

Trivariate C^1 -Splines auf gleichmäßigen Partitionen

Inauguraldissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Universität Mannheim

vorgelegt von
Diplom-Mathematiker Markus Rhein
aus Mannheim

Mannheim, 2009

Dekan: Professor Dr. Felix Freiling, Universität Mannheim
Referent: Professor Dr. Günther Nürnberger, Universität Mannheim
Korreferent: Professor Dr. Jürgen Hesser, Universität Heidelberg

Tag der mündlichen Prüfung: 22.03.2010

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	7
2. Grundlagen	13
2.1. Trivariate Polynome und Bernstein-Bézier-Techniken	13
2.2. Approximation und Interpolation mit Polynomen	20
2.3. Trivariate Splines	22
2.4. Approximation und Quasi-Interpolation mit Splines	25
3. Univariate Quasi-Interpolation	29
3.1. Der univariate Splineraum	30
3.2. Definition der Quasi-Interpolanten	31
3.3. Eigenschaften der Quasi-Interpolanten	33
3.4. Approximationseigenschaften	36
4. Splines auf gleichmäßigen Partitionen	39
4.1. Bivariate Partitionen	39
4.2. Trivariate Partitionen	43
4.3. Gleichmäßige Partitionen im \mathbb{R}^n	46
4.4. Vergleich gleichmäßiger Partitionen	49
5. Dimension trivariater Splines auf Typ-4 Partitionen	55
5.1. C^1 -Splines auf Typ-4 Partitionen	56
5.2. Dimension von Splines auf Typ-4 Partitionen	72
5.3. Konstruktion einer minimalen bestimmenden Menge	73
6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen	85
6.1. Quadratische C^1 -Splines auf Truncated Octahedron Partitionen	87
6.2. Eine Familie von Quasi-Interpolanten auf dem Cubic Grid	92
6.2.1. Definition der Quasi-Interpolanten	92
6.2.2. Eigenschaften der Quasi-Interpolanten	99
6.2.3. Approximationseigenschaften	103
6.2.4. Numerische Tests und Visualisierung	107

Inhaltsverzeichnis

6.3. Optimale Approximation auf dem Cubic Grid	117
6.3.1. Definition der Quasi-Interpolanten	117
6.3.2. Eigenschaften der Quasi-Interpolanten	122
6.3.3. Approximationseigenschaften	125
6.3.4. Numerische Tests	127
6.4. Interpolation auf dem BCC-Grid	130
6.4.1. Definition des Quasi-Interpolanten	130
6.4.2. Eigenschaften des Quasi-Interpolanten	135
6.4.3. Approximationseigenschaften	138
6.4.4. Numerische Tests	139
7. Lokale Lagrange-Interpolation auf Typ-6 Partitionen Δ_6	143
7.1. Der Superspliner Raum $\mathcal{S}(\Delta_6)$	144
7.2. Oktaederklassen	149
7.3. Lagrange-Interpolationsmenge	152
7.4. Approximationseigenschaften	167
A. Vollständiger Beweis zu Satz 6.2	169
Literaturverzeichnis	189

Abbildungsverzeichnis

2.1. C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen und degenerierte Fälle	19
3.1. Datenpunktordnungen	32
4.1. Parkettierungen	40
4.2. S_1 - und S_2 -Split eines Dreiecks	41
4.3. S_1 - und S_2 -Split eines Quadrates	42
4.4. S_1 - und S_2 -Split eines Hexagons	43
4.5. S_1 - und S_2 -Split eines Würfels	45
5.1. Typ-4 Partition	57
5.2. Unterteilung der Würfel bei der Typ-4 Partition	59
6.1. Truncated Octahedron	88
6.2. Bestimmende Menge	90
6.3. Ein Truncated Octahedron im kubischen Gitter	93
6.4. Typische Datenpunktordnung 1	97
6.5. Typische Datenpunktordnung 2	99
6.6. Approximationsfehler für $k = 2$	110
6.7. Approximationsfehler der Ableitungen für $k = 2$	111
6.8. Visualisierung eines Torus	113
6.9. Visualisierung des Stanford Armadillo	113
6.10. Visualisierung des Datensatzes Fuel	114
6.11. Visualisierung eines Virus	114
6.12. Visualisierung des Datensatzes Drache	115
6.13. Visualisierung von Barths Sextic	116
6.14. Approximationsfehler für $\alpha = 0$	128
6.15. Approximationsfehler der Ableitungen für $\alpha = 0$	129
6.16. Approximationsfehler	140
6.17. Approximationsfehler der Ableitungen	141
7.1. Typ-6 Partition	145

Abbildungsverzeichnis

7.2. Minimal bestimmende Menge für einen Halboktaeder	148
7.3. Aufteilung der X-Oktaederklassen	151
7.4. Bezeichnung der acht Tetraeder im Inneren eines Oktaeders	153
7.5. Bestimmung der Koeffizienten in X_1	160
7.6. Bestimmung der Koeffizienten in Y_1	162
7.7. Bestimmung der Koeffizienten in Z	164

Tabellenverzeichnis

4.1. Charakteristische Zahlen gleichmäßiger Tetraeder-Partitionen	53
4.2. Dimension trivariater Polynomräume	53
5.1. Dimension von Splines auf der Typ-4 Partition	72
6.1. Approximationsfehler für $k = 3$	108
6.2. Approximationsfehler für $k = 2$	111
6.3. Approximationsfehler der ersten partiellen Ableitung in x für $k = 2$. .	112
6.4. Approximationsfehler der zweiten partiellen Ableitung in x für $k = 2$.	112
6.5. Approximationsfehler für $\alpha = 0$	128
6.6. Approximationsfehler der ersten partiellen Ableitung in x für $\alpha = 0$. .	129
6.7. Approximationsfehler.	140
6.8. Approximationsfehler der ersten partiellen Ableitung in x	141
7.1. X-Oktaederklassen	150
7.2. Anzahl der Punkte in den Oktaederklassen	155
7.3. Anzahl der Punkte in den Halboktaederklassen	156

1. Einleitung

In dieser Arbeit untersuchen wir C^1 -Splines auf gleichmäßigen Partitionen. Wir analysieren die Struktur von Splineräumen bezüglich gleichmäßiger Partitionen und entwickeln Methoden zur Approximation von Volumendaten mit trivariaten Splines.

Multivariate Splines sind ein wichtiges Werkzeug der Angewandten Mathematik und werden wegen ihrer effizienten Berechenbarkeit und guten Approximationseigenschaften häufig in den Bereichen des Computer Aided Geometric Designs und der Numerical Analysis verwendet. Der Raum der multivariaten C^1 -Splines vom Grad $q \in \mathbb{N}$ bezüglich einer Simplex-Partition Δ eines Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{N}$, ist gegeben durch

$$\mathcal{S}_q^1(\Delta) := \{s \in C^1(\Omega) : s|_T \in \mathcal{P}_q \text{ für alle } T \in \Delta\}.$$

Hier bezeichnet $C^1(\Omega)$ den Raum der stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω und \mathcal{P}_q den Raum der multivariaten Polynome vom Grad q . Die Theorie univariater Splines wird bereits seit Mitte des 20. Jahrhunderts ausgiebig erforscht und viele grundlegende Ergebnisse wie Dimension, Approximationseigenschaften und zahlreiche Interpolationsmethoden sind bekannt (siehe [27], [62], [77] und die Referenzen darin). Durch die rasante Entwicklung der Rechenleistung von Computern und den Bedarf an Oberflächen-Modellen in der Computergraphik, wurde in den letzten Jahrzehnten auch die Theorie bivariater Splines auf Triangulierungen intensiv erforscht (siehe [12], [56] und die Referenzen darin). Es hat sich jedoch gezeigt, dass insbesondere multivariate Splineräume niedrigen Grades eine sehr komplexe Struktur besitzen und so grundlegende Fragestellungen wie die Dimension dieser Räume bis heute nicht vollständig gelöst werden konnten (siehe [2], [5], [32] und [78]). In den letzten Jahren wurde zunehmend auch die Theorie trivariater Splines auf Tetraeder-Partitionen untersucht (siehe [56] und die Referenzen darin) und u.a. erfolgreich in den Bereichen der Approximation und Visualisierung von Volumendaten angewendet (siehe [24], [49], [61], [74], [76] und [84]).

Wichtige Ziele bei der Entwicklung einer Approximationsmethode mit multivariaten Splines sind insbesondere die lokale Berechenbarkeit der Splines und das Er-

1. Einleitung

reichen einer möglichst guten Approximationsordnung. Lokale Berechenbarkeit bedeutet hier, dass die Werte eines Splines $s \in \mathcal{S}_q^1(\Delta)$ an einem Punkt $\xi \in \Omega$ nur von Datenwerten in der Nähe von ξ beeinflusst werden und so der vollständige Spline durch das schrittweise Lösen kleiner Gleichungssysteme bestimmt werden kann. Die Approximationsordnung eines Splineraums $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ ist die größte natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, für die gilt

$$\text{dist}(f, \mathcal{S}_q^1(\Delta)) := \inf\{\|f - s\| : s \in \mathcal{S}_q^1(\Delta)\} \leq C \cdot h^k,$$

wobei f eine stetig differenzierbare Funktion auf Ω ist und $C > 0$ eine Konstante, die abhängig ist von f , q und dem kleinsten Winkel in Δ , jedoch unabhängig von der maximalen Kantenlänge h von Δ . Die Approximationsordnung k des Raums $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ ist optimal, wenn gilt $k = q + 1$. Es ist jedoch bekannt, dass nicht jeder Splineraum die optimale Approximationsordnung besitzt (siehe [14], [31], [47] und [52]). Insbesondere für Splines niedrigen Grades ist es von der Geometrie von Δ abhängig, welche Approximationsordnung der Raum $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ besitzt. Gerade Splines niedrigen Grades sind jedoch oft in Anwendungsgebieten durch ihre schnelle Berechenbarkeit und geringen Speicherbedarf von besonderem Interesse. Oft finden wegen ihrer einfachen Darstellung Tensor-Produkt-Splines Anwendung, wie in den Bereichen des CAD. Um jedoch eine bestimmte Approximationsordnung k erreichen zu können, müssen auch hier mindestens Splines vom Grad $k - 1$ verwendet werden, wodurch im multivariaten Fall schnell die Verwendung von Polynomstücken hohen Grades notwendig wird. Zur Konstruktion eines trivariaten Tensor-Produkt-Splines mit Approximationsordnung 3 beispielsweise ist mindestens ein Splinegrad von 2 und damit die Verwendung von Polynomstücken vom Grad 6 notwendig.

Methoden zur Konstruktion lokaler Splines mit optimaler Approximationsordnung können für multivariate Splines niedrigen Grades auf allgemeinen Partitionen unter Verwendung von Makro-Element-Methoden (siehe [1], [3], [4], [19], [54], [55], [71], [81], [82], [88], und [90]) realisiert werden. Dabei wird jedes Dreieck einer Triangulierung bzw. jeder Tetraeder einer Tetraeder-Partition nach einer bestimmten Zerlegung (Split), abhängig vom jeweiligen Splinegrad und der geforderten Differenzierbarkeit, weiter unterteilt. Die Verwendung dieser Methoden führt jedoch dazu, dass die Anzahl der verwendeten Dreiecke bzw. Tetraeder deutlich steigt. Insbesondere bei den häufig verwendeten trivariaten Splines vom Grad 3 erhöht sich die Anzahl der benötigten Tetraeder um den Faktor 12 (siehe [81] und [87]), wodurch ein hoher Speicheraufwand zur Darstellung der Splines notwendig wird.

Auf geeigneten gleichmäßigen Partitionen ist oft auch ohne die Verwendung von Makro-Element-Methoden die Konstruktion lokaler Splines niedrigen Grades möglich

(siehe [25], [51] und [79]) oder es kann durch die Ausnutzung spezieller Eigenschaften der Partitionen die Anzahl der benötigten Unterteilungen deutlich reduziert werden (siehe [13], [43], [44], [66] und [68]). Jedoch sind im Hinblick auf die Verwendbarkeit für trivariate Splines bisher nur wenige gleichmäßige Partitionen erforscht worden und insbesondere die Vergleichbarkeit der unterschiedlichen Methoden bzw. Partitionen fällt schwer.

Neben Lagrange- und Hermite-Interpolationsmethoden sind auch Quasi-Interpolationsmethoden zur Approximation mit multivariaten Splines von Interesse (siehe [15], [16], [26], [29], [30], [36], [59] und [75]), da es zur Entwicklung dieser Methoden nicht notwendig ist Aussagen über die Dimension oder eine bestimmte Basis des entsprechenden Splineraums zu kennen (siehe [65], [73], [83], [84] und [85]). Darüber hinaus ist es auf manchen Partitionen mit Hilfe der Quasi-Interpolation möglich einen lokalen Spline zu konstruieren, obwohl dies mit Standard-Interpolationsmethoden nur unter Verwendung von Makro-Elementen möglich wäre.

Unser Ziel in dieser Arbeit ist es, die Struktur von C^1 -Splines auf verschiedenen gleichmäßigen Partitionen zu analysieren und Methoden zur Approximation von Volumendaten mit Splines niedrigen Grades ohne die Verwendung von Makro-Element-Methoden zu entwickeln. Dazu entwerfen wir zunächst Werkzeuge, um multivariate Splines auf gleichmäßigen Partitionen einheitlich beschreiben und miteinander vergleichen zu können. Für zwei spezielle gleichmäßige Partitionen entwickeln wir darüber hinaus effiziente Methoden zur Approximation und Interpolation von Volumendaten mit trivariaten Splines. Wir zeigen, wie auf beiden Partitionen lokale Splines mit optimaler Approximationsordnung konstruiert werden können, und veranschaulichen für quadratische C^1 -Splines die Möglichkeiten zum Einsatz im Bereich der interaktiven Volumenvisualisierung.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: In Kapitel 2 geben wir einige wichtige Ergebnisse und Techniken der trivariaten Splinetheorie an. Wir untersuchen den trivariaten Polynomraum sowie Approximations- und Interpolationseigenschaften von Polynomen. Mit Hilfe der Bernstein-Bézier-Techniken (siehe [8], [28], [35] und [72]) für trivariate Polynome können wir Differenzierbarkeitsbedingungen zwischen Polynomstücken benachbarter Tetraeder über die gemeinsame Dreiecksfläche durch einfache Relationen zwischen den Koeffizienten der Polynomstücke in ihrer Bernstein-Bézier-Darstellung ausdrücken. Die bei bivariaten und univariaten Splines auftretenden Differenzierbarkeitsbedingungen können als spezielle degenerierte Fälle der trivariaten Bedingungen aufgefasst werden. Wir geben die Definition trivariater Splines bezüglich Tetraeder-Partitionen an und erläutern mit Hilfe eines allgemeinen Prinzips der Quasi-Interpolation einige wichtige Eigenschaften der Approximation mit

1. Einleitung

multivariaten Splines. Dabei verwenden wir eine neue Art der Beschreibung von Quasi-Interpolanten, die ohne die Verwendung einer Basis des verwendeten Splineraums auskommt (siehe [65] und [85]).

In Kapitel 3 verwenden wir die in Kapitel 2 vorgestellten Techniken zur Quasi-Interpolation dazu, eine Familie univariater quadratischer Quasi-Interpolationsoperatoren anzugeben. Im Gegensatz zu bekannten Methoden der univariaten Quasi-Interpolation benötigen wir dabei keine Basis des univariaten Splineraums, wie die oft verwendete B-Spline Basis (siehe [33]). Wir untersuchen die Eigenschaften der Operatoren zur Approximation gleichverteilter Daten an den Knoten einer gleichmäßigen Intervall-Partition und zeigen, dass die Splines lokal berechnet werden können und die optimale Approximationsordnung 3 besitzen können. Im Unterschied zu bisher bekannten Operatoren beschreiben wir die Datenpunkte jedoch nicht durch absolute Koordinaten, sondern erzeugen für jeden Bernstein-Bézier-Koeffizienten eines univariaten Splines eine individuelle Datenpunktordnung, die auf steigenden Distanzen zu dem mit diesem Koeffizienten assoziierten Domain-Point beruht. Durch diese lokale und richtungsunabhängige Beschreibung der Datenpunkte ist es möglich, mit einfachen Formeln die Berechnung aller Koeffizienten des Splines direkt anzugeben. Diese neue Technik wird vor allem in Kapitel 6 von großer Bedeutung sein, da dieses Vorgehen direkt auf multivariate Partitionen anwendbar ist und eine einfache Beschreibung der Datenpunkte auch im trivariaten Raum, wo eine Beschreibung der Datenpunkte über absolute Koordinaten mit großen Schwierigkeiten verbunden ist (siehe [84]), ermöglicht.

In Kapitel 4 untersuchen wir Splines auf gleichmäßigen Partitionen und entwerfen eine allgemeine Beschreibung gleichmäßiger Partitionen, mit der fast alle bisher in der multivariaten Splinetheorie untersuchten gleichmäßigen Triangulierungen und Tetraeder-Partitionen sowie multivariaten Makro-Elemente beschrieben werden können. Dabei gehen wir speziell auf die Fälle der gleichmäßigen bivariaten und trivariaten Partitionen ein und geben einen Überblick über die bisher erzielten Ergebnisse und Möglichkeiten der Verwendung von Splines auf diesen Partitionen. Wir erläutern wie die Beschreibungen auf multivariate Partitionen des \mathbb{R}^n erweitert werden können und entwickeln eine Methode um multivariate Splines auf gleichmäßigen Partitionen an Hand der vorhandenen Freiheitsgrade beurteilen und vergleichen zu können. Dies geschieht durch die Definition der charakteristischen Zahl eines Splineraums, die auch ein Indiz dafür ist, ob in einem bestimmten Splineraum die Konstruktion eines lokalen approximierenden Splines möglich ist. Abschließend zeigen wir am Beispiel verschiedener gleichmäßiger bivariater und trivariater Partitionen, wie diese Zahl im Rahmen der Entwicklung einer Approximationsmethode für multivariate Splines verwendet werden kann.

Trivariate Splines wurden bisher lediglich auf gleichmäßigen Partitionen untersucht, die auf der Unterteilung von Würfel-Partitionen in Tetraeder beruhen (siehe [38], [42], [61] und [79]). Dies sind die Typ-3, die Typ-4 und die Typ-6 Partition, bei denen jeder Würfel einer Würfel-Partition durch den Schnitt mit 3, 4 bzw. 6 Ebenen in 6, 5 bzw. 24 Tetraeder unterteilt wird. Die Dimension konnte jedoch bisher nur für Splines auf Typ-3 und Typ-6 Partitionen exakt bestimmt werden (siehe [41] und [45]). Wir entwickeln in Kapitel 5 eine neue Technik zur Bestimmung der Dimension von Splines auf gleichmäßigen Tetraeder-Partitionen und bestimmen durch die Konstruktion einer minimal bestimmenden Menge die Dimension von Splines vom Grad $q \geq 4$ auf Typ-4 Partitionen. Dabei bestimmen wir zunächst eine minimal bestimmende Menge auf allen Schnittebenen der Partition und erweitern diese Menge in einem zweiten Schritt zu einer minimal bestimmenden Menge bezüglich der gesamten Partition. Eine minimal bestimmende Menge bezeichnet hier eine Teilmenge von Bernstein-Bézier-Koeffizienten eines Splines, durch die sich unter Beachtung aller Differenzierbarkeitsbedingungen des entsprechenden Splineraums alle anderen Koeffizienten und damit der Spline eindeutig bestimmen lassen. Die Dimension des Splineraums ergibt sich dann direkt aus der Kardinalität der minimal bestimmenden Menge.

In Kapitel 6 stellen wir eine neue Art von gleichmäßigen Tetraeder-Partitionen vor, die auf der Unterteilung des Raums durch Truncated Octahedrons beruht. Wir analysieren erstmals die Struktur von C^1 -Splines auf diesen Partitionen und entwickeln Quasi-Interpolationsmethoden zur Approximation gegitterter Daten mit quadratischen C^1 -Splines auf diesen Partitionen ohne die Verwendung von Makro-Element-Methoden. Die resultierenden Splines können dabei lokal und numerisch stabil durch die Anwendung einfacher Formeln für die Bernstein-Bézier-Koeffizienten der Splines berechnet werden. Wir entwickeln sowohl Methoden zur Approximation und Interpolation von Daten auf dem kubischen Gitter, wie auch auf dem raumzentrierten kubischen Gitter und können in beiden Fällen Quasi-Interpolationsoperatoren angeben, die die optimale Approximationsordnung 3 erreichen. Dies sind damit die ersten explizit angegebenen Quasi-Interpolationsoperatoren mit dieser Eigenschaft. Die Verwendung der Partition von Truncated Octahedrons ist dabei von zentraler Bedeutung. Ähnliche Approximationsergebnisse konnten auf Tetraeder-Partitionen, die auf der Unterteilung von Würfel-Partitionen beruhen, lediglich durch die Verwendung kubischer Splines (siehe [84]), durch Aufgabe der globalen C^1 -Differenzierbarkeit (siehe [65]) oder durch die Verwendung von Makro-Elementen, bei denen jeder Tetraeder in 24 Subtetraeder unterteilt wird (siehe [82] und [88]) erreicht werden. In numerischen Tests weisen wir die effiziente Berechenbarkeit und die Approximationseigenschaften der Splines nach. An Hand von bekannten Volumen-Datensätzen und

1. Einleitung

komplexer algebraischer Flächen zeigen wir die Visualisierungsqualitäten der Splines. Durch die schnelle Berechnung der Splines und den verhältnismäßig geringen Speicherbedarf ist die interaktive Visualisierung von Isosurfaces aus 3D-Datensätzen mit bis zu 256^3 Datenpunkten auf einem aktuellen PC in Echtzeit möglich.

In Kapitel 7 entwickeln wir eine Methode zur lokalen Lagrange-Interpolation mit C^1 -Splines vom Grad 5 auf Typ-6 Partitionen. Wir beschreiben dazu eine Klasseneinteilung der Typ-6 Partition in Klassen von Oktaedern nach der Idee des Prioritätsprinzips (siehe [13], [64], [63], [66], [67], [69] und [70]). Dazu wählen wir in jeder Klasse nacheinander Oktaeder, die disjunkt sind, nur gemeinsame Eckpunkte, nur gemeinsame Eckpunkte und Kanten, oder gemeinsame Seitenflächen mit Oktaedern zuvor gewählter Klassen besitzen. Wir zeigen, wie in den Oktaedern der einzelnen Klassen Lagrange-Interpolationspunkte gewählt werden können, so dass eine eindeutige und lokale Bestimmung eines interpolierenden Splines möglich ist. Dabei kann der vollständige Spline durch das schrittweise Lösen kleiner Gleichungssysteme stabil berechnet werden. Es muss dazu kein Tetraeder der ursprünglichen Partition weiter unterteilt werden. Statt dessen nutzen wir eine natürliche Eigenschaft der Oktaeder, die es erlaubt, auch wenn an allen Seiten des Oktaeders Differenzierbarkeitsbedingungen induziert werden, durch die Wahl zusätzlicher Interpolationspunkte im Inneren des Oktaeders einen Spline eindeutig zu bestimmen. Wir zeigen, dass die resultierenden Splines die optimale Approximationordnung 6 besitzen.

2. Grundlagen

In diesem Kapitel geben wir einige wichtige Ergebnisse und Techniken der trivariaten Splinetheorie an. Als Grundlage behandeln wir dazu in Abschnitt 2.1 den trivariaten Polynomraum sowie die Bernstein-Bézier-Techniken für trivariate Polynome. In Abschnitt 2.2 geben wir einige Approximations- und Interpolationseigenschaften von Polynomen an. In Abschnitt 2.3 definieren wir den trivariaten Spline Raum und geben weitere grundlegende Definitionen zur Beschreibung von Splines auf Tetraeder-Partitionen an. In Abschnitt 2.4 fassen wir einige wichtige Ergebnisse zur Approximation mit Splines zusammen und erläutern neue Techniken der Quasi-Interpolation, die wir in den folgenden Kapiteln verwenden.

2.1. Trivariate Polynome und Bernstein-Bézier-Techniken

In diesem Abschnitt geben wir zunächst die Definition des trivariaten Polynomraums an und stellen die bekannteste Repräsentation von Polynomen, die Monomdarstellung vor. Zur lokalen Darstellung trivariater Polynome bezüglich eines Tetraeders verwenden wir die wohlbekannteste Bernstein-Bézier-Darstellung (siehe [8], [23] und [28]). Wir fassen die wichtigsten Eigenschaften dieser Darstellung, wie die Reproduktionseigenschaften und die Konvexe-Hüllen-Eigenschaft der Bernstein-Bézier-Punkte, zusammen. Abschließend zeigen wir, wie Differenzierbarkeitsbedingungen zwischen zwei Polynomstücken zweier benachbarter Tetraeder über die gemeinsame Dreiecksfläche durch einfache Relationen zwischen gewissen Koeffizienten der beiden Polynomstücke in Bernstein-Bézier-Darstellung beschrieben werden können. Dabei gehen wir insbesondere auf die möglichen degenerierten Fälle ein, die durch bestimmte geometrische Konstellationen auftreten können.

Wir beginnen mit der Definition des trivariaten Polynomraums sowie der Monomdarstellung trivariater Polynome.

2. Grundlagen

Definition 2.1 (Trivariater Polynomraum und Monomdarstellung)

Sei $q \in \mathbb{N}_0$, so nennen wir

$$\mathcal{P}_q := \text{span}\{x^i y^j z^k : i, j, k \in \mathbb{N}_0, i + j + k \leq q\},$$

den Raum der trivariaten Polynome vom (totalen) Grad q . Jedes Polynom $p \in \mathcal{P}_q$ besitzt die eindeutige Monomdarstellung

$$p \equiv \sum_{i+j+k \leq q} a_{ijk} x^i y^j z^k, \quad a_{ijk} \in \mathbb{R}.$$

Für die Dimension des trivariaten Polynomraums gilt die folgende einfache Formel.

Korollar 2.2 (Dimension von \mathcal{P}_q)

Sei $q \in \mathbb{N}_0$, dann gilt für die Dimension des trivariaten Polynomraums

$$\dim \mathcal{P}_q = \binom{q+3}{3}.$$

Die Monomdarstellung ist die wohl bekannteste Darstellung von Polynomen. Trotz ihrer einfachen Form ist die Monomdarstellung für die Darstellung stückweiser Polynome auf Tetraeder-Partitionen jedoch nicht effizient. Insbesondere bei großen Partitionen ist eine lokale Darstellung hinsichtlich eines Tetraeders vorzuziehen, da hierdurch Rundungsfehler bei der Berechnung weit vom Ursprung entfernter Polynome nicht auftreten. Von noch größerer Bedeutung für die Untersuchung trivariater Splineräume ist es jedoch eine Darstellungsweise zu finden, in der die Differenzierbarkeitsbedingungen zwischen Polynomstücken auf benachbarten Tetradern in möglichst einfacher und klarer Art und Weise beschrieben werden können. Im Folgenden werden wir daher die in der Splinetheorie am häufigsten verwendete Darstellung von Polynomen, die Bernstein-Bézier-Darstellung einführen. Dazu geben wir zunächst die Definition der Grundbausteine dieser Darstellung, der Baryzentrischen Koordinaten eines Tetraeders an. Hier, wie auch im weiteren Verlauf dieser Arbeit, gehen wir stets von einem nicht-degenerierten Tetraeder $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ aus. D.h. die Eckpunkte $v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ von T liegen nicht alle in einer Ebene; sie befinden sich also in allgemeiner Lage im \mathbb{R}^3 .

Definition 2.3 (Baryzentrische Koordinaten)

Es sei $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ ein Tetraeder im \mathbb{R}^3 mit den Eckpunkten v_0, v_1, v_2, v_3 .

2.1. Trivariate Polynome und Bernstein-Bézier-Techniken

Dann heißen die eindeutigen Interpolationspolynome $\phi_\nu \in \mathcal{P}_1$, $\nu = 0, \dots, 3$, mit der Interpolationseigenschaft

$$\phi_\nu(v_\mu) = \delta_{\nu,\mu}, \quad \mu = 0, \dots, 3,$$

die Baryzentrischen Koordinaten hinsichtlich T . Sie lassen sich durch die folgende Formel explizit berechnen:

$$\forall z \in \mathbb{R}^3 : \phi_\nu(z) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ v_0 & \dots & z & \dots & v_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ v_0 & \dots & v_\nu & \dots & v_3 \end{vmatrix}}, \quad \nu = 0, \dots, 3.$$

Die Baryzentrischen Koordinaten erfüllen gewisse Reproduktionseigenschaften, die wir im folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 2.4 (Reproduktionseigenschaften der Baryzent. Koordinaten)

Sei $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ ein Tetraeder im \mathbb{R}^3 , dann gelten die Aussagen

- (i) $\forall p \in \mathcal{P}_1 : \sum_{\nu=0}^3 p(v_\nu) \cdot \phi_\nu \equiv p, \quad (\text{Reproduktion linearer Polynome})$
- (ii) $\forall z \in \mathbb{R}^3 : \sum_{\nu=0}^3 \phi_\nu(z) = 1, \quad (\text{Reproduktion der 1})$
- (iii) $\forall z \in \mathbb{R}^3 : \sum_{\nu=0}^3 v_\nu \cdot \phi_\nu(z) = z. \quad (\text{Reproduktion der Identität})$

Mit Hilfe der Baryzentrischen Koordinaten $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ bezüglich eines Tetraeders T definieren wir nun Polynome vom Grad q , die in symmetrischer Weise an die Lage von T angepasst sind.

Definition 2.5 (Bernstein-Polynome)

Seien $q \in \mathbb{N}_0$ und $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ ein Tetraeder im \mathbb{R}^3 . Die Polynome $B_{i,j,k,l} \in \mathcal{P}_q$ definiert durch

$$B_{i,j,k,l} := \frac{q!}{i!j!k!l!} \phi_0^i \phi_1^j \phi_2^k \phi_3^l, \quad i + j + k + l = q,$$

heißen **Bernstein-Polynome** vom Grad q hinsichtlich T .

2. Grundlagen

Der nächste Satz zeigt, dass die Bernstein-Polynome eine Basis des Polynomraums bilden.

Satz 2.6 (Bernstein-Basis)

Es sei $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ ein Tetraeder. Dann bilden die Bernstein-Polynome $B_{i,j,k,l}$, $i + j + k + l = q$, eine Basis des Polynomraums \mathcal{P}_q , d.h.

$$\mathcal{P}_q = \text{span}\{B_{i,j,k,l} : i + j + k + l = q\}.$$

Durch die symmetrische Lage der Bernstein-Polynome innerhalb des Tetraeders kommt auch gewissen Punkten innerhalb dieses Tetraeders eine zusätzliche Bedeutung zu. Diese gleichverteilten Punkte werden als Domain-Points des Tetraeders bezeichnet.

Definition 2.7 (Domain-Points)

Die in einem Tetraeder $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ liegenden gleichverteilten Punkte

$$\xi_{i,j,k,l} := \frac{i}{q} v_0 + \frac{j}{q} v_1 + \frac{k}{q} v_2 + \frac{l}{q} v_3, \quad i + j + k + l = q,$$

heißen Grundpunkte bzw. Domain-Points (vom Grad q) von T . Die Menge aller Domain-Points vom Grad q von T bezeichnen wir mit

$$\mathcal{D}_{q,T} := \{\xi_{i,j,k,l} : i + j + k + l = q\}.$$

In den folgenden Kapitel schreiben wir oft abkürzend \mathcal{D}_T für die Menge der Domain-Points eines Tetraeders. In diesem Fall bezeichnen wir dadurch stets die Domain-Points, deren Grad dem des im jeweiligen Kapitel untersuchten Splineraums entspricht. Wir können nun die bekannte Bernstein-Bézier-Darstellung von Polynomen angeben.

Definition 2.8 (Bernstein-Bézier-Darstellung)

Es seien $q \in \mathbb{N}_0$, $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ ein Tetraeder und $B_{i,j,k,l}$, $i + j + k + l = q$, die Bernstein-Polynome hinsichtlich T . Die Darstellung

$$p \equiv \sum_{i+j+k+l=q} b_{i,j,k,l} B_{i,j,k,l}$$

heißt Bernstein-Bézier-Darstellung von $p \in \mathcal{P}_q$ hinsichtlich T . Die Koeffizienten $b_{i,j,k,l} \in \mathbb{R}$, $i + j + k + l = q$, heißen Bernstein-Bézier-Koeffizienten von p hinsichtlich T und die gleichverteilten Punkte $(\xi_{i,j,k,l}, b_{i,j,k,l}) \in \mathbb{R}^4$ bezeichnen wir als Bernstein-Bézier-Punkte von p .

2.1. Trivariate Polynome und Bernstein-Bézier-Techniken

Die Bernstein-Bézier-Punkte werden im Bereich des Computer Aided Design auch als Kontrollpunkte oder Control Points von p bezeichnet. Diese Bezeichnung geht auf die Eigenschaft dieser Punkte zurück die Form (Shape) des Polynoms p festzulegen.

Satz 2.9 (Eigenschaften der Bernstein-Polynome)

Seien $q \in \mathbb{N}_0$ und $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ ein Tetraeder, dann gelten die Aussagen

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & B_{i,j,k,l}(z) \geq 0, \quad z \in T, \\
 (ii) \quad & z \in T : B_{i,j,k,l}(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z \in [v_0, v_1, v_2] \wedge l \neq 0 \\ z \in [v_0, v_1, v_3] \wedge k \neq 0 \\ z \in [v_0, v_2, v_3] \wedge j \neq 0 \\ z \in [v_1, v_2, v_3] \wedge i \neq 0 \end{cases}, \\
 (iii) \quad & \max_{z \in T} B_{i,j,k,l}(z) = B_{i,j,k,l}(\xi_{i,j,k,l}).
 \end{aligned}$$

Wie auch ihre Grundbausteine, die Baryzentrischen Koordinaten, so besitzen auch die Bernstein-Polynome gewisse Reproduktionseigenschaften, die wir im folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 2.10 (Reproduktioneigenschaften der Bernstein-Polynome)

Seien $q \in \mathbb{N}_0$ und $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ ein Tetraeder, dann gelten die Aussagen

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \forall z \in \mathbb{R}^3 : \sum_{i+j+k+l=q} B_{i,j,k,l}(z) = 1, \quad (\text{Reproduktion der } 1) \\
 (ii) \quad & \forall z \in \mathbb{R}^3 : \sum_{i+j+k+l=q} \xi_{i,j,k,l} B_{i,j,k,l}(z) = z, \quad (\text{Reproduktion der Identität}) \\
 (iii) \quad & \forall p \in \mathcal{P}_1 : \sum_{i+j+k+l=q} p(\xi_{i,j,k,l}) B_{i,j,k,l} \equiv p. \quad (\text{Reproduktion linearer Polynome})
 \end{aligned}$$

Aus diesen Reproduktionseigenschaften und den in Satz 2.9 zusammengefassten Eigenschaften der Bernstein-Polynome folgt auch die Konvexe-Hüllen-Eigenschaft der Bernstein-Bézier-Punkte bzw. der Kontrollpunkte.

Satz 2.11 (Konvexe-Hüllen-Eigenschaft)

Seien T ein Tetraeder, $p \in \mathcal{P}_q$ ein Polynom vom Grad q gegeben in seiner Bernstein-Bézier-Darstellung

$$p \equiv \sum_{i+j+k+l=q} b_{i,j,k,l} B_{i,j,k,l}$$

2. Grundlagen

bezüglich T und

$$K_T := \left\{ z \in \mathbb{R}^4 : z = \sum_{\xi \in \mathcal{D}_{q,T}} \alpha_\xi(\xi, b_\xi), \alpha_\xi \geq 0 \text{ und } \sum_{\xi \in \mathcal{D}_{q,T}} \alpha_\xi = 1 \right\}$$

die konvexe Hülle der Bernstein-Bézier-Punkte (ξ, b_ξ) , $\xi \in \mathcal{D}_{q,T}$, von p , dann gilt

$$\forall z \in T : (z, p(z)) \in K_T.$$

Die eigentlich Stärke der Bernstein-Bézier-Darstellung ist jedoch die Möglichkeit zur einfachen Beschreibung der Differenzierbarkeitsbedingungen zwischen Polynomstücken auf benachbarten Tetraedern. Der nächste Satz zeigt, dass sich diese Bedingungen durch einfache Relationen zwischen den Bernstein-Bézier-Koeffizienten der beiden Polynomstücke beschreiben lassen.

Satz 2.12 (Differenzierbarkeitsbedingungen)

Seien $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ und $\tilde{T} = [v_0, v_1, v_2, \tilde{v}_3]$ zwei Tetraeder mit gemeinsamer Dreiecksfläche $[v_0, v_1, v_2]$ und $s \in S_q^{-1}(\{T, \tilde{T}\})$ gegeben durch

$$s|_T \equiv p \equiv \sum_{i+j+k+l=q} b_{i,j,k,l} B_{i,j,k,l} \quad \text{und} \quad s|_{\tilde{T}} \equiv \tilde{p} \equiv \sum_{i+j+k+l=q} \tilde{b}_{i,j,k,l} \tilde{B}_{i,j,k,l}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} s \in \mathcal{S}_q^0(\{T, \tilde{T}\}) &\Leftrightarrow \tilde{b}_{i,j,k,0} = b_{i,j,k,0}, \quad i + j + k = q \\ s \in \mathcal{S}_q^1(\{T, \tilde{T}\}) &\Leftrightarrow s \in \mathcal{S}_q^0(\{T, \tilde{T}\}) \text{ und für } i + j + k = q - 1 : \\ &\tilde{b}_{i,j,k,1} = b_{i+1,j,k,0} \cdot \phi_0(\tilde{v}_3) + b_{i,j+1,k,0} \cdot \phi_1(\tilde{v}_3) \\ &\quad + b_{i,j,k+1,0} \cdot \phi_2(\tilde{v}_3) + b_{i,j,k,1} \cdot \phi_3(\tilde{v}_3) \end{aligned}$$

In jede der C^1 -Bedingungen über $[v_0, v_1, v_2]$ sind also in der Regel 5 Koeffizienten involviert. Liegt der Eckpunkt \tilde{v}_3 jedoch auf einer der Ebenen durch die Seitenflächen von T oder auf einer Geraden mit einer der Kanten von T , so degenerieren diese trivariaten Differenzierbarkeitsbedingungen, auf Grund der Nullstelleneigenschaften der Baryzentrischen Koordinaten, zu bivariaten bzw. univariaten Differenzierbarkeitsbedingungen, in die nur noch 4 bzw. 3 Koeffizienten involviert sind. Besonders im Falle gleichmäßiger Tetraeder-Partitionen treten, auf Grund der speziellen Konstruktion, oft diese degenerierten Fälle auf. Daher untersuchen wir im folgenden Korollar speziell für den Fall einfach differenzierbarer Splines die möglichen Degeneriertheiten.

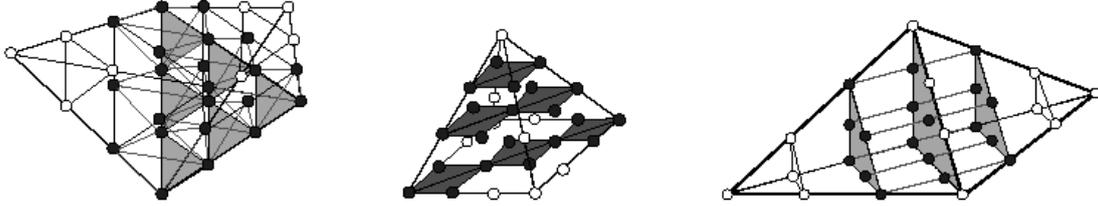


Abbildung 2.1.: Darstellung der C^1 -Bedingungen über die gemeinsame Seitenfläche zweier benachbarter Tetraeder. Domain-Points, deren assoziierte Koeffizienten in Differenzierbarkeitsbedingungen involviert sind, werden durch schwarze Punkte markiert. Im allgemeinen (trivariaten) Fall (links), sind in diese Bedingungen je 5 Koeffizienten involviert. Liegen je eine bzw. zwei Seitenflächen der beiden Tetraeder in einer Ebene, so degenerieren diese trivariaten Bedingungen zu Differenzierbarkeitsbedingungen bivariaten (mitte) bzw. univariaten Typs (rechts), in welche nur noch 4 bzw. 3 Koeffizienten involviert sind.

Korollar 2.13 (Degenerierte Fälle)

Seien $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ und $\tilde{T} = [v_0, v_1, v_2, \tilde{v}_3]$ zwei Tetraeder mit gemeinsamer Dreiecksfläche $[v_0, v_1, v_2]$ und $s \in S_q^0(\{T, \tilde{T}\})$.

