren; eine Überschußentstehung findet nicht statt.

Unter der realitätsnäheren Prämisse einer stochastischen Entwicklung der am Markt erzielbaren Verzinsung konnte über die Erwartungswertbetrachtung hinaus das mit einer entsprechenden Kalkulation verbundene Unternehmensrisiko identifiziert werden. Dabei wurde die Betrachtung auf das nullte und erste untere partielle Moment der Verteilung der Reinvermögensposition konzentriert.

Jedes Lebensversicherungsunternehmen, das sich mit dem Gedanken trägt, die erweiterten Kalkulationsspielräume im Zinsbereich derart zu nutzen, daß es den Zinssatz für die Prämienberechnung über denjenigen zur Ermittlung der Deckungsrückstellung hinaus anhebt, muß sich der Tatsache bewußt sein, daß dadurch in den ersten Versicherungsperioden relevante Finanzierungsbedarfe zu Lasten anderer Reservepositionen entstehen. Der unternehmspolitische Erfolg einer solchen Strategie hängt daher nicht zuletzt von der Qualität der Eigenkapitalausstattung der Lebensversicherungsunternehmung ab.

Literaturverzeichnis

Abraham, Bovas; Johannes *Ledolter* (*Abraham/Ledolter* 1983): Statistical Methods for Forecasting, New York et al. 1983.

Albrecht, Peter (*Albrecht* 1992): Zur Risikotransformationstheorie der Versicherung: Grundlagen und ökonomische Konsequenzen, Karlsruhe 1992.

Albrecht, Peter (*Albrecht* 1994): Shortfall Returns and Shortfall Risk, in: Actuarial Approach for Financial Risks, 4th International AFIR-Colloquium 1994, Orlando 1994, Band 1, S. 87-110.

Albrecht, Peter (*Albrecht* 1994a): Zur Konzeptualisierung von Risiko und Chance mit Anwendungen in den Finanz- und Versicherungsmärkten, in: *Hübner/Helten/Albrecht* (Hrsg.): Recht und Ökonomie der Versicherung. Festschrift für Egon Lorenz zum 60. Geburtstag, S. 1-22.

Albrecht, Peter; Stefan *Lippe* (*Albrecht/Lippe* 1988): Prämie, mathematische und wirtschaftliche Fragen, in: *Farny*, Dieter et al. (Hrsg.): Handwörterbuch der Versicherung, Karlsruhe 1988, S. 525-532.

Amsler, Marc-Henri (*Amsler* 1988): Sur la Modélisation des Risques par les Chaines de Markov, in: Transactions of the 23rd International Congress of Actuaries, Helsinki 1988, S. 1-17.

Bomsdorf, Eckart (*Bomsdorf* 1993): Generationensterbetafeln für die Geburtsjahrgänge 1923 bis 1993. Modellrechnungen für die Bundesrepublik Deutschland, Bergisch Gladbach und Köln 1993.

Bowers, Newton L., Jr.; Hans U. *Gerber*; James C. *Hickman*, Donald A. *Jones*; Cecil J. *Nesbitt* (*Bowers* et al. 1986): Actuarial Mathematics, Itasca 1986.

Box, George E. P.; Gwilym M. *Jenkins* (*Box/Jenkins* 1970): Time Series Analysis. Forcasting and Control, San Francisco et al. 1970.

Claus, Gottfried (*Claus* 1994): Lebensversicherungsaufsicht nach der Dritten EG-Richtlinie. Was bleibt? Was ändert sich?, in: Zeitschrift für Versicherungswesen, 45. Jahrgang, 1994, Heft 5, S. 110-118, Heft 6, S. 139-149.

Fisz, Marek (*Fisz* 1978): Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, 9. Auflage, Berlin 1978.

Gerber, Hans U. (*Gerber* 1986): Lebensversicherungsmathematik, Berlin und Heidelberg 1986.

Greene, William H. (*Greene* 1993): Econometric Analysis, 2. Auflage, New York et al. 1993.

Hagelschuer, Paul B. (*Hagelschuer* 1987): Lebensversicherung, 2. Auflage, Wiesbaden 1987.

Heidemann, Jörg (*Heidemann* 1994): Formen der Lebensversicherung, in: Versicherungspraxis, 1994, Heft 4, S. 57-61, Heft 5, S. 73-77.

Hölscher, Reinhold (*Hölscher* 1994): Marktzinsorientierte Ergebnisrechnung in der Lebensversicherung, Stuttgart 1994.

Isenbart, Fritz; Hans *Münzner* (*Isenbart/Münzner* 1987): Lebensversicherungsmathematik für Praxis und Studium, Wiesbaden 1987.

Johnson, Norman L.; Samuel *Kotz* (*Johnson/Kotz* 1970): Continuous Univariate Distributions, Teil 1, New York et al. 1970.

Kojima, K. (*Kojima* 1988): Application of the Markov Model to Life Insurance Products, in: Transactions of th 23rd International Congress of Actuaries, Helsinki 1988, S. 141-158.

Kurzendörfer, Volker (*Kurzendörfer* 1993): Einführung in die Lebensversicherung, Karlsruhe 1993.

Loebus, Horst (*Loebus* 1994): Bestimmung einer angemessenen Sterbetafel für Lebensversicherungen mit Todesfallcharakter, in: Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band 21, Heft 4, Oktober 1994, S. 497-524.

Lütkepohl, Helmut (*Lütkepohl* 1991): Introduction to Multiple Time Series Analysis, Berlin et al. 1991.

Reichel, Georg (*Reichel* 1987): Grundlagen der Lebensversicherungstechnik, Wiesbaden 1987.

Richtlinie 92/96/EWG des Rates vom 10. November 1992 zur Koordiniereung der Rechts- und Verwaltungsvorschriften für die Direktversicherung (Lebensversicherung) sowie zur Änderung der Richtlinien 79/267/EWG und 90/619/EWG (Dritte Richtlinie Lebensversicherung) (*Dritte Richtlinie Leben* 1993), in: VerBAV, Heft 2, 1993, S. 41-63.

Sasse, Jürgen (*Sasse* 1978): Deckungsrücklage und Deckungsstock im Sicherungssystem des VAG am Beispiel der Einbeziehung der Beitragsüberträge, in: *von Caemmerer*, Ernst et al. (Hrsg): Festschrift für Fritz Hauß zum 70. Geburtstag, Karlsruhe 1978, S. 303-320.

Schierenbeck, Henner; Reinhold *Hölscher* (*Schierenbeck/Hölscher* 1992): BankAssurance. Institutionelle Grundlagen der Bank- und Versicherungsbetriebslehre, 2. Auflage, Stuttgart 1992.

Schmidt, Reimer; Peter *Frey* (*Schmidt/Frey* 1989): Prölss Versicherungsaufsichtsgesetz (Kommentar), 10. Auflage, München 1989.

Schmithals, Bodo; Esther U. *Schütz* (*Schmithals/Schütz* 1995): Herleitung der DAV-Sterbetafel 1994 R für Rentenversicherungen, in: Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band 22, Heft 1, April 1995, S. 29-69.

Wilkie, Alasdair D. (*Wilkie* 1988): Markov Models for Combines Marriage and Mortality Tables, in: Transactions of th 23rd International Congress of Actuaries, Helsinki 1988, S. 473-485.

Wolfsdorf, Kurt (*Wolfsdorf* 1986): Versicherungsmathematik. Teil 1: Personenversicherung, Stuttgart 1986.