- (1) \tilde{v}_3 liegt auf einer Ebene mit $[v_0, v_2, v_3]$
 - $\Rightarrow \phi_1(\tilde{v}_3) = 0$
 - $\Rightarrow s \in S_q^1(\{T, \tilde{T}\}) \Leftrightarrow \forall i + j + k = q - 1 :$

$$\tilde{b}_{i,j,k,1} = b_{i+1,j,k,0} \cdot \phi_0(\tilde{v}_3) + b_{i,j,k+1,0} \cdot \phi_2(\tilde{v}_3) + b_{i,j,k,1} \cdot \phi_3(\tilde{v}_3)$$

- (2) \tilde{v}_3 liegt auf einer Geraden mit $[v_0, v_3]$
 - $\Rightarrow \phi_1(\tilde{v}_3) = 0$ und $\phi_2(\tilde{v}_3) = 0$
 - $\Rightarrow s \in S_q^1(\{T, \tilde{T}\}) \Leftrightarrow \forall i + j + k = q - 1 :$

$$\tilde{b}_{i,j,k,1} = b_{i+1,j,k,0} \cdot \phi_0(\tilde{v}_3) + b_{i,j,k,1} \cdot \phi_3(\tilde{v}_3)$$

Wir veranschaulichen uns die beim C^1 -Übergang auftretenden möglichen Typen von Differenzierbarkeitsbedingungen in Abbildung 2.1. Wir assoziieren dabei die Bernstein-Bézier-Koeffizienten $b_{i,j,k,l}$ der Polynomstücke in eindeutiger Weise mit den Domain-Points $\xi_{i,j,k,l}$ der jeweiligen Tetraeder. Auch in den folgenden Kapiteln werden wir diese Möglichkeit zur anschaulichen Darstellung der in die Differenzierbarkeitsbedingungen involvierten Koeffizienten nutzen.

2.2. Approximation und Interpolation mit Polynomen

Ein zentrales Problem der Approximationstheorie ist die Frage, wie gut eine gegebene Funktion f approximiert werden kann. In diesem Abschnitt geben wir daher einige grundlegende Ergebnisse zur Approximation und Interpolation mit Polynomen an. Wir gehen dabei insbesondere auf das Problem der Bestimmung von Interpolationsmengen von Polynomen ein.

Das erste wichtige Resultat dieses Abschnitts zeigt, wie gut Polynome approximieren. Dieses Ergebnis wurde für bivariate Polynome bezüglich nicht degenerierter Dreiecke von Ciarlet und Raviart (siehe [18]) bewiesen und lässt sich auch in den trivariaten Raum übertragen. Hier, so wie auch im Folgenden verwenden wir die Maximumsnorm

$$\|f\|_{\Gamma} := \max_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|,$$

wobei Γ ein Gebiet im \mathbb{R}^3 und f eine stetige Funktion auf Γ ist.

Satz 2.14 (Approximationsordnung trivariater Polynome)

Seien $T \subset \mathbb{R}^3$ ein Tetraeder, h der Außendurchmesser von T und $f \in C^{q+1}(T)$ eine $(q+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion auf T . Dann existiert ein Polynom $p_f \in \mathcal{P}_q$, so dass gilt

$$\|f - p_f\| \leq C_f \cdot h^{q+1},$$

wobei $C_f > 0$ nur abhängig ist von den $(q+1)$ -ten Ableitungen von f und q . Wir sagen p_f besitzt die Approximationsordnung $q+1$.

Die Approximationsordnung beschreibt also grob gesprochen die Geschwindigkeit mit der ein Approximationspolynom p_f gegen die Funktion f bei Verkleinerung des Grundgebiets T konvergiert. Ein häufig in der Approximationstheorie und in Anwendungsgebieten auftretendes Problem ist die Interpolation von Daten. Insbesondere in der multivariaten Approximation ist die Frage der eindeutigen Lösbarkeit solcher Interpolationsprobleme jedoch oft schwer zu beantworten. In der nächsten Definition erläutern wir zunächst allgemein den Begriff des Lagrange-Interpolationsproblems und geben die Definition einer Lagrange-Interpolationsmenge an.

Definition 2.15 (Lagrange-Interpolationsmenge)

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, G ein d -dimensionaler Teilraum von $C(\Omega)$ und $\gamma_i \in \Omega$, für $i =$

2.2. Approximation und Interpolation mit Polynomen

$1, \dots, d$, paarweise verschiedene Punkte. Gesucht ist eine Funktion $f \in G$, die das Lagrange-Interpolationsproblem

$$f(\gamma_i) = \eta_i, \quad i = 1, \dots, d,$$

für gegebene Werte $\eta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, d$, löst. Existiert für beliebige Werte $\eta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, d$, immer eine eindeutige Lösung des Lagrange-Interpolationsproblems, so nennen wir die Menge $\mathcal{L} := \{\gamma_1, \dots, \gamma_d\}$ eine Lagrange-Interpolationsmenge für den Raum G .

Während für univariate Polynome jede Menge von Punkten, deren Anzahl der Dimension des Polynomraums entspricht, eine Lagrange-Interpolationsmenge bildet, ist dies im multivariaten Fall nicht mehr gegeben. Bereits für bivariate Polynome existiert keine vollständige Charakterisierung der Lagrange-Interpolationsmengen. Es gibt jedoch ausgezeichnete Punktlagen, die nach bestimmten Kriterien gewählt werden können, für die eine eindeutige Interpolation möglich ist (siehe [9] und [57]). Bekannte Methoden, um solche Interpolationslagen zu bestimmen, sind z.B. das Geradenkriterium und die Chung-Yao-Lage (siehe [17]). Für trivariate Polynome lassen sich ebenfalls Kriterien, wie das Hyperebenenkriterium angeben. Die nächste Aussage zeigt, dass die Domain-Points vom Grad q bezüglich eines Tetraeders T eine Lagrange-Interpolationsmenge für den Raum der trivariaten Polynome vom Grad q bilden.

Satz 2.16 (Interpolation an Domain-Points)

Seien $T \subset \mathbb{R}^3$ ein Tetraeder und $\mathcal{D}_{q,T}$ die Domain-Points vom Grad q bezüglich T . Dann besitzt das Interpolationsproblem

$$p \in \mathcal{P}_q : p(\xi) = \eta_\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}_{q,T},$$

für alle $\eta_\xi \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung, d.h. $\mathcal{D}_{q,T}$ ist eine Lagrange-Interpolationsmenge für den Raum \mathcal{P}_q .

Es ist bisher jedoch lediglich für den Raum der trivariaten linearen Polynome gelungen eine vollständige Charakterisierung der Lagrange-Interpolationsmengen anzugeben.

Korollar 2.17 (Interpolation mit linearen Polynomen)

Vier Punkte $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{R}^3$ bilden genau dann eine Lagrange-Interpolationsmenge für den Raum \mathcal{P}_1 , wenn sie die Eckpunkte eines nicht degenerierten Tetraeders bilden, d.h. wenn nicht alle Punkte in einer Ebene liegen.

2.3. Trivariate Splines

In diesem Abschnitt definieren wir den trivariaten Splineraum und führen einige wichtige Notationen und Begriffe ein, die Splines auf Tetraeder-Partitionen betreffen. Wir erläutern die Begriffe der bestimmenden und minimal bestimmenden Mengen eines Splineraums und diskutieren die Schwierigkeiten, die bei der Bestimmung der Dimension differenzierbarer Splineräume auftreten.

Trivariate Splines sind stückweise Polynome, die auf den Tetraedern einer Tetraeder-Partition definiert sind. Wir geben zunächst die Definition einer Tetraeder-Partition sowie damit zusammenhängende Begriffe und Notationen an. Dabei verwenden wir wie in [56] die in der trivariaten Splinetherorie gebräuchliche Schreibweise.

Definition 2.18 (Tetraeder-Partition)

Sei Ω eine einfach zusammenhängende, polyederförmige Teilmenge des \mathbb{R}^3 zerlegt in Tetraeder $T_i \subset \Omega$, $i = 1, \dots, N$, so dass für den Durchschnitt zweier verschiedener Tetraeder gilt:

$$T_i \cap T_j = \begin{cases} \emptyset, \\ \text{gemeinsamer Eckpunkt,} \\ \text{gemeinsame Kante,} \\ \text{gemeinsame Dreiecksfläche,} \end{cases} \quad \text{für } i \neq j.$$

Dann heißt $\Delta = \{T_1, \dots, T_N\}$ eine Tetraeder-Partition von Ω .

Besitzen zwei Tetraeder in Δ eine gemeinsame Kante oder einen gemeinsamen Eckpunkt, so sagen wir, sie berühren einander; besitzen sie eine gemeinsame Dreiecksfläche, so nennen wir sie benachbart.

Bezüglich einer Tetraeder-Partition Δ bezeichnen wir mit

V_I, V_B, V	„Die Menge der inneren, äußeren bzw. aller Knoten von Δ “,
E_I, E_B, E	„Die Menge der inneren, äußeren bzw. aller Kanten von Δ “,
F_I, F_B, F	„Die Menge der inneren, äußeren bzw. aller Flächen von Δ “,
N	„Die Menge der Tetraeder von Δ “.

Seien $v \in V$ ein Knoten in Δ und $T_\nu = [v, v_1^\nu, v_2^\nu, v_3^\nu]$, $\nu = 1, \dots, n$, alle Tetraeder in Δ mit gemeinsamem Eckpunkt v . Dann bezeichnen wir für $m \in \{0, \dots, q\}$ mit

$$\mathcal{R}^m(v) := \bigcup_{\nu=1}^n \{\xi_{q-m,i,j,k}^{T_\nu} : i + j + k = m\}$$

die Hülle (Shell) mit Radius m um v . Weiter bezeichnen wir für $m \in \{0, \dots, q\}$ mit

$$\mathcal{D}^m(v) := \bigcup_{\mu=0}^m \mathcal{R}^\mu(v)$$

die Kugel (Ball) mit Radius m um v . Schließlich definieren wir noch bezüglich eines Tetraeders $\tilde{T} \in \Delta$ durch

$$\text{star}^0(\tilde{T}) := \tilde{T} \quad \text{und} \quad \text{star}^l(\tilde{T}) := \{T \in \Delta : T \cap \text{star}^{l-1}(\tilde{T}) \neq \emptyset\},$$

für $l \geq 1$, lokale Umgebungen von \tilde{T} .

Wir können nun die Definition des trivariaten Splineraums sowie des trivariaten Supersplineraums angeben.

Definition 2.19 (Spliner Raum)

Sei $\Delta = \{T_1, \dots, T_N\}$ eine Tetraeder-Partition von Ω und $0 \leq r < q$. Dann heißt

$$\mathcal{S}_q^r(\Delta) := \{s \in C^r(\Omega) : s|_T \in \mathcal{P}_q, \forall T \in \Delta\}$$

der Spliner Raum der r -mal stetig differenzierbaren Funktionen vom Grad q .

Werden für $\rho_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, d := \#V$, mit $r \leq \rho_i < q$ zusätzliche Differenzierbarkeitsbedingungen an den Eckpunkten von Δ gefordert, so definiert für $\theta = (\rho_1, \dots, \rho_d)$:

$$\mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta) := \{s \in \mathcal{S}_q^r(\Delta) : s \in C^{\rho_i}(v_i), i = 1 \dots d\} \subseteq \mathcal{S}_q^r(\Delta)$$

den Superspliner Raum vom Grad θ von $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$.

Die Bestimmung der Dimension trivariater Splineräume ist jedoch im Allgemeinen ein sehr komplexes Problem und nur für bestimmte Splineräume bisher gelöst. Ein wichtiges Hilfsmittel die Struktur dieser Räume zu untersuchen sind die sogenannten bestimmenden und minimal bestimmenden Mengen eines Splineraums.

2. Grundlagen

Definition 2.20 (Bestimmende und minimal bestimmende Menge)

Sei $\mathcal{D}_{q,\Delta} := \bigcup_{T \in \Delta} \mathcal{D}_{q,T}$, $q \in \mathbb{N}$, die Menge der Domain-Points der Partition Δ und für $i + j + k + l = q$ und für alle Tetraeder $T \in \Delta$ das lineare Funktional

$$\lambda_{i,j,k,l}^{[T]} : \mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{d.d.} \quad s \mapsto \lambda_{i,j,k,l}^{[T]}(s) = b_{i,j,k,l}^{[T]}$$

gegeben. Dann heißt $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}_{q,\Delta}$ eine bestimmende Menge für $\mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta)$, falls gilt

$$\lambda_\xi(s) = 0, \forall \xi \in \mathcal{M} \quad \implies \quad \lambda_\xi(s) = 0, \forall \xi \in \mathcal{D}_{q,\Delta}.$$

Wir nennen \mathcal{M} eine minimale bestimmende Menge, falls es keine bestimmende Menge mit weniger Elementen gibt; d.h es gilt $\#\mathcal{M} = \dim \mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta)$.

Die Konstruktion minimal bestimmender Mengen ist ein oft verwendetes Verfahren zur Bestimmung der Dimension von Splineräumen. Es kann jedoch lediglich die Dimension des stetigen Splineriums $\mathcal{S}_q^0(\Delta)$ bezüglich einer Tetraeder-Partition Δ direkt angegeben werden, da nach Satz 2.12 die Menge der Domain-Points von Δ eine minimal bestimmende Menge für diesen Raum darstellt.

Korollar 2.21 (Dimension stetiger Splineräume)

Seien Δ eine Tetraeder-Partition und N , F , E und V wie in Definition 2.18. Es gilt für die Dimension des stetigen Splineriums bezüglich Δ :

$$\dim \mathcal{S}_q^0 = \binom{q-1}{3} N + \binom{q-1}{2} F + (q-1)E + V.$$

Wie im bivariaten ist es jedoch auch im trivariaten Fall bisher nicht möglich die Dimension differenzierbarer Splineräume auf allgemeinen Partitionen für beliebige Splinegrade exakt zu bestimmen. Es existieren allerdings, wie die bekannte untere Schranke von Schumaker für die Dimension bivariater Splineräume (siehe [78]), auch ähnliche Ergebnisse für die Dimension trivariater Splineräume (siehe [6] und [5]). Die Schwierigkeiten im Vergleich zu univariaten Splines liegen bei multivariaten Splines u.a. darin, dass eine große Zahl von Differenzierbarkeitsbedingungen gleichzeitig erfüllt sein müssen, wobei jeder Koeffizient eines Splines in der Regel in mehrere solcher Bedingungen involviert ist. Die Bedingungen sind dabei so miteinander verwoben, dass insbesondere bei Splines niedrigen Grades das zugehörige Gleichungssystem oft nur global gelöst werden kann. Erschwerend ist dabei die Tatsache, dass die Geometrie der zugrundeliegenden Partitionen wesentlichen Einfluss auf den Zusammenhang der Differenzierbarkeitsbedingungen hat. Bivariat wird dies schon deutlich beim Fall von C^1 -Splines auf einer Zelle vom Grad vier, bestehend

aus vier Dreiecken mit innerem Knoten v . Liegen alle inneren Kanten dieser Zelle auf zwei Geraden mit Schnittpunkt in v , so nennt man v einen singulären Knoten. Die Anzahl der Freiheitsgrade bzw. die Dimension von C^1 -Splines auf einer Zelle vom Grad vier ist nun, unabhängig vom Grad der Splines, auf einer Zelle mit singulärem inneren Knoten genau um eins größer als auf einer Zelle mit nicht singulärem Knoten. Durch die gleichmäßige Struktur einer Zelle mit singulärem Knoten wird eine der C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen automatisch erfüllt. Für Splines höherer Differenzierbarkeit und insbesondere trivariate Splines gibt es noch zusätzliche geometrische Konstellationen, die solche Auswirkungen haben können und beachtet werden müssen. Für trivariate Splines geben wir nun analog zum bivariaten Fall die Definition eines singulären Knotens an.

Definition 2.22 (Singulärer Knoten)

Sei Δ eine Zelle bestehend aus acht Tetraedern mit innerem Knoten v . Wir nennen v einen singulären Knoten, wenn alle inneren Dreiecksflächen von Δ auf drei Ebenen mit gemeinsamen Schnittpunkt in v liegen.

Auch im Trivariaten entstehen zusätzliche Freiheitsgrade bei C^1 -Splines auf einer Zelle dann, wenn der innere Knoten singulär ist. Dies ist insbesondere bei gleichmäßigen Partitionen von Bedeutung, wie wir in Kapitel 4 sehen werden, da dort solche geometrischen Konstellationen konstruktionsbedingt vermehrt auftreten.

2.4. Approximation und Quasi-Interpolation mit Splines

In diesem Abschnitt geben wir die Definition eines Quasi-Interpolationsoperators für trivariate Splines an und erläutern hinsichtlich eines solchen Operators die Begriffe der Lokalität und Stabilität einer Approximationsmethode. Abschließend geben wir einen kurzen Überblick über die Ergebnisse zur Approximationordnung von multivariaten Splines.

Wir beginnen mit der Definition eines Quasi-Interpolationsoperators. Dabei wählen wir eine allgemeinere Definition als dies in früheren Arbeiten der Fall war, die ohne die Angabe einer bestimmten Basis des Splineraums auskommt. Auch in den folgenden Kapiteln verwenden wir dies, indem wir eine Quasi-Interpolationsmethode durch direkte Bestimmung der Bernstein-Bézier-Koeffizienten eines Splines angeben, ohne

2. Grundlagen

zunächst eine Basis oder die Dimension des entsprechenden Splineraums bestimmen zu müssen.

Definition 2.23 (Quasi-Interpolationsoperator)

Seien Δ eine Tetraeder-Partition, $\mathcal{S}_q^0(\Delta)$ der Raum der stetigen Splines bezüglich Δ , $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ das von Δ überdeckte Gebiet und \mathcal{M} eine endliche Teilmenge von Ω . Wir gehen davon aus, dass die Werte einer stetigen Funktion $f \in C(\Omega)$ an den Punkten von \mathcal{M} bekannt sind, und legen die Bernstein-Bézier-Koeffizienten b_ξ , $\xi \in \mathcal{D}_{q,\Delta}$, eines Splines $s \in \mathcal{S}_q^0(\Delta)$ fest, indem wir fordern

$$b_\xi = \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} a_{\xi,\gamma} f(\gamma), \quad \xi \in \mathcal{D}_{q,\Delta},$$

wobei $a_{\xi,\gamma} \in \mathbb{R}$ und $\sum_{\gamma \in \mathcal{M}} a_{\xi,\gamma} = 1$ für $\xi \in \mathcal{D}_{q,\Delta}$. Dies definiert eine lineare Abbildung

$$Q : C(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}_q^0(\Delta),$$

für die gilt $Q(1) \equiv 1$. Wir nennen Q einen Quasi-Interpolationsoperator für den Raum $\mathcal{S}_q^0(\Delta)$. Existiert ein $l \in \mathbb{N}$, so dass für alle $T \in \Delta$ gilt

$$a_{\xi,\gamma} = 0, \quad \xi \in \mathcal{D}_{q,T} \text{ und } \gamma \notin \text{star}^l(T),$$

so nennen wir Q lokal. Es können also alle Koeffizienten b_ξ des Splines $s_f := Q(f)$ durch Werte von f in einer Umgebung $\Omega_T := \text{star}^l(T)$ des Tetraeders T mit $\xi \in \mathcal{D}_{q,T}$ berechnet werden. Gilt darüberhinaus für alle $T \in \Delta$

$$\|s_f\|_T \leq C_T \|f\|_{\Omega_T},$$

wobei $C_T > 0$ eine absolute Konstante ist, so bezeichnen wir den Operator Q als stabil.

Die so definierten Quasi-Interpolationsoperatoren beschreiben also allgemein ein Approximationsverfahren bezüglich $\mathcal{S}_q^0(\Delta)$. Es können auf diese Weise auch Approximationsverfahren bezüglich differenzierbarer Splineräume $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$, $r < q$, beschrieben werden, wenn durch die Wahl der Gewichte $a_{\xi,\gamma}$ die entsprechenden Differenzierbarkeitsbedingungen der Räume erfüllt werden. Ebenso ist es auch möglich eine Lagrange-Interpolationsmethode durch einen speziellen Quasi-Interpolationsoperator anzugeben. Ist der Quasi-Interpolationsoperator lokal bzw. stabil, so nennen wir auch die dadurch definierte Approximationsmethode lokal bzw. stabil. Untersuchen wir die Approximationseigenschaften einer Quasi-Interpolationsmethode, so müssen im Gegensatz zu Lagrange- und Hermite-Interpolationsmethoden neben

2.4. Approximation und Quasi-Interpolation mit Splines

der Lokalität und Stabilität der Methode auch gewisse Reproduktionseigenschaften nachgewiesen werden, um die Approximationsordnung der resultierenden Splines zu bestimmen. Grob gesprochen kann man sagen, ein lokaler und stabiler Quasi-Interpolationsoperator Q erbt die Approximationsordnung des Polynomraums \mathcal{P}_q , wenn der Operator invariant auf den Elementen dieses Raums ist, d.h. wenn $Q(p) \equiv p$ für alle $p \in \mathcal{P}_q$ gilt.

Abschließend gehen wir noch auf die Approximationsordnung trivariater Splines ein.

Definition 2.24 (Approximationsordnung trivariater Splines)

Seien Δ eine Tetraeder-Partition, h der maximale Außendurchmesser der Tetraeder $T \in \Delta$ und $f \in C^{q+1}(T)$ eine $(q+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion auf Δ . Existiert für $k \in \{1, \dots, q+1\}$ ein Spline $s_f \in \mathcal{S}_q^1(\Delta)$, so dass gilt

$$\|f - s_f\| \leq C_f h^k,$$

wobei $C_f > 0$ nur abhängig von den $(q+1)$ -ten Ableitungen von f sowie den inneren Raum- und Seitenwinkeln von Δ ist, so sagen wir, s_f besitzt die Approximationsordnung k . Gilt $k = q+1$, so sagen wir, s_f besitzt die optimale Approximationsordnung bezüglich $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$.

Es ist leicht ersichtlich, dass die optimale Approximationsordnung eines Splineriums vom Grad q höchstens der Approximationsordnung $q+1$ des Polynomraums gleichen Grades entsprechen kann. Abhängig vom Grad der Splines und der zugrundeliegenden Partition Δ ist es aber auch möglich, dass die optimale Approximationsordnung nicht erreicht werden kann, d.h. für die bestmögliche Approximationsordnung k von Splines aus $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ gilt $k < q+1$. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn auf Δ kein lokaler Lagrange- oder Hermite-Interpolationsspline vom Grad q konstruiert werden kann. Der bekannteste Raum, auf den dies zutrifft, ist der Raum der bivariaten Splines vom Grad vier auf Δ_1 -Triangulierungen (siehe Abschnitt 4.1). Es war bereits früh bekannt, dass die Funktionen dieses Raums keine optimale Approximationsordnung besitzen können (siehe [14] und [32]) und erst vor wenigen Jahren war die explizite Angabe eines lokalen Quasi-Interpolationsoperators möglich, der ohne Veränderungen an der Struktur von Δ_1 die bestmögliche Approximationsordnung vier erreicht (siehe [85]). Dies zeigt auch einen Vorteil der Quasi-Interpolation gegenüber Standard Lagrange- und Hermite-Interpolationsmethoden. Auch auf Partitionen, auf denen keine direkte Konstruktion eines lokalen Interpolationssplines möglich ist, können oft lokale Quasi-Interpolationsmethoden angegeben werden, die

2. Grundlagen

noch gewisse Approximationseigenschaften besitzen. Die Herausforderung ist hier einen Operator zu bestimmen, der eine möglichst hohe Approximationsordnung besitzt und eine effiziente Berechnung der Splines erlaubt.

3. Univariate Quasi-Interpolation

In diesem Kapitel geben wir eine Familie univariater quadratischer Quasi-Interpolationsoperatoren an und untersuchen ihre Eigenschaften zur Approximation gleichverteilter Daten an den Knoten einer gleichmäßigen Intervall-Partition Δ_n . Wir verwenden dabei eine neue Art der Definition der Operatoren, wie in Abschnitt 2.3 beschrieben. Ein wesentlicher Unterschied zu bekannten Operatoren (siehe [65] und [85]) ist dabei, dass die Datenpunkte nicht durch absolute Koordinaten beschrieben werden. Statt dessen wird für jeden Koeffizienten b_ξ eines Splines $s \in \mathcal{S}_2^0(\Delta_n)$ in seiner stückweisen Bernstein-Bézier-Darstellung eine individuelle Datenpunktordnung erzeugt, die auf steigenden Distanzen zum Domain-Point ξ basiert. Diese lokale und richtungsunabhängige Beschreibung der Datenpunkte ermöglicht es, mit einfachen Formeln die Berechnung der Koeffizienten direkt anzugeben. Insbesondere bei der Bestimmung der Reproduktionseigenschaften der Operatoren ist diese Darstellung ebenfalls von Vorteil. Diese neue Technik wird vor allem in Kapitel 6 von großer Bedeutung sein, da eine Beschreibung der Datenpunkte über absolute Koordinaten im trivariaten Raum mit großen Schwierigkeiten verbunden ist (siehe [84]). Im Vergleich zu bekannten, die B-Spline Basis verwendenden Quasi-Interpolationsoperatoren (siehe [33]) besitzen die hier präsentierten Operatoren vergleichbar gute Approximationseigenschaften, da die optimale Approximationsordnung für quadratische Splines erreicht werden kann. Darüber hinaus können alle in Abschnitt 2.3 beschriebenen Methoden zur effizienten Berechnung und Repräsentation der Splines genutzt werden.

Im ersten Abschnitt definieren wir den Raum der univariaten Splines und beschreiben die auftretenden C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen. Der folgende Abschnitt enthält dann die Definition der Quasi-Interpolationsoperatoren sowie die Erläuterung der Datenpunktordnungen. Im dritten Abschnitt werden einige wichtige Eigenschaften der Operatoren nachgewiesen. Der letzte Abschnitt enthält schließlich die Aussagen zur Approximationsordnung der Operatoren.

3.1. Der univariate Splineraum

In diesem Abschnitt definieren wir zunächst einen speziellen univariaten Splineraum bezüglich gleichmäßiger Intervalle. Wir geben eine vollständige Beschreibung der Differenzierbarkeitsbedingungen sowie eine bestimmende Menge für diesen Raum an.

Seien $\Omega = [0, 1]$ und für $n \in \mathbb{N}$ Knoten $x_i := \frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, n$, gegeben. Wir definieren Intervalle $T_i := [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, und nennen $\Delta_n := \bigcup_{i=1}^n T_i$ die gleichmäßige Intervall-Partition des Gebiets Ω in n Teil-Intervalle. Im Folgenden untersuchen wir den Raum der univariaten quadratischen Splines bezüglich Δ_n , definiert durch

$$\mathcal{S}_2^1(\Delta_n) := \{s \in C^1[\Omega] : s|_T \in \Pi_2, \forall T \in \Delta_n\},$$

wobei $\Pi_2 = \text{span}\{1, x, x^2\}$ den Raum der univariaten quadratischen Polynome bezeichnet. Sei $s \in \mathcal{S}_2^1(\Delta_n)$ der Raum der stückweisen Polynome vom Grad zwei und $p_j := s|_{T_j}$, $j = 1, \dots, n$, gegeben in seiner Bernstein-Bézier-Darstellung bezüglich T_j :

$$p_j = \sum_{i=0}^2 b_{2-i,i}^{T_j} B_{2-i,i}^{T_j}.$$

Hier bezeichnen $b_{2-i,i}^{T_j}$, $i = 0, 1, 2$, die Bernstein-Bézier-Koeffizienten und $B_{2-i,i}^{T_j}$, $i = 0, 1, 2$, die univariaten Bernstein-Polynome vom Grad 2 bezüglich dem Intervall T_j . Es gilt $s \in \mathcal{S}_2^0(\Delta_n)$ genau dann, wenn

$$b_{0,2}^{T_j} = b_{2,0}^{T_{j+1}}, \quad \text{für } j = 1, \dots, (n-1).$$

Weiter ist ein Spline $s \in \mathcal{S}_2^0(\Delta_n)$ genau dann stetig differenzierbar in allen Knoten x_j , $j = 1, \dots, (n-1)$, d.h. $s \in \mathcal{S}_2^1(\Delta_n)$, wenn gilt

$$b_{1,1}^{T_j} = 2b_{2,0}^{T_{j+1}} - b_{1,1}^{T_{j+1}}, \quad \text{für } j = 1, \dots, (n-1). \quad (3.1)$$

Wir können nun direkt eine bestimmende Menge (siehe Definition 2.20) für den Raum $\mathcal{S}_2^1(\Delta_n)$ angeben.

Lemma 3.1 (Bestimmende Menge)

Die Menge $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}_{\Delta_n}$, definiert durch $\mathcal{M} = \{\xi_{1,1}^{T_j} \in \mathcal{D}_{T_j} : j = 1, \dots, n\} \cup \{0, 1\}$, ist eine bestimmende Menge für den Raum $\mathcal{S}_2^1(\Delta_n)$.

Beweis: Sei $s \in \mathcal{S}_2^1(\Delta_n)$ mit $b_\xi = 0$, für alle $\xi \in \mathcal{M}$. Aus den Differenzierbarkeitsbedingungen (3.1) folgt nun direkt, dass auch $b_{0,2}^{T_j} = b_{2,0}^{T_{j+1}} = 0$ für $j = 1, \dots, (n-1)$. Also folgt, dass $b_\xi = 0$, für alle $\xi \in \mathcal{D}_{\Delta_n}$, und damit $s \equiv 0$. □

Es ist wohl bekannt, dass dies auch eine minimal bestimmende Menge für den Raum $\mathcal{S}_2^1(\Delta_n)$ darstellt (siehe [62]) und somit gilt $\dim \mathcal{S}_2^1(\Delta_n) = \#\mathcal{M} = n + 2$.

3.2. Definition der Quasi-Interpolanten

In diesem Abschnitt beschreiben wir eine Familie von univariaten Quasi-Interpolanten zur Approximation von Datenwerten an den Knotenpunkten von Δ_n . Wir geben dazu explizit an, wie die Bernstein-Bézier-Koeffizienten eines Splines $s \in \mathcal{S}_2^0(\Delta_n)$ aus lokalen Datenwerten berechnet werden. Für jeden Koeffizienten wird dabei eine spezielle Ordnung der Datenpunkte erzeugt. Abschließend zeigen wir, dass die resultierenden Splines alle Differenzierbarkeitsbedingungen (3.1) aus Abschnitt 3.1 erfüllen.

Sei Δ_n eine gleichmäßige Intervall-Partition von $\Omega = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ in n Teil-Intervalle, wie in Abschnitt 3.1 beschrieben und $f \in C(\Omega^*)$, wobei $\Omega^* = [-\frac{2}{n}, \frac{n+2}{n}]$. Wir nehmen an, dass die Werte von f an den Punkten $\mathcal{V} := \{x_i = \frac{i}{n} : i = -2, \dots, (n+2)\}$, gegeben sind und definieren Quasi-Interpolationsoperatoren $Q : C(\Omega^*) \rightarrow \mathcal{S}_2^0(\Delta_n)$, indem wir die Berechnung der Bernstein-Bézier-Koeffizienten von $s_f := Q(f)$ aus den Datenwerten in \mathcal{V} angeben. Wir verwenden dabei zur Berechnung eines Koeffizienten b_ξ , wobei $\xi \in T$ und $T \in \Delta_n$, lediglich Daten, die in der Nähe von ξ liegen. Dazu ordnen wir zunächst die Datenpunkte $z \in \mathcal{V}$ nach aufsteigenden Distanzen zu ξ , d.h. wir bezeichnen die $(n+5)$ Punkte von \mathcal{V} mit z_0, \dots, z_{n+4} , so dass gilt $|\xi - z_0| = \min_{z \in \mathcal{V}} |\xi - z|$ und $|\xi - z_i| \leq |\xi - z_j|$ für $i < j$. Bei gleichen Distanzen zum Punkt ξ kann die Bezeichnung beliebig gewählt werden. Die zugehörigen Datenwerte bezeichnen wir mit $A_i := f(z_i)$, $i = 0, \dots, (n+4)$. Auf diese Weise erhält jeder Domain-Point ξ und damit auch jeder Koeffizient b_ξ eine individuelle Datenpunktordnung. Abbildung 3.1 zeigt zwei typische Datenpunktordnungen für bestimmte Koeffizienten, die dabei auftreten. Es ist nun möglich die Berechnung eines Koeffizienten b_ξ , $\xi \in T$, in der folgenden Form anzugeben:

$$b_\xi = \sum_{i=0, \dots, 5} w_i A_i,$$

wobei $w_i \in \mathbb{R}$ und $\sum_{i=0}^5 w_i = 1$. Zur Berechnung eines Koeffizienten b_ξ , $\xi \in T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$, werden also höchstens 6 Datenwerte benötigt. Der resultierende Spline ist somit lokal, da $s|_T$ lediglich durch die Werte von f in einer Umgebung von T , $U(T) := \text{star}^2(T)$, beeinflusst wird.

3. Univariate Quasi-Interpolation

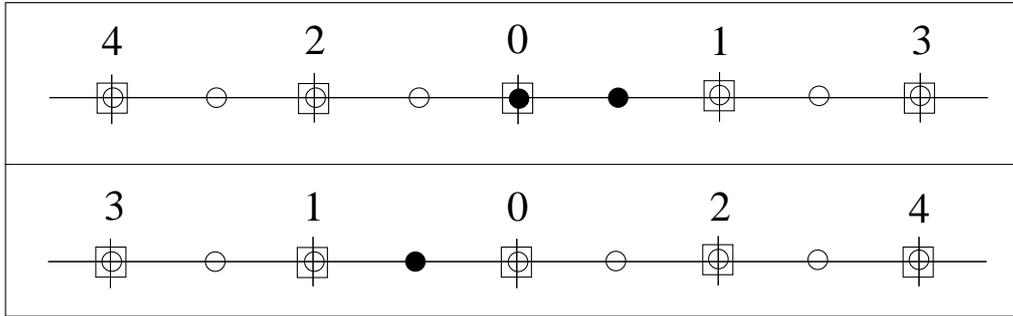


Abbildung 3.1.: Dargestellt sind zwei typische Datenpunktordnungen. Die Datenpunkte werden durch Quadrate dargestellt und die Domain-Points von Δ_n durch Kreise. Für die Domain-Points ξ_{20} und ξ_{11} auf einem Intervall \tilde{T} (markiert durch schwarze Kreise oben) kann die gleiche Datenpunktordnung gewählt werden. Eine weitere Möglichkeit der Ordnung der Datenpunkte für den Koeffizienten ξ_{11} in einem benachbarten Intervall T wird unten dargestellt.

Wir geben nun explizit die Berechnung der Bernstein-Bézier-Koeffizienten für eine Familie von Quasi-Interpolationsoperatoren $Q_k : C(\Omega^*) \rightarrow \mathcal{S}_2^0(\Delta_n)$, $k \geq 1$, an. Der Parameter k beeinflusst dabei die Gewichte w_i , mit denen die Datenwerte A_i in die Berechnung eingehen. Seien $s \in \mathcal{S}_2^0(\Delta_n)$, $T \in \Delta_n$ und b_{20}, b_{11}, b_{02} , die Bernstein-Bézier-Koeffizienten von $s|_T$. Die Berechnung der Koeffizienten ist wie folgt:

$$\begin{aligned}
 b_{20} &:= \frac{1}{k} 2^{-3} (2 (k+3) A_0 + 2k (A_1 + A_2) + (k-3) (A_3 + A_4)) \\
 b_{11} &:= \frac{1}{k} 2^{-2} ((k+3) (A_0 + A_1) + (k-3) (A_2 + A_3)) \\
 b_{02} &:= \frac{1}{k} 2^{-3} (2 (k+3) A_0 + 2k (A_1 + A_2) + (k-3) (A_3 + A_4))
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Durch die identische Berechnung von b_{20} und b_{02} ist der resultierende Spline $s_f = Q_k(f)$ automatisch stetig und die Quasi-Interpolationsoperatoren $Q_k : C(\Omega^*) \rightarrow \mathcal{S}_2^0(\Delta_n)$, $k \geq 1$, somit wohldefiniert. Das nächste wichtige Resultat wird zeigen, dass die Gewichte so gewählt sind, dass auch alle C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen erfüllt werden, d.h. es gilt $s_f \in \mathcal{S}_2^1(\Delta_n)$.

Satz 3.2 (C^1 -Differenzierbarkeit)

Die Quasi-Interpolationsoperatoren $Q_k : C(\Omega^*) \rightarrow \mathcal{S}_2^0(\Delta_n)$, $k \geq 1$, sind lineare Abbildungen in den Raum $\mathcal{S}_2^1(\Delta_n)$.

Beweis: Wir zeigen, dass die in (3.2) definierten Bernstein-Bézier-Koeffizienten der Splines $s_f := Q_k(f)$, $k \geq 1$, alle C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen (3.1) an

3.3. Eigenschaften der Quasi-Interpolanten

den Knoten x_i , $i = 1, \dots, (n - 1)$, erfüllen. Seien $i \in \{1, \dots, (n - 1)\}$, $T = [x_{i-1}, x_i]$ und $\tilde{T} = [x_i, x_{i+1}]$ zwei benachbarte Intervalle mit gemeinsamen Knoten x_i und b_ξ , $\xi \in \mathcal{D}_T$, bzw. \tilde{b}_ξ , $\xi \in \mathcal{D}_{\tilde{T}}$ die Bernstein-Bézier-Koeffizienten von s_f auf T bzw. \tilde{T} . Der Spline s_f ist differenzierbar in x_i , wenn gilt

$$b_{1,1}^T = 2b_{2,0}^{\tilde{T}} - b_{1,1}^{\tilde{T}}.$$

Wir verwenden im Folgenden die Ordnung der Datenpunkte für zwei benachbarte Intervalle T und \tilde{T} , wie in Abbildung 3.1 dargestellt. Da die Koeffizienten $b_{2,0}^{\tilde{T}}$ und $b_{1,1}^{\tilde{T}}$ die gleiche Datenpunktordnung besitzen, können wir direkt (3.2) auf der rechten Seite verwenden und erhalten

$$2b_{2,0}^{\tilde{T}} - b_{1,1}^{\tilde{T}} = \frac{1}{k} 2^{-2} ((k + 3) A_0 + (k - 3) A_1 + (k + 3) A_2 + (k - 3) A_4).$$

Da die Datenpunkte von $b_{1,1}^T$ eine andere Ordnung besitzen, bezeichnen wir die zugehörigen Datenwerte mit $\hat{A}_0, \dots, \hat{A}_4$ und erhalten

$$b_{1,1}^T = \frac{1}{k} 2^{-2} ((k + 3) (\hat{A}_0 + \hat{A}_1) + (k - 3) (\hat{A}_2 + \hat{A}_3)).$$

Vergleichen wir die beiden Ordnungen, so ergibt sich der folgende Zusammenhang:

$$\hat{A}_0 = A_0, \quad \hat{A}_1 = A_2, \quad \hat{A}_2 = A_1, \quad \hat{A}_3 = A_4, \quad \hat{A}_4 = A_3.$$

Einsetzen in die obigen Formeln ergibt nun, dass die Bedingung (3.1) erfüllt ist und der Beweis ist vollständig. □

3.3. Eigenschaften der Quasi-Interpolanten

Wir geben in diesem Abschnitt einige wichtige Eigenschaften der Quasi-Interpolanten an. Dazu machen wir Aussagen zur Positivität, Beschränktheit und zu Reproduktionseigenschaften bestimmter Operatoren. Insbesondere die Reproduktionseigenschaften werden eine wichtige Rolle zur Bestimmung der Approximationseigenschaften im nächsten Abschnitt spielen.

Zunächst geben wir an, für welche Parameterwerte von k die im vorherigen Abschnitt definierten Operatoren Q_k positiv sind.

Korollar 3.3 (Positivität)

Der Quasi-Interpolationsoperator $Q_k : C(\Omega^*) \rightarrow \mathcal{S}_2^1(\Delta_n)$ ist positiv für $k \geq 3$.

3. Univariate Quasi-Interpolation

Beweis: Für Werte $k \geq 3$ treten in der Berechnung der Bernstein-Bézier-Koeffizienten in (3.2) nur positive Gewichte auf. Nehmen wir nun an, dass alle Datenwerte von einer positiven Funktion $f \in C(\Omega^*)$ stammen, so sind auch alle Koeffizienten von $s_f := Q_k(f)$, $k \geq 3$, positiv. Auf Grund der Positivität der Bernstein-Polynome (siehe Satz 2.9(i)) ist also auch s_f positiv. Sei nun $f \equiv 0$, so folgt direkt $b_\xi = 0$, für alle $\xi \in \mathcal{D}_{\Delta_n}$, und damit $s_f \equiv 0$. □

Das nächste Resultat zeigt, dass alle Operatoren Q_k , $k \geq 1$, beschränkt sind. Dies ist eine wichtige Eigenschaft, da hierdurch garantiert wird, dass die Berechnung der Splines $s_f = Q_k(f)$ stabil ist. Hier, wie auch im folgenden Abschnitt verwenden wir die Maximumnorm

$$\|f\|_\Gamma := \max_{x \in \Gamma} |f(x)|,$$

wobei Γ ein abgeschlossenes reelles Intervall ist und f eine stetige Funktion auf Γ .

Lemma 3.4 (Beschränktheit)

Seien $f \in C(\Omega^*)$ und $T = [v_0, v_1] \in \Delta_n$, dann gilt für $k \geq 1$

$$\|Q_k(f)\|_T \leq \frac{k+2}{k} \|f\|_{\Omega_T},$$

wobei $\Omega_T = [v_0 - \frac{2}{n}, v_1 + \frac{2}{n}]$.

Beweis: In Ω_T sind alle benötigten Datenwerte für die Berechnung von b_ξ , $\xi \in \mathcal{D}_T$, enthalten (siehe (3.2)). Wir erhalten

$$|b_{20}| \leq \frac{k+1}{k} \|f\|_{\Omega_T}, \quad |b_{11}| \leq \frac{k+2}{k} \|f\|_{\Omega_T} \quad \text{und} \quad |b_{02}| \leq \frac{k+1}{k} \|f\|_{\Omega_T}.$$

Es gilt also $|b_\xi| \leq \frac{k+2}{k} \|f\|_{\Omega_T}$, $\xi \in \mathcal{D}_T$. Da die Bernstein-Polynome auf T positiv sind und sich zu eins summieren (siehe Abschnitt 2.1), gilt damit

$$\|Q_k(f)\|_T \leq \frac{k+2}{k} \|f\|_{\Omega_T}, \quad k \geq 1. \quad \square$$

Im nächsten Lemma geben wir wichtige Reproduktionseigenschaften der Operatoren Q_k , $k \geq 1$, an. Diese Eigenschaften sind notwendige Voraussetzungen für die Bestimmung der Approximationsordnung im nächsten Abschnitt. Insbesondere die Reproduktion quadratischer Polynome des Operators Q_2 ermöglicht die optimale Approximationsordnung für diesen Operator.

Lemma 3.5 (Reproduktionseigenschaften)

Es gelten die folgenden Reproduktionseigenschaften:

- (i) $Q_k(1) \equiv 1, k \geq 1$
- (ii) $Q_k(p) \equiv p, k \geq 1, \forall p \in \Pi_1$
- (iii) $Q_2(p) \equiv p, \forall p \in \Pi_2$

Beweis: (i) Sind alle Datenwerte in den Formeln (3.2) gleich 1, so sind auch alle Bernstein-Bézier-Koeffizienten der Splines $s_f = Q_k(f), k \geq 1$, gleich 1. Mit Satz 2.10(i) folgt dann direkt auch, dass $s_f \equiv 1$ gilt.

(ii) Wir zeigen hier, zusätzlich zu (i), dass die Operatoren $Q_k, k \geq 1$, auch das lineare Polynom $\{x\}$ reproduzieren. Da wir in Lemma 3.1 bereits eine bestimmende Menge \mathcal{M} für den Raum $\mathcal{S}_2^1(\Delta_n)$ bestimmt haben, reicht es hier die Reproduktion für die Koeffizienten $b_\xi, \xi \in \mathcal{M}$, nachzuweisen. Durch die Linearität der Quasi-Interpolationsoperatoren und der Polynome $p \in \Pi_1$ ist die Reproduktion unabhängig von der Wahl des Ursprungs. Die Koeffizienten b_{20} und b_{02} müssen dabei nicht gesondert betrachtet werden, da sie nur am Rand von Ω in \mathcal{M} enthalten sind. Es reicht also die Reproduktion lediglich für den Koeffizienten b_{11}^T auf einem beliebigen Intervall $T \in \Delta_n$ nachzuweisen. Sei nun $T = [0, h]$, wobei $h = \frac{1}{n}$, und $p(x) = x$ gegeben in seiner Bernstein-Bézier-Darstellung bezüglich T mit den Koeffizienten $b_\xi^{[p]}, \xi \in \mathcal{D}_T$. Der Koeffizient $b_{11}^{[p]}$ läßt sich dann wie folgt berechnen:

$$b_{11}^{[p]} = 2p\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{2}(p(0) + p(h)) = \frac{h}{2}.$$

Verwenden wir nun eine Ordnung der Datenpunkte nach aufsteigenden Distanzen für den Koeffizienten b_{11} , so erhalten wir die Datenwerte

$$A_0 = 0, \quad A_1 = h, \quad A_2 = -h \quad \text{und} \quad A_3 = 2h.$$

Setzen wir dies in die Formel für den Koeffizienten b_{11} in (3.2) ein, so ergibt sich

$$b_{11} = \frac{1}{k} 2^{-2} ((k+3) h + (k-3) h) = \frac{h}{2} = b_{11}^{[p]}.$$

(iii) Auf Grund der Linearität des Quasi-Interpolationsoperatoren Q_2 und der Polynome $p \in \Pi_2$ genügt es hier wieder die Reproduktion lediglich für das Polynom $\{x^2\}$ und den Koeffizienten b_{11} auf dem Intervall $T = [0, h]$ nachzuweisen. Sei nun $p(x) = x^2$ gegeben in seiner Bernstein-Bézier-Darstellung bezüglich T mit den Koeffizienten $b_\xi^{[p]}, \xi \in \mathcal{D}_T$. Für den Koeffizienten $b_{11}^{[p]}$ ergibt sich dann

$$b_{11}^{[p]} = 2 p\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{2} (p(0) + p(h)) = 0.$$

3. Univariate Quasi-Interpolation

Die Berechnung des Koeffizienten b_{11} mit (3.2) ergibt ebenfalls

$$b_{11} = \frac{1}{k} 2^{-2} (5 h^2 - 5 h^2) = 0$$

und der Beweis ist vollständig. □

3.4. Approximationseigenschaften

In diesem Abschnitt geben wir die Approximationseigenschaften der in Abschnitt 3.2 definierten Quasi-Interpolationsoperatoren $Q_k : C(\Omega^*) \rightarrow \mathcal{S}_2^1(\Delta_n)$, $k \geq 1$, an. In Satz 3.6 zeigen wir, dass alle Operatoren mindestens die Approximationsordnung 2 besitzen. Die optimale Approximationsordnung des Operators Q_2 für Werte und Ableitungen differenzierbarer Funktionen zeigen wir in Satz 3.7. Wir verwenden dabei die Maximumnorm und bezeichnen mit $h = \frac{1}{n}$ die Intervallgröße von Δ_n .

Satz 3.6 (Approximationsordnung von Q_k)

Für $f \in C^2(\Omega^*)$ und den Quasi-Interpolationsoperator $Q_k(f)$, $k \geq 1$, gilt:

$$\|f - Q_k(f)\|_{\Omega} \leq C_k \|D^2(f)\|_{\Omega^*} h^2,$$

wobei $C_k > 0$ eine absolute Konstante unabhängig von f und h ist.

Beweis: Seien $f \in C^2(\Omega^*)$, $T = [v_0, v_1] \in \Delta_n$, Ω_T wie in Lemma 3.4 und $p_f \in \Pi_1$ das lineare Taylor-Polynom von f in $\frac{v_0+v_1}{2}$. Dann existiert eine absolute Konstante $C_T > 0$ unabhängig von f und h , so dass gilt

$$\|f - p_f\|_{\Omega_T} \leq C_T \|D^2(f)\|_{\Omega_T} h^2.$$

Verwenden wir nun die Dreiecksungleichung für $\|f - Q_k(f)\|_T$, $k \geq 1$, so erhalten wir

$$\|f - Q_k(f)\|_T \leq \|f - p_f\|_{\Omega_T} + \|Q_k(f) - p_f\|_T.$$

Mit Lemma 3.5(ii), der Linearität von Q_k und Lemma 3.4 ergibt sich

$$\|Q_k(f) - p_f\|_T = \|Q_k(f - p_f)\|_T \leq \frac{k+2}{k} \|f - p_f\|_{\Omega_T}.$$

Die Kombination dieser Ungleichungen führt zu

$$\|f - Q_k(f)\|_T \leq C_k \|D^2(f)\|_{\Omega_T} h^2,$$

wobei $C_k = (1 + \frac{k+2}{k})C_T$ eine absolute Konstante unabhängig von f und h ist. □

Satz 3.7 (Approximationsordnung von Q_2)

Für $f \in C^3(\Omega^*)$ und den Quasi-Interpolationsoperator $Q_2(f)$ gilt:

$$\|D^r(f - Q_2(f))\|_{\Omega} \leq \tilde{C}_r \|D^3(f)\|_{\Omega^*} h^{3-r}, \quad r = 0, 1, 2$$

wobei $\tilde{C}_r > 0$, $r = 0, 1, 2$, absolute Konstanten unabhängig von f und h sind.

Beweis: Seien $f \in C^3(\Omega^*)$, $T = [v_0, v_1] \in \Delta_n$, Ω_T wie in Lemma 3.4 und $p_f \in \Pi_2$ das quadratische Taylor-Polynom von f in $\frac{v_0+v_1}{2}$. Dann existieren absolute Konstanten $C_{r,T} > 0$ unabhängig von f und h , so dass gilt

$$\|D^r(f - p_f)\|_{\Omega_T} \leq \tilde{C}_{r,T} \|D^3(f)\|_{\Omega_T} h^{3-r}, \quad r = 0, 1, 2.$$

Mit der Dreiecksungleichung angewandt auf $\|f - Q_2(f)\|_T$ erhalten wir weiter

$$\|D^r(f - Q_2(f))\|_T \leq \|D^r(f - p_f)\|_{\Omega_T} + \|D^r(Q_2(f) - p_f)\|_T, \quad r = 0, 1, 2,$$

und mit Lemma 3.5 und der Linearität von Q_2 ergibt sich für $r = 0, 1, 2$,

$$\|D^r(Q_2(f) - p_f)\|_T = \|D^r(Q_2(f - p_f))\|_T.$$

Verwenden wir nun die Markov-Ungleichung sowie Lemma 3.4 für $k = 2$, so erhalten wir

$$\|D^r(Q_2(f - p_f))\|_T \leq \frac{\tilde{C}_{r,M}}{h^r} \|Q_2(f - p_f)\|_T \leq \frac{\tilde{C}_{r,M}}{h^r} 2 \|f - p_f\|_{\Omega_T}, \quad r = 1, 2,$$

wobei $\tilde{C}_{r,M} > 0$ absolute Konstanten unabhängig von f und h sind. Zusammen erhalten wir

$$\|D^r(f - Q_2(f))\|_T \leq \tilde{C}_r \|D^3(f)\|_{\Omega_T} h^{3-r}, \quad r = 0, 1, 2,$$

wobei $\tilde{C}_0 = 3C_{0,T}$ und $\tilde{C}_r = (1 + 2\tilde{C}_{r,M})\tilde{C}_{r,T}$, $r = 1, 2$, absolute Konstanten unabhängig von f und h sind.

□

4. Splines auf gleichmäßigen Partitionen

In diesem Kapitel untersuchen wir Splines auf gleichmäßigen Partitionen. Wir führen dazu eine allgemeine Beschreibung gleichmäßiger Partitionen ein, mit der fast alle bisher in der multivariaten Splinetheorie untersuchten gleichmäßigen Triangulierungen und Tetraeder-Partitionen sowie multivariaten Makro-Elemente beschrieben werden können. In Abschnitt 4.1 untersuchen wir gleichmäßige Partitionen der reellen Ebene und in Abschnitt 4.2 untersuchen wir gleichmäßige Partitionen des Raums. In Abschnitt 4.3 zeigen wir, wie die Ergebnisse der beiden vorherigen Abschnitte auf gleichmäßige Partitionen des \mathbb{R}^n verallgemeinert werden können. Abschließend beschäftigen wir uns mit der Frage, wie Splines auf unterschiedlichen gleichmäßigen Partitionen im Hinblick auf Freiheitsgrade bewertet und miteinander verglichen werden können. Dazu führen wir in Abschnitt 4.4 die charakteristische Zahl eines Splineräums ein, mit der ein direkter Vergleich von Splines auf gleichmäßigen Partitionen ermöglicht wird. Wir erläutern welche Bedeutung diese Zahl für multivariate Splines und die Konstruktion lokaler Spline-Approximanten besitzt und vergleichen die charakteristischen Zahlen oft verwendeter bivariater und trivariater Splineräume.

4.1. Bivariate Partitionen

In diesem Abschnitt untersuchen wir gleichmäßige Partitionen der reellen Ebene. Dazu geben wir einige grundlegende Definitionen und wichtige Ergebnisse aus der euklidischen und axiomatischen Geometrie an (siehe u.a. [22] und [46]). Wir diskutieren Methoden zur Approximation mit Splines auf diesen Partitionen und gehen dabei näher auf Makro-Element-Methoden ein. Mit der Definition spezieller gleichmäßiger Splits, die wir als Stern- oder Star-Splits bezeichnen, erhalten wir schließlich die Möglichkeit den Großteil der existierenden Makro-Elemente sowie auch zahlreiche gleichmäßige Partitionen allgemein zu beschreiben.

Wir geben zunächst an, was man unter den regulären Körpern der Ebene versteht.

4. Splines auf gleichmäßigen Partitionen

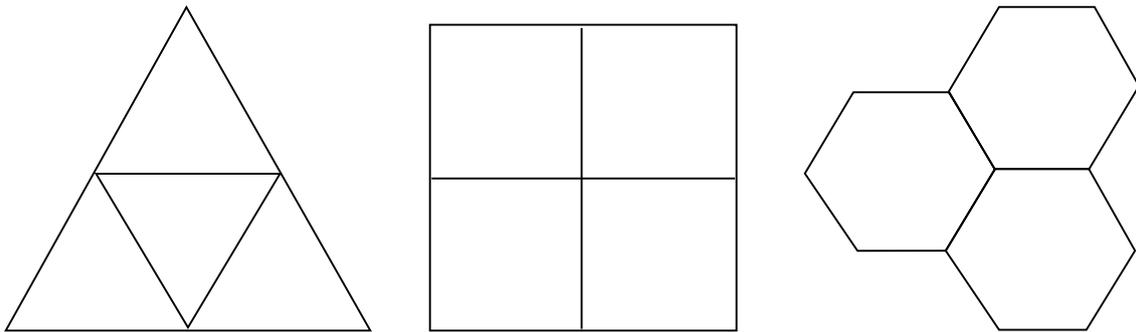


Abbildung 4.1.: Die drei gleichmäßigen Partitionen der Ebene (Parkettierungen) ausschnittsweise dargestellt. Links: die gleichmäßige Dreiecks-Partition, in der Mitte: die gleichmäßige Vierecks-Partition und rechts: die gleichmäßige Hexagon-Partition.

Definition 4.1 (Reguläres Polygon)

Sei $P = [v_0, \dots, v_n] \subset \mathbb{R}^2$, $n \geq 2$, ein konvexes Vieleck, bzw. ein konvexes Polygon, mit den Eckpunkten v_0, \dots, v_n . Wir nennen P ein **reguläres Polygon**, wenn alle Kanten gleich lang sind und alle Innenwinkel die gleiche Größe besitzen.

Es ist möglich für jede beliebige Anzahl von Eckpunkten (mindestens jedoch drei) ein reguläres Polygon anzugeben, d.h. es existiert eine unendliche Menge an unterschiedlichen regulären Körpern in der Ebene. Im folgenden Abschnitt werden wir sehen, dass diese einfache Klassifikation nicht ohne weiteres in den dreidimensionalen Raum übertragbar ist. Im Gegenteil werden wir feststellen, dass nur eine geringe Anzahl regulärer Körper im \mathbb{R}^3 existiert.

Wir können nun angeben, was es bedeutet, ein ebenes Gebiet in regulärer und gleichmäßiger Art und Weise zu unterteilen.

Definition 4.2 (Reguläre und gleichmäßige Partitionen im \mathbb{R}^2)

Seien $P_i \subset \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, N$, reguläre Polygone und Ω das überdeckte Gebiet im \mathbb{R}^2 . Wenn für alle $i, j \in \{1, \dots, N\}$, $i \neq j$, gilt

$$P_i \cap P_j = \begin{cases} \emptyset, \\ \text{gemeinsamer Eckpunkt,} \\ \text{gemeinsame Kante,} \end{cases}$$

dann nennen wir $\diamond = \{P_1, \dots, P_N\}$ eine **reguläre Partition** von Ω . Sind alle Polygone zu einem regulären Polygon P kongruent, so nennen wir \diamond eine **gleichmäßige P-Partition** von Ω .

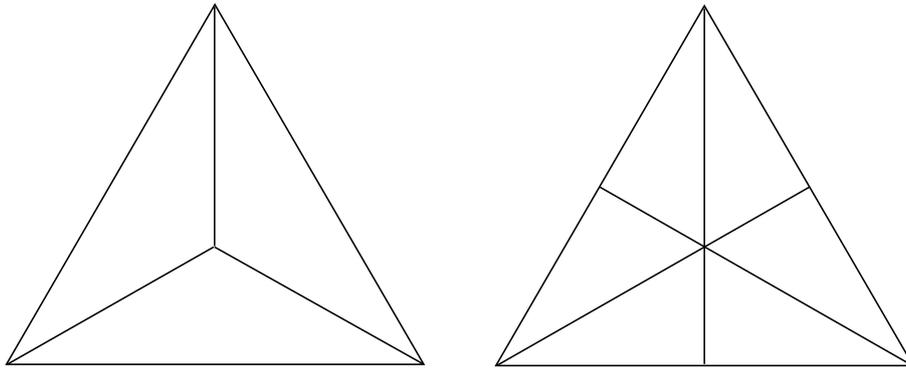


Abbildung 4.2.: Gleichmäßige Triangulierung eines regulären Dreiecks. Links: der bivariate S_1 -Split und rechts: der bivariate S_2 -Split.

Die gleichmäßigen Partitionen der Ebene werden auch Parkettierungen genannt. Es ist bekannt, dass es nur drei Parkettierungen gibt, die auf regulären Polygonen basieren (siehe [40]). Dies sind die gleichmäßige Dreiecks-Partition, die gleichmäßige Vierecks-Partition und die gleichmäßige Hexagon-Partition. Für die Betrachtung von bivariaten Splines ist es jedoch notwendig, diese gleichmäßigen Partitionen in Triangulierungen umzuwandeln. Die nächste Definition stellt zwei Verfahren vor, wie ein beliebiges konvexes Polygon auf möglichst symmetrische Art und Weise in Dreiecke unterteilt werden kann.

Definition 4.3 (Bivariate Splits)

Sei $P = [v_0, \dots, v_n] \subset \mathbb{R}^2$, $n \geq 2$, ein konvexes Polygon mit den Eckpunkten v_0, \dots, v_n . Wir erhalten eine Triangulierung von P in $(n+1)$ Dreiecke, indem wir jeden der Eckpunkte mit dem Schwerpunkt von P verbinden. Wir nennen dies den bivariaten **S_1 -Split** von P . Fügen wir zusätzlich in der Mitte jeder Kante von P einen Knoten ein und verbinden diesen mit dem Schwerpunkt von P , so erhalten wir eine Triangulierung von P in $2(n+1)$ Dreiecke. Dies nennen wir den bivariaten **S_2 -Split** von P . Diese Splits bezeichnen wir auch als Stern- oder Star-Splits eines Dreiecks.

Die Theorie solcher Unterteilungsverfahren wurde in den letzten Jahrzehnten ausgiebig erforscht. Insbesondere im Bereich des Computer Aided Geometric Designs gibt es zahlreiche Ergebnisse aus den Bereichen der Subdivision-Methoden und Mesh Generation Algorithmen (siehe u.a. [11] und [58]). In der Splinetheorie sind diese Splits die Grundlage der Makro-Element-Methoden. Dabei wird jedes Dreieck einer Triangulierung mit einem bestimmten Split weiter unterteilt. Dies ermöglicht die lokale

4. Splines auf gleichmäßigen Partitionen

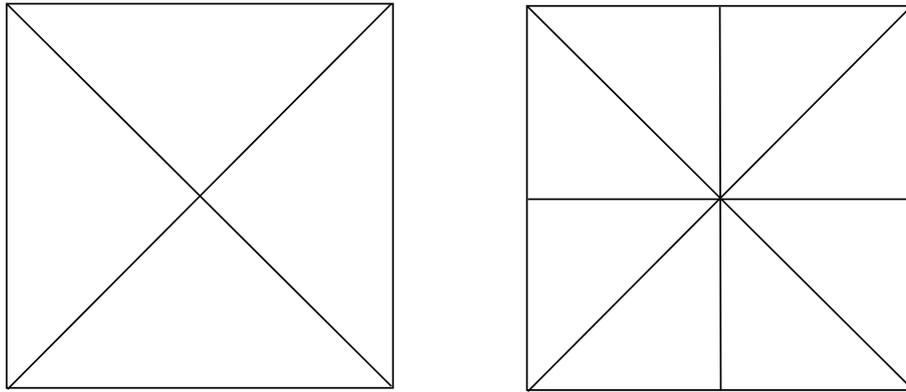


Abbildung 4.3.: Gleichmäßige Triangulierung eines Quadrates. Links: der bivariate S_1 -Split und rechts: der bivariate S_2 -Split.

Konstruktion von Splines eines bestimmten Grades auf den resultierenden Partitionen. Oft können direkt Hermite-Interpolanten angegeben werden, welche die optimale Approximationsordnung erreichen. Für eine umfassende Übersicht siehe [56]. Wir haben eine möglichst allgemeine Beschreibung solcher Splits gewählt, welche unter anderem die bekanntesten Makro-Element-Methoden umfasst. Der S_1 -Split eines Dreiecks ist in der Spline-Literatur als Clough-Tocher-Split bekannt (siehe [3], [19] und [54]) und ermöglicht die lokale Konstruktion von C^1 Spline-Interpolanten vom Grad drei. Auf Triangulierungen, die mit dem S_2 -Split unterteilt sind, bekannt als dem Powell-Sabin-Split eines Dreiecks (siehe [4], [55], [59] und [71]), ist die lokale Konstruktion von C^1 Spline-Interpolanten vom Grad zwei möglich. Die Verwendung des S_1 -Splits auf den Elementen einer gleichmäßigen Vierecks-Partition resultiert in dem sogenannten Four-Directional Mesh, das in der Spline-Literatur als Δ_2 -Triangulierung, Type-2 Triangulation oder Criss-Cross Partition bekannt ist. Der S_2 -Split auf den Elementen einer gleichmäßigen Vierecks-Partition erzeugt eine identische, um 45° gedrehte und auf die Hälfte skalierte Version der gleichen Triangulierung. Auf dieser Partition wurden Methoden zur lokalen Hermite- und Lagrange-Interpolation mit kubischen C^1 -Splines entwickelt, welche die optimale Approximationsordnung erreichen (siehe [25], [50] und [53]). Mit dem Ansatz der Quasi-Interpolation ist hier auch die Konstruktion lokaler quadratischer Spline-Approximanten mit optimaler Approximationsordnung möglich (siehe [83]). Die Verwendung des S_1 -Splits auf den Elementen einer gleichmäßigen Hexagon-Partition resultiert im sogenannten Three-Directional Mesh. Dies ist in der Spline-Literatur als Δ_1 -Triangulierung oder Type-1 Triangulation bekannt. Es ist bekannt, dass auf dieser Partition Splines vom Grad kleiner gleich vier keine volle Approximationsordnung besitzen (siehe [14] und [47]). In [85] konnte jedoch ein Quasi-Interpolations-

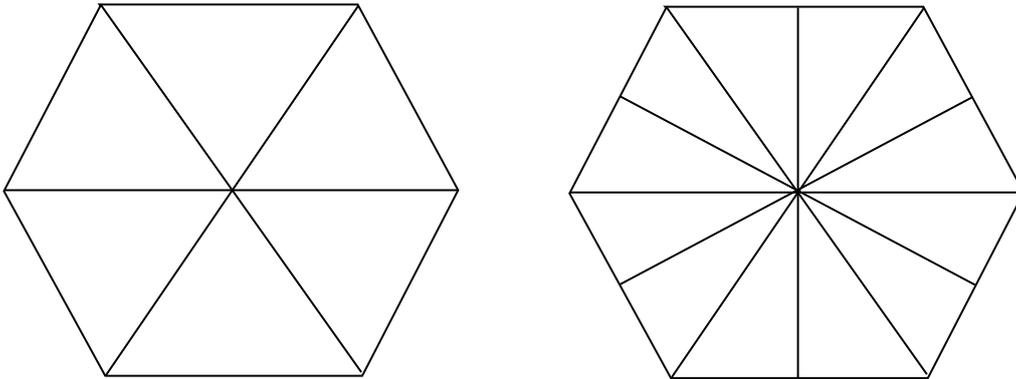


Abbildung 4.4.: Gleichmäßige Triangulierung eines regulären Hexagons. Links: der bivariate S_1 -Split und rechts: der bivariate S_2 -Split.

operator für Splines vom Grad vier, mit der für diesen Raum optimalen Approximationsordnung, bestimmt werden. Der S_2 -Split auf den Elementen einer gleichmäßigen Hexagon-Partition erzeugt die gleiche Triangulierung, die auch entsteht indem man jedes Dreieck einer gleichmäßigen Dreiecks-Partition mit dem S_2 -Split unterteilt. Die Theorie von Splines auf gleichmäßigen Triangulierungen ist hauptsächlich in den letzten 30 Jahren intensiv erforscht worden und viele Ergebnisse sind bekannt. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass dies für Splines auf gleichmäßigen Tetraeder-Partitionen nicht zutrifft.

4.2. Trivariate Partitionen

Wir untersuchen in diesem Abschnitt gleichmäßige Partitionen des Raums. Wie im vorherigen Abschnitt definieren wir zunächst einige grundlegende Begriffe aus der räumlichen Geometrie (siehe [20], [21], [39] und [48]). Mit der Übertragung der bivariaten Stern- bzw. Star-Splits ins Trivariate ist es auch hier möglich, den Großteil der existierenden Makro-Elemente sowie auch zahlreiche gleichmäßige Partitionen allgemein zu beschreiben. Abschließend diskutieren wir bekannte Ergebnisse der Approximation mit Splines auf diesen Partitionen.

Wir geben zunächst an, was man unter den regulären Körpern des Raums versteht.

Definition 4.4 (Regulärer Polyeder)

Sei $P = [v_0, \dots, v_n] \subset \mathbb{R}^3$, $n \geq 3$, ein konvexer Polyeder mit den Eckpunkten v_0, \dots, v_n . Wir nennen P einen **regulären Polyeder**, wenn alle Seitenflächen zu

4. Splines auf gleichmäßigen Partitionen

einem regulären Polygon kongruent und alle Eckpunkte identisch sind; d.h. an allen Eckpunkten treffen gleich viele Polygone zusammen.

Im Gegensatz zur rellen Ebene ist es im Raum nicht möglich einen regulären Polyeder mit einer beliebigen Anzahl von Eckpunkten zu bilden. Eine der bekanntesten Aussagen aus der räumlichen Geometrie besagt, dass exakt fünf reguläre Polyeder existieren. (Der Beweis dazu befindet sich bereits in Euklids „Die Elemente“). Dies sind der reguläre Tetraeder, der Würfel, der Oktaeder, der Dodekaeder und der Ikosaeder, die sogenannten fünf Platonischen Körper. Schwächt man die Bedingungen jedoch etwas ab, so erhält man die folgende größere Klasse der semi-regulären Körper.

Definition 4.5 (Semi-regulärer Polyeder)

Sei $P = [v_0, \dots, v_n] \subset \mathbb{R}^3$, $n \geq 3$, ein konvexer Polyeder, mit den Eckpunkten v_0, \dots, v_n . Wir nennen P einen **semi-regulären Polyeder**, wenn alle Seitenflächen reguläre Polygone und alle Eckpunkte identisch sind.

Wie beim regulären Polyeder sind die Seitenflächen des semi-regulären Polyeders reguläre Polygone. Es können jedoch unterschiedliche Arten von regulären Polygonen als Seitenflächen auftreten. Bei der Anordnung der Seitenflächen wird jedoch die gleiche Symmetrie wie beim regulären Polyeder gefordert, d.h. alle Eckpunkte müssen identisch sein. Zu dieser Klasse zählen Prismen, Antiprismen und die Archimedischen Körper. Von besonderem Interesse sind dabei durch den hohen Grad an Symmetrie die dreizehn Archimedischen Körper. Analog zum bivariaten Fall stellt sich nun jedoch auch hier die Frage, mit welchen der regulären und semi-regulären Körpern eine lückenlose Zerlegung des Raums möglich ist. Betrachten wir zunächst die Platonischen Körper, so stellen wir fest, dass lediglich mit dem Würfel eine gleichmäßige Partition des Raums möglich ist. Die Würfel-Partitionen sind also die einzigen echten regulären Partitionen des Raums. Lassen wir jedoch auch semi-reguläre Körper zu, so erhalten wir die folgende Klasse semi-regulärer Partitionen.

Definition 4.6 (Semi-reguläre und gleichmäßige Partitionen im \mathbb{R}^3)

Seien $P_i \subset \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, N$, semi-reguläre Polyeder und Ω das überdeckte Gebiet im \mathbb{R}^3 . Wenn für alle $i, j \in \{1, \dots, N\}$, $i \neq j$, gilt

$$P_i \cap P_j = \begin{cases} \emptyset, \\ \text{gemeinsamer Eckpunkt,} \\ \text{gemeinsame Kante,} \\ \text{gemeinsame Fläche,} \end{cases}$$

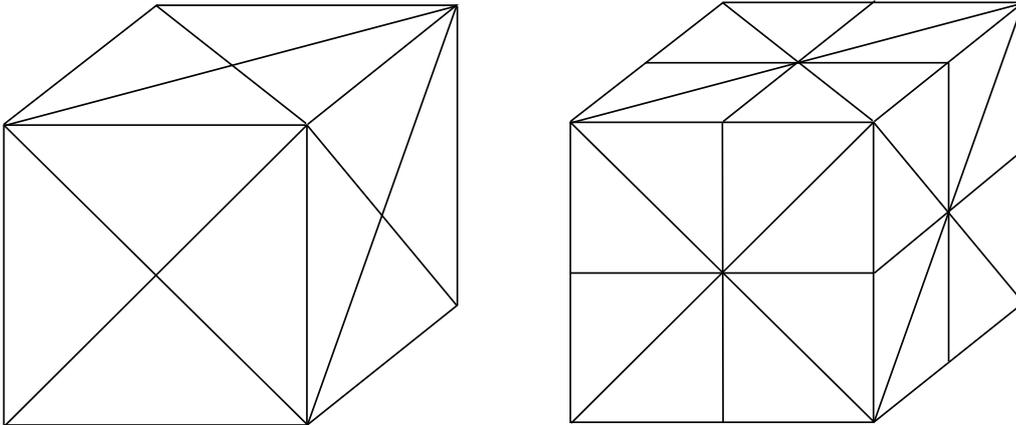


Abbildung 4.5.: Gleichmäßige Tetraeder-Partitionen eines Würfels. Links: der trivariate S_1 -Split und rechts: der trivariate S_2 -Split. Alle Knoten auf der Oberfläche des Würfels sind mit dem Schwerpunkt im Inneren des Würfels verbunden.

dann nennen wir $\diamond = \{P_1, \dots, P_N\}$ eine **semi-reguläre Partition** von Ω . Sind alle Polyeder zu einem semi-regulären Polyeder P kongruent, so nennen wir \diamond eine **gleichmäßige P -Partition** von Ω .

Die Untersuchung von trivariaten Splines macht es jedoch erforderlich, dass diese gleichmäßigen Partitionen zu Tetraeder-Partitionen verfeinert werden. Die nächste Definition stellt zwei Verfahren vor, wie ein beliebiger konvexer Polyeder auf möglichst symmetrische Art und Weise in Tetraeder unterteilt werden kann. Diese trivariaten Splits beruhen auf der Verallgemeinerung der im vorherigen Abschnitt vorgestellten bivariaten Splits (siehe Definition 4.3).

Definition 4.7 (Trivariate Splits)

Sei $P = [v_0, \dots, v_n] \subset \mathbb{R}^3$, $n \geq 3$, ein konvexer Polyeder mit den Eckpunkten v_0, \dots, v_n . Wir erhalten eine Tetraeder-Partition von P , indem wir jede Seitenfläche von P mit dem bivariaten S_1 -Split unterteilen und anschließend jeden Knoten mit dem Schwerpunkt von P verbinden. Wir nennen dies den trivariaten **S_1 -Split** von P . Unterteilen wir jede der Seitenflächen von P mit dem bivariaten S_2 -Split und verbinden anschließend jeden Knoten mit dem Schwerpunkt von P , so nennen wir dies den trivariaten **S_2 -Split** von P . Diese Splits bezeichnen wir auch als Stern- oder Star-Splits eines Tetraeders.

Erst in den letzten Jahren begann die umfangreichere Untersuchung von Splines auf Tetraeder-Partitionen. Eine direkte Übertragung von bivariaten Ergebnissen ins

4. Splines auf gleichmäßigen Partitionen

Trivariate ist dabei im Allgemeinen nicht möglich, da es zusätzliche geometrische Voraussetzungen zu beachten gilt. Ein Beispiel dafür ist die Verallgemeinerung des bivariaten Powell-Sabin-Elements (siehe Abschnitt 4.1) auf den multivariaten Fall. Das entsprechende trivariate Makro-Element wurde von Worsey und Piper entwickelt und ermöglicht die Konstruktion von lokalen C^1 Spline-Approximanten vom Grad zwei (siehe [88]). Wir bezeichnen dies als den S_2 -Split eines Tetraeders. Die Verwendung dieses Splits zur Konstruktion von lokalen Spline-Interpolanten ist jedoch nur auf bestimmten Klassen von Tetraeder-Partitionen direkt möglich, da hier zusätzliche geometrische Bedingungen beachtet werden müssen (siehe [82]). Auf Tetraeder-Partitionen, die mit dem S_1 -Split unterteilt sind, bekannt als dem Worsey-Farin-Split eines Tetraeders (siehe [87]), ist die lokale Konstruktion von C^1 Spline-Interpolanten vom Grad drei möglich. Dieses Element ist auch die Grundlage von lokalen Lagrange-Interpolationsverfahren (siehe [42] und [61]). Die Verwendung des S_1 -Splits auf den Elementen einer gleichmäßigen Würfel-Partition resultiert in der sogenannten Typ-6 Partition oder 24er-Zerlegung. In Kapitel 7 untersuchen wir diese Partition und entwickeln ein Verfahren zur Bestimmung eines lokalen C^1 -Splines vom Grad 5 zur Lagrange-Interpolation.

4.3. Gleichmäßige Partitionen im \mathbb{R}^n

In diesem Abschnitt untersuchen wir die gleichmäßigen Partitionen des \mathbb{R}^n . Wir zeigen, wie die Ergebnisse der beiden vorherigen Abschnitte auf multivariate Partitionen verallgemeinert werden können. Abschließend geben wir bisher bekannte Ergebnisse zur Approximation mit Splines auf diesen Partitionen an.

Wir beginnen mit der Definition semi-regulärer Polytope im \mathbb{R}^n .

Definition 4.8 (Semi-reguläres Polytop)

Sei $P = [v_0, \dots, v_k] \subset \mathbb{R}^n$, $k \geq n$ und $n \geq 4$, ein konvexes n -Polytop, mit den Eckpunkten v_0, \dots, v_n und $(n-1)$ -Polytopen F_1, \dots, F_N als Seitenflächen. Wir nennen P ein **semi-reguläres n -Polytop**, wenn alle Seitenflächen F_1, \dots, F_N reguläre $(n-1)$ -Polytope und alle Eckpunkte identisch sind, d.h. an allen Eckpunkten treffen gleich viele $(n-1)$ -Polytope zusammen.

Gleichmäßige Zerlegungen des \mathbb{R}^n durch semi-reguläre Polytope werden auch heute noch erforscht und auf ihre Eigenschaften hin untersucht. Wir geben im Folgenden die Definition solcher Partitionen des \mathbb{R}^n an.

Definition 4.9 (Semi-reguläre und gleichmäßige Partitionen im \mathbb{R}^n)

Seien $P_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, N$, semi-reguläre n -Polytope und Ω das überdeckte Gebiet im \mathbb{R}^n . Wenn für alle $i, j \in \{1, \dots, N\}$, $i \neq j$, gilt

$$P_i \cap P_j = \begin{cases} \emptyset, \\ \text{gemeinsames } (n - k) - \text{Polytop, } k \in \{1, \dots, n\}, \end{cases}$$

dann nennen wir $\diamond = \{P_1, \dots, P_N\}$ eine **semi-reguläre Partition** von Ω . Sind alle n -Polytope zu einem semi-regulären n -Polytop P kongruent, so nennen wir \diamond eine **gleichmäßige P-Partition** von Ω .

Für die Verwendung von multivariaten Splines ist es jedoch notwendig, diese gleichmäßigen Partitionen in Simplex-Partitionen umzuwandeln. Wir geben daher nun die notwendigen Definitionen eines Simplex im \mathbb{R}^n sowie von Simplex-Partitionen an.

Definition 4.10 (Simplex im \mathbb{R}^n)

Seien $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ Punkte in allgemeiner Lage, d.h. es gibt keinen $(n-1)$ -dimensionalen Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$, in dem alle $(n+1)$ Punkte liegen. Wir nennen

$$T := \left\{ z \in \mathbb{R}^n : z = \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i, \text{ mit } \alpha_i \geq 0, i = 0, \dots, n \text{ und } \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

einen **n -Simplex** mit Eckpunkten v_0, \dots, v_n .

Ein n -Simplex beschreibt also den einfachsten Körper im \mathbb{R}^n , der ein nicht-triviales Volumen besitzt.

Definition 4.11 (Simplex-Partition)

Seien $T_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, N$, eine Menge von n -Simplices und Ω das überdeckte Gebiet im \mathbb{R}^n . Wenn für alle $i, j \in \{1, \dots, N\}$, $i \neq j$, gilt

$$T_i \cap T_j = \begin{cases} \emptyset, \\ \text{gemeinsamer } (n - k) - \text{Simplex, } k \in \{1, \dots, n\}, \end{cases}$$

wobei ein 0 -Simplex ein Punkt im \mathbb{R}^n ist, ein 1 -Simplex eine Strecke im \mathbb{R}^n , etc., dann nennen wir $\diamond = \{T_1, \dots, T_N\}$ eine **n -Simplex-Partition** von Ω .

4. Splines auf gleichmäßigen Partitionen

Mit dem folgenden Unterteilungsverfahren ist eine gleichmäßige Konstruktion einer Simplex-Partition auf einem konvexen n -Polytop möglich. Es ist eine Verallgemeinerung der in den vorhergehenden Abschnitten definierten bivariaten und trivariaten Stern-Splits (siehe Definition 4.3 und Definition 4.7).

Definition 4.12 (Multivariate Splits)

Sei $P = [v_0, \dots, v_k] \subset \mathbb{R}^n$, $k \geq n$, ein konvexes n -Polytop mit den Eckpunkten v_0, \dots, v_n und $(n-1)$ -Polytopen F_1, \dots, F_N als Seitenflächen. Wir erhalten eine Simplex-Partition von P , indem wir jede Seitenfläche von P mit dem $(n-1)$ -dimensionalen S_1 -Split unterteilen und anschließend jeden Knoten mit dem Schwerpunkt von P verbinden. Wir nennen dies den **n -dimensionalen S_1 -Split** von P . Unterteilen wir jede der Seitenflächen von P mit dem $(n-1)$ -dimensionalen S_2 -Split und verbinden anschließend jeden Knoten mit dem Schwerpunkt von P , so nennen wir dies den **n -dimensionalen S_2 -Split** von P . Diese Splits bezeichnen wir auch als Stern- oder Star-Splits eines Simplex.

Damit erhalten wir die folgende Definition gleichmäßiger Simplex-Partitionen.

Definition 4.13 (Gleichmäßige Simplex-Partition)

Seien $\diamond = \{P_1, \dots, P_N\}$ eine semi-reguläre Partition und Ω das überdeckte Gebiet im \mathbb{R}^n . Wird jedes n -Polytop mit dem n -dimensionalen S_1 -Split, bzw. dem n -dimensionalen S_2 -Split unterteilt, so nennen wir die entstehende n -Simplex-Partition eine **gleichmäßige n -Simplex-Partition** von Ω bezüglich \diamond .

Die gleichmäßigen Simplex-Partitionen der Ebene bezeichnen wir als gleichmäßige Triangulierungen und die gleichmäßigen Simplex-Partitionen des Raums als gleichmäßige Tetraeder-Partitionen. Die Untersuchung von Splines auf Simplex-Partitionen höheren Grades hat erst begonnen und nur wenige Ergebnisse sind bisher bekannt. Dies liegt an den komplexen geometrischen Zusammenhängen, die bei der Untersuchung von Splines auf diesen Partitionen beachtet werden müssen. Deutlich wird dies bei der Verallgemeinerung des trivariaten Worsey-Farin-Elements, also des S_1 -Splits eines Tetraeders ins Multivariate. Die Konstruktion von lokalen C^1 -Splines ist hier nur auf sehr speziellen Klassen von Simplex-Partitionen möglich (siehe [81]), da es Restriktionen an die Lage der Eckpunkte in diesen Partitionen gibt.

4.4. Vergleich gleichmäßiger Partitionen

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit der Frage, wie Splines auf unterschiedlichen gleichmäßigen Partitionen miteinander verglichen werden können. Interessant ist dabei, wieviele Freiheitsgrade durch die Geometrie der Partitionen erzeugt werden und mit welchen Splinegraden ein lokales Approximationsverfahren überhaupt möglich ist. Wir führen dazu die charakteristische Zahl eines Splineriums ein, welche erstmals einen direkten Vergleich von Splines auf gleichmäßigen Partitionen in diesem Sinne erlaubt. Es wird untersucht, welche Bedeutung diese Zahl hat und welche unteren Schranken für diese Zahl bestimmt werden können. Wir vergleichen die charakteristischen Zahlen bestimmter bivariater und trivariater Splineräume und geben abschließend einen Ausblick auf die Verwendung dieser Zahl für Splines auf gleichmäßigen Partitionen des \mathbb{R}^n .

Wir beginnen mit der Definition der charakteristischen Zahl eines Splineriums bezüglich einer gleichmäßigen Partition.

Definition 4.14 (Charakteristische Zahl)

Seien $\Omega = [0, 1]^n$ der Einheitswürfel im \mathbb{R}^n , $\diamond = \{P_1, \dots, P_N\}$ eine gleichmäßige P -Partition von Ω und Δ eine gleichmäßige Simplex-Partition von Ω bezüglich \diamond , bei der jedes Polytop $P \in \diamond$ in k n -Simplices unterteilt ist. Dann bezeichnen wir mit

$$\Theta_q^r(\Delta) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\dim S_q^r(\Delta)}{kN},$$

die **charakteristische Zahl** des Raums der C^r -Splines vom Grad q bezüglich Δ .

Die charakteristische Zahl eines Splineriums beschreibt also grob gesprochen die durchschnittliche Anzahl an Freiheitsgraden, die ein Spline auf einem Simplex der zugrundeliegenden Partition besitzt. Dies ermöglicht einen direkten Vergleich von Splineräumen gleichen Grades auf unterschiedlichen Partitionen. Insbesondere der Einfluss der Geometrie der Partitionen auf die Dimension des Splineriums wird dadurch ersichtlich. Das folgende Lemma zeigt, dass dieser Zahl eine zusätzliche wichtige Bedeutung bei der Bestimmung eines lokalen approximierenden Splines zukommt.

Lemma 4.15 (Existenz lokaler Quasi-Interpolationsoperatoren)

Seien $\diamond = \{P_1, \dots, P_N\}$ eine gleichmäßige P -Partition, wobei P ein semi-reguläres n -Polytop, Ω das überdeckte Gebiet im \mathbb{R}^n , Δ eine gleichmäßige Simplex-Partition

4. Splines auf gleichmäßigen Partitionen

von Ω bezüglich \diamond und $\Theta_q^r(\Delta)$ die charakteristische Zahl der C^r -Splines vom Grad q bezüglich Δ . Wenn ein lokaler Quasi-Interpolationsoperator $Q : C(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}_q^r(\Delta)$ existiert, so gilt $\Theta_q^r(\Delta) > 0$.

Beweis: Sei $Q : C(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}_q^r(\Delta)$ ein lokaler Quasi-Interpolationsoperator. Dann existiert für jeden Simplex $T \in \Delta$ ein Spline $s \in \mathcal{S}_q^r(\Delta)$, $s \neq 0$ mit $s(\xi) = 0$, $\xi \in \Omega \setminus \Omega_T$, wobei Ω_T eine lokale Umgebung von T ist, wie in Definition 2.23 auf Seite 26. Auf Δ lässt sich so auf jedem Simplex ein Spline mit lokalem Träger bestimmen. Mit $\text{supp}(s)$ bezeichnen wir den Träger eines Splines $s \in \mathcal{S}_q^r(\Delta)$ und mit s_1, \dots, s_{kN} eine solche Menge von Splines mit lokalem Träger hinsichtlich der (kN) Simplices T_1, \dots, T_{kN} , von Δ . Sei nun $\{\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_d\}$ die größte Teilmenge von $\{s_1, \dots, s_{kN}\}$, für die gilt

$$\text{supp}(\tilde{s}_i) \cap \text{supp}(\tilde{s}_j) = \emptyset, \quad i \neq j \text{ und } i, j \in \{1, \dots, d\},$$

dann ist leicht ersichtlich, dass die Funktionen $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_d$ linear unabhängig sind und es gilt $\dim \mathcal{S}_q^r(\Delta) \geq d$. Darüber hinaus verhält sich die Anzahl dieser Splines d asymptotisch wie N , da die Größe der Umgebung Ω_T stets unabhängig von der Größe von Δ ist. Daraus folgt, dass für die charakteristische Zahl dieses Raums gilt

$$\Theta_q^r(\Delta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\dim \mathcal{S}_q^r(\Delta)}{kN} = C_\Theta,$$

für ein $C_\Theta > 0$ und der Beweis ist vollständig. □

Wir erhalten also eine notwendige Bedingung dafür, ob auf einer gleichmäßigen Partition ein lokaler Approximations-Spline konstruiert werden kann. Damit ist die charakteristische Zahl ein wichtiges Hilfsmittel zur Entscheidung, welche Splineräume zur Entwicklung einer effizienten Approximationsmethode geeignet sind. Insbesondere bei der Quasi-Interpolation ist sie von Bedeutung, da sie darüber hinaus auch einen Anhaltspunkt bietet, wieviele Datenpunkte effizient zur Berechnung eines approximierenden Splines verwendet werden können. Auf diesen Überlegungen beruht auch die Auswahl der Datenpunkte in den Quasi-Interpolationsmethoden von Kapitel 6.

Die charakteristische Zahl univariater Splineräume lässt sich leicht bestimmen, wie wir im nächsten Lemma sehen werden, da eine exakte Formel für die Dimension dieser Räume existiert.

Lemma 4.16 (Charakteristische Zahl univariater C^1 -Splineräume)

Sei $\Delta = \{T_1, \dots, T_N\}$ eine gleichmäßige Intervall-Partition von $\Omega \subset \mathbb{R}^1$. Dann gilt für die charakteristische Zahl der C^1 -Splines vom Grad q bezüglich Δ

$$\Theta_q^1(\Delta) = q - 1 = \dim \mathcal{P}_{q-2}^{[1]}.$$

Hier bezeichnet $\mathcal{P}_{q-2}^{[1]}$ den Raum der univariaten Polynome vom Grad $(q - 2)$.

Beweis: Sei $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ der Raum der univariaten Splines vom Grad q . Es ist wohl-bekannt, dass für die Dimension dieses Raums gilt

$$\dim \mathcal{S}_q^1(\Delta) = N(q - 1) + 2.$$

Damit ergibt sich für die charakteristische Zahl dieses Splineräume $\Theta_q^1(\Delta) = q - 1$. Diese Zahl ist identisch mit der Dimension des Raums der univariaten Polynome vom Grad $(q - 2)$, da gilt $\dim \mathcal{P}_{q-2}^{[1]} = q - 1$.

□

Die charakteristische Zahl der univariaten Splineräume ist also identisch mit der Dimension gewisser univariater Polynomräume. Untersuchen wir nun die charakteristische Zahl bivariater Splineräume, so lässt sich diese nicht mehr exakt angeben. Mit Hilfe der unteren Schranke von Schumaker für die Dimension bivariater Splineräume (siehe [78]) und den bivariaten Eulerformeln können wir jedoch eine untere Schranke für die charakteristische Zahl dieser Räume herleiten.

Satz 4.17 (Charakteristische Zahl bivariater C^1 -Splineräume)

Seien $\diamond = \{P_1, \dots, P_N\} \subset \mathbb{R}^2$ eine gleichmäßige P -Partition, wobei P ein reguläres Polygon ist und Δ eine gleichmäßige Triangulierung von \diamond , bei der jedes Polygon in k Dreiecke unterteilt ist. Dann gilt für die charakteristische Zahl der C^1 -Splines vom Grad q bezüglich Δ

$$\Theta_q^1(\Delta) \geq \binom{q-1}{2} = \dim \mathcal{P}_{q-3}^{[2]}.$$

Hier bezeichnet $\mathcal{P}_{q-3}^{[2]}$ den Raums der bivariaten Polynome vom Grad $(q - 3)$.

4. Splines auf gleichmäßigen Partitionen

Beweis: Sei $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ der Raum der bivariaten Splines vom Grad q bezüglich Δ . Nach Schumaker (siehe [78]) existiert die folgende untere Schranke für die Dimension bivariater Splineräume

$$\dim \mathcal{S}_q^1(\Delta) \geq \frac{1}{2}(q^2 - q)V_B + (q^2 - 3q + 2)V_I - (q^2 - 3q - 1) + \sigma.$$

Hier bezeichnen V_B bzw. V_I , die äußeren, bzw. inneren Eckpunkte von Δ und σ ist gleich der Anzahl der singulären Eckpunkte von Δ . Durch die bivariaten Euler-Formeln ergibt sich nun der folgende Zusammenhang zwischen der Anzahl der Dreiecke und der Anzahl der Eckpunkte von Δ :

$$kN = 2V_I + V_B - 2 \Leftrightarrow V_I = \frac{1}{2}kN - \frac{1}{2}V_B + 1.$$

Setzen wir dies in die obige Ungleichung ein, so erhalten wir

$$\dim \mathcal{S}_q^1(\Delta) \geq \frac{1}{2}(q^2 - 3q + 2)kN + (q - 1)V_B + 3 + \sigma.$$

Für die charakteristische Zahl des Splineriums $\Theta_q^1(\Delta)$ ergibt sich also

$$\Theta_q^1(\Delta) \geq \frac{1}{2}(q^2 - 3q + 2) + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{kN} \geq \frac{1}{2}(q - 1)(q - 2) = \binom{q - 1}{2}.$$

Diese Zahl ist identisch mit der Dimension des Raums der bivariaten Polynome vom Grad $(q - 3)$, da gilt $\dim \mathcal{P}_{q-3}^{[2]} = \binom{q-1}{2}$. □

Auch in diesem Fall ist die untere Schranke der charakteristischen Zahl bivariater Splineräume also identisch mit der Dimension gewisser bivariater Polynomräume. Wir werden feststellen, dass dies kein Zufall ist und auch in trivariaten Splineräumen diese Zusammenhänge existieren. Dazu bestimmen wir nun die charakteristischen Zahlen von Splineräumen vom Grad q bezüglich gewisser gleichmäßiger trivariater Partitionen und veranschaulichen uns diese für $q \in \{2, \dots, 9\}$ in Tabelle 4.1. Wir verwenden dazu auf Würfel-Partitionen basierende gleichmäßige Tetraeder-Partitionen. Dies sind die Typ-3 Partition (siehe [38]), bei der jeder Würfel in 6 Tetraeder unterteilt wird, die Typ-4 Partition (siehe [79]), bei der jeder Würfel in 5 Tetraeder unterteilt wird und die Typ-6 Partition (siehe Abschnitt 7.1), bei der jeder Würfel in 24 Tetraeder unterteilt wird. Zur exakten Bestimmung der charakteristischen Zahlen verwenden wir die Dimensionsergebnisse aus [41] und [45] sowie die Ergebnisse aus Kapitel 5. Vergleichen wir nun diese Zahlen mit der Dimension trivariater Polynomräume in Tabelle 4.4, so stellen wir fest, dass auch im trivariaten Fall dies eine

4.4. Vergleich gleichmäßiger Partitionen

q	$\Theta_q^1(\Delta_3)$	$\Theta_q^1(\Delta_4)$	$\Theta_q^1(\Delta_6)$
2	0	0	0
3	0	0, 1	0, 25
4	1	1, 3	1, 625
5	4	4, 5	5
6	10	10, 7	11, 375
7	20	20, 9	21, 75
8	35	36, 1	37, 125
9	56	57, 3	58, 5

Tabelle 4.1.: Wir vergleichen hier die charakteristischen Zahlen der Splineräume vom Grad $q \in \{2, \dots, 9\}$ bezüglich der Typ-3 Partition Δ_3 , der Typ-4 Partition Δ_4 und der Typ-6 Partition Δ_6 .

q	0	1	2	3	4	5
$\dim \mathcal{P}_q^{[3]}$	1	4	10	20	35	56

Tabelle 4.2.: Die Dimension trivariater Polynomräume vom Grad $q \in \{0, \dots, 5\}$.

untere Schranke für die charakteristische Zahl zu sein scheint. Ein Beweis dieser Vermutung ist jedoch hier deutlich schwieriger als im bivariaten Fall, da keine vergleichbar gute Schranke für die Dimension dieser Räume existiert und auch die trivariaten Euler-Formeln komplexer sind. Daher formulieren wir die folgende Vermutung für eine untere Schranke der charakteristischen Zahl multivariater Splineräume.

Vermutung 4.18 (Charakteristische Zahl multivariater C^1 -Splineräume)

Seien $\diamond = \{P_1, \dots, P_N\} \subset \mathbb{R}^n$ eine gleichmäßige P -Partition, wobei P ein semi-reguläres n -Polytop, Ω das überdeckte Gebiet im \mathbb{R}^n und Δ eine gleichmäßige n -Simplex-Partition von Ω bezüglich \diamond . Dann gilt für die charakteristische Zahl der C^1 -Splines vom Grad q bezüglich Δ

$$\Theta_q^1(\Delta) \geq \dim \mathcal{P}_{q-n-1}^{[n]}.$$

Hier bezeichnet $\mathcal{P}_{q-n-1}^{[n]}$ den Raum der n -variater Polynome vom Grad $(q - n - 1)$.

Abschließend verdeutlichen wir uns die Bedeutung der charakteristischen Zahl an Hand von Tabelle 4.1. Vergleichen wir die charakteristischen Zahlen für kubische

4. Splines auf gleichmäßigen Partitionen

Splines, so ergibt sich mit Lemma 4.15, dass auf der Typ-3 Partition kein lokaler Approximationsspline bestimmt werden kann. Die Geometrie der Typ-4 und Typ-6 Partitionen erzeugt jedoch zusätzliche Freiheitsgrade und könnte somit die Konstruktion eines lokalen Quasi-Interpolanten erlauben. Dies ist insbesondere in praktischen Anwendungen von großer Bedeutung, da hier eine schnelle Berechnung und ein möglichst geringer Speicheraufwand der Splines gewünscht wird. Beides ist durch einen möglichst kleinen Splinegrad gewährleistet. Dennoch ist die Lokalität der Splines notwendig für gute Approximationseigenschaften der Splines und für die Möglichkeit der Bestimmung der Splines in einem linearem Verhältnis der Rechenzeit zur Datenmenge. Daher sind genau diese Fälle, in denen die Struktur der zugrundeliegenden Partitionen die Konstruktion solcher lokalen Quasi-Interpolanten niedrigen Grades begünstigt, von besonderem Interesse. Unter diesen Gesichtspunkten würde sich daher der Raum der kubischen Splines bezüglich der Typ-6 Partition für die effiziente Konstruktion eines lokalen Quasi-Interpolanten zur Approximation gegitterter Daten besonders eignen. In [84] wurde ein solcher Quasi-Interpolant bestimmt und seine effiziente Berechenbarkeit und guten Approximationseigenschaften nachgewiesen. Die Konstruktion eines quadratischen Quasi-Interpolanten auf dieser Partition (siehe [65]) konnte jedoch nur unter Abschwächung einiger Differenzierbarkeitsbedingungen gelingen, so dass der resultierende Spline punktweise lediglich stetig war. Bei der Untersuchung verschiedener mit Star-Splits (siehe Definition 4.7) unterteilter semi-regulärer trivariater Partitionen konnten wir die charakteristischen Zahlen dieser Räume bestimmen. Überraschend war dabei, dass die charakteristischen Zahlen dieser Räume oft die Zahlen der auf Würfeln basierenden Partitionen überstiegen. Dies ist eine wichtige Beobachtung, da trivariate Splines auf gleichmäßigen Partitionen bisher fast ausschließlich auf Würfel-Partitionen untersucht wurden. Einer der Gründe dafür ist sicherlich, dass gegitterte 3D-Daten meist auf einem Würfel-Gitter liegen und so intuitiv die Wahl einer zugrundeliegenden Würfel-Partition für die Bestimmung eines approximierenden Splines sinnvoll erscheint. Dabei wird jedoch außer Acht gelassen, dass trivariate Gitter in den meisten gleichmäßigen Partitionen eingebettet sind (siehe [34]). Dies trifft nicht nur auf das kubische Gitter, sondern auch auf die anderen Bravais-Gitter zu. Somit ist die Konstruktion eines Quasi-Interpolanten auch auf diesen Partitionen möglich. In Kapitel 6 untersuchen wir quadratische Splines auf gleichmäßigen Partitionen des Raums, die auf Truncated Octahedrons, also abgestumpften bzw. abgeschnittenen Oktaedern beruhen. Die charakteristische Zahl dieses Raums ist echt größer 0 und erlaubt somit erstmals die Konstruktion eines quadratischen lokalen Quasi-Interpolanten. In den Abschnitten 6.2, 6.3 und 6.4 haben wir solche Quasi-Interpolanten für die Approximation und Interpolation von Daten auf dem kubischen und dem kubisch-raumzentrierten Gitter bestimmt.

5. Dimension trivariater Splines auf Typ-4 Partitionen

In diesem Kapitel untersuchen wir die Struktur von C^1 -Splines auf Typ-4 Partitionen Δ_4 . Ausgehend von einer gleichmäßigen Würfelpartition \diamond erhält man eine Typ-4 Partition, indem jeder Würfel von \diamond durch den Schnitt mit 4 Ebenen in 5 Tetraeder unterteilt wird. Wir werden durch die Konstruktion einer minimalen bestimmenden Menge die Dimension der Splineräume $\mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$ für $q \geq 4$ bestimmen. Dabei verwenden wir Ergebnisse, die erstmals im Rahmen der Diplomarbeit von Markus Rhein am Lehrstuhl Mathematik IV der Universität Mannheim entwickelt wurden.

In Abschnitt 5.1 beschreiben wir ausführlich die Konstruktion einer Typ-4 Partition und geben eine spezielle Notationsweise der Domain-Points dieser Partition an. Mit Hilfe dieser Notation können wir dann eine Charakterisierung der zwischen den Tetraedern von Δ_4 auftretenden Differenzierbarkeitsbedingungen trivariaten und univariaten Typs sowie eine Charakterisierung der auf den Schnittebenen auftretenden Differenzierbarkeitsbedingungen bivariaten Typs angeben. In Abschnitt 5.2 geben wir bereits das Hauptresultat dieses Kapitels, die Dimension von C^1 -Splines vom Grad $q \geq 4$ auf Δ_4 , vorerst ohne Beweis an. Der Beweis unseres Hauptresultats erfolgt dann in Abschnitt 5.3 durch die Konstruktion einer minimalen bestimmenden Menge \mathcal{M} für den Raum $\mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$, $q \geq 4$. Wir gehen dabei in zwei Schritten vor. Im ersten Schritt zeigen wir, dass unter Berücksichtigung der Differenzierbarkeitsbedingungen bivariaten Typs und durch die Wahl der Punkte der Menge \mathcal{M} ein Spline $s \in \mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$, $q \geq 4$, eindeutig auf den Schnittebenen L_ν , $\nu = 1, \dots, 4$, festgelegt ist. Unter Berücksichtigung der Differenzierbarkeitsbedingungen trivariaten und univariaten Typs werden wir dann im zweiten Schritt zeigen, dass der Spline s durch die Wahl der Menge \mathcal{M} auch auf der ganzen Partition Δ_4 eindeutig bestimmt ist. Wir erhalten die Dimension des Raums $\mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$, $q \geq 4$, durch die abschließende Bestimmung der Kardinalität der Menge \mathcal{M} .

5.1. C^1 -Splines auf Typ-4 Partitionen

Wir zeigen im Folgenden zunächst, wie man eine Typ-4 Partition ausgehend von einer gleichmäßigen Würfelpartition konstruiert. Sei \diamond die gleichmäßige Würfelpartition des Gebiets $\Omega = [0, n] \times [0, n] \times [0, n] \subset \mathbb{R}^3$. Wir erhalten \diamond definiert durch

$$\diamond := \{Q_{(i,j,k)} : Q_{(i,j,k)} = [i-1, i] \times [j-1, j] \times [k-1, k], i, j, k = 1, \dots, n\},$$

indem wir Ω in jeder der 3 Raumrichtungen mit $n+1$ parallelen Ebenen schneiden. Wir können nun die Knoten V von \diamond in zwei Klassen V_1 und V_2 unterteilen, so dass alle Knoten $v \in V_\nu$, $\nu \in \{1, 2\}$, lediglich gemeinsame Kanten mit Knoten der Menge $v \in V_\mu$, $\mu \in \{1, 2\}$ und $\nu \neq \mu$, besitzen. Um die Wahl dieser Mengen eindeutig zu machen, ist es allerdings notwendig die Zugehörigkeit mindestens eines Punktes $v \in V$ zu einer dieser Mengen festzulegen. Wir folgen dabei der Festlegung von Schumaker und Sorokina [79] und setzen $v_{(0,0,0)} \in V_1$. Die Mengen V_1 und V_2 ergeben sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v_{(i,j,k)} : i, j, k = 0, \dots, n, i+j+k \text{ gerade}\}, \\ V_2 &= \{v_{(i,j,k)} : i, j, k = 0, \dots, n, i+j+k \text{ ungerade}\}. \end{aligned}$$

Die Knoten aus der Menge V_1 nennen wir dabei Knoten vom Typ-1 und Knoten aus der Menge V_2 Knoten vom Typ-2. Wir unterteilen nun jeden Würfel $Q_{(i,j,k)}$, $i, j, k = 1, \dots, n$ in 5 Tetraeder, indem wir die vier Eckpunkte vom Typ-2 jedes Würfels miteinander verbinden. Den Tetraeder im Inneren des Würfels, dessen Eckpunkte alle vom Typ-2 sind, bezeichnen wir mit $T_{(i,j,k)}$ und definieren für $i, j, k = 1, \dots, n$:

$$T_{(i,j,k)} = \begin{cases} [v_{(i,j,k)}, v_{(i-1,j-1,k)}, v_{(i-1,j,k-1)}, v_{(i,j-1,k-1)}], & \text{falls } i+j+k \text{ ungerade,} \\ [v_{(i-1,j-1,k-1)}, v_{(i,j,k-1)}, v_{(i,j-1,k)}, v_{(i-1,j,k)}], & \text{falls } i+j+k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Auf Grund dieser Konstruktion nennen wir $T_{(i,j,k)}$ auch einen Tetraeder vom Typ-2, $T \in T_2$. Die Kanten dieser Tetraeder bezeichnen wir analog als Kanten vom Typ-2, $E \in E_2$. Die restlichen Tetraeder bzw. Kanten von Δ_4 nennen wir dann entsprechend Tetraeder bzw. Kanten vom Typ-1, $T \in T_1$ bzw. $E \in E_1$. Hier wird auch deutlich, dass im Gegensatz zu den in den vorhergehenden Kapiteln behandelten Partitionen bei dieser Partition nicht jeder Würfel auf dieselbe Weise unterteilt wird. Vielmehr gibt es 2 Klassen von Würfeln $Q_{(i,j,k)}$, $i, j, k = 1, \dots, n$, die unterschiedlich unterteilt werden und welche wir analog zur Definition der Knoten als Würfel vom Typ-1, $Q_{(i,j,k)} \in Q_1$, bezeichnen, falls $i+j+k$ gerade und vom Typ-2, $Q_{(i,j,k)} \in Q_2$, falls $i+j+k$ ungerade. Dies ist der Grund, warum wir auch bei den folgenden Definitionen diese beiden Fälle unterschiedlich behandeln müssen. Insbesondere stellt sich das

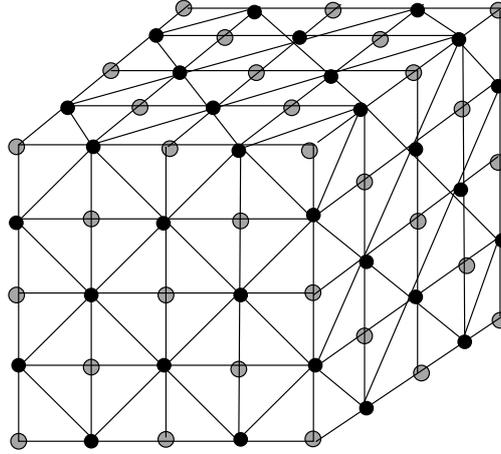


Abbildung 5.1.: Typ-4 Partition einer gleichmäßigen Würfelpartition. Knoten vom Typ-1 sind durch graue Punkte und Knoten vom Typ-2 durch schwarze Punkte markiert.

Problem, dass die Anzahl der Würfel vom Typ-1 und der Würfel vom Typ-2 in \diamond lediglich für gerades n gleich groß ist. Es gilt für die Anzahl der Würfel vom Typ-1 bzw. Typ-2:

$$\#Q_1 = \begin{cases} \frac{1}{2}n^3, & n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2}(n^3 - 1), & n \text{ ungerade,} \end{cases} \quad \#Q_2 = \begin{cases} \frac{1}{2}n^3, & n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2}(n^3 + 1), & n \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (5.1)$$

Die so konstruierte Tetraeder-Partition des gesamten Grundbereichs Ω bezeichnen wir mit Δ_4 . Wir nennen Δ_4 eine Typ-4 Partition, da diese Unterteilung erreicht wird, indem wir jeden Würfel $Q_{(i,j,k)}$, $i, j, k = 1, \dots, n$, mit den 4 Ebenen $L_1, L_2, L_3, L_4 \subset \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$L_1 : x + y + z = \begin{cases} i + j + k - 2 & \text{falls } i + j + k \text{ ungerade,} \\ i + j + k - 1 & \text{falls } i + j + k \text{ gerade,} \end{cases} \quad (5.2a)$$

$$L_2 : x + y - z = \begin{cases} i + j - k & \text{falls } i + j + k \text{ ungerade,} \\ i + j - k - 1 & \text{falls } i + j + k \text{ gerade,} \end{cases} \quad (5.2b)$$

$$L_3 : x - y + z = \begin{cases} i - j + k & \text{falls } i + j + k \text{ ungerade,} \\ i - j + k - 1 & \text{falls } i + j + k \text{ gerade,} \end{cases} \quad (5.2c)$$

$$L_4 : x - y - z = \begin{cases} i - j - k & \text{falls } i + j + k \text{ ungerade,} \\ i - j - k + 1 & \text{falls } i + j + k \text{ gerade,} \end{cases} \quad (5.2d)$$

schneiden. Betrachten wir nun die $(n+1)$ parallelen xy -, xz - und yz -Ebenen sowie die Schnittebenen L_1, L_2, L_3 und L_4 über die gesamte Partition Δ_4 hinweg, so

5. Dimension trivariater Splines auf Typ-4 Partitionen

finden wir auch hier bekannte gleichmäßige bivariate Partitionen wieder. Auf jeder der Raumebenen erhalten wir eine bivariate Δ_2 -Triangulierung und auf jeder der Schnittebenen eine bivariate Δ_1 -Triangulierung.

Bisher haben wir uns nur mit den Tetraedern vom Typ-2, $T \in T_2$, im Inneren der Würfel beschäftigt. Betrachten wir nun die Tetraeder vom Typ-1, $T \in T_1$, in den Ecken der Würfel, so stellen wir fest, dass an jedem inneren Knoten vom Typ-1 $v \in V_{I,1}$ jeweils 8 dieser Tetraeder einen gleichmäßigen Oktaeder O_v^8 mit Mittelpunkt v bilden. Ebenso entstehen an den äußeren Knoten vom Typ-1 $v \in V_{B,1}$ Teiloktaeder, die nur aus 4, 2 bzw. 1 Tetraedern bestehen und die wir analog O_v^4 , O_v^2 und O_v^1 nennen. Wir bezeichnen nun die Tetraeder vom Typ-1 die im Oktaeder $O_{v(i,j,k)}^m$, $m \in \{1, 2, 4, 8\}$, liegen mit $T_{(i,j,k)}^\nu$, wobei $\nu \in \{-4, \dots, -1, 1, \dots, 4\}$ so, dass die Außenflächen des Oktaeders in einer Ebene mit $L_{|\nu|}$ liegen und $T_{(i,j,k)}^\nu$ in einem Würfel vom Typ-1 liegt, falls $\nu < 0$ bzw. in einem Würfel vom Typ-2, falls $\nu > 0$. Wir definieren also für alle $i, j, k = 0, \dots, n$, $i + j + k$ gerade:

$$\begin{aligned} T_{(i,j,k)}^{[1]} &= [v_{(i+1,j,k)}, v_{(i,j+1,k)}, v_{(i,j,k+1)}, v_{(i,j,k)}], \quad i \neq n, j \neq n, k \neq n, \\ T_{(i,j,k)}^{[2]} &= [v_{(i-1,j,k)}, v_{(i,j-1,k)}, v_{(i,j,k+1)}, v_{(i,j,k)}], \quad i \neq 0, j \neq 0, k \neq n, \\ T_{(i,j,k)}^{[3]} &= [v_{(i-1,j,k)}, v_{(i,j+1,k)}, v_{(i,j,k-1)}, v_{(i,j,k)}], \quad i \neq 0, j \neq n, k \neq 0, \\ T_{(i,j,k)}^{[4]} &= [v_{(i+1,j,k)}, v_{(i,j-1,k)}, v_{(i,j,k-1)}, v_{(i,j,k)}], \quad i \neq n, j \neq 0, k \neq 0, \\ T_{(i,j,k)}^{[-1]} &= [v_{(i-1,j,k)}, v_{(i,j-1,k)}, v_{(i,j,k-1)}, v_{(i,j,k)}], \quad i \neq 0, j \neq 0, k \neq 0, \\ T_{(i,j,k)}^{[-2]} &= [v_{(i+1,j,k)}, v_{(i,j+1,k)}, v_{(i,j,k-1)}, v_{(i,j,k)}], \quad i \neq n, j \neq n, k \neq 0, \\ T_{(i,j,k)}^{[-3]} &= [v_{(i+1,j,k)}, v_{(i,j-1,k)}, v_{(i,j,k+1)}, v_{(i,j,k)}], \quad i \neq n, j \neq 0, k \neq n, \\ T_{(i,j,k)}^{[-4]} &= [v_{(i-1,j,k)}, v_{(i,j+1,k)}, v_{(i,j,k+1)}, v_{(i,j,k)}], \quad i \neq 0, j \neq n, k \neq n. \end{aligned}$$

Durch diese Notation können die Tetraeder sofort dem entsprechenden Oktaeder zugeordnet werden. Für die spätere übersichtliche Beschreibung der Differenzierbarkeitsbedingungen ist es jedoch auch von Vorteil direkt zu sehen, welche dieser Tetraeder im Würfel $Q_{(i,j,k)}$, $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, liegen. Dazu definieren wir uns die folgende Abbildung λ_ν , $\nu \in \{-4, \dots, -1, 1, \dots, 4\}$:

$$\begin{aligned} \lambda_1(a, b, c) &= (a - 1, b - 1, c - 1), & \lambda_{-1}(a, b, c) &= (a, b, c), \\ \lambda_2(a, b, c) &= (a, b, c - 1), & \lambda_{-2}(a, b, c) &= (a - 1, b - 1, c), \\ \lambda_3(a, b, c) &= (a, b - 1, c), & \lambda_{-3}(a, b, c) &= (a - 1, b, c - 1), \\ \lambda_4(a, b, c) &= (a - 1, b, c), & \lambda_{-4}(a, b, c) &= (a, b - 1, c - 1). \end{aligned}$$

Es gilt dann für alle $i, j, k = 1, \dots, n$ und $\nu \in \{-4, \dots, -1, 1, \dots, 4\}$:

$$T_{\lambda_\nu(i,j,k)}^{[\nu]} \in Q_{(i,j,k)}.$$

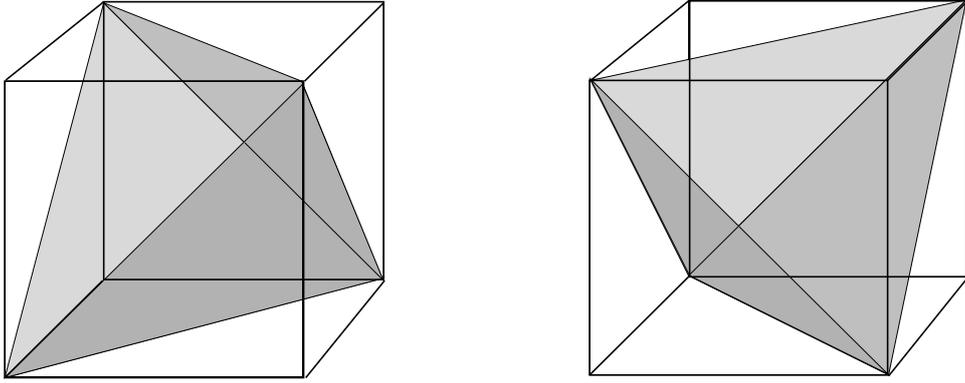


Abbildung 5.2.: Die Unterteilung eines Würfels vom Typ-1 (links) und eines Würfels vom Typ-2 (rechts) in 5 Tetraeder.

Bevor wir uns mit der komplexen Bestimmung der Dimension von C^1 -Splines auf Typ-4 Partitionen beschäftigen, wollen wir zunächst die Dimension stetiger Splines bestimmen. Aus Kapitel 2 wissen wir bereits, dass die Dimension des stetigen Splineriums mit der Anzahl der Domain-Points \mathcal{D}_{q,Δ_4} übereinstimmt. Es gilt also

$$\dim \mathcal{S}_q^0(\Delta_4) = \binom{q-1}{3} \#N + \binom{q-1}{2} \#F + (q-1) \#E + \#V, \quad q \geq 1.$$

Zählen wir nun die Anzahl der Tetraeder N , der Dreiecksflächen F , der Kanten E und der Knoten V von Δ_4 , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \#N &= 5n^3, & \#F &= 10n^3 + 6n^2, & \#E &= 6n^3 + 9n^2 + 3n \\ \text{und } \#V &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Weiterhin ergeben sich

$$\begin{aligned} \#F_I &= 10n^3 - 6n^2, & \#F_B &= 12n^2, \\ \#E_I &= 6n^3 - 9n^2 + 3n, & \#E_B &= 18n^2, \\ \#V_I &= n^3 - 3n^2 + 3n - 1, & \#V_B &= 6n^2 + 2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Dabei bezeichnen F_I , F_B , E_I , E_B , V_I und V_B , analog zu Definition 2.18, die inneren bzw. äußeren Dreiecksflächen, Kanten und Knoten von Δ_4 . Mit (5.3) und einfachen Berechnungen erhalten wir dann

$$\dim \mathcal{S}_q^0(\Delta_4) = \frac{1}{6}q(5q^2 + 1)n^3 + 3q^2n^2 + 3qn + 1.$$

Für die spätere Konstruktion einer minimalen bestimmenden Menge benötigen wir auch noch die genaue Anzahl der Knoten und Kanten vom Typ-1 bzw. Typ-2. Zählen

5. Dimension trivariater Splines auf Typ-4 Partitionen

wir die Knoten vom Typ-1 bzw. Typ-2, so erhalten wir für deren Anzahl

$$\begin{aligned}\#V_1 &= \begin{cases} \frac{1}{2}((n+1)^3 + 1), & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2}(n+1)^3, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases} \\ \#V_2 &= \begin{cases} \frac{1}{2}((n+1)^3 - 1), & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2}(n+1)^3, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}\end{aligned}\quad (5.5)$$

Für die Anzahl der inneren bzw. äußeren Knoten vom Typ-1 und Typ-2 ergeben sich analog

$$\begin{aligned}\#V_{I,1} &= \begin{cases} \frac{1}{2}((n-1)^3 - 1), & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2}(n-1)^3, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases} \\ \#V_{I,2} &= \begin{cases} \frac{1}{2}((n-1)^3 + 1), & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2}(n-1)^3, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}\end{aligned}\quad (5.6)$$

und

$$\#V_{B,1} = \begin{cases} 3n^2 + 2, & n \text{ gerade,} \\ 3n^2 + 1, & n \text{ ungerade,} \end{cases} \quad \#V_{B,2} = \begin{cases} 3n^2, & n \text{ gerade,} \\ 3n^2 + 1, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Zählen wir nun noch die (inneren bzw. äußeren) Kanten vom Typ-1 bzw. Typ-2, so erhalten wir für deren Anzahl

$$\begin{aligned}\#E_1 &= 3n^3 + 6n^2 + 3n, & \#E_{I,1} &= 3n^3 - 6n^2 + 3n, & \#E_{B,1} &= 12n^2, \\ \#E_2 &= 3n^3 + 3n^2, & \#E_{I,2} &= 3n^3 - 3n^2, & \#E_{B,2} &= 6n^2.\end{aligned}\quad (5.7)$$

Im Folgenden untersuchen wir nun den Raum differenzierbarer Splines auf Δ_4 , $S_q^1(\Delta_4)$, $q \geq 4$. Um die C^1 -Bedingungen über die inneren Dreiecksflächen F_I zu beschreiben, nutzen wir die stückweise Bernstein-Bézier-Darstellung der Splines $s \in S_q^1(\Delta_4)$,

$$s|_T(z) = \sum_{\omega+\rho+\sigma+\tau=q} b_{\omega,\rho,\sigma,\tau} B_{\omega,\rho,\sigma,\tau}^{q,T}, \quad z \in T.$$

Dabei bezeichnen $b_{\omega,\rho,\sigma,\tau}$, $\omega + \rho + \sigma + \tau = q$, die Bernstein-Bézier-Koeffizienten hinsichtlich T und $B_{\omega,\rho,\sigma,\tau}^{q,T}$, $\omega + \rho + \sigma + \tau = q$, die Bernstein-Polynome vom Grad q hinsichtlich T. In dieser Darstellung lassen sich die Bernstein-Bézier-Koeffizienten $b_{\omega,\rho,\sigma,\tau}$ in eindeutiger Weise mit den Domain-Points $\xi_{\omega,\rho,\sigma,\tau}^T$ von T assoziieren. Wir definieren

$$b_{\omega,\rho,\sigma,\tau}(s) := b_{\omega,\rho,\sigma,\tau}(s|_T) = b_{\omega,\rho,\sigma,\tau}.$$

Nach Satz 2.12 von Seite 18 lassen sich nun die Differenzierbarkeitsbedingungen über die gemeinsame Seitenfläche zweier benachbarter Tetraeder einfach als Relationen zwischen den jeweiligen Bernstein-Bézier-Koeffizienten beschreiben. Hier

5.1. C^1 -Splines auf Typ-4 Partitionen

interessieren uns insbesondere die C^1 -Bedingungen, in die im Allgemeinen 5 Koeffizienten involviert sind. Wir betrachten zunächst die Differenzierbarkeitsbedingungen über die Seitenflächen der Tetraeder vom Typ-2. Auf Grund der Konstruktion von Δ_4 besitzt ein Tetraeder vom Typ-2 lediglich gemeinsame Seitenflächen mit Tetraedern vom Typ-1. Seien $T = [v_0, v_1, v_2, v_3] \in T_2$ ein Tetraeder vom Typ-2 und $\tilde{T} = [v_0, v_1, v_2, \tilde{v}_3] \in T_1$ ein Tetraeder vom Typ-1 mit gemeinsamer Seitenfläche $[v_0, v_1, v_2]$, so gilt für die Baryzentrischen Koordinaten ϕ_ν , $\nu = 0, \dots, 3$, hinsichtlich T ausgewertet am Eckpunkt \tilde{v}_3 ,

$$\phi_0(\tilde{v}_3) = \phi_1(\tilde{v}_3) = \phi_2(\tilde{v}_3) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \phi_3(\tilde{v}_3) = -\frac{1}{2}.$$

Da keine der Baryzentrischen Koordinaten von T am Eckpunkt \tilde{v}_3 verschwindet, handelt es sich hier um echte trivariate Bedingungen. Betrachten wir nun die verbleibenden Differenzierbarkeitsbedingungen über die gemeinsamen Seitenflächen der Tetraeder vom Typ-1 innerhalb eines Oktaeders. Seien $T = [v_0, v_1, v_2, v_3] \in T_1$ und $\tilde{T} = [v_0, v_1, v_2, \tilde{v}_3] \in T_1$ zwei Tetraeder vom Typ-1 mit gemeinsamer Seitenfläche $[v_0, v_1, v_2]$. Wir können dabei o.B.d.A. annehmen, dass v_0 der Mittelpunkt des zugehörigen Oktaeders ist. Es gilt dann für die Baryzentrischen Koordinaten ϕ_ν , $\nu = 0, \dots, 3$ hinsichtlich T ausgewertet am Eckpunkt \tilde{v}_3 ,

$$\phi_0(\tilde{v}_3) = 2, \quad \phi_1(\tilde{v}_3) = \phi_2(\tilde{v}_3) = 0 \quad \text{und} \quad \phi_3(\tilde{v}_3) = -1.$$

Da hier zwei der Baryzentrischen Koordinaten von T am Eckpunkt \tilde{v}_3 verschwinden, degenerieren die trivariaten Bedingungen zu univariaten Bedingungen (siehe auch Beispiel 2.13 auf Seite 19). Im Fall der C^1 -Bedingungen sind dann also nur noch 3 Koeffizienten in eine Bedingung involviert. Wir können nun alle notwendigen Differenzierbarkeitsbedingungen über die inneren Seitenflächen F_I von Δ_4 , damit $s \in \mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$, wie folgt beschreiben.

Damit $s \in \mathcal{S}_q^{-1}(\Delta_4)$ stetig ist über alle Seitenflächen der Tetraeder vom Typ-2, $T_{(i,j,k)} \in T_2$, $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, muss gelten

$$b_\alpha = b_\beta, \tag{5.8}$$

wobei α und β gegeben sind durch

$$\alpha = \xi_{(0,\rho,\sigma,\tau)}^{T_{(i,j,k)}} \quad \text{und} \quad \beta = \begin{cases} \xi_{(\tau,\sigma,\rho,0)}^{T_{\lambda_1}^{[1]}(i,j,k)}, & i+j+k \text{ ungerade,} \\ \xi_{(\tau,\sigma,\rho,0)}^{T_{\lambda-1}^{[-1]}(i,j,k)}, & i+j+k \text{ gerade,} \end{cases} \tag{5.9a}$$

$$\alpha = \xi_{(\rho,0,\sigma,\tau)}^{T_{(i,j,k)}} \quad \text{und} \quad \beta = \begin{cases} \xi_{(\sigma,\tau,\rho,0)}^{T_{\lambda_2}^{[2]}(i,j,k)}, & i+j+k \text{ ungerade,} \\ \xi_{(\sigma,\tau,\rho,0)}^{T_{\lambda-2}^{[-2]}(i,j,k)}, & i+j+k \text{ gerade,} \end{cases} \tag{5.9b}$$

5. Dimension trivariater Splines auf Typ-4 Partitionen

$$\alpha = \xi_{(\rho,\sigma,0,\tau)}^{T(i,j,k)} \quad \text{und} \quad \beta = \begin{cases} \xi_{(\sigma,\rho,\tau,0)}^{T_{\lambda_3}^{[3]}(i,j,k)}, & i+j+k \text{ ungerade,} \\ \xi_{(\sigma,\rho,\tau,0)}^{T_{\lambda-3}^{[-3]}(i,j,k)}, & i+j+k \text{ gerade,} \end{cases} \quad (5.9c)$$

und

$$\alpha = \xi_{(\rho,\sigma,\tau,0)}^{T(i,j,k)} \quad \text{und} \quad \beta = \begin{cases} \xi_{(\rho,\sigma,\tau,0)}^{T_{\lambda_4}^{[4]}(i,j,k)}, & i+j+k \text{ ungerade,} \\ \xi_{(\rho,\sigma,\tau,0)}^{T_{\lambda-4}^{[-4]}(i,j,k)}, & i+j+k \text{ gerade,} \end{cases} \quad (5.9d)$$

wobei $\rho, \sigma, \tau \geq 0$ und $\rho + \sigma + \tau = q$.

Damit $s \in \mathcal{S}_q^0(\Delta_4)$ C^1 -differenzierbar ist über alle Seitenflächen der Tetraeder vom Typ-2, $T_{(i,j,k)} \in T_2$, $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, muss gelten

$$b_\alpha = \frac{1}{2} (b_\beta + b_\gamma + b_\delta - b_\eta), \quad (5.10)$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und η gegeben sind durch

$$\alpha = \xi_{(1,\rho,\sigma,\tau)}^{T(i,j,k)}, \quad \beta = \xi_{(0,\rho+1,\sigma,\tau)}^{T(i,j,k)}, \quad \gamma = \xi_{(0,\rho,\sigma+1,\tau)}^{T(i,j,k)}, \quad \delta = \xi_{(0,\rho,\sigma,\tau+1)}^{T(i,j,k)}$$

$$\text{und} \quad \eta = \begin{cases} \xi_{(\tau,\sigma,\rho,1)}^{T_{\lambda_1}^{[1]}(i,j,k)}, & i+j+k \text{ ungerade,} \\ \xi_{(\tau,\sigma,\rho,1)}^{T_{\lambda-1}^{[-1]}(i,j,k)}, & i+j+k \text{ gerade,} \end{cases} \quad (5.11a)$$

$$\alpha = \xi_{(\rho,1,\sigma,\tau)}^{T(i,j,k)}, \quad \beta = \xi_{(\rho+1,0,\sigma,\tau)}^{T(i,j,k)}, \quad \gamma = \xi_{(\rho,0,\sigma+1,\tau)}^{T(i,j,k)}, \quad \delta = \xi_{(\rho,0,\sigma,\tau+1)}^{T(i,j,k)}$$

$$\text{und} \quad \eta = \begin{cases} \xi_{(\sigma,\tau,\rho,1)}^{T_{\lambda_2}^{[2]}(i,j,k)}, & i+j+k \text{ ungerade,} \\ \xi_{(\sigma,\tau,\rho,1)}^{T_{\lambda-2}^{[-2]}(i,j,k)}, & i+j+k \text{ gerade,} \end{cases} \quad (5.11b)$$

$$\alpha = \xi_{(\rho,\sigma,1,\tau)}^{T(i,j,k)}, \quad \beta = \xi_{(\rho+1,\sigma,0,\tau)}^{T(i,j,k)}, \quad \gamma = \xi_{(\rho,\sigma+1,0,\tau)}^{T(i,j,k)}, \quad \delta = \xi_{(\rho,\sigma,0,\tau+1)}^{T(i,j,k)}$$

$$\text{und} \quad \eta = \begin{cases} \xi_{(\sigma,\rho,\tau,1)}^{T_{\lambda_3}^{[3]}(i,j,k)}, & i+j+k \text{ ungerade,} \\ \xi_{(\sigma,\rho,\tau,1)}^{T_{\lambda-3}^{[-3]}(i,j,k)}, & i+j+k \text{ gerade,} \end{cases} \quad (5.11c)$$

und

$$\alpha = \xi_{(\rho,\sigma,\tau,1)}^{T(i,j,k)}, \quad \beta = \xi_{(\rho+1,\sigma,\tau,0)}^{T(i,j,k)}, \quad \gamma = \xi_{(\rho,\sigma+1,\tau,0)}^{T(i,j,k)}, \quad \delta = \xi_{(\rho,\sigma,\tau+1,0)}^{T(i,j,k)}$$

$$\text{und} \quad \eta = \begin{cases} \xi_{(\rho,\sigma,\tau,1)}^{T_{\lambda_4}^{[4]}(i,j,k)}, & i+j+k \text{ ungerade,} \\ \xi_{(\rho,\sigma,\tau,1)}^{T_{\lambda-4}^{[-4]}(i,j,k)}, & i+j+k \text{ gerade,} \end{cases} \quad (5.11d)$$

wobei $\rho, \sigma, \tau \geq 0$ und $\rho + \sigma + \tau = q - 1$.

5.1. C^1 -Splines auf Typ-4 Partitionen

Um die Differenzierbarkeitsbedingungen über die gemeinsame Seitenfläche zweier Tetraeder vom Typ-1 $T^{[\nu]}, T^{[-\mu]} \in T_1$ (bzw. $T^{[-\nu]}, T^{[\mu]}$), $\nu, \mu \in \{1, \dots, 4\}$, $\nu \neq \mu$, möglichst effektiv und übersichtlich beschreiben zu können, führen wir hier eine weitere Abbildung $\pi_{\nu, \mu}$ ein, welche die Auswahl der relevanten Punkte erleichtert. Wir definieren die Abbildung $\pi_{\nu, \mu}$, $\nu, \mu \in \{1, \dots, 4\}$, $\nu \neq \mu$, für $\nu < \mu$ durch

$$\begin{aligned}\pi_{1,2}(a, b, c) &= (a, b, c) = \pi_{3,4}(a, b, c), \\ \pi_{1,3}(a, b, c) &= (a, c, b) = \pi_{2,4}(a, b, c), \\ \pi_{1,4}(a, b, c) &= (c, a, b) = \pi_{2,3}(a, b, c)\end{aligned}$$

und für $\nu > \mu$ durch

$$\pi_{\nu, \mu}(a, b, c) = \pi_{\mu, \nu}(b, a, c).$$

Bemerkung 5.1 (Die Abbildung π)

Die Abbildung $\pi_{\nu, \mu}$, $\nu, \mu \in \{1, \dots, 4\}$, $\nu \neq \mu$, ermöglicht es alle Domain-Points von Δ_4 , die auf Kanten vom Typ-2 liegen, effizient zu beschreiben. In jeder Kante vom Typ-2 schneiden sich genau 2 der Schnittebenen (5.2)(a-d) von Δ_4 . Die Punkte

$$\xi_{(\pi_{\nu, \mu}(\rho, \sigma, 0), 0)}^{T^{[\nu]}(i, j, k)}, \quad i+j+k \text{ ungerade}, \quad \text{und} \quad \xi_{(\pi_{\nu, \mu}(\rho, \sigma, 0), 0)}^{T^{[-\nu]}(i, j, k)}, \quad i+j+k \text{ gerade},$$

wobei $\rho, \sigma \geq 0$, $\rho + \sigma = q$, $\nu, \mu \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $\nu \neq \mu$, beschreiben dann die Domain-Points, die auf den Schnittgeraden $L_\nu \cap L_\mu$ der Ebenen L_ν und L_μ liegen.

Die Differenzierbarkeitsbedingungen innerhalb der Oktaeder lassen sich nun wie folgt beschreiben:

Damit $s \in \mathcal{S}_q^{-1}(\Delta_4)$ stetig ist über alle Seitenflächen der Tetraeder vom Typ-1, $T_{(i, j, k)}^{[\nu]} \in T_1$, $i, j, k \in \{0, \dots, n\}$ und $i + j + k$ gerade, muss gelten (5.8) und

$$b_\alpha = b_\beta, \tag{5.12}$$

wobei α und β gegeben sind durch

$$\alpha = \xi_{(\pi_{\nu, \mu}(\rho, \sigma, 0), \omega)}^{T^{[\nu]}(i, j, k)} \quad \text{und} \quad \beta = \xi_{(\pi_{\nu, \mu}(\rho, \sigma, 0), \omega)}^{T^{[-\mu]}(i, j, k)}, \tag{5.13a}$$

wobei $\rho, \sigma, \omega \geq 0$, $\rho + \sigma + \omega = q$, $\nu, \mu \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\nu < \mu$ und

$\nu, \mu \neq 1$, falls $i = n$, $j = n$ oder $k = n$, $\nu, \mu \neq 2$, falls $i = 0$, $j = 0$ oder $k = n$,

$\nu, \mu \neq 3$, falls $i = 0$, $j = n$ oder $k = 0$, $\nu, \mu \neq 4$, falls $i = n$, $j = 0$ oder $k = 0$,

5. Dimension trivariater Splines auf Typ-4 Partitionen

und

$$\alpha = \xi_{(\pi_{\nu,\mu}(\rho,\sigma,0),\omega)}^{T^{[-\nu]}(i,j,k)} \quad \text{und} \quad \beta = \xi_{(\pi_{\nu,\mu}(\rho,\sigma,0),\omega)}^{T^{[\mu]}(i,j,k)}, \quad (5.13b)$$

wobei $\rho, \sigma, \omega \geq 0$, $\rho + \sigma + \omega = q$, $\nu, \mu \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\nu < \mu$ und
 $\nu, \mu \neq 1$, falls $i = 0$, $j = 0$ oder $k = 0$, $\nu, \mu \neq 2$, falls $i = n$, $j = n$ oder $k = 0$,
 $\nu, \mu \neq 3$, falls $i = n$, $j = 0$ oder $k = n$, $\nu, \mu \neq 4$, falls $i = 0$, $j = n$ oder $k = n$.

Damit $s \in \mathcal{S}_q^0(\Delta_4)$ C^1 -differenzierbar ist über alle Seitenflächen der Tetraeder vom Typ-1, $T_{(i,j,k)}^{[\nu]} \in T_1$, $i, j, k \in \{0, \dots, n\}$ und $i + j + k$ gerade, muss gelten (5.10) und

$$b_\alpha = \frac{1}{2}(b_\beta + b_\gamma), \quad (5.14)$$

wobei α , β und γ gegeben sind durch

$$\alpha = \xi_{(\pi_{\nu,\mu}(\rho,\sigma,0),\omega+1)}^{T^{[\nu]}(i,j,k)}, \quad \beta = \xi_{(\pi_{\nu,\mu}(\rho,\sigma,1),\omega)}^{T^{[\nu]}(i,j,k)} \quad \text{und} \quad \gamma = \xi_{(\pi_{\nu,\mu}(\rho,\sigma,1),\omega)}^{T^{[-\mu]}(i,j,k)}, \quad (5.15a)$$

wobei $\rho, \sigma, \omega \geq 0$, $\rho + \sigma + \omega = q - 1$, $\nu, \mu \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\nu < \mu$ und
 $\nu, \mu \neq 1$, falls $i = n$, $j = n$ oder $k = n$, $\nu, \mu \neq 2$, falls $i = 0$, $j = 0$ oder $k = n$,
 $\nu, \mu \neq 3$, falls $i = 0$, $j = n$ oder $k = 0$, $\nu, \mu \neq 4$, falls $i = n$, $j = 0$ oder $k = 0$,

und

$$\alpha = \xi_{(\pi_{\nu,\mu}(\rho,\sigma,0),\omega+1)}^{T^{[-\nu]}(i,j,k)}, \quad \beta = \xi_{(\pi_{\nu,\mu}(\rho,\sigma,1),\omega)}^{T^{[-\nu]}(i,j,k)} \quad \text{und} \quad \gamma = \xi_{(\pi_{\nu,\mu}(\rho,\sigma,1),\omega)}^{T^{[\mu]}(i,j,k)}, \quad (5.15b)$$

wobei $\rho, \sigma, \omega \geq 0$, $\rho + \sigma + \omega = q - 1$, $\nu, \mu \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\nu < \mu$ und
 $\nu, \mu \neq 1$, falls $i = 0$, $j = 0$ oder $k = 0$, $\nu, \mu \neq 2$, falls $i = n$, $j = n$ oder $k = 0$,
 $\nu, \mu \neq 3$, falls $i = n$, $j = 0$ oder $k = n$, $\nu, \mu \neq 4$, falls $i = 0$, $j = n$ oder $k = n$.

Lemma 5.2 (Differenzierbarkeitsbedingungen)

Sei Δ_4 eine Typ-4 Partition und $s \in \mathcal{S}_q^{-1}(\Delta_4)$ ein Spline gegeben in seiner stückweisen Bernstein-Bézier-Darstellung. Dann gilt, $s \in \mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$ genau dann, wenn die Bedingungen (5.8),(5.10),(5.12) und (5.14) für alle Koeffizienten b_ξ , $\xi \in \mathcal{D}_q(\Delta_4)$ von s erfüllt werden.

Unter Berücksichtigung dieser Differenzierbarkeitsbedingungen werden wir in Abschnitt 5.3 eine minimale bestimmende Menge \mathcal{M} für den Raum $\mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$, $q \geq 4$, konstruieren. Dabei werden wir in zwei Schritten vorgehen und im ersten Schritt zunächst eine Menge von Koeffizienten bestimmen, die einen Spline $s \in \mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$,

5.1. C^1 -Splines auf Typ-4 Partitionen

$q \geq 4$, auf den Oberflächen der Oktaeder, also auf den Schnittebenen L_ν , $\nu \in \{1, 2, 3, 4\}$, eindeutig festlegt. Im zweiten Schritt werden wir diese Menge zu einer minimalen bestimmenden Menge für C^1 -Splines hinsichtlich der Gesamt-Partition Δ_4 erweitern, indem wir gewisse Koeffizienten, die mit Domain-Points im Inneren der Tetraeder assoziiert sind, dieser Menge hinzufügen. Im Folgenden geben wir daher zunächst eine Charakterisierung der bivariaten Differenzierbarkeitsbedingungen auf den Schnittebenen an. Diese Differenzierbarkeitsbedingungen ergeben sich direkt aus den Bedingungen (5.8) und (5.10) für $\rho = 0$, $\sigma = 0$ oder $\tau = 0$. Grob gesprochen also durch Kombination von Differenzierbarkeitsbedingungen, die Koeffizienten involvieren, deren assoziierte Domain-Points in Distanz null und eins zu Kanten vom Typ-2 liegen.

Sei $s \in \mathcal{S}_q^{-1}(\Delta_4)$ ein Spline gegeben in seiner stückweisen Bernstein-Bézier-Darstellung. Dann ist s stetig auf allen Schnittebenen L_ν , $\nu \in \{1, \dots, 4\}$, wenn für $i, j, k = 1, \dots, n$ gilt

$$b_\alpha = b_\beta, \quad (5.16)$$

wobei α und β gegeben sind durch

$$\alpha = \xi_{(\pi_{\nu,\mu}(\rho,\sigma,0),0)}^{T_{\lambda_\nu}^{[\nu]}(i,j,k)} \quad \text{und} \quad \beta = \xi_{(\pi_{\mu,\nu}(\rho,\sigma,0),0)}^{T_{\lambda_\mu}^{[-\nu]}(i,j,k)}, \quad (5.17a)$$

für $i + j + k$ ungerade, $\rho, \sigma \geq 0$, $\rho + \sigma = q$, $\mu \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\mu \neq \nu$ und
 $i \neq 1$, falls $\nu, \mu \in \{1, 4\}$, $j \neq 1$, falls $\nu, \mu \in \{1, 3\}$, $k \neq 1$, falls $\nu, \mu \in \{1, 2\}$,
 $i \neq n$, falls $\nu, \mu \in \{2, 3\}$, $j \neq n$, falls $\nu, \mu \in \{2, 4\}$, $k \neq n$, falls $\nu, \mu \in \{3, 4\}$,

und

$$\alpha = \xi_{(\pi_{\nu,\mu}(\rho,\sigma,0),0)}^{T_{\lambda_{-\nu}}^{[-\nu]}(i,j,k)} \quad \text{und} \quad \beta = \xi_{(\pi_{\mu,\nu}(\rho,\sigma,0),0)}^{T_{\lambda_\mu}^{[\nu]}(i,j,k)}, \quad (5.17b)$$

für $i + j + k$ gerade, $\rho, \sigma \geq 0$, $\rho + \sigma = q$, $\mu \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\mu \neq \nu$ und
 $i \neq 1$, falls $\nu, \mu \in \{2, 3\}$, $j \neq 1$, falls $\nu, \mu \in \{2, 4\}$, $k \neq 1$, falls $\nu, \mu \in \{3, 4\}$,
 $i \neq n$, falls $\nu, \mu \in \{1, 4\}$, $j \neq n$, falls $\nu, \mu \in \{1, 3\}$, $k \neq n$, falls $\nu, \mu \in \{1, 2\}$.

Ein Spline $s \in \mathcal{S}_q^0(\Delta_4)$ ist C^1 -differenzierbar auf allen Schnittebenen L_ν , $\nu \in \{1, \dots, 4\}$, wenn für $i, j, k = 1, \dots, n$ gilt

$$b_\alpha = b_\beta + b_\gamma - b_\delta, \quad (5.18)$$

5. Dimension trivariater Splines auf Typ-4 Partitionen

wobei α , β , γ und δ gegeben sind durch

$$\alpha = \xi_{(\pi_{\nu,\mu}(\rho,\sigma,1),0)}^{T_{\lambda_{\nu}^{[\nu]}(i,j,k)}}, \quad \beta = \xi_{(\pi_{\nu,\mu}(\rho+1,\sigma,0),0)}^{T_{\lambda_{\nu}^{[\nu]}(i,j,k)}}, \quad \gamma = \xi_{(\pi_{\nu,\mu}(\rho,\sigma+1,0),0)}^{T_{\lambda_{\nu}^{[\nu]}(i,j,k)}} \quad \text{und} \quad \delta = \xi_{(\pi_{\mu,\nu}(\rho,\sigma,1),0)}^{T_{\lambda_{\mu}^{[-\nu]}(i,j,k)}}, \quad (5.19a)$$

für $i + j + k$ ungerade, $\rho, \sigma \geq 0$, $\rho + \sigma = q - 1$, $\mu \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\mu \neq \nu$ und
 $i \neq 1$, falls $\nu, \mu \in \{1, 4\}$, $j \neq 1$, falls $\nu, \mu \in \{1, 3\}$, $k \neq 1$, falls $\nu, \mu \in \{1, 2\}$,
 $i \neq n$, falls $\nu, \mu \in \{2, 3\}$, $j \neq n$, falls $\nu, \mu \in \{2, 4\}$, $k \neq n$, falls $\nu, \mu \in \{3, 4\}$,

und

$$\alpha = \xi_{(\pi_{\nu,\mu}(\rho,\sigma,1),0)}^{T_{\lambda_{-\nu}^{[-\nu]}(i,j,k)}}, \quad \beta = \xi_{(\pi_{\nu,\mu}(\rho+1,\sigma,0),0)}^{T_{\lambda_{-\nu}^{[-\nu]}(i,j,k)}}, \quad \gamma = \xi_{(\pi_{\nu,\mu}(\rho,\sigma+1,0),0)}^{T_{\lambda_{-\nu}^{[-\nu]}(i,j,k)}} \quad \text{und} \quad \delta = \xi_{(\pi_{\mu,\nu}(\rho,\sigma,1),0)}^{T_{\lambda_{-\mu}^{[\nu]}(i,j,k)}}, \quad (5.19b)$$

für $i + j + k$ gerade, $\rho, \sigma \geq 0$, $\rho + \sigma = q - 1$, $\mu \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\mu \neq \nu$ und
 $i \neq 1$, falls $\nu, \mu \in \{2, 3\}$, $j \neq 1$, falls $\nu, \mu \in \{2, 4\}$, $k \neq 1$, falls $\nu, \mu \in \{3, 4\}$,
 $i \neq n$, falls $\nu, \mu \in \{1, 4\}$, $j \neq n$, falls $\nu, \mu \in \{1, 3\}$, $k \neq n$, falls $\nu, \mu \in \{1, 2\}$.

Im Folgenden wollen wir speziell die Zusammenhänge zwischen den C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen (5.18) näher untersuchen, die Koeffizienten involvieren, deren assoziierte Domain-Points in der Nähe der inneren Knoten vom Typ-2 liegen. Wir bezeichnen dazu mit $\Delta_v \subset \Delta_4$, $v \in V_{I,2}$, die Teilpartition bestehend aus allen Tetraedern $T \in \Delta_4$, die den gemeinsamen Eckpunkt v besitzen. Wir nennen Δ_v dann die Zelle (mit Radius 1) um v und geben eine Beschreibung der bivariaten C^1 -Bedingungen auf den Schnittebenen L_ν , $\nu \in \{1, \dots, 4\}$, hinsichtlich dieser Zelle.

Ein Spline $s \in \mathcal{S}_q^0(\Delta_v)$, $v \in V_{I,2}$ ist C^1 -differenzierbar auf allen Schnittebenen L_ν , $\nu \in \{1, \dots, 4\}$, wenn gilt (5.18), wobei α , β , γ und δ gegeben sind durch

$$\alpha = \xi_{(\pi_{\mu_1,\mu_2}(\rho,\sigma,1),0)}^{T_{\lambda_{-\nu}^{[\nu]}(\lambda_{\mu_1}(v))}}, \quad \beta = \xi_{(\pi_{\mu_1,\mu_2}(\rho+1,\sigma,0),0)}^{T_{\lambda_{-\nu}^{[\nu]}(\lambda_{\mu_1}(v))}}, \quad \gamma = \xi_{(\pi_{\mu_1,\mu_2}(\rho,\sigma+1,0),0)}^{T_{\lambda_{-\nu}^{[\nu]}(\lambda_{\mu_1}(v))}},$$

$$\text{und } \delta = \xi_{(\pi_{\mu_2,\mu_1}(\rho,\sigma,1),0)}^{T_{\lambda_{\nu}^{[-\nu]}(\lambda_{-\mu_2}(v))}}, \quad (5.20a)$$

für $\rho, \sigma \geq 0$, $\rho + \sigma = q - 1$, $\nu, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \{1, 2, 3, 4\}$ p.v. und $\nu > \mu_3$,

und

$$\alpha = \xi_{(\pi_{\mu_2,\mu_1}(\rho,\sigma,1),0)}^{T_{\lambda_{-\nu}^{[\nu]}(\lambda_{\mu_1}(v))}}, \quad \beta = \xi_{(\pi_{\mu_2,\mu_1}(\rho+1,\sigma,0),0)}^{T_{\lambda_{-\nu}^{[\nu]}(\lambda_{\mu_1}(v))}}, \quad \gamma = \xi_{(\pi_{\mu_2,\mu_1}(\rho,\sigma+1,0),0)}^{T_{\lambda_{-\nu}^{[\nu]}(\lambda_{\mu_1}(v))}},$$

$$\text{und } \delta = \xi_{(\pi_{\mu_1,\mu_2}(\rho,\sigma,1),0)}^{T_{\lambda_{\nu}^{[-\nu]}(\lambda_{-\mu_2}(v))}}, \quad (5.20b)$$

für $\rho, \sigma \geq 0$, $\rho + \sigma = q - 1$, $\nu, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \{1, 2, 3, 4\}$ p.v. und $\nu < \mu_3$.

5.1. C^1 -Splines auf Typ-4 Partitionen

Hiermit wird ersichtlich, dass Koeffizienten, die mit Domain-Points $\xi \in \mathcal{D}^2(v)$ assoziiert sind, in mehrere Bedingungen der Form (5.18) hinsichtlich Δ_v involviert sind. Insbesondere die Koeffizienten, die mit Domain-Points $\xi \in \mathcal{R}^2(v)$ assoziiert sind, stehen dadurch miteinander in Zusammenhang. Das folgende Lemma beschreibt die durch diese Verflechtungen von Differenzierbarkeitsbedingungen entstehenden Relationen zwischen den Koeffizienten b_ξ , $\xi \in \mathcal{R}^2(v)$, hinsichtlich der Schnittebenen L_ν , $\nu \in \{1, \dots, 4\}$.

Lemma 5.3 (Versteckte Bedingungen)

Seien Δ_4 eine Typ-4 Partition und $\Delta_v \subset \Delta_4$ die Zelle um den Knoten $v \in V_{I,2}$. Dann genügen alle C^1 -Splines auf Δ_v den folgenden versteckten Bedingungen:

$$b_\alpha = b_\beta + b_\gamma + b_\delta - b_\eta - b_\zeta, \quad (5.21)$$

wobei α , β , γ , δ , η und ζ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi_{(\pi_{3,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_4(v))}^{[1]}}, & \beta &= \xi_{(\pi_{4,3}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_3(v))}^{[1]}}, & \gamma &= \xi_{(\pi_{2,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_4(v))}^{[1]}}, \\ \delta &= \xi_{(\pi_{3,2}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_2(v))}^{[1]}}, & \eta &= \xi_{(\pi_{4,2}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_2(v))}^{[1]}}, & \zeta &= \xi_{(\pi_{2,3}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_3(v))}^{[1]}}, \end{aligned} \quad (5.22a)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi_{(\pi_{1,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_4(v))}^{[2]}}, & \beta &= \xi_{(\pi_{4,1}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_1(v))}^{[2]}}, & \gamma &= \xi_{(\pi_{1,3}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_3(v))}^{[2]}}, \\ \delta &= \xi_{(\pi_{4,3}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_4(v))}^{[2]}}, & \eta &= \xi_{(\pi_{3,1}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_1(v))}^{[2]}}, & \zeta &= \xi_{(\pi_{3,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_3(v))}^{[2]}}, \end{aligned} \quad (5.22b)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi_{(\pi_{1,2}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_2(v))}^{[3]}}, & \beta &= \xi_{(\pi_{2,1}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_1(v))}^{[3]}}, & \gamma &= \xi_{(\pi_{4,1}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_4(v))}^{[3]}}, \\ \delta &= \xi_{(\pi_{2,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_2(v))}^{[3]}}, & \eta &= \xi_{(\pi_{1,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_1(v))}^{[3]}}, & \zeta &= \xi_{(\pi_{4,2}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_4(v))}^{[3]}}, \end{aligned} \quad (5.22c)$$

und

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi_{(\pi_{2,1}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_2(v))}^{[4]}}, & \beta &= \xi_{(\pi_{1,2}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_1(v))}^{[4]}}, & \gamma &= \xi_{(\pi_{3,1}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_3(v))}^{[4]}}, \\ \delta &= \xi_{(\pi_{2,3}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_2(v))}^{[4]}}, & \eta &= \xi_{(\pi_{1,3}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_1(v))}^{[4]}}, & \zeta &= \xi_{(\pi_{3,2}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_3(v))}^{[4]}}. \end{aligned} \quad (5.22d)$$

Beweis: Wir zeigen lediglich die Herleitung der versteckten Bedingung (5.21), wobei α , β, γ , δ , η und ζ gegeben sind durch (5.22a), also die Bedingung hinsichtlich der Schnittebene L_1 , da auf Grund der regelmäßigen Struktur der Typ-4 Partition

5. Dimension trivariater Splines auf Typ-4 Partitionen

der Beweis der Bedingungen bezüglich der Schnittebenen L_ν , $\nu \in \{2, \dots, 4\}$, analog verläuft.

Durch Kombination der Gleichungen (5.18), wobei α , β , γ und δ gegeben sind durch (5.20b) für $\rho = q-1$ und $\nu = 1$, erhalten wir den folgenden Zusammenhang zwischen den Koeffizienten b_ξ , $\xi \in \mathcal{D}^2(v)$:

$$b_{\alpha_2} + b_{\beta_2} + b_{\gamma_2} + b_{\alpha_1} + b_{\beta_1} + b_{\gamma_1} = b_{\delta_2} + b_{\eta_2} + b_{\zeta_2} + b_{\delta_1} + b_{\eta_1} + b_{\zeta_1}, \quad (5.23)$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \eta_1, \eta_2, \zeta_1$ und ζ_2 gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \xi_{(\pi_{3,4}(q-1,1,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_4(v))}}, & \beta_1 &= \xi_{(\pi_{4,3}(q-1,1,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_3(v))}}, & \gamma_1 &= \xi_{(\pi_{2,4}(q-1,1,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_4(v))}}, \\ \delta_1 &= \xi_{(\pi_{3,2}(q-1,1,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_2(v))}}, & \eta_1 &= \xi_{(\pi_{4,2}(q-1,1,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_2(v))}}, & \zeta_1 &= \xi_{(\pi_{2,3}(q-1,1,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_3(v))}}, \\ \alpha_2 &= \xi_{(\pi_{3,4}(q-2,2,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_4(v))}}, & \beta_2 &= \xi_{(\pi_{4,3}(q-2,2,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_3(v))}}, & \gamma_2 &= \xi_{(\pi_{2,4}(q-2,2,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_4(v))}}, \\ \delta_2 &= \xi_{(\pi_{3,2}(q-2,2,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_2(v))}}, & \eta_2 &= \xi_{(\pi_{4,2}(q-2,2,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_2(v))}}, & \zeta_2 &= \xi_{(\pi_{2,3}(q-2,2,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_3(v))}}. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir durch Kombination der Gleichungen (5.18), wobei α , β , γ und δ gegeben sind durch (5.20b) für $\rho = q$ und $\nu = 1$, den folgenden Zusammenhang zwischen den Koeffizienten b_ξ , $\xi \in \mathcal{D}^1(v)$:

$$b_{\alpha_1} + b_{\beta_1} + b_{\gamma_1} + b_{\alpha_0} + b_{\beta_0} + b_{\gamma_0} = b_{\delta_1} + b_{\eta_1} + b_{\zeta_1} + b_{\delta_0} + b_{\eta_0} + b_{\zeta_0},$$

wobei α_0 , α_1 , β_0 , β_1 , γ_0 , γ_1 , δ_0 , δ_1 , η_0 , η_1 , ζ_0 und ζ_1 gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \xi_{(\pi_{3,4}(q,0,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_4(v))}}, & \beta_0 &= \xi_{(\pi_{4,3}(q,0,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_3(v))}}, & \gamma_0 &= \xi_{(\pi_{2,4}(q,0,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_4(v))}}, \\ \delta_0 &= \xi_{(\pi_{3,2}(q,0,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_2(v))}}, & \eta_0 &= \xi_{(\pi_{4,2}(q,0,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_2(v))}}, & \zeta_0 &= \xi_{(\pi_{2,3}(q,0,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_3(v))}}, \\ \alpha_1 &= \xi_{(\pi_{3,4}(q-1,1,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_4(v))}}, & \beta_1 &= \xi_{(\pi_{4,3}(q-1,1,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_3(v))}}, & \gamma_1 &= \xi_{(\pi_{2,4}(q-1,1,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_4(v))}}, \\ \delta_1 &= \xi_{(\pi_{3,2}(q-1,1,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_2(v))}}, & \eta_1 &= \xi_{(\pi_{4,2}(q-1,1,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_2(v))}}, & \zeta_1 &= \xi_{(\pi_{2,3}(q-1,1,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda^{-1}(\lambda_3(v))}}. \end{aligned}$$

Da die Domain-Points α_0 , β_0 , γ_0 , δ_0 , η_0 und ζ_0 alle mit dem Knoten v identisch sind, folgt daraus

$$b_{\alpha_1} + b_{\beta_1} + b_{\gamma_1} = b_{\delta_1} + b_{\eta_1} + b_{\zeta_1},$$

5.1. C^1 -Splines auf Typ-4 Partitionen

wobei $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \eta_1$ und ζ_1 gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \xi_{(\pi_{3,4}(q-1,1,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_4(v))}^{[1]}}, & \beta_1 &= \xi_{(\pi_{4,3}(q-1,1,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_3(v))}^{[1]}}, & \gamma_1 &= \xi_{(\pi_{2,4}(q-1,1,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_4(v))}^{[1]}}, \\ \delta_1 &= \xi_{(\pi_{3,2}(q-1,1,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_2(v))}^{[1]}}, & \eta_1 &= \xi_{(\pi_{4,2}(q-1,1,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_2(v))}^{[1]}}, & \zeta_1 &= \xi_{(\pi_{2,3}(q-1,1,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_3(v))}^{[1]}}. \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir nun diesen Zusammenhang der Koeffizienten $b_\xi, \xi \in \mathcal{R}^1(v)$ in der obigen Gleichung (5.23), so erhalten wir die versteckte Bedingung (5.21), wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ und ζ gegeben sind durch (5.22a).

□

Es gibt also an jedem Knoten $v \in V_{I,2}$ vier versteckte Bedingungen hinsichtlich der Schnittebenen $L_\nu, \nu \in \{1, \dots, 4\}$, welche Koeffizienten involvieren, deren assoziierte Domain-Points im Ring mit Radius 2 um den Knoten v und auf Kanten vom Typ-2 liegen. Da sich in den Kanten vom Typ-2 jeweils 2 der Schnittebenen $L_\nu, \nu \in \{1, \dots, 4\}$ schneiden, sind diese Koeffizienten auch jeweils in 2 der versteckten Bedingungen (5.21) involviert. Das folgende wichtige Lemma zeigt den Zusammenhang, in dem die versteckten Bedingungen hinsichtlich der Schnittebenen $L_\nu, \nu \in \{1, \dots, 4\}$ miteinander stehen.

Lemma 5.4 (Zusammenhang versteckter Bedingungen)

Seien Δ_4 eine Typ-4 Partition, $\Delta_v \subset \Delta_4$ die Zelle um den Knoten $v \in V_{I,2}$ und $b_\xi, \xi \in V_{I,2} \cap E_2$ die Koeffizienten eines Splines $s \in \mathcal{S}_q^0(\Delta_v)$, welche die versteckten Bedingungen (5.21) auf Δ_v erfüllen, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ und ζ gegeben sind durch (5.22a-c). Dann erfüllen diese Koeffizienten auch die Bedingung (5.21) auf Δ_v , wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ und ζ gegeben sind durch (5.22d).

Beweis: Wir stellen zunächst fest, dass bereits alle Koeffizienten festgelegt sind, die in die Bedingung (5.21), wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ und ζ gegeben sind durch (5.22d), involviert sind. Wir zeigen nun, dass diese Bedingung identisch ist mit einer Kombination der Bedingungen (5.21), wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ und ζ gegeben sind durch (5.22a-c). Wir erhalten durch einfache Umformung der Bedingungen (5.21), wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ und ζ gegeben sind durch (5.22a-c), die folgenden drei Gleichungen. Es gilt

$$(b_\alpha - b_\beta) + (b_\eta - b_\gamma) + (b_\zeta - b_\delta) = 0,$$

5. Dimension trivariater Splines auf Typ-4 Partitionen

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ und ζ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi_{(\pi_{3,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_4(v))}^{[1]}}, & \beta &= \xi_{(\pi_{4,3}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_3(v))}^{[1]}}, & \gamma &= \xi_{(\pi_{2,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_4(v))}^{[1]}}, \\ \delta &= \xi_{(\pi_{3,2}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_2(v))}^{[1]}}, & \eta &= \xi_{(\pi_{4,2}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_2(v))}^{[1]}}, & \zeta &= \xi_{(\pi_{2,3}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_3(v))}^{[1]}}, \\ \alpha &= \xi_{(\pi_{1,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_4(v))}^{[2]}}, & \beta &= \xi_{(\pi_{4,1}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_1(v))}^{[2]}}, & \gamma &= \xi_{(\pi_{1,3}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_3(v))}^{[2]}}, \\ \delta &= \xi_{(\pi_{4,3}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_4(v))}^{[2]}}, & \eta &= \xi_{(\pi_{3,1}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_1(v))}^{[2]}}, & \zeta &= \xi_{(\pi_{3,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_3(v))}^{[2]}}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi_{(\pi_{1,2}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_2(v))}^{[3]}}, & \beta &= \xi_{(\pi_{2,1}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_1(v))}^{[3]}}, & \gamma &= \xi_{(\pi_{4,1}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_4(v))}^{[3]}}, \\ \delta &= \xi_{(\pi_{2,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_2(v))}^{[3]}}, & \eta &= \xi_{(\pi_{1,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_1(v))}^{[3]}}, & \zeta &= \xi_{(\pi_{4,2}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_4(v))}^{[3]}}. \end{aligned}$$

Beachten wir nun die Stetigkeit von s an den Kanten E_2 , so gilt für die Koeffizienten auf diesen Kanten

$$b_\alpha = b_\beta,$$

wobei α und β gegeben sind durch

$$\alpha = \xi_{(\pi_{\mu_2, \mu_1}(\rho, \sigma, 0), 0)}^{T_{\lambda_{-\nu}^{-1}(\lambda_{\mu_1(v)})}^{[\nu]}} \quad \text{und} \quad \beta = \xi_{(\pi_{\mu_1, \mu_2}(\rho, \sigma, 0), 0)}^{T_{\lambda_{-\mu_3}^{-1}(\lambda_{\mu_1(v)})}^{[\mu_3]}},$$

für $\rho, \sigma \geq 0, \rho + \sigma = q, \nu, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \{1, 2, 3, 4\}$ paarweise verschieden.

Unter Berücksichtigung dieser Stetigkeitsbedingungen für $\rho = q - 2$, lassen sich die obigen drei Gleichungen wie folgt ausdrücken. Es gilt

$$(b_\alpha - b_\beta) + (b_\eta - b_\gamma) + (b_\zeta - b_\delta) = 0,$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ und ζ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi_{(\pi_{4,3}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_4(v))}^{[2]}}, & \beta &= \xi_{(\pi_{3,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_3(v))}^{[2]}}, & \gamma &= \xi_{(\pi_{4,2}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_4(v))}^{[3]}}, \\ \delta &= \xi_{(\pi_{2,3}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_2(v))}^{[4]}}, & \eta &= \xi_{(\pi_{2,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_2(v))}^{[3]}}, & \zeta &= \xi_{(\pi_{3,2}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_3(v))}^{[4]}}, \\ \alpha &= \xi_{(\pi_{4,1}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_4(v))}^{[3]}}, & \beta &= \xi_{(\pi_{1,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_1(v))}^{[3]}}, & \gamma &= \xi_{(\pi_{3,1}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_3(v))}^{[4]}}, \\ \delta &= \xi_{(\pi_{4,3}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_4(v))}^{[2]}}, & \eta &= \xi_{(\pi_{1,3}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_1(v))}^{[4]}}, & \zeta &= \xi_{(\pi_{3,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_3(v))}^{[2]}}. \end{aligned}$$

5.1. C^1 -Splines auf Typ-4 Partitionen

und

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi_{(\pi_{2,1}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_2(v))}^{[4]}}, & \beta &= \xi_{(\pi_{1,2}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_1(v))}^{[4]}}, & \gamma &= \xi_{(\pi_{4,1}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_4(v))}^{[3]}}, \\ \delta &= \xi_{(\pi_{2,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_2(v))}^{[3]}}, & \eta &= \xi_{(\pi_{1,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_1(v))}^{[3]}}, & \zeta &= \xi_{(\pi_{4,2}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_4(v))}^{[3]}}. \end{aligned}$$

Durch die Kombination dieser drei Gleichungen erhalten wir

$$(b_\alpha - b_\beta) + (b_\eta - b_\gamma) + (b_\zeta - b_\delta) = 0,$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ und ζ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi_{(\pi_{2,1}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_2(v))}^{[4]}}, & \beta &= \xi_{(\pi_{1,2}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_1(v))}^{[4]}}, & \gamma &= \xi_{(\pi_{3,1}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_3(v))}^{[4]}}, \\ \delta &= \xi_{(\pi_{2,3}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_2(v))}^{[4]}}, & \eta &= \xi_{(\pi_{1,3}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_1(v))}^{[4]}}, & \zeta &= \xi_{(\pi_{3,2}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_3(v))}^{[4]}}. \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zur Bedingung (5.21), wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ und ζ gegeben sind durch (5.22d). □

Dieser Zusammenhang zwischen den versteckten Bedingungen hinsichtlich der Schnittebenen $L_\nu, \nu \in \{1, \dots, 4\}$, ist der Schlüssel zu unserer Methode zur Konstruktion einer minimalen bestimmenden Menge für C^1 -Splines vom Grad $q \geq 4$ auf Δ_4 . Denn es ist dadurch möglich einen Spline $s \in \mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$ nacheinander auf den Ebenen $L_\nu, \nu \in \{1, \dots, 4\}$, eindeutig festzulegen, ohne dass bei der abschließenden Bestimmung des Splines auf der Ebene L_4 eine Überbestimmung der Koeffizienten durch die versteckte Bedingung (5.21) hinsichtlich dieser Ebene auftritt.

5.2. Dimension von Splines auf Typ-4 Partitionen

Wir geben in diesem Abschnitt zunächst das Hauptresultat dieses Kapitels, die Dimension des Splineraums $\mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$, $q \geq 4$, an. Der Beweis dieses Ergebnisses wird dann im folgenden Abschnitt durch die Konstruktion einer geeigneten minimalen bestimmenden Menge für diesen Raum geschehen.

Satz 5.5 (Dimension)

Sei Δ_4 die Typ-4 Partition einer gleichmäßigen Würfelpartition von n^3 Würfeln, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Dimension von $\mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$, $q \geq 4$, gegeben durch:

$$\frac{1}{6}(5q^3 - 30q^2 + 61q - 45)n^3 + \frac{3}{2}(4q^2 - 14q + 13)n^2 + \frac{3}{2}(8q - 11)n + 8,$$

falls n gerade

und

$$\frac{1}{6}(5q^3 - 30q^2 + 61q - 45)n^3 + \frac{3}{2}(4q^2 - 14q + 13)n^2 + \frac{3}{2}(8q - 11)n + \frac{11}{2},$$

falls n ungerade.

Zur Veranschaulichung unseres Hauptresultats aus Satz 5.5 vergleichen wir in der folgenden Tabelle für $q \in \{4, \dots, 9\}$ die Dimension von $\mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$ mit der Dimension stetiger und unstetiger Splineräume gleichen Grades.

q	$\dim \mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$	$\dim \mathcal{S}_q^0(\Delta_4)$	$\dim \mathcal{S}_q^{-1}(\Delta_4)$
4	$\frac{1}{2}(13n^3 + 63n^2 + 63n + K_n)$	$54n^3 + 48n^2 + 12n + 1$	$175n^3$
5	$\frac{1}{2}(45n^3 + 129n^2 + 87n + K_n)$	$105n^3 + 75n^2 + 15n + 1$	$280n^3$
6	$\frac{1}{2}(107n^3 + 219n^2 + 111n + K_n)$	$181n^3 + 108n^2 + 18n + 1$	$420n^3$
7	$\frac{1}{2}(209n^3 + 333n^2 + 135n + K_n)$	$287n^3 + 147n^2 + 21n + 1$	$600n^3$
8	$\frac{1}{2}(361n^3 + 471n^2 + 159n + K_n)$	$428n^3 + 192n^2 + 24n + 1$	$825n^3$
9	$\frac{1}{2}(573n^3 + 633n^2 + 183n + K_n)$	$609n^3 + 243n^2 + 27n + 1$	$1100n^3$

Tabelle 5.1.: Für die Konstante K_n gilt hier $K_n = 16$, falls n gerade, und $K_n = 11$, falls n ungerade.

5.3. Konstruktion einer minimalen bestimmenden Menge

In diesem Abschnitt konstruieren wir eine minimale bestimmende Menge \mathcal{M} für den Raum $\mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$, $q \geq 4$, wobei Δ_4 die Typ-4 Partition einer gleichmäßigen Würfelpartition von n^3 Würfeln ist. Durch die Bestimmung der Kardinalität dieser Menge werden wir auch den Beweis zu der bereits im vorherigen Abschnitt angegebenen Dimension des Raums $\mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$, $q \geq 4$, liefern.

Zur Konstruktion der Menge \mathcal{M} definieren wir im Folgenden zunächst gewisse Hilfsmengen. Da es sich hier zum Teil um komplexe Mengen handelt, werden wir im Anschluß an die Definitionen jeweils eine kurze Beschreibung dieser Mengen geben und auch bereits die Kardinalitäten dieser Mengen in Abhängigkeit von den Knoten, Kanten und Würfeln von Δ_4 bestimmen. Wir beginnen, indem wir zunächst nur Punktlagen wählen, die auf den im ersten Abschnitt in (5.2) definierten Schnittebenen L_ν , $\nu \in \{1, \dots, 4\}$, liegen.

Für $i, j, k = 1, \dots, n$, definieren wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{V(i,j,k)}^{[1]} &:= \{\xi_{(q,0,0,0)}^{T(i,j,k)}, \xi_{(q-1,1,0,0)}^{T(i,j,k)}, \xi_{(q-1,0,1,0)}^{T(i,j,k)}, \xi_{(q-1,0,0,1)}^{T(i,j,k)}\}, \\ \mathcal{M}_{V(i,j,k)}^{[2]} &:= \{\xi_{(0,q,0,0)}^{T(i,j,k)}, \xi_{(1,q-1,0,0)}^{T(i,j,k)}, \xi_{(0,q-1,1,0)}^{T(i,j,k)}, \xi_{(0,q-1,0,1)}^{T(i,j,k)}\}, \\ \mathcal{M}_{V(i,j,k)}^{[3]} &:= \{\xi_{(0,0,q,0)}^{T(i,j,k)}, \xi_{(1,0,q-1,0)}^{T(i,j,k)}, \xi_{(0,1,q-1,0)}^{T(i,j,k)}, \xi_{(0,0,q-1,1)}^{T(i,j,k)}\}, \\ \mathcal{M}_{V(i,j,k)}^{[4]} &:= \{\xi_{(0,0,0,q)}^{T(i,j,k)}, \xi_{(1,0,0,q-1)}^{T(i,j,k)}, \xi_{(0,1,0,q-1)}^{T(i,j,k)}, \xi_{(0,0,1,q-1)}^{T(i,j,k)}\}. \end{aligned}$$

Diese Mengen bestehen aus den Domain-Points der Tetraeder $T_{(i,j,k)} \subset Q_{(i,j,k)}$, $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, die in der Kugel mit Radius eins um die Eckpunkte von $T_{(i,j,k)}$ liegen. Mit Hilfe dieser Mengen definieren wir nun

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_V &:= \left[\bigcup_{\substack{i,j,k=1,\dots,n \\ i+j+k \text{ ungerade}}} \mathcal{M}_{V(i,j,k)}^{[1]} \right] \\ &\cup \left[\bigcup_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ i+j+1 \text{ ungerade}}} (\mathcal{M}_{V(1,i,j)}^{[2]} \cup \mathcal{M}_{V(i,j,1)}^{[3]} \cup \mathcal{M}_{V(i,1,j)}^{[4]}) \right] \\ &\cup \left[\bigcup_{\substack{i=2,\dots,n \\ i+n+1 \text{ ungerade}}} (\mathcal{M}_{V(i,1,n)}^{[2]} \cup \mathcal{M}_{V(1,n,i)}^{[3]} \cup \mathcal{M}_{V(n,i,1)}^{[4]}) \right], \end{aligned} \tag{5.24}$$

so dass an jedem Knoten vom Typ-2 genau vier Punkte dieser Menge in der Kugel mit Radius eins um diesen Knoten liegen. Es gilt also für die Kardinalität dieser

5. Dimension trivariater Splines auf Typ-4 Partitionen

Menge:

$$\#\mathcal{M}_V = 4\#V_2. \quad (5.25)$$

Die nächste Hilfsmenge \mathcal{A} ist so gewählt, dass sie jeweils drei der Domain-Points enthält, die mit Koeffizienten assoziiert sind, die in die versteckten Bedingungen der Form (5.21), hinsichtlich der Knoten $v \in V_{I,2}$, involviert sind:

$$\mathcal{A} := \bigcup_{\substack{i,j,k=1,\dots,n-1 \\ i+j+k \text{ ungerade}}} \left\{ \xi_{(\pi_{3,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_4(i,j,k))}^{[1]}}, \xi_{(\pi_{1,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_4(i,j,k))}^{[2]}}, \xi_{(\pi_{1,2}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_2(i,j,k))}^{[3]}} \right\}. \quad (5.26)$$

Wir definieren weiter die Mengen \mathcal{M}_{E_1} und \mathcal{M}_{E_2} durch

$$\mathcal{M}_{E_1} := \bigcup_{\substack{i,j,k=1,\dots,n \\ i+j+k \text{ gerade}}} \bigcup_{\substack{\nu,\mu=1,\dots,4 \\ \nu < \mu}} \left\{ \xi_{(\pi_{\nu,\mu}(\rho,\sigma,0),0)}^{T_{\lambda_{-\nu}^{[-\nu]}(i,j,k)}} : \rho, \sigma \geq 2, \rho + \sigma = q \right\}$$

und

$$\mathcal{M}_{E_2} := \bigcup_{\substack{i,j,k=1,\dots,n \\ i+j+k \text{ ungerade}}} \bigcup_{\substack{\nu,\mu=1,\dots,4 \\ \nu < \mu}} \left\{ \xi_{(\pi_{\nu,\mu}(\rho,\sigma,0),0)}^{T_{\lambda_{\nu}^{[\nu]}(i,j,k)}} : \rho, \sigma \geq 2, \rho + \sigma = q \right\}.$$

Die Mengen \mathcal{M}_{E_1} bzw. \mathcal{M}_{E_2} enthalten Domain-Points der Würfel vom Typ-1 bzw. Typ-2, die auf Kanten vom Typ-2 liegen und mindestens in Distanz zwei zu den Knoten vom Typ-2 von Δ_4 liegen. Mit der Menge \mathcal{M}_E definiert durch

$$\mathcal{M}_E := \mathcal{M}_{E_1} \cup \mathcal{M}_{E_2} \setminus \mathcal{A}, \quad (5.27)$$

beschreiben wir dann grob gesprochen alle Domain-Points von Δ_4 , die auf Kanten vom Typ-2 und mindestens in Distanz zwei zu den Knoten von Δ_4 liegen, mit Ausnahme gewisser Punkte, die mit Koeffizienten assoziiert sind, die in die Bedingungen (5.21) involviert sind. Für die Kardinalität dieser Menge gilt dann:

$$\#\mathcal{M}_E = (q-3)\#E_2 - 3\#V_{I,2}. \quad (5.28)$$

Die folgenden Hilfsmengen $\mathcal{M}_{\widehat{F}_\nu}$, $\nu \in \{1, \dots, 4\}$, sind so gewählt, dass sie für jeden Knoten vom Typ-2 genau einen Punkt enthalten, der in der Hülle $\mathcal{R}^2(v) \cap L_\nu$ liegt, aber nicht auf einer Kante von Δ_4 :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\widehat{F}_1} := & \bigcup_{\substack{i,j,k=1,\dots,n \\ i+j+k \text{ ungerade}}} \left\{ \xi_{(\pi_{3,4}(q-2,1,1),0)}^{T_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_4(i,n-j,n-k))}^{[1]}} \right\} \cup \bigcup_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ i+j \text{ ungerade}}} \left\{ \xi_{(\pi_{3,4}(q-2,1,1),0)}^{T_{\lambda_1^{-1}(\lambda_{-4}(0,i,j))}^{[-1]}} \right\} \\ & \cup \bigcup_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ i+j+n \text{ ungerade}}} \left\{ \xi_{(\pi_{3,4}(q-2,1,1),0)}^{T_{\lambda_1^{-1}(\lambda_{-4}(i,n,j))}^{[-1]}} \right\}, \xi_{(\pi_{3,4}(q-2,1,1),0)}^{T_{\lambda_1^{-1}(\lambda_{-4}(i,j,n))}^{[-1]}} \right\}, \end{aligned}$$

5.3. Konstruktion einer minimalen bestimmenden Menge

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\widehat{F}_2} &:= \bigcup_{\substack{i,j,k=1,\dots,n \\ i+j+k \text{ ungerade}}} T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_4(i,n-j,n-k))}^{[2]} \left\{ \xi_{(\pi_{1,4}(q-2,1,1),0)} \right\} \cup \bigcup_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ i+j \text{ ungerade}}} T_{\lambda_2^{-1}(\lambda_{-4}(0,i,j))}^{[-2]} \left\{ \xi_{(\pi_{1,4}(q-2,1,1),0)} \right\} \\
&\cup \bigcup_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ i+j+n \text{ ungerade}}} T_{\lambda_2^{-1}(\lambda_{-4}(i,n,j))}^{[-2]} \left\{ \xi_{(\pi_{1,4}(q-2,1,1),0)} \right\}, \xi_{(\pi_{1,4}(q-2,1,1),0)}^{[-2]} \left\{ \xi_{(\pi_{1,4}(q-2,1,1),0)} \right\}, \\
\mathcal{M}_{\widehat{F}_3} &:= \bigcup_{\substack{i,j,k=1,\dots,n \\ i+j+k \text{ ungerade}}} T_{\lambda_{-3}^{-1}(\lambda_2(n-i,n-j,n-k))}^{[3]} \left\{ \xi_{(\pi_{1,2}(q-2,1,1),0)} \right\} \\
&\cup \bigcup_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ i+j+n \text{ ungerade}}} T_{\lambda_3^{-1}(\lambda_{-2}(n,i,j))}^{[-3]} \left\{ \xi_{(\pi_{1,2}(q-2,1,1),0)} \right\}, \xi_{(\pi_{1,2}(q-2,1,1),0)}^{[-3]} \left\{ \xi_{(\pi_{1,2}(q-2,1,1),0)} \right\}, \xi_{(\pi_{1,2}(q-2,1,1),0)}^{[-3]} \left\{ \xi_{(\pi_{1,2}(q-2,1,1),0)} \right\}, \\
\mathcal{M}_{\widehat{F}_4} &:= \bigcup_{\substack{i,j,k=1,\dots,n \\ i+j+k \text{ ungerade}}} T_{\lambda_{-4}^{-1}(\lambda_2(n-i,n-j,k))}^{[2]} \left\{ \xi_{(\pi_{2,3}(q-2,1,1),0)} \right\} \cup \bigcup_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ i+j \text{ ungerade}}} T_{\lambda_4^{-1}(\lambda_{-2}(i,j,0))}^{[-2]} \left\{ \xi_{(\pi_{2,3}(q-2,1,1),0)} \right\} \\
&\cup \bigcup_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ i+j+n \text{ ungerade}}} T_{\lambda_4^{-1}(\lambda_{-2}(i,n,j))}^{[-2]} \left\{ \xi_{(\pi_{2,3}(q-2,1,1),0)} \right\}, \xi_{(\pi_{2,3}(q-2,1,1),0)}^{[-2]} \left\{ \xi_{(\pi_{2,3}(q-2,1,1),0)} \right\}.
\end{aligned}$$

Es ist hier zu beachten, dass sich in den Punkten $v_{(1,1,n)}$, $v_{(1,n,1)}$, $v_{(n,1,1)}$ und $v_{(n,n,n)}$ für n ungerade, also in den Eckpunkten vom Typ-2 der Würfelpartition \diamond , lediglich drei der Schnittebenen L_ν , $\nu \in \{1, \dots, 4\}$, schneiden. Die Mengen $\mathcal{M}_{\widehat{F}_\nu}$, $\nu \in \{1, \dots, 4\}$, enthalten dann also jeweils $\#V_2$ Punkte, falls n gerade, und $\#V_2 - 1$ Punkte, falls n ungerade. Weiter definieren wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{F_1} &:= \bigcup_{\substack{i,j,k=1,\dots,n \\ i+j+k \text{ gerade}}} \bigcup_{\nu=1,\dots,4} T_{\lambda_{-\nu}^{-1}(i,j,k)}^{[-\nu]} \left\{ \xi_{(\rho,\sigma,\tau,0)} \right\} : \rho, \sigma, \tau \geq 2, \rho + \sigma + \tau = q \\
&\cup \bigcup_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ i+j \text{ gerade}}} \bigcup_{\substack{\nu,\mu=2,\dots,4 \\ \nu < \mu}} T_{\lambda_{-\nu}^{-1}(i,j,0)}^{[-\nu]} \left\{ \xi_{(\pi_{\nu,\mu}(\rho,\sigma,1),0)} \right\}, \xi_{(\pi_{\nu,\mu}(\rho,\sigma,1),0)}^{[-\mu]} \left\{ \xi_{(\pi_{\nu,\mu}(\rho,\sigma,1),0)} \right\} : \rho, \sigma \geq 0, \rho + \sigma = q - 1 \\
&\cup \bigcup_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ i+j+n \text{ gerade}}} \bigcup_{\mu=2,\dots,4} T_{\lambda_{-1}^{-1}(i,j,n)}^{[-1]} \left\{ \xi_{(\pi_{1,\mu}(\rho,\sigma,1),0)} \right\}, \xi_{(\pi_{1,\mu}(\rho,\sigma,1),0)}^{[-\mu]} \left\{ \xi_{(\pi_{1,\mu}(\rho,\sigma,1),0)} \right\} : \rho, \sigma \geq 0, \rho + \sigma = q - 1
\end{aligned}$$

und

$$\mathcal{M}_{F_2} := \bigcup_{\substack{i,j,k=1,\dots,n \\ i+j+k \text{ ungerade}}} \bigcup_{\nu=1,\dots,4} T_{\lambda_\nu^{-1}(i,j,k)}^{[\nu]} \left\{ \xi_{(\rho,\sigma,\tau,0)} \right\} : 1 \leq \rho, \sigma, \tau \leq q - 3, \rho + \sigma + \tau = q.$$

5. Dimension trivariater Splines auf Typ-4 Partitionen

Auch diese Mengen enthalten lediglich Punkte, die auf den Schnittebenen L_ν , $\nu \in \{1, \dots, 4\}$, liegen. Die Menge \mathcal{M}_{F_1} beschreibt dabei alle Domain-Points der Würfel vom Typ-1, die mindestens in Distanz zwei zu den Kanten vom Typ-2 liegen, sowie gewisse Punkte, die in Distanz eins zu den äußeren Kanten vom Typ-2 liegen und die Menge \mathcal{M}_{F_2} beschreibt alle Domain-Points der Würfel vom Typ-2, die mindestens in Distanz eins zu den Kanten vom Typ-2 sowie mindestens in Distanz drei zu den Knoten vom Typ-2 liegen. Wir definieren nun die Menge \mathcal{M}_F durch

$$\mathcal{M}_F := \mathcal{M}_{F_1} \cup \mathcal{M}_{F_2} \cup \mathcal{M}_{\widehat{F}_4} \cup \mathcal{M}_{\widehat{F}_4} \cup \mathcal{M}_{\widehat{F}_4} \cup \mathcal{M}_{\widehat{F}_4} \quad (5.29)$$

und für die Kardinalität dieser Menge erhalten wir

$$4(\#Q_1(\binom{q-4}{2}) + (\#Q_2(\binom{q-1}{2}) - 3)) + \#V_2 + \#(E_{B,2} \cap Q_1)(q-4),$$

falls n gerade,

und

$$4(\#Q_1(\binom{q-4}{2}) + (\#Q_2(\binom{q-1}{2}) - 3)) + \#V_2 - 1 + \#(E_{B,2} \cap Q_1)(q-4),$$

falls n ungerade.

(5.30)

Bisher haben wir lediglich Punktmenge betrachtet, die auf den Schnittebenen L_ν , $\nu \in \{1, \dots, 4\}$, also auf den Seitenflächen der Tetraeder von Δ_4 liegen. Im Folgenden wählen wir nun Punktmenge, die auch Domain-Points im Inneren der Tetraeder enthalten.

Mit der Menge \mathcal{M}_T definiert durch

$$\mathcal{M}_T := \bigcup_{i,j,k=1}^n \{\xi_{(\rho,\sigma,\tau,\omega)}^{T(i,j,k)} : \rho, \sigma, \tau, \omega \geq 1, \rho + \sigma + \tau + \omega = q\} \quad (5.31)$$

beschreiben wir alle Domain-Points der Tetraeder vom Typ-2, die mindestens in Distanz eins zu den Seitenflächen der Tetraeder liegen. Für die Kardinalität dieser Menge gilt also:

$$\#\mathcal{M}_T = \#Q(\binom{q-1}{3}). \quad (5.32)$$

Wir geben nun noch die Punktmenge für die Tetraeder vom Typ-1 an. Dazu definieren wir auf der folgenden Seite zunächst Hilfsmenge $\mathcal{M}_{O^{[1]}}$, $\mathcal{M}_{O^{[2]}}$ und $\mathcal{M}_{O^{[4]}}$, welche die Wahl der Punktmenge in Tetraedern beschreiben, die Teil eines Teil-Oktaeders O_v^1 , O_v^2 bzw. O_v^4 , $v \in V_{B,1}$, sind, also Tetraeder die an den Eckpunkten, Kanten bzw. Seitenflächen von \diamond liegen.

5.3. Konstruktion einer minimalen bestimmenden Menge

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{O_1^{[1]}} &:= \{ \xi_{(\rho,\sigma,\tau,\omega)}^{T_{(0,0,0)}^{[1]}}, \xi_{(\rho,\sigma,\tau,\omega)}^{T_{(n,n,0)}^{[2]}}, \xi_{(\rho,\sigma,\tau,\omega)}^{T_{(n,0,n)}^{[3]}}, \xi_{(\rho,\sigma,\tau,\omega)}^{T_{(0,n,n)}^{[4]}} : \\
&\quad \rho, \sigma, \tau \geq 0, \omega \geq 2, \rho + \sigma + \tau + \omega = q \}, \\
\mathcal{M}_{O_2^{[1]}} &:= \{ \xi_{(\rho,\sigma,\tau,\omega)}^{T_{(n,n,n)}^{[-1]}}, \xi_{(\rho,\sigma,\tau,\omega)}^{T_{(0,0,n)}^{[-2]}}, \xi_{(\rho,\sigma,\tau,\omega)}^{T_{(0,n,0)}^{[-3]}}, \xi_{(\rho,\sigma,\tau,\omega)}^{T_{(n,0,0)}^{[-4]}} : \\
&\quad \rho, \sigma, \tau \geq 0, \omega \geq 2, \rho + \sigma + \tau + \omega = q \}, \\
\mathcal{M}_{O^{[2]}} &:= \bigcup_{\substack{i=1,\dots,n-1 \\ i \text{ gerade}}} \{ \xi_{(\pi_{1,4}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,4}(0,0,i)}^{[1]}}, \xi_{(\pi_{1,4}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,4}(0,0,i)}^{[-4]}}, \xi_{(\pi_{1,3}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,3}(0,0,i)}^{[1]}}, \xi_{(\pi_{1,3}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,3}(0,0,i)}^{[-3]}} \\
&\quad \xi_{(\pi_{1,2}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,2}(0,0,i)}^{[1]}}, \xi_{(\pi_{1,2}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,2}(0,0,i)}^{[-2]}}, \xi_{(\pi_{2,3}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{2,3}(n,0,i)}^{[2]}}, \xi_{(\pi_{2,3}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{2,3}(n,0,i)}^{[-3]}} \\
&\quad \xi_{(\pi_{2,4}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{2,4}(n,0,i)}^{[2]}}, \xi_{(\pi_{2,4}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{2,4}(n,0,i)}^{[-4]}}, \xi_{(\pi_{3,4}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{3,4}(n,0,i)}^{[3]}}, \xi_{(\pi_{3,4}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{3,4}(n,0,i)}^{[-4]}} \\
&\quad \xi_{(\pi_{2,3}(0,n,i),\omega)}^{T_{\pi_{2,3}(0,n,i)}^{[-2]}}, \xi_{(\pi_{1,2}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,2}(0,n,i)}^{[3]}}, \xi_{(\pi_{1,2}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,2}(0,n,i)}^{[-2]}}, \xi_{(\pi_{1,2}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,2}(0,n,i)}^{[4]}} \\
&\quad \xi_{(\pi_{1,3}(0,n,i),\omega)}^{T_{\pi_{1,3}(0,n,i)}^{[-1]}}, \xi_{(\pi_{1,2}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,2}(0,n,i)}^{[3]}}, \xi_{(\pi_{1,2}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,2}(n,n,i)}^{[-1]}}, \xi_{(\pi_{1,2}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,2}(n,n,i)}^{[4]}} \\
&\quad \xi_{(\pi_{1,2}(n,n,i),\omega)}^{T_{\pi_{1,2}(n,n,i)}^{[-1]}}, \xi_{(\pi_{1,2}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,2}(n,n,i)}^{[3]}}, \xi_{(\pi_{1,2}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,2}(n,n,i)}^{[-1]}}, \xi_{(\pi_{1,2}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,2}(n,n,i)}^{[2]}} : \\
&\quad \rho, \sigma \geq 0, \tau \geq 1, \omega \geq 2, \rho + \sigma + \tau + \omega = q \}, \\
\mathcal{M}_{O^{[4]}} &:= \bigcup_{\substack{i,j=1,\dots,n-1 \\ i+j \text{ gerade}}} \{ \xi_{(\pi_{1,2}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,2}(i,j,0)}^{[1]}}, \xi_{(\pi_{1,2}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,2}(i,j,0)}^{[2]}}, \xi_{(\pi_{1,2}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,2}(i,j,0)}^{[-3]}}, \xi_{(\pi_{1,2}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,2}(i,j,0)}^{[-4]}} \\
&\quad \xi_{(\pi_{1,2}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,2}(i,j,n)}^{[-1]}}, \xi_{(\pi_{1,2}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,2}(i,j,n)}^{[-2]}}, \xi_{(\pi_{1,2}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,2}(i,j,n)}^{[3]}}, \xi_{(\pi_{1,2}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,2}(i,j,n)}^{[4]}} \\
&\quad \xi_{(\pi_{1,3}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,3}(i,j,0)}^{[1]}}, \xi_{(\pi_{1,3}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,3}(i,j,0)}^{[-2]}}, \xi_{(\pi_{1,3}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,3}(i,j,0)}^{[3]}}, \xi_{(\pi_{1,3}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,3}(i,j,0)}^{[-4]}} \\
&\quad \xi_{(\pi_{1,3}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,3}(i,j,n)}^{[-1]}}, \xi_{(\pi_{1,3}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,3}(i,j,n)}^{[2]}}, \xi_{(\pi_{1,3}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,3}(i,j,n)}^{[-3]}}, \xi_{(\pi_{1,3}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,3}(i,j,n)}^{[4]}} \\
&\quad \xi_{(\pi_{1,4}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,4}(i,j,0)}^{[1]}}, \xi_{(\pi_{1,4}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,4}(i,j,0)}^{[-2]}}, \xi_{(\pi_{1,4}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,4}(i,j,0)}^{[-3]}}, \xi_{(\pi_{1,4}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,4}(i,j,0)}^{[4]}} \\
&\quad \xi_{(\pi_{1,4}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,4}(i,j,n)}^{[-1]}}, \xi_{(\pi_{1,4}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,4}(i,j,n)}^{[2]}}, \xi_{(\pi_{1,4}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,4}(i,j,n)}^{[3]}}, \xi_{(\pi_{1,4}(\rho,\sigma,\tau),\omega)}^{T_{\pi_{1,4}(i,j,n)}^{[-4]}} : \\
&\quad \rho, \sigma \geq 1, \tau \geq 0, \omega \geq 2, \rho + \sigma + \tau + \omega = q \}.
\end{aligned}$$

Diese Mengen enthalten jeweils alle Domain-Points der Tetraeder $T \in V_{B,2}$, bis auf die Punkte, die in Distanz null und eins zu den inneren Seitenflächen F_I von

5. Dimension trivariater Splines auf Typ-4 Partitionen

Δ_4 liegen, und die Punkte, die in Distanz zwei zu gemeinsamen Seitenflächen mit Tetraedern vom Typ-2 liegen. Auch hier ist wieder zu beachten, dass die Anzahl der Eckpunkte vom Typ-1 von \diamond für n gerade acht beträgt und für n ungerade vier beträgt. Daher haben wir auch zwei unterschiedliche Definitionen $\mathcal{M}_{O_1^{[1]}}$ und $\mathcal{M}_{O_2^{[1]}}$ der Punktmenge hinsichtlich der Tetraeder an diesen Eckpunkten. Wir setzen dann

$$\mathcal{M}_{O^{[1]}} := \begin{cases} \mathcal{M}_{O_1^{[1]}}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \mathcal{M}_{O_1^{[1]}} \cup \mathcal{M}_{O_2^{[1]}}, & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Betrachten wir nun noch die Tetraeder vom Typ-1, die Teil eines Oktaeders $O_{(v)}^8$, $v \in V_{I,1}$, sind. Wir definieren $\mathcal{M}_{O^{[8]}}$ durch

$$\mathcal{M}_{O^{[8]}} := \bigcup_{\substack{i,j,k=1,\dots,n-1 \\ i+j+k \text{ gerade}}} \bigcup_{\nu=1,\dots,4} \{ \xi_{(\rho,\sigma,\tau,\omega)}^{T^{[\nu]}(i,j,k)}, \xi_{(\rho,\sigma,\tau,\omega)}^{T^{[-\nu]}(i,j,k)} : \\ \rho, \sigma, \tau \geq 1, \omega \geq 2, \rho + \sigma + \tau + \omega = q \}.$$

Diese Menge enthält alle Domain-Points der Tetraeder $T \in V_{I,2}$, die mindestens in Distanz eins zu den inneren Seitenflächen F_I von Δ_4 und mindestens in Distanz zwei zu gemeinsamen Seitenflächen mit Tetraedern vom Typ-2 liegen.

Zählen wir nun Punkte der Hilfsmengen $\mathcal{M}_{O^{[1]}}$, $\mathcal{M}_{O^{[2]}}$, $\mathcal{M}_{O^{[4]}}$ und $\mathcal{M}_{O^{[8]}}$, so erhalten wir

$$\#\mathcal{M}_{O^{[1]}} = \begin{cases} 8 \binom{q+1}{3}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 4 \binom{q+1}{3}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

$$\#\mathcal{M}_{O^{[2]}} = \begin{cases} 12(n-2) \binom{q}{3}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 12(n-1) \binom{q}{3}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

$$\#\mathcal{M}_{O^{[4]}} = \begin{cases} 12((n-1)^2 + 1) \binom{q-1}{3}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 12(n-1)^2 \binom{q-1}{3}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und

$$\#\mathcal{M}_{O^{[8]}} = \begin{cases} 4((n-1)^3 - 1) \binom{q-2}{3}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 4(n-1)^3 \binom{q-2}{3}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wir definieren nun die Menge \mathcal{M}_O durch

$$\mathcal{M}_O := \mathcal{M}_{O^{[1]}} \cup \mathcal{M}_{O^{[2]}} \cup \mathcal{M}_{O^{[4]}} \cup \mathcal{M}_{O^{[8]}} \quad (5.33)$$

5.3. Konstruktion einer minimalen bestimmenden Menge

und wir erhalten für die Kardinalität dieser Menge

$$\frac{2}{3}(q^3 - 9q^2 + 26q - 24)n^3 + 6(q^2 - 5q + 6)n^2 + 12(q - 2)n + 8,$$

falls n gerade,

und

$$\frac{2}{3}(q^3 - 9q^2 + 26q - 24)n^3 + 6(q^2 - 5q + 6)n^2 + 12(q - 2)n + 4,$$

falls n ungerade.

(5.34)

Mit Hilfe der Mengen (5.24), (5.27), (5.29), (5.31) und (5.33) definieren wir jetzt die Menge \mathcal{M} durch

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}_V \cup \mathcal{M}_E \cup \mathcal{M}_F \cup \mathcal{M}_T \cup \mathcal{M}_O$$

und zeigen im Folgenden, dass dies eine minimal bestimmende Menge für den Raum $\mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$, $q \geq 4$, ist.

Satz 5.6 (Die minimale bestimmende Menge \mathcal{M})

Sei Δ_4 eine Typ-4 Partition. Dann ist \mathcal{M} eine minimale bestimmende Menge für $\mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$, $q \geq 4$, und die Kardinalität von \mathcal{M} ist identisch mit der in Satz 5.5 getroffenen Aussage für die Dimension von $\mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$, $q \geq 4$.

Beweis: Seien $q \geq 4$ und die Koeffizienten $b_\xi = b_\xi(s)$, $\xi \in \mathcal{M}$, eines Splines $s \in \mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$ gegeben. Wir haben zu zeigen, dass unter Berücksichtigung der C^1 -Bedingungen (5.10), wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und η gegeben sind durch (5.11a-d), und der Bedingungen (5.14), wobei α, β und γ gegeben sind durch (5.15a-b), alle Koeffizienten b_ξ , $\xi \in \mathcal{D}_{q,\Delta_4}$, eindeutig bestimmt sind.

Wir gehen dazu in zwei Schritten vor. Im ersten Schritt werden wir zeigen, dass durch die Wahl der Punkte der Menge \mathcal{M} , der Spline s auf den Schnittebenen L_ν , $\nu = 1, \dots, 4$, eindeutig festgelegt wird. Wir nutzen dazu die bivariaten C^1 -Bedingungen (5.18), wobei α, β, γ und δ gegeben sind durch (5.19a-b) bzw. (5.20a-b) und die versteckten Bedingungen (5.21), wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ und ζ gegeben sind durch (5.22a-d). Diese Bedingungen haben wir im Abschnitt 5.1 durch einfache Kombination der C^1 -Bedingungen (5.10) und (5.14) erhalten. Im zweiten Schritt werden wir dann zeigen, dass mit der Wahl der Menge \mathcal{M} unter Berücksichtigung der Bedingungen (5.10) und (5.14) auch die restlichen Koeffizienten von s eindeutig bestimmt werden und so der Spline s auf Δ_4 eindeutig festgelegt wird.

5. Dimension trivariater Splines auf Typ-4 Partitionen

Es folgt zunächst aus der Wahl der Menge $\mathcal{M}_V \subset \mathcal{M}$ und den C^1 -Bedingungen (5.18), wobei α, β, γ und δ gegeben sind durch (5.20a-b) für $\rho = q - 1$, dass die Koeffizienten $b_\xi, \xi \in \mathcal{D}^1(v)$ für alle $v \in V_2$ eindeutig bestimmt sind.

Betrachten wir nun die Punkte der Menge \mathcal{A} in (5.26) und die versteckten Bedingungen (5.21), wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ und ζ gegeben sind durch (5.22a-c) und $v \in V_{I,2}$, so stellen wir fest, dass die Menge \mathcal{A} genau die Punkte enthält, die mit den Koeffizienten b_α dieser Bedingungen assoziiert sind. Da diese Punkte in den Hüllen $\mathcal{R}^2(v), v \in V_{I,2}$, liegen, sind für den Fall $q = 4$ und hinreichend großes n jedoch auch Punkte in der Menge \mathcal{A} enthalten, die mit den Koeffizienten b_β der Bedingungen (5.21) assoziiert sind. Daher können wir für den Fall $q = 4$ diese Bedingungen nicht unabhängig voneinander betrachten. Wir behandeln deshalb im Folgenden die Bedingungen (5.21) hinsichtlich der Schnittebenen $L_\nu, \nu = 1, \dots, 3$, nacheinander und wählen hinsichtlich jeder dieser Ebenen einen speziellen induktiven Durchlauf der Knoten $v \in V_{I,2}$. Durch die Wahl der Punkte der Menge $\mathcal{M}_E \subset \mathcal{M}$ und die Bedingungen (5.21), wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ und ζ gegeben sind durch (5.22a), werden zunächst die Koeffizienten b_ξ , wobei

$$\xi = \xi_{(\pi_{3,4}(q-2,2,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_4(n-i,j,1))}}, \quad \xi = \xi_{(\pi_{3,4}(q-2,2,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_4(n-i,1,j))}} \quad \text{und} \quad \xi = \xi_{(\pi_{3,4}(q-2,2,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_4(n-1,i,j))}},$$

$i, j = 1, \dots, n-1, i+j+1+n$ ungerade, eindeutig bestimmt. Wir nehmen nun an, es seien bereits die Koeffizienten b_ξ , wobei

$$\xi = \xi_{(\pi_{3,4}(q-2,2,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_4(n-i,j,k))}}, \quad \xi = \xi_{(\pi_{3,4}(q-2,2,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_4(n-i,k,j))}} \quad \text{und} \quad \xi = \xi_{(\pi_{3,4}(q-2,2,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_4(n-k,i,j))}},$$

$k \in \{1, \dots, n-2\}, i, j = 1, \dots, n-1, i+j+k+n$ ungerade, eindeutig bestimmt. Es folgt dann durch die Bedingungen der Form (5.21), wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ und ζ gegeben sind durch (5.22a), und die Wahl der Menge \mathcal{M}_E , dass auch die Koeffizienten b_ξ , wobei

$$\xi = \xi_{(\pi_{3,4}(q-2,2,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_4(n-i,j,k+1))}}, \quad \xi = \xi_{(\pi_{3,4}(q-2,2,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_4(n-i,k+1,j))}} \quad \text{und} \quad \xi = \xi_{(\pi_{3,4}(q-2,2,0),0)}^{T^{[1]}_{\lambda_{-1}^{-1}(\lambda_4(n-k+1,i,j))}},$$

$i, j = 1, \dots, n-1, i+j+k+n+1$ ungerade, eindeutig bestimmt werden. Zusammen mit den Punkten der Menge \mathcal{M}_E sind dann also alle Koeffizienten, deren assoziierte Domain-Points auf den Kanten den Schnittebenen L_1 liegen, eindeutig bestimmt. Wir betrachten als nächstes die Bedingungen (5.21) hinsichtlich der Schnittebenen L_2 . Durch die Wahl der Punkte der Menge \mathcal{M}_E und die Bedingungen (5.21), wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ und ζ gegeben sind durch (5.22b), werden zunächst die Koeffizienten b_ξ , wobei

$$\xi = \xi_{(\pi_{1,4}(q-2,2,0),0)}^{T^{[2]}_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_4(i,j,1))}}, \quad \xi = \xi_{(\pi_{1,4}(q-2,2,0),0)}^{T^{[2]}_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_4(i,1,j))}} \quad \text{und} \quad \xi = \xi_{(\pi_{1,4}(q-2,2,0),0)}^{T^{[2]}_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_4(1,i,j))}},$$

5.3. Konstruktion einer minimalen bestimmenden Menge

$i, j = 1, \dots, n-1$, $i+j+1$ ungerade, eindeutig bestimmt. Wir nehmen nun an, es seien bereits die Koeffizienten b_ξ , wobei

$$\xi = \xi_{(\pi_{1,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_4(i,j,k))}^{[2]}}, \quad \xi = \xi_{(\pi_{1,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_4(i,k,j))}^{[2]}} \quad \text{und} \quad \xi = \xi_{(\pi_{1,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_4(k,i,j))}^{[2]}}$$

$k \in \{1, \dots, n-2\}$, $i, j = 1, \dots, n-1$, $i+j+k$ ungerade, eindeutig bestimmt. Es folgt dann durch die Bedingungen der Form (5.21), wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ und ζ gegeben sind durch (5.22b), und die Wahl der Menge \mathcal{M}_E , dass auch die Koeffizienten b_ξ , wobei

$$\xi = \xi_{(\pi_{1,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_4(i,j,k+1))}^{[2]}}, \quad \xi = \xi_{(\pi_{1,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_4(i,k+1,j))}^{[2]}} \quad \text{und} \quad \xi = \xi_{(\pi_{1,4}(q-2,2,0),0)}^{T_{\lambda_{-2}^{-1}(\lambda_4(k+1,i,j))}^{[2]}}$$

$i, j = 1, \dots, n-1$, $i+j+k+1$ ungerade, eindeutig bestimmt werden. Zusammen mit den Punkten der Menge \mathcal{M}_E sind dann also auch alle Koeffizienten, deren assoziierte Domain-Points auf den Kanten der Schnittebenen L_2 liegen, eindeutig bestimmt. Für die Schnittebene L_3 ist das Vorgehen analog. Wir wählen den gleichen Durchlauf der Knoten $v \in V_{I,2}$ wie bei der Ebene L_2 und unter Berücksichtigung der Bedingungen (5.21), wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ und ζ gegeben sind durch (5.22c) und der Wahl der Menge \mathcal{M}_E , sind dann auch alle Koeffizienten, deren assoziierte Domain-Points auf den Kanten der Schnittebenen L_3 liegen, eindeutig bestimmt. Es sind nun bereits alle Koeffizienten, deren assoziierte Domain-Points auf den Kanten der Schnittebenen L_4 liegen, bestimmt. Nach Lemma 5.4 werden hier die Bedingungen (5.21), wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ und ζ gegeben sind durch (5.22d), allerdings automatisch erfüllt und somit sind diese Koeffizienten auch eindeutig bestimmt. Es sind nun also alle Koeffizienten, deren assoziierte Domain-Points auf Kanten vom Typ-2 liegen, eindeutig bestimmt.

Wir verwenden im Folgenden die bivariaten C^1 -Bedingungen (5.18), um zu zeigen, dass durch die Wahl der Menge \mathcal{M}_F der Splines s auf den Schnittebenen L_ν , $\nu = 1, \dots, 4$, eindeutig festgelegt wird. Durch die Wahl der Mengen $\mathcal{M}_{\hat{F}_\nu} \subseteq \mathcal{M}_F$, $\nu \in \{1, \dots, 4\}$ und die Bedingungen (5.18), wobei α, β, γ und δ gegeben sind durch (5.20a-b) mit $\rho = q-2$, werden zunächst die Koeffizienten b_ξ , $\xi \in \mathcal{R}^2(v) \cap L_\nu$, eindeutig bestimmt. Unter Berücksichtigung der Bedingungen (5.18), wobei α, β, γ und δ gegeben sind durch (5.19a-b) für $\rho, \sigma \geq 3$, und die Wahl der restlichen Punkte der Menge $\mathcal{M}_F \subset \mathcal{M}$, sind dann alle Koeffizienten, die mit Domain-Points $\xi \in \mathcal{D}_{q,\Delta_4} \cap L_\nu$, $\nu = 1, \dots, 4$, assoziiert sind, eindeutig bestimmt.

Damit haben wir den ersten Schritt des Beweises beendet. Wir werden im nun folgenden zweiten Schritt des Beweises die Bedingungen der Form (5.10) und (5.14) verwenden, um zu zeigen, dass durch die Wahl der Mengen $\mathcal{M}_T \subset \mathcal{M}$ und $\mathcal{M}_O \subset \mathcal{M}$ der Splines s auf ganz Δ_4 eindeutig festgelegt wird.

5. Dimension trivariater Splines auf Typ-4 Partitionen

Wir nutzen zunächst aus, dass der Spline s bereits auf den Schnittebenen L_ν , $\nu = 1, \dots, 4$, eindeutig festgelegt ist. Durch die Wahl der Menge $\mathcal{M}_T \subset \mathcal{M}$ sind dann bereits alle Koeffizienten b_ξ , $\xi \in T_{(i,j,k)}$, $i, j, k = 1, \dots, n$, also alle mit den Domain-Points der Tetraeder vom Typ-2 assoziierten Koeffizienten, eindeutig bestimmt. Unter Berücksichtigung der C^1 -Bedingungen (5.10), wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und η gegeben sind durch (5.11a-d) für $\rho, \sigma, \tau \geq 1$, werden dann die Koeffizienten b_ξ , wobei

$$\xi = \xi_{(\rho, \sigma, \tau, \omega)}^{T_{\pi_\nu(i,j,k)}^{[\nu]}}, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \quad i + j + k \text{ ungerade}, \quad \rho, \sigma, \tau \geq 0, \omega = q - 1,$$

$$\text{und } \xi = \xi_{(\rho, \sigma, \tau, \omega)}^{T_{\pi_\nu(i,j,k)}^{[-\nu]}}, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \quad i + j + k \text{ gerade}, \quad \rho, \sigma, \tau \geq 0, \omega = q - 1,$$

eindeutig bestimmt. Dies sind die Koeffizienten, deren assoziierte Domain-Points im Inneren der Tetraeder vom Typ-1 und in Distanz eins zur gemeinsamen Seitenfläche mit Tetraedern vom Typ-2 liegen. Durch die Wahl der Menge $\mathcal{M}_O \subset \mathcal{M}$ und die C^1 -Bedingungen (5.14), wobei α, β und γ gegeben sind durch (5.15a-b) für $\rho, \sigma, \omega \geq 1$, werden auch die Koeffizienten b_ξ , wobei

$$\xi = \xi_{(\pi_\nu, \mu(\rho, \sigma, 0), \omega+1)}^{T_{\pi_\nu(i,j,k)}^{[\nu]}}, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \quad i + j + k \text{ ungerade},$$

$\rho, \sigma, \omega \geq 0$, $\rho + \sigma + \omega = q - 1$, $\nu, \mu \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\nu < \mu$, eindeutig bestimmt. Es sind nun also auch alle Koeffizienten, die im Inneren der Seitenflächen der Tetraeder vom Typ-1 liegen, eindeutig bestimmt. Die Koeffizienten b_ξ , wobei $\xi \in \mathcal{D}_{q, \Delta_4} \cap E_{I,2} \setminus V_I$, sind dann jeweils in zwei Bedingungen der Form (5.14), wobei α, β und γ gegeben sind durch (5.15a-b) für $\omega \geq 1$ und $\rho = 0$ oder $\sigma = 0$, involviert und werden durch diese bestimmt. Beide Bedingungen liefern jedoch für die Koeffizienten b_ξ das gleiche Ergebnis und so sind diese Koeffizienten auch eindeutig bestimmt. Mit der Wahl der Menge \mathcal{M}_O sind dann also alle Koeffizienten, deren assoziierte Domain-Points in Tetraedern vom Typ-1 liegen, eindeutig bestimmt, bis auf diejenigen Koeffizienten, deren assoziierte Domain-Points mit den Knoten vom Typ-1 zusammenfallen. Die Koeffizienten b_ξ , wobei $\xi \in V_{I,2}$ bzw. $\xi \in V_{B,2}$, sind dann jeweils in drei bzw. zwei Bedingungen der Form (5.14), wobei α, β und γ gegeben sind durch (5.15a-b) für $\rho, \sigma = 0$ und $\omega = q$, involviert und werden durch diese bestimmt. Auch hier zeigt sich jedoch, dass diese Bedingungen für die Koeffizienten b_ξ das gleiche Ergebnis liefern und so sind diese Koeffizienten auch eindeutig bestimmt. Damit sind nun alle Koeffizienten von s eindeutig bestimmt, während gleichzeitig alle Differenzierbarkeitsbedingungen des Raums $\mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$ erfüllt werden. Die Menge \mathcal{M} bildet also eine minimale bestimmende Menge für den Raum $\mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$, $q \geq 4$.

5.3. Konstruktion einer minimalen bestimmenden Menge

Wir zählen nun noch die Punkte von \mathcal{M} und zeigen, dass die Kardinalität dieser Menge mit der in Satz 5.5 angegebenen Dimension des Raums $\mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$, $q \geq 4$, übereinstimmt.

In (5.25), (5.28), (5.30) und (5.32) haben wir bereits die Kardinalitäten der Hilfsmengen \mathcal{M}_V , \mathcal{M}_E , \mathcal{M}_F und \mathcal{M}_T in Abhängigkeit von den Knoten, Kanten und Würfeln von Δ_4 bestimmt. Unter Verwendung von (5.5), (5.6) und (5.7) und durch einfache Berechnungen ergeben sich nun:

$$\#\mathcal{M}_V = \begin{cases} 2n^3 + 6n^2 + 6n, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

$$\#\mathcal{M}_E = \begin{cases} (3q - \frac{21}{2})n^3 + (3q - \frac{9}{2})n^2 - \frac{9}{2}n, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ (3q - \frac{21}{2})n^3 + (3q - \frac{9}{2})n^2 - \frac{9}{2}n + \frac{3}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

$$\#\mathcal{M}_F = \begin{cases} (2q^2 - 12q + 18)n^3 + (6q - 18)n^2 + 6n, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ (2q^2 - 12q + 18)n^3 + (6q - 18)n^2 + 6n - 2, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und

$$\#\mathcal{M}_T = \frac{1}{6}(q^3 - 6q^2 + 11q - 6)n^3.$$

Zusammen mit der bereits in (5.34) bestimmten Anzahl der Punkte der Hilfsmenge \mathcal{M}_O läßt sich nun die Anzahl der Punkte der Menge \mathcal{M} leicht berechnen und wir erhalten für die Kardinalität dieser Menge genau die in Satz 5.5 angegebenen Dimension des Raums $\mathcal{S}_q^1(\Delta_4)$, $q \geq 4$.

□

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

In diesem Kapitel stellen wir eine neue Art gleichmäßiger Tetraeder-Partitionen Δ vor, die auf der Unterteilung des Raums durch Truncated Octahedrons beruhen. Wir untersuchen erstmals Splines auf diesen Partitionen und entwickeln Quasi-Interpolationsmethoden zur Approximation gegitterter Daten mit quadratischen C^1 -Splines auf diesen Partitionen. Die resultierenden Splines werden dabei lokal und stabil berechnet. Wir entwickeln sowohl Methoden zur Approximation von Daten auf dem kubischen Gitter (Cubic Grid), wie auch auf dem raumzentrierten kubischen Gitter (BCC-Grid). In beiden Fällen können wir Quasi-Interpolationsoperatoren angeben, welche die optimale Approximationsordnung des Raums $\mathcal{S}_2^1(\Delta)$ erreichen. Dies sind damit die ersten explizit angegebenen Quasi-Interpolationsoperatoren mit den genannten Eigenschaften. Die Verwendung der Partition Δ ist dabei von zentraler Bedeutung, da die Struktur von gleichmäßigen Partitionen, die auf der Unterteilung von Würfel-Partitionen beruhen, die Konstruktion solcher Operatoren ohne weiterführende Veränderungen an der Partition selbst, nicht erlaubt. Ähnliche Approximationsergebnisse konnten auf solchen Partitionen lediglich durch die Verwendung kubischer Splines (siehe [84]) oder durch Aufgabe der globalen C^1 -Differenzierbarkeit (siehe [65]) erreicht werden. In numerischen Tests weisen wir zusätzlich die effiziente Berechenbarkeit der Splines nach. Wir verwenden dazu gängige trivariate Testfunktionen zum Nachweis der Approximationseigenschaften sowie aus der Computergraphik bekannte Datensätze zur Veranschaulichung der hohen Visualisierungsqualitäten der Splines. Insbesondere für die Volumenvisualisierung sind die vorgestellten Methoden von Interesse, da die gleichmäßige Struktur der Partition Δ und die Möglichkeiten der Bernstein-Bézier-Techniken für C^1 -Splines voll ausgeschöpft werden können, um eine schnelle Berechnung der Splines mit geringem Speicheraufwand zu gewährleisten. Unter Verwendung moderner Computerhardware ist so auch die Visualisierung von 3D-Datensätzen in Echtzeit möglich.

In Abschnitt 6.1 analysieren wir quadratische C^1 -Splines auf Δ . Diese Partition entsteht, indem auf jedem Element einer Partition von Truncated Octahedrons der tri-

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

variante S_2 -Split (siehe Abschnitt 4.2) angewandt wird. Wir beschreiben vollständig die hier auftretenden Differenzierbarkeitsbedingungen und geben eine bestimmende Menge für den Raum $\mathcal{S}_2^1(\Delta)$ an. In Abschnitt 6.2 beschreiben wir eine Familie von Quasi-Interpolationsoperatoren auf Δ . Dazu untersuchen wir gewisse Eigenschaften der Operatoren und zeigen, dass die Werte und Ableitungen einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion simultan mit der Ordnung zwei approximiert werden können. In Abschnitt 6.3 untersuchen wir eine weitere Familie von Quasi-Interpolationsoperatoren auf Δ . In diesem Fall verwenden wir eine andere Einbettung des kubischen Gitters in Δ als im vorherigen Abschnitt und zeigen, dass die so konstruierten Splines die optimale Approximationsordnung besitzen können. In Abschnitt 6.4 geben wir schließlich einen Quasi-Interpolationsoperator zur Interpolation von Daten auf dem raumzentrierten kubischen Gitter an. Die Struktur der Partition Δ ist ideal geeignet für die Verwendung von Daten auf diesem Gitter, so dass auch in diesem Fall die optimale Approximationsordnung erreicht werden kann. Für alle angegebenen Operatoren zeigen wir, dass die Berechnung der Splines lokal und stabil sowie in linearer Komplexität zur Datenmenge verläuft. Mit numerischen Tests und Visualisierungsbeispielen bestätigen wir die theoretischen Ergebnisse für ausgezeichnete Operatoren.

6.1. Quadratische C^1 -Splines auf Truncated Octahedron Partitionen

Wir untersuchen in diesem Abschnitt quadratische C^1 -Splines auf Truncated Octahedron Partitionen Δ . Dazu beschreiben wir im Detail die Konstruktion einer solchen Partition unter Verwendung der in Kapitel 4 vorgestellten Stern-Splits. Wir beschreiben vollständig die für den Raum $\mathcal{S}_2^1(\Delta)$ auftretenden Differenzierbarkeitsbedingungen und geben abschließend eine bestimmende Menge für diesen Raum an.

Ein Truncated Octahedron, oder abgestumpfter Oktaeder, ist ein Archimedisches Körper mit 14 Seitenflächen. Sechs der Seitenflächen sind Quadrate und acht der Seitenflächen sind reguläre Hexagons, siehe Abbildung 6.1. Das Truncated Octahedron gehört zur Klasse der semi-regulären Polyeder, siehe Abschnitt 4.2. Es enthält 36 Kanten und 24 Eckpunkte, wobei an jedem Eckpunkt immer genau zwei Hexagons und ein Quadrat zusammentreffen. Die Eckpunkte eines im Ursprung zentrierten Truncated Octahedrons der Größe $h \in \mathbb{N}$ können durch alle Permutationen von $(0, \pm \frac{h}{2}, \pm h)$ beschrieben werden. Es ist möglich, den \mathbb{R}^3 mit zueinander kongruenten Truncated Octahedrons lückenlos aufzufüllen. Dies wird ersichtlich durch die folgende Überlegung: Wir betrachten zunächst das Kubisch-Raumzentrierte Gitter, das sogenannte BCC-Grid. Dieses erhält man dadurch, dass im Schwerpunkt jeder Würfelzelle eines kubischen Gitters ein Knoten eingefügt wird. Die Voronoi-Zellen des zum BCC-Grid gehörenden Voronoi-Diagramms sind zueinander kongruente Truncated Octahedrons, deren Schwerpunkte auf dem BCC-Grid liegen.

Sei \diamond eine gleichmäßige Truncated Octahedron Partition, im Folgenden kurz TO-Partition genannt und $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ das überdeckte Gebiet im \mathbb{R}^3 . Wir erzeugen eine gleichmäßige Tetraeder-Partition Δ von Ω bezüglich \diamond , indem wir jedes Truncated Octahedron in \diamond mit dem trivariaten S_2 -Split in 144 Tetraeder unterteilen, siehe Definition 4.7. Wir verwenden im Folgenden die in Abschnitt 4.3 vorgestellte Beschreibung für die Eckpunkte der Tetraeder von Δ . Jeder Tetraeder $T = [v_0, v_1, v_2, v_3] \in \Delta$ besitzt einen Eckpunkt im Schwerpunkt eines Truncated Octahedrons $\mathcal{T} \in \diamond$. Diesen bezeichnen wir mit v_0 . Weiter liegt ein Eckpunkt v_1 im Schwerpunkt einer Seitenfläche von \mathcal{T} , ein Eckpunkt v_2 in der Mitte einer Kante von \mathcal{T} und ein Eckpunkt v_3 ist auch Eckpunkt von \mathcal{T} . Dabei liegt die Dreiecksseite $[v_1, v_2, v_3]$ auf einer Seitenfläche von \mathcal{T} . Die Dreiecksflächen von T bezeichnen wir mit F_0, F_1, F_2 und F_3 , wobei die Seite F_i , $i = 0, \dots, 3$, dem Knoten v_i gegenüberliegt.

Da die Seitenflächen von \mathcal{T} entweder Quadrate oder Hexagons sind, entstehen durch

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

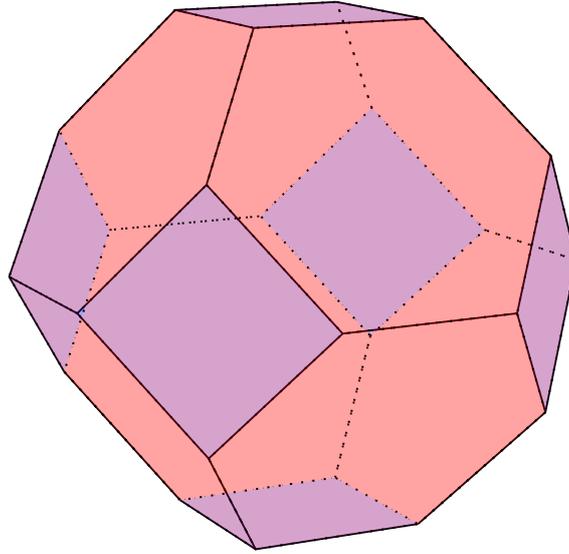


Abbildung 6.1.: Ein Truncated Octahedron mit seinen sechs quadratischen und acht hexagonalen Seitenflächen.

diesen Split zwei unterschiedlich geformte Tetraeder. Wir sagen für einen Tetraeder $T = [v_0, v_1, v_2, v_3] \in \Delta$ gilt $T \in T^S$ falls $[v_1, v_2, v_3]$ auf einer quadratischen Seitenfläche (Square Face) von \mathcal{T} liegt und $T \in T^H$ falls $[v_1, v_2, v_3]$ auf einer hexagonalen Seitenfläche von \mathcal{T} liegt. Ebenso müssen auch die Dreiecksseiten unterschieden werden. Wir bezeichnen sie mit F_i^S , $i = 0, \dots, 3$, falls $T \in T^S$ und mit F_i^H , $i = 0, \dots, 3$, sonst. Dies bedeutet, dass eine Dreiecksseite F_1^S eine gemeinsame Seite eines Tetraeders aus T^S und eines Tetraeders aus T^H ist, während F_1^H eine gemeinsame Seite zweier Tetraeder aus T^H ist. Alle anderen Dreiecksseiten F_i^S bzw. F_i^H , $i \in \{0, 2, 3\}$, sind ausschließlich Seiten der Tetraeder $T \in T^S$ bzw. $T \in T^H$.

Im Folgenden wollen wir die C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen eines Splines $s \in \mathcal{S}_2^1(\Delta)$ über die inneren Dreiecksflächen von Δ beschreiben. Seien T und \tilde{T} zwei Tetraeder mit gemeinsamer Dreiecksfläche und b_{ijkl} bzw. \tilde{b}_{ijkl} die Koeffizienten in der Bernstein-Bézier-Darstellung der stückweisen quadratischen Polynome $s|_T = p$ bzw. $s|_{\tilde{T}} = \tilde{p}$. In dem Fall, dass $T \cap \tilde{T} = F_1^S$ ist, legen wir fest, dass für die Tetraeder gilt $T \in T^S$ und $\tilde{T} \in T^H$. In allen anderen Fällen sind die Tetraeder spiegelsymmetrisch zur gemeinsamen Dreiecksfläche und die Bedingungen somit unabhängig von der Wahl von T und \tilde{T} . Sei nun $s \in \mathcal{S}_2^0(\Delta)$ ein stetiger Spline gegeben in seiner stückweisen Bernstein-Bézier-Darstellung. Es gilt $s \in \mathcal{S}_2^1(\Delta)$ genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

6.1. Quadratische C^1 -Splines auf Truncated Octahedron Partitionen

- C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen über F_0^S und F_0^H

$$b_{1100} = 2b_{0200} - \tilde{b}_{1100}, \quad (6.1a)$$

$$b_{1010} = 2b_{0110} - \tilde{b}_{1010}, \quad (6.1b)$$

$$b_{1001} = 2b_{0101} - \tilde{b}_{1001}. \quad (6.1c)$$

- C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen über F_3^S und F_3^H

$$b_{1001} = 2b_{1010} - \tilde{b}_{1001}, \quad (6.2a)$$

$$b_{0101} = 2b_{0110} - \tilde{b}_{0101}, \quad (6.2b)$$

$$b_{0011} = 2b_{0020} - \tilde{b}_{0011}. \quad (6.2c)$$

- C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen über F_2^S

$$b_{1010} = b_{1100} - \tilde{b}_{1010} + b_{1001}, \quad (6.3a)$$

$$b_{0110} = b_{0200} - \tilde{b}_{0110} + b_{0101}, \quad (6.3b)$$

$$b_{0011} = b_{0101} - \tilde{b}_{0011} + b_{0002}. \quad (6.3c)$$

- C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen über F_2^H

$$b_{1010} = \frac{1}{2}b_{1100} - \tilde{b}_{1010} + \frac{3}{2}b_{1001}, \quad (6.4a)$$

$$b_{0110} = \frac{1}{2}b_{0200} - \tilde{b}_{0110} + \frac{3}{2}b_{0101}, \quad (6.4b)$$

$$b_{0011} = \frac{1}{2}b_{0101} - \tilde{b}_{0011} + \frac{3}{2}b_{0002}. \quad (6.4c)$$

- C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen über F_1^S

$$b_{1100} = \frac{1}{3}b_{2000} - \frac{2}{3}\tilde{b}_{1100} + \frac{4}{3}b_{1010}, \quad (6.5a)$$

$$b_{0110} = \frac{1}{3}b_{1010} - \frac{2}{3}\tilde{b}_{0110} + \frac{4}{3}b_{0020}, \quad (6.5b)$$

$$b_{0101} = \frac{1}{3}b_{1001} - \frac{2}{3}\tilde{b}_{0101} + \frac{4}{3}b_{0011}. \quad (6.5c)$$

- C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen über F_1^H

$$b_{1100} = \frac{2}{3}b_{2000} - \tilde{b}_{1100} + \frac{4}{3}b_{1010}, \quad (6.6a)$$

$$b_{0110} = \frac{2}{3}b_{1010} - \tilde{b}_{0110} + \frac{4}{3}b_{0020}, \quad (6.6b)$$

$$b_{0101} = \frac{2}{3}b_{1001} - \tilde{b}_{0101} + \frac{4}{3}b_{0011}. \quad (6.6c)$$

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

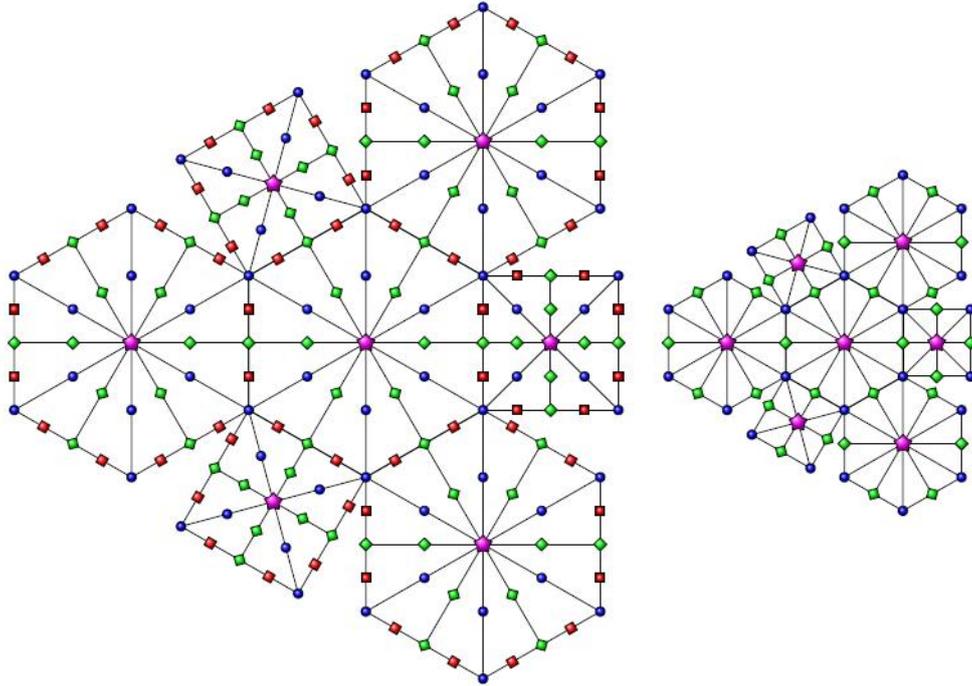


Abbildung 6.2.: *Links*: Domain-Points auf der Hülle eines halben aufgeklappten Truncated Octahedrons \mathcal{T} . *Rechts*: Domain-Points von \mathcal{T} , die im Abstand 1 zum Schwerpunkt von \mathcal{T} liegen. Rote Quadrate beschreiben die Punkte der bestimmten Menge \mathcal{M} auf \mathcal{T} . Die restlichen Domain-Points, deren assoziierte Koeffizienten durch die Bedingungen (6.1-6.6) bestimmt werden können, zeigen wir als blaue Punkte, grüne Rauten und violette Sterne.

Hier beschreibt (6.1) die C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen über die gemeinsamen Dreiecksflächen benachbarter Tetraeder in unterschiedlichen TO und (6.2)-(6.6) beschreiben die C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen über die gemeinsamen Dreiecksflächen benachbarter Tetraeder innerhalb eines TO. Da die trivariaten Differenzierbarkeitsbedingungen über die Seiten F_0 und F_3 zu Differenzierbarkeitsbedingungen univariaten Typs degenerieren (siehe Korollar 2.13 auf Seite 19), ist es möglich, diese Bedingungen für die Fälle F_0^S und F_0^H , sowie F_3^S und F_3^H , durch eine Formel zu beschreiben.

Im folgenden Lemma geben wir eine bestimmende Menge für den Raum der quadratischen C^1 -Splines auf TO-Partitionen an. Wir bezeichnen dabei mit T_B Tetraeder in Δ , deren Eckpunkt v_3 ein äußerer Eckpunkt von \diamond ist.

6.1. Quadratische C^1 -Splines auf Truncated Octahedron Partitionen

Lemma 6.1 (Bestimmende Menge)

Die Menge $\mathcal{M} := \{\xi_{0011}^T, \xi_{0002}^T : T, T_B \in \Delta\}$ ist eine bestimmende Menge für den Raum $\mathcal{S}_2^1(\Delta)$.

Beweis: Die Menge \mathcal{M} ist eine bestimmende Menge für den Raum $\mathcal{S}_2^1(\Delta)$, wenn für alle $s \in \mathcal{S}_2^1(\Delta)$ mit $b_\xi = 0$, $\xi \in \mathcal{M}$, folgt $s \equiv 0$. Sei $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ ein Tetraeder in Δ und $D^1(v_3)$ die Kugel mit Radius 1 um v_3 . Der Spline $s \in \mathcal{S}_2^0(\Delta)$ ist C^1 -differenzierbar in v_3 genau dann, wenn alle Bernstein-Bézier-Punkte (ξ, b_ξ) , $\xi \in D^1(v_3)$, in der selben Hyperebene im \mathbb{R}^4 liegen. Die Menge $\mathcal{M} \cap D^1(v_3)$ enthält genau 4 Punkte in allgemeiner Lage, d.h. sie liegen nicht auf einer Ebene im \mathbb{R}^3 . Damit legen die 4 Bernstein-Bézier-Punkte (ξ, b_ξ) , $\xi \in \mathcal{M} \cap D^1(v_3)$, eindeutig eine Hyperebene im \mathbb{R}^4 fest und somit folgt $b_\xi = 0$ für alle $\xi \in D^1(v_3)$. Dies folgt auch durch Anwendung der C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen (6.1c), (6.3c), (6.4c), (6.5c) und (6.6c). Es gilt also $b_\xi = 0$ für alle $\xi = \xi_{i,j,k,\ell}^T \in \mathcal{D}_\Delta$, $\ell \geq 1$. Jetzt verwenden wir die Bedingungen (6.2a-c) und erhalten $b_\xi = 0$ für alle $\xi = \xi_{i,j,k,\ell}^T \in \mathcal{D}_\Delta$, $k \geq 1$. Weiter folgt aus den Bedingungen (6.3a-b) und (6.4a-b), dass $b_\xi = 0$ für alle $\xi = \xi_{i,j,k,\ell}^T \in \mathcal{D}_\Delta$, $j \geq 1$. Die Bedingungen (6.5a) und (6.6a) implizieren dann $b_\xi = 0$ für alle $\xi = \xi_{2,0,0,0}^T \in \mathcal{D}_\Delta$. Es folgt also, dass $b_\xi = 0$ für alle $\xi \in \mathcal{D}_\Delta$ und damit $s \equiv 0$. □

Abbildung 6.2 zeigt die Reihenfolge, in der die Koeffizienten im Beweis von Lemma 6.1 bestimmt werden. Auf Grund der Symmetrie betrachten wir nur einen halben aufgeklappten Truncated Octahedron. Die linke Seite zeigt die Domain-Points, die auf der Hülle des Truncated Octahedrons liegen, und die rechte Seite die Domain-Points im Abstand 1 zum Schwerpunkt v_0 des Truncated Octahedrons. Wir nehmen hier an, dass alle Eckpunkte im Inneren von \diamond liegen. Die Punkte der bestimmenden Menge \mathcal{M} werden durch rote Quadrate (■) dargestellt, während die blauen Punkte (●) die Domain-Points zeigen, deren Koeffizienten direkt durch die Hyperebenen-Bedingung und die Koeffizienten b_ξ , $\xi \in \mathcal{M}$, bestimmt werden. Grüne Rauten (◆) zeigen die Domain-Points, deren assoziierte Koeffizienten durch die univariaten Bedingungen (6.2a-c) bestimmt werden. Die bivariaten Bedingungen (6.3a-b) und (6.4a-b) legen schließlich die Koeffizienten der durch violette Sterne (★) dargestellten Domain-Points fest.

6.2. Eine Familie von Quasi-Interpolanten auf dem Cubic Grid

Wir beschreiben in diesem Abschnitt eine Familie von Quasi-Interpolationsoperatoren Q_k mit Parameterwerten $k \geq 1$ zur Approximation von Daten auf dem kubischen Gitter (Cubic Grid). In Unterabschnitt 6.2.1 geben wir explizit Formeln für die Berechnung der Koeffizienten eines Splines $s \in S_2^0(\Delta)$ in seiner Bernstein-Bézier-Darstellung bezüglich Δ an und zeigen, dass diese Splines auch alle Differenzierbarkeitsbedingungen des Raums $S_2^1(\Delta)$ erfüllen. Die Koeffizienten werden dabei aus lokalen Datenwerten stabil berechnet. Wir verwenden hier eine spezielle Einbettung des kubischen Datengitters in Δ , bei der im Schwerpunkt der hexagonalen Seitenflächen der Truncated Octahedrons in Δ jeweils ein Datenpunkt liegt. In Unterabschnitt 6.2.2 geben wir einige wichtige Eigenschaften der Operatoren Q_k für unterschiedliche Parameterwerte $k \geq 1$ an. Wir zeigen, dass alle Operatoren beschränkt sind und Konstanten exakt reproduzieren. Für Werte $k \geq 3$ sind die Operatoren darüber hinaus positiv und für den Wert $k = 2$ werden lineare Polynome exakt und quadratische Polynome bis auf eine Konstante reproduziert. In Unterabschnitt 6.2.3 zeigen wir, dass der Operator Q_2 somit die Approximationsordnung zwei sowohl für die Werte, als auch für die ersten Ableitungen einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion besitzt. Wir untersuchen an dieser Stelle ebenfalls die Approximationseigenschaften der Operatoren Q_k für beliebige Werte $k \geq 1$ und insbesondere die diskrete Approximation der Datenwerte. In Unterabschnitt 6.2.4 bestätigen wir die theoretischen Ergebnisse der vorherigen Unterabschnitte durch numerische Tests und zeigen durch (Real-Time) Rendering mit Raycasting-Methoden die effiziente Berechenbarkeit sowie die hohe Visualisierungsqualität der Splines.

6.2.1. Definition der Quasi-Interpolanten

In diesem Unterabschnitt beschreiben wir die Konstruktion einer Familie von Quasi-Interpolationsoperatoren auf Δ zur Approximation von Daten auf dem kubischen Gitter. Wir verwenden dazu eine bestimmte Einbettung des kubischen Gitters in Δ , wobei jedem Truncated Octahedron gewisse Datenpunkte zugeordnet werden. Die Quasi-Interpolationsoperatoren geben wir durch explizite Formeln zur Berechnung der Koeffizienten der Splines an und zeigen, dass die resultierenden Splines C^1 -differenzierbar zusammengesetzt sind.

6.2. Eine Familie von Quasi-Interpolanten auf dem Cubic Grid

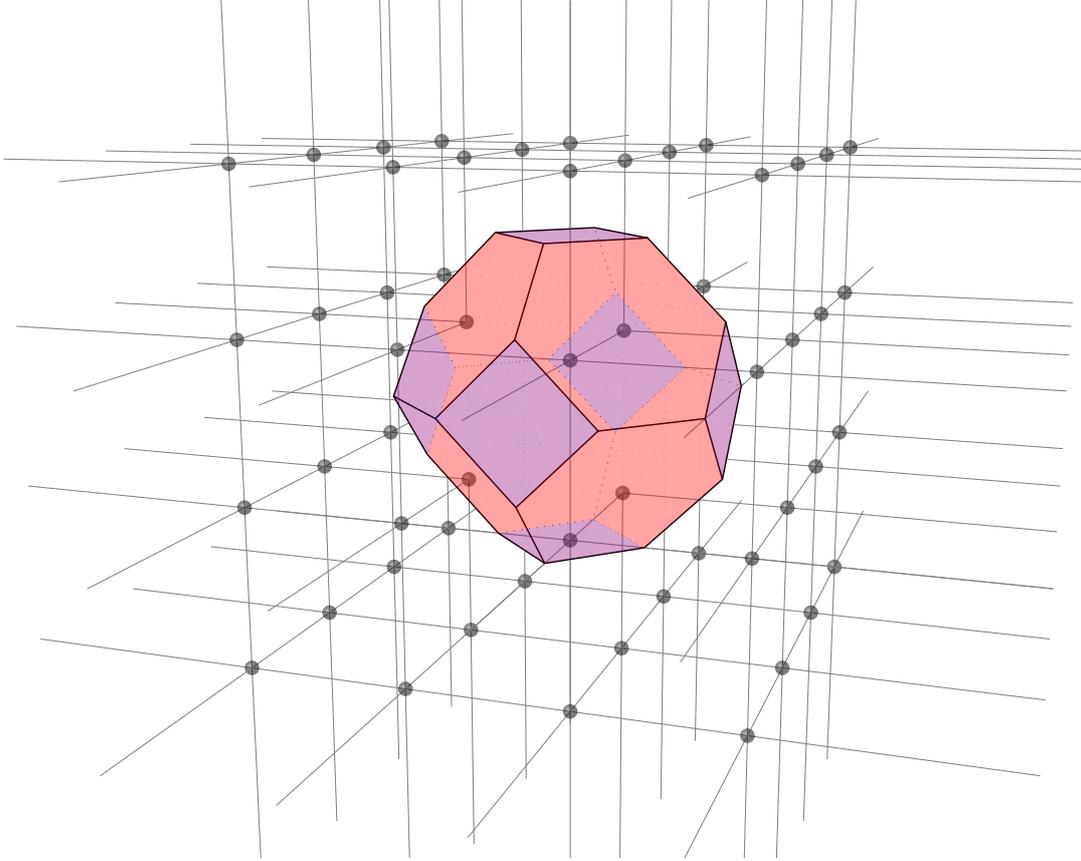


Abbildung 6.3.: Ein Truncated Octahedron \mathcal{T} im kubischen Gitter. Es liegen genau acht Gitterpunkte jeweils in der Mitte einer der hexagonalen Seitenflächen von \mathcal{T} .

Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, sei

$$\mathcal{V} := \{v_{ijk} = (ih, jh, kh) : i, j, k = -1, \dots, (n+1)\}$$

das aus $(n+3)^3$ Punkten bestehende kubische Gitter mit Gittergröße $h \in \mathbb{R}$. Weiter sei \diamond die Truncated Octahedron Partition mit Truncated Octahedrons der Größe h , deren Schwerpunkte auf den Gitterpunkten des *BCC*-Grids

$$\tilde{\mathcal{V}} := \{v_{ijk} + (\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, \frac{h}{2}) : i, j, k = 1, \dots, (n-2), i, j, k \text{ alle gerade oder alle ungerade}\}$$

liegen. Wir nehmen an, dass die Werte einer Funktion $f \in C(\Omega^*)$, wobei $\Omega^* := [-h, (n+1)h]^3 \subseteq \mathbb{R}^3$, an den Gitterpunkten von \mathcal{V} bekannt sind. In jedem Truncated Octahedron $\mathcal{T} \in \diamond$ liegen dann exakt 8 Punkte $z_1^{\mathcal{T}}, \dots, z_8^{\mathcal{T}}$ der Menge \mathcal{V} . Jeder dieser Punkte liegt im Mittelpunkt einer der acht hexagonalen Seitenflächen von \mathcal{T} (siehe Abbildung 6.3) und wir bezeichnen die Menge dieser Punkte mit $\mathcal{V}_{\mathcal{T}} := \{z_1^{\mathcal{T}}, \dots, z_8^{\mathcal{T}}\}$.

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

Obwohl \mathcal{V} auch Punkte enthält, die nicht von \diamond überdeckt werden, gehen wir im Folgenden davon aus, dass auch diese Datenpunkte Truncated Octahedrons zugeordnet werden können.

Sei Δ die gleichmäßige Tetraeder-Partition von \diamond wie in Abschnitt 6.1 beschrieben und $\Omega \subset \Omega^*$ das überdeckte Gebiet im \mathbb{R}^3 . Wir beschreiben nun, wie die Koeffizienten b_ξ , $\xi \in \mathcal{D}_\Delta$, eines quadratischen Splines s_f in Bernstein-Bézier-Darstellung auf Δ als Linearkombinationen von gewissen Datenwerten berechnet werden können. Dazu werden jeweils nur lokale Daten in einer bestimmten Umgebung von ξ verwendet, was wir im Folgenden im Detail beschreiben.

Falls der Domain-Point ξ im Inneren eines Truncated Octahedrons $\mathcal{A} \in \diamond$ liegt, so berechnet sich der assoziierte Koeffizient b_ξ als Linearkombination der acht Datenwerte $A_i := f(z_i^{\mathcal{A}})$, $z_i^{\mathcal{A}} \in \mathcal{V}_{\mathcal{A}}$, $i = 1, \dots, 8$:

$$b_\xi = \sum_{i=1, \dots, 8} w_i^{\mathcal{A}} A_i, \quad w_i^{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}.$$

Hier, wie auch im Folgenden, sind die Datenpunkte $z_i^{\mathcal{T}}$, $i = 1, \dots, 8$, eines Truncated Octahedrons \mathcal{T} nach aufsteigenden (euklidischen) Distanzen zum Punkt ξ geordnet. Dies bedeutet also, dass gilt $\|\xi - z_i\|_2 \leq \|\xi - z_j\|_2$, für $i < j$. Im Fall gleicher Abstände kann die Bezeichnung der Punkte beliebig gewählt werden. Ebenso wie im univariaten Fall in Kapitel 3 erhält also jeder Koeffizient eine individuelle Datenpunktordnung. Die Abbildungen 6.4 und 6.5 zeigen typische Datenpunktordnungen für bestimmte Mengen von Domain-Points auf der Hülle eines aufgeklappten Truncated Octahedrons \mathcal{T} .

Liegt der Domain-Point ξ im Inneren einer gemeinsamen Seitenfläche zweier Truncated Octahedrons, so wird der zugehörige Koeffizient b_ξ berechnet als Linearkombination der Datenwerte, die diesen beiden Truncated Octahedrons zugeordnet sind. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \diamond$ zwei Truncated Octahedrons mit gemeinsamer Seitenfläche, so wird b_ξ , $\xi \in \text{int}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, bestimmt durch

$$b_\xi = \sum_{i=1, \dots, 8} w_i^{\mathcal{A}} A_i + \sum_{i=1, \dots, 8} w_i^{\mathcal{B}} B_i, \quad w_i^{\mathcal{A}}, w_i^{\mathcal{B}} \in \mathbb{R},$$

wobei $B_i := f(z_i^{\mathcal{B}})$, $z_i^{\mathcal{B}} \in \mathcal{V}_{\mathcal{B}}$. Hier bezeichnet \mathcal{A} das Truncated Octahedron, für das gilt $\|\xi - z_1^{\mathcal{A}}\|_2 \leq \|\xi - z_2^{\mathcal{B}}\|_2$. Falls \mathcal{A} und \mathcal{B} eine gemeinsame quadratische Seitenfläche besitzen, so sind die Distanzen identisch und die Bezeichnung kann beliebig gewählt werden. Haben \mathcal{A} und \mathcal{B} eine gemeinsame hexagonale Seitenfläche, so besitzen sie den gemeinsamen Datenpunkt $z_1^{\mathcal{A}} = z_1^{\mathcal{B}}$ und der Datenwert $A_1 = B_1$ wird somit gewichtet mit $w_1^{\mathcal{A}} + w_1^{\mathcal{B}}$.

6.2. Eine Familie von Quasi-Interpolanten auf dem Cubic Grid

Falls der Domain-Point ξ im Inneren einer gemeinsamen Kante dreier Truncated Octahedrons liegt, so wird der assoziierte Koeffizient b_ξ berechnet als Linearkombination der Datenwerte, die diesen drei Truncated Octahedrons zugeordnet sind. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \diamond$ drei Truncated Octahedrons mit gemeinsamer Kante, so wird b_ξ , $\xi \in \text{int}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C})$, bestimmt durch

$$b_\xi = \sum_{i=1, \dots, 8} w_i^A A_i + \sum_{i=1, \dots, 8} w_i^B B_i + \sum_{i=1, \dots, 8} w_i^C C_i,$$

wobei $w_i^A, w_i^B, w_i^C \in \mathbb{R}$ und $C_i := f(z_i^C)$, $z_i^C \in \mathcal{V}_C$. Hier bezeichnet \mathcal{A} wiederum das Truncated Octahedron, für das gilt $\|\xi - z_2^A\|_2 = \min_{\mathcal{T} \in \diamond} \|\xi - z_2^{\mathcal{T}}\|_2$. Da \mathcal{A} und \mathcal{B} ebenso wie \mathcal{A} und \mathcal{C} eine gemeinsame hexagonale Seitenfläche besitzen, haben sie den gemeinsamen Datenpunkt $z_1^A = z_1^B$ bzw. $z_2^A = z_1^C$ und der entsprechende Datenwert wird somit gewichtet mit $w_1^A + w_1^B$ bzw. $w_2^A + w_1^C$.

Ist der Domain-Point ξ identisch mit einem gemeinsamen Eckpunkt von vier Truncated Octahedrons, so wird der zugehörige Koeffizient b_ξ berechnet als Linearkombination der Datenwerte die diesen vier Truncated Octahedrons zugeordnet sind. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in \diamond$ vier Truncated Octahedrons mit gemeinsamem Eckpunkt v , so wird b_ξ , $\xi = v$, bestimmt durch

$$b_\xi = \sum_{i=1, \dots, 8} w_i^A A_i + \sum_{i=1, \dots, 8} w_i^B B_i + \sum_{i=1, \dots, 8} w_i^C C_i + \sum_{i=1, \dots, 8} w_i^D D_i,$$

wobei $w_i^A, w_i^B, w_i^C, w_i^D \in \mathbb{R}$ und $D_i := f(z_i^D)$, $z_i^D \in \mathcal{V}_D$. Auf Grund der Symmetrie kann die Bezeichnung der Truncated Octahedrons in diesem Fall beliebig gewählt werden. Da genau vier hexagonale Seitenflächen den Eckpunkt v gemeinsam haben, gibt es auch in diesem Fall gemeinsame Datenpunkte. Diese seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z_1^A = z_1^B$, $z_2^A = z_1^C$, $z_1^D = z_2^B$ und $z_2^D = z_2^C$.

Im Folgenden beschreiben wir eine Familie von Quasi-Interpolationsoperatoren $Q_k : C(\Omega^*) \rightarrow S_2^0(\Delta)$ für Parameterwerte $k \geq 1$, indem wir explizit die Berechnung der Koeffizienten der Splines $s_f := Q_k(f)$ in ihrer Bernstein-Bézier-Darstellung bezüglich Δ angeben. Wir nehmen dabei an, dass die benötigten Datenwerte an den Gitterpunkten von \mathcal{V} von einer stetigen Funktion $f \in C(\Omega^*)$ stammen. In bestimmten Fällen muss unterschieden werden aus welchem Typ von Tetraeder die Koeffizienten b_ξ stammen. Liegt ξ in einem Tetraeder vom Typ T^S (siehe Abschnitt 6.1), so bezeichnen wir den assoziierten Koeffizienten mit b_ξ^S . In allen anderen Fällen bezeichnen wir die Koeffizienten mit b_ξ^H . Da in den Berechnungen oft gleiche Gewichte zu finden sind, nutzen wir die kompakte Notation $AB_{1,2} := A_1 + B_1 + A_2 + B_2$ (analog für $A_{1,2}, ABCD_{1,2}$, etc.). Die Berechnung der Bernstein-Bézier-Koeffizienten ist dann wie folgt:

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

$$\begin{aligned}
b_{0011} &:= \frac{1}{k} 2^{-6} (2 ((k+3)A_{1,2} + (k+1)A_{3,4} + (k-1)A_{5,6} + (k-3)A_{7,8}) \\
&\quad + 3 ((k+3)BC_{1,2} + (k+1)BC_{3,4} \\
&\quad + (k-1)BC_{5,6} + (k-3)BC_{7,8})) \\
b_{0020} &:= \frac{1}{k} 2^{-6} (2 ((k+3)A_{1,2} + kA_{3,4,5,6} + (k-3)A_{7,8}) \\
&\quad + 3 ((k+3)BC_1 + (k+2)BC_{2,3} + (k+1)BC_4 \\
&\quad + (k-1)BC_5 + (k-2)BC_{6,7} + (k-3)BC_8)) \\
b_{0002} &:= \frac{1}{k} 2^{-5} ((k+3)ABCD_{1,2} + (k+1)ABCD_{3,4} \\
&\quad + (k-1)ABCD_{5,6} + (k-3)ABCD_{7,8}) \\
b_{0101}^{S,H} &:= \frac{1}{k} 2^{-4} ((k+3)AB_{1,2} + (k+1)AB_{3,4} + (k-1)AB_{5,6} + (k-3)AB_{7,8}) \\
b_{0110}^S &:= \frac{1}{k} 2^{-4} ((k+3)AB_1 + (k+2)AB_{2,3} + (k+1)AB_4 \\
&\quad + (k-1)AB_5 + (k-2)AB_{6,7} + (k-3)AB_8) \\
b_{0110}^H &:= \frac{1}{k} 2^{-4} ((k+3)A_{1,2} + kA_{3,4,5,6} + (k-3)A_{7,8} \\
&\quad + (k+3)B_1 + (k+2)B_{2,3} + (k+1)B_4 \\
&\quad + (k-1)B_5 + (k-2)B_{6,7} + (k-3)B_8) \\
b_{0200}^S &:= \frac{1}{k} 2^{-4} ((k+2)AB_{1,2,3,4} + (k-2)AB_{5,6,7,8}) \\
b_{0200}^H &:= \frac{1}{k} 2^{-4} ((k+3)AB_1 + (k+1)AB_{2,3,4} + (k-1)AB_{5,6,7} + (k-3)AB_8) \\
b_{1001} &:= \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3)A_{1,2} + (k+1)A_{3,4} + (k-1)A_{5,6} + (k-3)A_{7,8}) \\
b_{1010}^S &:= \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3)A_1 + (k+2)A_{2,3} + (k+1)A_4 \\
&\quad + (k-1)A_5 + (k-2)A_{6,7} + (k-3)A_8) \\
b_{1010}^H &:= \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3)A_{1,2} + kA_{3,4,5,6} + (k-3)A_{7,8}) \\
b_{1100}^S &:= \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+2)A_{1,2,3,4} + (k-2)A_{5,6,7,8}) \\
b_{1100}^H &:= \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3)A_1 + (k+1)A_{2,3,4} + (k-1)A_{5,6,7} + (k-3)A_8) \\
b_{2000} &:= 2^{-3} A_{1,2,3,4,5,6,7,8}
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Da alle Koeffizienten b_ξ , $\xi \in \mathcal{D}_\Delta$, eindeutig bestimmt sind, folgt direkt, dass für den resultierenden Spline s_f gilt $s_f \in \mathcal{S}_2^0(\Delta)$.

6.2. Eine Familie von Quasi-Interpolanten auf dem Cubic Grid

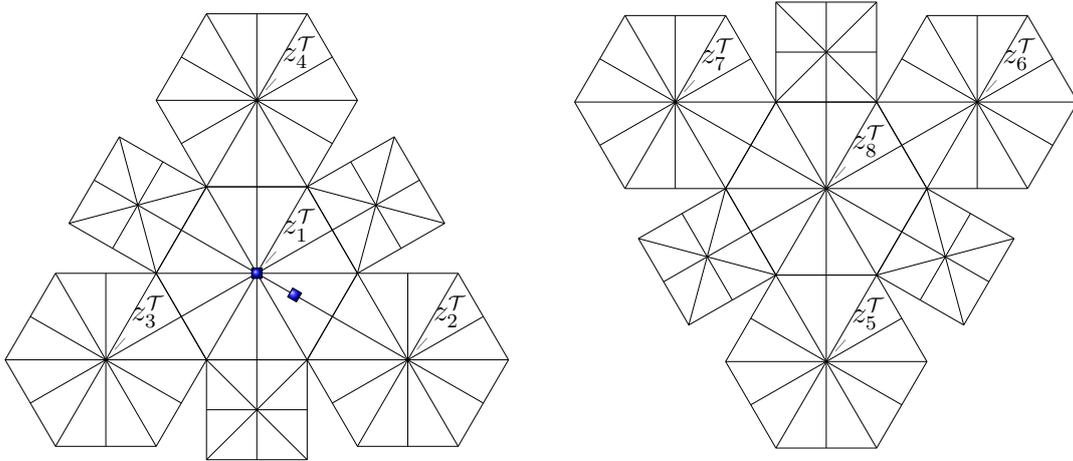


Abbildung 6.4.: Eine typische Ordnung der Datenpunkte z_1^T, \dots, z_8^T der Koeffizienten b_ξ , $\xi = \xi_{0200}$ und $\xi = \xi_{0110}$ ('blaue' Quadrate) auf der Hülle eines aufgeklappten Truncated Octahedrons \mathcal{T} .

Das nächste wichtige Resultat wird zeigen, dass die Gewichte so gewählt sind, dass der Spline s_f auch global C^1 -differenzierbar auf Ω ist.

Satz 6.2 (C^1 -Differenzierbarkeit)

Der Quasi-Interpolationsoperator $Q_k : C(\Omega^*) \rightarrow \mathcal{S}_2^0(\Delta)$, $k \geq 1$, ist eine lineare Abbildung in den Raum $\mathcal{S}_2^1(\Delta)$.

Beweis: Es muss gezeigt werden, dass die Splines $s_f := Q_k(f)$, $k \geq 1$, die C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen (6.1)-(6.6) für alle inneren Dreiecksflächen von Δ gleichzeitig erfüllen. Da der vollständige Beweis lang ist, geben wir an dieser Stelle lediglich das Vorgehen für zwei typische Bedingungen an. Der vollständige Beweis befindet sich in Anhang A.

Zunächst betrachten wir die Bedingung (6.1a) univariaten Typs, wenn die Dreiecksseite F_0^S auf einer gemeinsamen quadratischen Seitenfläche zweier benachbarter Truncated Octahedrons liegt:

$$b_{1100}^S + \tilde{b}_{1100}^S = 2b_{0200}^S.$$

Nun verwenden wir (6.7) für die involvierten Koeffizienten und erhalten auf der linken Seite der Gleichung

$$\frac{1}{k} 2^{-3} \left((k+2) A\tilde{A}_{1,2,3,4} + (k-2) A\tilde{A}_{5,6,7,8} \right).$$

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

Da gilt $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{B}$, ist dies genau zweimal der Koeffizient b_{0200}^S und die Bedingung ist erfüllt.

Als nächstes untersuchen wir (6.4a), eine Bedingung bivariaten Typs, wobei F_2^H eine gemeinsame Dreiecksfläche zweier benachbarter Tetraeder $T \in T^H$ und $\tilde{T} \in T^H$ innerhalb eines Truncated Octahedrons ist. Es muss gelten

$$b_{1010}^S + \tilde{b}_{1010}^H = \frac{1}{2}b_{1100}^H + \frac{3}{2}b_{1001},$$

wobei genau einer der beiden Koeffizienten auf der linken Seite vom Typ b_{ξ}^S sein muss und der andere vom Typ b_{ξ}^H . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir sagen, dass $b_{1010} = b_{1010}^S$ und $\tilde{b}_{1010} = \tilde{b}_{1010}^H$. Wir verwenden nun (6.7) für die Koeffizienten auf der linken Seite der Gleichung und da gilt $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}2^{-3} & ((2k+6)A_1 + (2k+5)A_2 + (2k+2)A_3 + (2k+1)A_4 \\ & + (2k-1)A_5 + (2k-2)A_6 + (2k-5)A_7 + (2k-6)A_8). \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der Gleichung müssen wir jedoch beachten, dass lediglich der Koeffizient b_{1001} die gleiche Datenpunktordnung besitzt wie die Koeffizienten b_{1010}^S und \tilde{b}_{1010}^H (siehe Abbildungen 6.4 und 6.5). Daher bezeichnen wir die Datenwerte bezüglich b_{1100}^H zunächst mit $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_8$ und erhalten mit (6.7)

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}2^{-4} & ((k+3)\hat{A}_1 + (k+1)\hat{A}_{2,3,4} + (k-1)\hat{A}_{5,6,7} + (k-3)\hat{A}_8 \\ & + 3((k+3)A_{1,2} + (k+1)A_{3,4} + (k-1)A_{5,6} + (k-3)A_{7,8})). \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die unterschiedlichen Datenpunktordnungen, so ergibt sich der folgende Zusammenhang

$$\hat{A}_1 = A_1, \hat{A}_2 = A_2, \hat{A}_3 = A_3, \hat{A}_4 = A_5, \hat{A}_5 = A_4, \hat{A}_6 = A_6, \hat{A}_7 = A_7, \hat{A}_8 = A_8.$$

Wenden wir dies nun auf den obigen Term an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}2^{-4} & ((4k+12)A_1 + (4k+10)A_2 + (4k+4)A_3 + (4k+2)A_4 \\ & + (4k-2)A_5 + (4k-4)A_6 + (4k-10)A_7 + (4k-12)A_8) \end{aligned}$$

und die Bedingung (6.4a) ist erfüllt.

Alle Bedingungen (6.1)-(6.6) können mit analogem Vorgehen nachgewiesen werden, wobei stets die Ordnung der Datenpunkte für jeden Koeffizienten individuell beachtet werden muss.

□

6.2. Eine Familie von Quasi-Interpolanten auf dem Cubic Grid

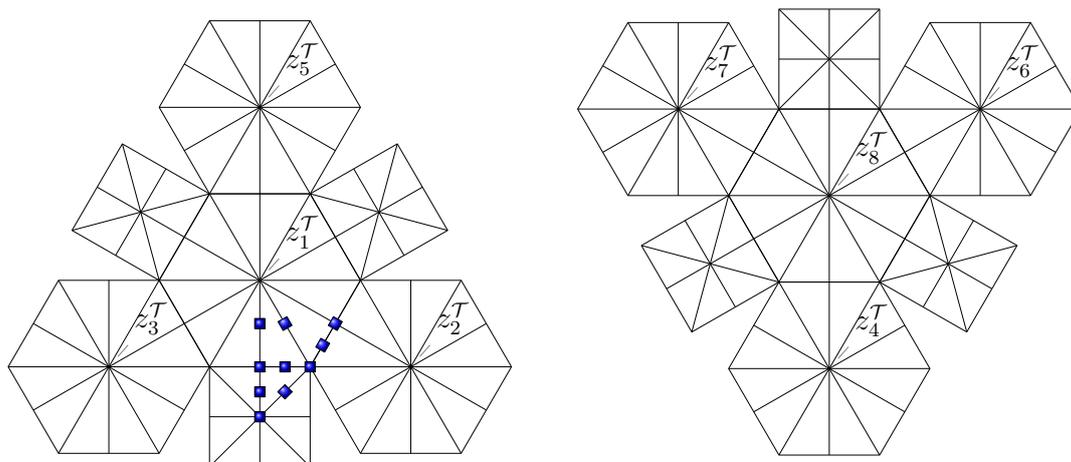


Abbildung 6.5.: Eine typische Ordnung der Datenpunkte z_1^T, \dots, z_8^T gewisser Koeffizienten b_ξ ('blaue' Quadrate) auf der Hülle eines aufgeklappten Truncated Octahedrons \mathcal{T} .

6.2.2. Eigenschaften der Quasi-Interpolanten

In diesem Unterabschnitt beweisen wir einige wichtige Eigenschaften der Operatoren Q_k , $k \geq 1$. Wir zeigen, dass die Operatoren für Parameterwerte $k \geq 3$ positiv sind und untersuchen die Reproduktionseigenschaften der Operatoren für unterschiedliche Parameterwerte. Abschließend zeigen wir, dass alle Operatoren beschränkt sind und die resultierenden Splines stabil berechnet werden können.

Korollar 6.3 (Positivität)

Der Quasi-Interpolationsoperator $Q_k : C(\Omega^*) \rightarrow \mathcal{S}_2^1(\Delta)$ ist positiv für $k \geq 3$.

Beweis: Für Parameterwerte $k \geq 3$ ergeben sich in der Berechnung der Bernstein-Bézier-Koeffizienten der Splines $s_f := Q_k(f)$ in (6.7) nur positive Gewichte. Gehen wir davon aus, dass alle Datenwerte von einer positiven Funktion $f \in C(\Omega^*)$ stammen, so ist der Spline s_f ebenfalls positiv. Dies folgt direkt aus der Bernstein-Bézier-Darstellung (siehe Satz 2.6) und der Nicht-Negativität der Bernstein-Polynome (siehe Satz 2.9). Gilt für die Funktion $f \equiv 0$, so folgt auch $s_f \equiv 0$.

□

Das nächste Lemma zeigt, dass die Quasi-Interpolationsoperatoren Q_k , $k \geq 1$, gewisse Polynome reproduzieren. Dies ist eine wichtige Voraussetzung für die Bestimmung

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

der Approximationsordnung im nächsten Unterabschnitt. Insbesondere der Operator Q_2 reproduziert quadratische Polynome bis auf eine Konstante.

Lemma 6.4 (Reproduktionseigenschaften)

Es gelten die folgenden Aussagen.

- (i) $Q_k(1) \equiv 1, \forall k \geq 1$
- (ii) $Q_2(p) \equiv p, \forall p \in \mathcal{P}_1$
- (iii) $Q_2(p) \equiv p, p \in \{xy, xz, yz\}$
- (iv) $Q_2(p) \equiv p + \frac{h^2}{4}, p \in \{x^2, y^2, z^2\}$
- (v) Für $p \in \mathcal{P}_2$, existiert eine Konstante C unabhängig von h , so dass
 $Q_2(p) \equiv p + Ch^2$

Beweis: (i) Sind alle Datenwerte in den Formeln (6.7) gleich 1, so sind auch alle Koeffizienten b_ξ gleich 1. Damit folgt nach Satz 2.10(i), dass $Q_k(1) \equiv 1$, für alle $k \geq 1$.

Für (ii) müssen wir zusätzlich zu (i) zeigen, dass der Quasi-Interpolationsoperator Q_2 auch die Monome $\{x, y, z\}$ reproduziert. Da durch Lemma 6.1 eine bestimmende Menge \mathcal{M} für den Raum $\mathcal{S}_2^1(\Delta)$ gegeben ist, genügt es die Reproduktionseigenschaft für die Koeffizienten $b_\xi, \xi \in \mathcal{M}$, nachzuweisen. Mit (i) und der Linearität des Operators Q_2 ist die Reproduktion darüberhinaus unabhängig von der Wahl des Ursprungs. Daher betrachten wir im Folgenden den Tetraeder $T = [v_0, v_1, v_2, v_3] \in \Delta$, wobei $v_0 = (0, 0, 0)$, $v_1 = (h, 0, 0)$, $v_2 = (h, \frac{h}{4}, \frac{h}{4})$ und $v_3 = (h, \frac{h}{2}, 0)$. Dieser Tetraeder liegt innerhalb eines im Ursprung zentrierten Truncated Octahedrons der Größe h . Da der Koeffizient $b_\xi, \xi = \xi_{0002}$, nur in der Menge \mathcal{M} enthalten ist, falls ξ auf dem Rand von Δ liegt, genügt es die Reproduktionseigenschaft lediglich für den Koeffizienten $b_\xi \in \mathcal{M}, \xi = \xi_{0011}$, zu zeigen. Denn ist die Reproduktionseigenschaft für diesen erfüllt, so folgt auf Grund der C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen direkt die Reproduktionseigenschaft der Koeffizienten $b_\xi, \xi = \xi_{0002}$, im Inneren von Δ und wegen (6.7) damit auch für alle Koeffizienten $b_\xi, \xi = \xi_{0002}$. Wir zeigen nun also, dass der Koeffizient $b_\xi, \xi = \xi_{0011}$, des Splines $Q_2(p)$ bezüglich $T, p \in \{x, y, z\}$, identisch ist mit dem Koeffizienten von p in seiner Bernstein-Bézier-Darstellung bezüglich T . Seien $p_1(x, y, z) := x, p_2(x, y, z) := y$ und $p_3(x, y, z) := z$ quadratische Polynome in ihrer Bernstein-Bézier-Darstellung bezüglich T . Die Funktionen $p_i, i = 1, 2, 3$, sind dann eingeschränkt auf die Kante $[v_2, v_3]$ univariate quadratische Polynome und die Koeffizienten $b_{0011}^{[i]}, i = 1, 2, 3$, lassen sich berechnen durch

$$b_{0011}^{[i]} = 2p_i(\xi_{0011}) - \frac{1}{2}(p_i(v_2) + p_i(v_3)), \quad i = 1, 2, 3.$$

6.2. Eine Familie von Quasi-Interpolanten auf dem Cubic Grid

Wir erhalten die folgenden Werte für die Koeffizienten $b_{0011}^{[i]}$, $i = 1, 2, 3$:

$$b_{0011}^{[1]} = h, \quad b_{0011}^{[2]} = \frac{3}{8}h \quad \text{und} \quad b_{0011}^{[3]} = \frac{1}{8}h.$$

Nun wenden wir eine mögliche Datenpunktordnung für die Datenpunkte der drei Truncated Octahedrons mit gemeinsamer Kante $[v_2, v_3]$ bezüglich des Domain-Points $\xi = \xi_{0011}$ des Tetraeders T an und erhalten

$$\begin{array}{llll} z_1^A = \left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right), & z_2^A = \left(\frac{3h}{2}, \frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right), & z_3^A = \left(\frac{h}{2}, \frac{3h}{2}, \frac{h}{2}\right), & z_4^A = \left(\frac{3h}{2}, \frac{3h}{2}, \frac{h}{2}\right), \\ z_5^A = \left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, \frac{3h}{2}\right), & z_6^A = \left(\frac{3h}{2}, \frac{h}{2}, \frac{3h}{2}\right), & z_7^A = \left(\frac{h}{2}, \frac{3h}{2}, \frac{3h}{2}\right), & z_8^A = \left(\frac{3h}{2}, \frac{3h}{2}, \frac{3h}{2}\right), \\ z_1^B = \left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right), & z_2^B = \left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, -\frac{h}{2}\right), & z_3^B = \left(\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right), & z_4^B = \left(\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}\right), \\ z_5^B = \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right), & z_6^B = \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, -\frac{h}{2}\right), & z_7^B = \left(-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right), & z_8^B = \left(-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}\right), \\ z_1^C = \left(\frac{3h}{2}, \frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right), & z_2^C = \left(\frac{3h}{2}, \frac{h}{2}, -\frac{h}{2}\right), & z_3^C = \left(\frac{3h}{2}, -\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right), & z_4^C = \left(\frac{3h}{2}, -\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}\right), \\ z_5^C = \left(\frac{5h}{2}, \frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right), & z_6^C = \left(\frac{5h}{2}, \frac{h}{2}, -\frac{h}{2}\right), & z_7^C = \left(\frac{5h}{2}, -\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right), & z_8^C = \left(\frac{5h}{2}, -\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}\right). \end{array}$$

Hier bezeichnet \mathcal{A} das in (h, h, h) zentrierte Truncated Octahedron der Größe h , während \mathcal{B} und \mathcal{C} die in $(0, 0, 0)$ bzw. $(2h, 0, 0)$ zentrierten Truncated Octahedrons der Größe h bezeichnen. Einfaches Einsetzen der Werte der Funktionen p_i , $i = 1, 2, 3$, an den obigen Datenpunkten in die Formel (6.7) für den Koeffizienten b_{0011} zeigt nun die exakte Reproduktion der Koeffizienten $b_{0011}^{[i]}$ für $i = 1, 2, 3$.

Der Beweis von (iii) und (iv) verläuft analog. Mit (i), (ii) und der Linearität von Q_2 ist die Reproduktion erneut unabhängig von der Wahl des Ursprungs. Ein Vergleich der in (6.7) berechneten Koeffizienten b_{0011} für $Q_2(p)$, wobei $p \in \{xy, xz, yz\}$ bzw. $p \in \{x^2, y^2, z^2\}$, mit den Koeffizienten $b_{0011}^{[p]}$ der Polynome p in ihrer Bernstein-Bézier-Darstellung bezüglich T zeigt nun, dass $b_{0011} = b_{0011}^{[p]}$ für $p \in \{xy, xz, yz\}$ bzw. $b_{0011} = b_{0011}^{[p]} + \frac{h^2}{4}$ für $p \in \{x^2, y^2, z^2\}$. Dies beweist (iii) und (iv), da Q_2 linear ist und Konstanten reproduziert (siehe (i)).

(v) folgt schließlich direkt durch (i)-(iv) und der Beweis ist vollständig. □

Das nächste Korollar zeigt, dass der Quasi-Interpolationsoperator Q_2 auch die Ableitungen gewisser Polynome reproduziert. Insbesondere die exakte Reproduktion der Ableitungen quadratischer Polynome ist der Hauptgrund für die optimale Approximationsordnung für die Ableitungen differenzierbarer Funktionen dieses Operators. Wir bezeichnen hier mit $D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma(f)$, wobei $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, die partiellen Ableitungen einer genügend oft differenzierbaren Funktion f .

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

Korollar 6.5 (Reproduktion von Ableitungen)

Für $p \in \mathcal{P}_2$ gilt $D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma(Q_2(p)) \equiv D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma(p)$, wobei $\alpha + \beta + \gamma \in \{1, 2\}$.

Beweis: Sei $p \in \mathcal{P}_2$, so folgt nach Lemma 6.4 (v), dass

$$D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma(Q_2(p)) \equiv D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma(p + Ch^2) \equiv D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma(p),$$

wobei $\alpha + \beta + \gamma \in \{1, 2\}$ und C eine von h unabhängige Konstante ist. □

Obwohl die Quasi-Interpolationsoperatoren Q_k für Parameterwerte $k \neq 2$ keine linearen Polynome reproduzieren, zeigt das folgende Lemma, dass alle Operatoren Q_k , $k \geq 1$, die Werte linearer Polynome an den Datenpunkten reproduzieren.

Lemma 6.6 Für $p \in \mathcal{P}_1$ und $k \geq 1$ gilt $Q_k(p)(v) = p(v)$, $\forall v \in \mathcal{V} \cap \Omega$.

Beweis: Seien $p \in \mathcal{P}_1$, $v \in \mathcal{V} \cap \Omega$ und $T = [v_0, v_1, v_2, v_3] \in \Delta$ ein Tetraeder mit Eckpunkt $v_1 = v$. Nach Satz 2.9(ii) folgt, dass $Q_k(p)(v) = b_{0200}^H$, wobei b_{0200}^H der Bernstein-Bézier-Koeffizient von $Q_k(p)|_T$ in seiner Bernstein-Bézier-Darstellung bezüglich T ist. Der Koeffizient b_{0200}^H wird nach (6.7) berechnet als Linearkombination der Werte A_i und B_i , $i = 1, \dots, 8$, von p an den Datenpunkten z_i^A bzw. z_i^B , $i = 1, \dots, 8$. Es ist nun möglich eine zulässige Datenpunktordnung bezüglich ξ_{0200}^T (siehe Unterabschnitt 6.2.1) so zu wählen, dass die Datenpunkte z_i^A und z_i^B , $i = 1, \dots, 8$, punktsymmetrisch zu v liegen. Dies bedeutet, es gilt $z_i^A + z_i^B = 2v$, $i = 1, \dots, 8$, und da alle Datenwerte von einem linearen Polynom p stammen, gilt ebenso $A_i + B_i = 2p(v)$, $i = 1, \dots, 8$. Verwenden wir dies in der Formel (6.7) für den Koeffizienten b_{0200}^H , so erhalten wir

$$b_{0200}^H = \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3) + 3(k+1) + 3(k-1) + (k-3)) p(v) = p(v). □$$

Das nächste wichtige Resultat zeigt, dass alle Operatoren Q_k für $k \geq 1$ beschränkt sind. Dies garantiert auch die stabile Berechnung der resultierenden Splines. Hier, wie auch im Folgenden verwenden wir die Maximumsnorm

$$\|f\|_\Gamma := \max_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|,$$

wobei Γ ein Gebiet im \mathbb{R}^3 und f eine stetige Funktion auf Γ ist.

Lemma 6.7 (Beschränktheit)

Seien $f \in C(\Omega^*)$ und $T = [v_0, v_1, v_2, v_3] \in \Delta$. Dann gilt

$$\|Q_k(f)\|_T \leq \frac{k+1}{k} \|f\|_{\Omega_T}, \quad k \geq 1,$$

wobei Ω_T der in v_3 zentrierte Würfel mit Kantenlänge $\frac{3}{2}h$ ist.

Beweis: Da Ω_T alle Datenpunkte enthält, die zur Berechnung der Koeffizienten b_ξ , $\xi \in \mathcal{D}_T$, in (6.7) benötigt werden, gilt für $k \geq 1$

$$|b_\xi| \leq \max\left\{1, \frac{2k+1}{2k}, \frac{k+1}{k}\right\} \|f\|_{\Omega_T}.$$

Nun folgt auf Grund der Nicht-Negativität der Bernstein-Polynome (siehe Satz 2.9) und Satz 2.10)(i)

$$\|Q_k(f)\|_T \leq \max\{|b_\xi| : \xi \in \mathcal{D}_T\}, \quad k \geq 1,$$

und der Beweis ist vollständig. □

6.2.3. Approximationseigenschaften

In diesem Unterabschnitt untersuchen wir die Approximationseigenschaften der Quasi-Interpolationsoperatoren $Q_k(f)$, $k \geq 1$. Wir verwenden dabei die gleiche Notation wie in den vorherigen Unterabschnitten. In Satz 6.8 geben wir allgemeine Fehlerabschätzungen für die Approximation der Werte differenzierbarer Funktionen an. Wir zeigen dabei, dass alle Operatoren für $k \geq 1$ mindestens die globale Approximationsordnung eins besitzen und die Datenpunkte selbst zusätzlich mit Ordnung zwei approximiert werden.

Im zweiten Resultat dieses Unterabschnitts, in Satz 6.9, geben wir schließlich spezielle Fehlerabschätzungen für den Fall $k = 2$ an. Wir zeigen, dass die Splines $Q_2(f)$ die Werte und ersten Ableitungen hinreichend oft differenzierbarer Funktionen f mit Ordnung zwei approximieren und die zweiten Ableitungen mit Ordnung eins. Das bedeutet, dass die Ableitungen der Splines in diesem Fall die optimale Approximationsordnung besitzen. Dies ist eine spezielle Eigenschaft gewisser Quasi-Interpolationsoperatoren, die bei passender Wahl der Gewichte in (6.7) erreicht werden

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

kann. Zum ersten Mal wurde ein Quasi-Interpolationsoperator mit dieser Eigenschaft in [65] entwickelt. Die approximierenden Splines waren in diesem Fall stetige quadratische Supersplines.

Für die Norm der Ableitungen von differenzierbaren Funktionen verwenden wir im Folgenden

$$\|D^r(f)\|_\Gamma := \max\{\|D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma(f)\|_\Gamma : \alpha + \beta + \gamma = r\},$$

wobei Γ ein Gebiet im \mathbb{R}^3 und f eine r -mal stetig differenzierbare Funktion auf Γ ist.

Satz 6.8 (Approximationsordnung von Q_k)

Seien $f \in C(\Omega^*)$ und $Q_k(f)$, $k \geq 1$, der in (6.7) definierte Spline bezüglich der Werte von f in den Punkten $\mathcal{V} \cap \Omega$. Es gelten die folgenden Aussagen:

(i) Wenn $f \in C^1(\Omega^*)$, so gilt

$$\|f - Q_k(f)\|_\Omega \leq C_k \|D^1(f)\|_{\Omega^*} h,$$

wobei $C_k > 0$ eine von f und h unabhängige Konstante ist.

(ii) Wenn $f \in C^2(\Omega^*)$, so gilt

$$|(f - Q_k(f))(v)| \leq \tilde{C}_k \|D^2(f)\|_{\Omega^*} h^2, \quad \forall v \in \mathcal{V} \cap \Omega,$$

wobei $\tilde{C}_k > 0$ eine von f und h unabhängige Konstante ist.

Beweis: Seien $f \in C^1(\Omega^*)$, $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ ein beliebiger Tetraeder in Δ mit Eckpunkten wie in Abschnitt 6.1 beschrieben, Ω_T wie in Lemma 6.7 definiert und $p_f \in \mathcal{P}_0$ das konstante Taylorpolynom von f in v_3 . Dann existiert eine Konstante $C_T > 0$ unabhängig von f und h , so dass

$$\|f - p_f\|_{\Omega_T} \leq C_T \|D^1(f)\|_{\Omega_T} h.$$

Es folgt mit der Dreiecksungleichung, dass gilt

$$\|f - Q_k(f)\|_T \leq \|f - p_f\|_{\Omega_T} + \|Q_k(f) - p_f\|_T.$$

Mit Lemma 6.4(i), der Linearität von Q_k und Korollar 6.7 erhalten wir weiter

$$\|Q_k(f) - p_f\|_T = \|Q_k(f - p_f)\|_T \leq \frac{k+1}{k} \|f - p_f\|_{\Omega_T}.$$

6.2. Eine Familie von Quasi-Interpolanten auf dem Cubic Grid

Eine Kombination dieser Ungleichungen führt zu

$$\|f - Q_k(f)\|_T \leq C_k \|D^1(f)\|_{\Omega_T} h,$$

wobei $C_k = (1 + \frac{k+1}{k})C_T$ eine Konstante unabhängig von f und h ist. Dies beweist die Aussage (i).

Seien nun $f \in C^2(\Omega^*)$, $v \in \mathcal{V} \cap \Omega$, $T = [v_0, v_1, v_2, v_3] \in \Delta$ ein Tetraeder mit $v_1 = v$, Ω_T wie in Lemma 6.7 definiert und $p_f \in \mathcal{P}_1$ das lineare Taylorpolynom von f in v_3 . Dann existiert eine Konstante $\tilde{C}_T > 0$ unabhängig von f und h , so dass gilt

$$|(f - p_f)(v)| \leq \tilde{C}_T \|D^2(f)\|_{\Omega_T} h^2.$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir weiter

$$|(f - Q_k(f))(v)| \leq |(f - p_f)(v)| + |(Q_k(f) - p_f)(v)|.$$

Verwenden wir nun Lemma 6.6, die Linearität von Q_k und Korollar 6.7 ergibt sich für den letzten Term

$$|(Q_k(f) - p_f)(v)| = |Q_k(f - p_f)(v)| \leq \frac{k+1}{k} \|f - p_f\|_{\Omega_T}.$$

Durch Kombination dieser Ungleichungen erhalten wir dann

$$|(f - Q_k(f))(v)| \leq \tilde{C}_k \|D^2(f)\|_{\Omega_T} h^2,$$

wobei $\tilde{C}_k = (1 + \frac{k+1}{k})\tilde{C}_T$ eine Konstante unabhängig von f und h ist. □

Satz 6.9 (Approximationsordnung von Q_2)

Seien $f \in C(\Omega^*)$ und $Q_2(f)$ der in (6.7) definierte Spline für $k = 2$ bezüglich der Werte von f in den Punkten $\mathcal{V} \cap \Omega$. Es gelten die folgenden Aussagen:

(i) Wenn $f \in C^2(\Omega^*)$, so gilt

$$\|f - Q_2(f)\|_{\Omega} \leq C \|D^2(f)\|_{\Omega^*} h^2,$$

wobei $C > 0$ eine von f und h unabhängige Konstante ist.

(ii) Wenn $f \in C^3(\Omega^*)$, so gilt

$$\|D^r(f - Q_2(f))\|_{\Omega} \leq \tilde{C} \|D^3(f)\|_{\Omega^*} h^{3-r}, \quad r = 1, 2,$$

wobei $\tilde{C} > 0$ eine von f und h unabhängige Konstante ist.

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

Beweis: Seien $f \in C^2(\Omega^*)$, $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ ein beliebiger Tetraeder in Δ mit Eckpunkten wie in Abschnitt 6.1 beschrieben, Ω_T wie in Lemma 6.7 definiert und $p_f \in \mathcal{P}_1$ das lineare Taylorpolynom von f in v_3 . Es existiert eine Konstante $C_T > 0$ unabhängig von f und h , so dass

$$\|f - p_f\|_{\Omega_T} \leq C_T \|D^2(f)\|_{\Omega_T} h^2.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt nun

$$\|f - Q_2(f)\|_T \leq \|f - p_f\|_{\Omega_T} + \|Q_2(f) - p_f\|_T.$$

Verwenden wir Lemma 6.4(ii), die Linearität von Q_2 und Korollar 6.7 für $k = 2$, so erhalten wir

$$\|Q_2(f) - p_f\|_T = \|Q_2(f - p_f)\|_T \leq \frac{3}{2} \|f - p_f\|_{\Omega_T}.$$

Eine Kombination dieser Ungleichungen führt zu

$$\|f - Q_2(f)\|_T \leq C \|D^2(f)\|_{\Omega_T} h^2,$$

wobei $C = (1 + \frac{3}{2})C_T$ eine von f und h unabhängige Konstante ist. Dies beweist Aussage (i).

Seien nun $f \in C^3(\Omega^*)$ und $p_f \in \mathcal{P}_2$ das quadratische Taylorpolynom von f in v_3 . Dann existiert eine Konstante $\tilde{C}_T > 0$ unabhängig von f und h , so dass gilt

$$\|D^r(f - p_f)\|_{\Omega_T} \leq \tilde{C}_T \|D^3(f)\|_{\Omega_T} h^{3-r}, \quad r = 0, 1, 2.$$

Weiterhin folgt mit der Dreiecksungleichung, dass gilt

$$\|D^r(f - Q_2(f))\|_T \leq \|D^r(f - p_f)\|_{\Omega_T} + \|D^r(Q_2(f) - p_f)\|_T, \quad r = 1, 2.$$

Mit Korollar 6.5 und der Linearität von Q_2 erhalten wir für $r = 1, 2$,

$$\|D^r(Q_2(f) - p_f)\|_T = \|D^r(Q_2(f - p_f))\|_T.$$

Nun verwenden wir die Markov-Ungleichung für trivariate Polynome sowie Korollar 6.7 für $k = 2$ und erhalten

$$\|D^r(Q_2(f - p_f))\|_T \leq \frac{\tilde{C}_M}{h^r} \|Q_2(f - p_f)\|_T \leq \frac{\tilde{C}_M}{h^r} \frac{3}{2} \|f - p_f\|_{\Omega_T}, \quad r = 1, 2,$$

wobei $\tilde{C}_M > 0$ eine von f und h unabhängige Konstante ist. Durch Kombination dieser Ungleichungen erhalten wir

$$\|D^r(f - Q_2(f))\|_T \leq \tilde{C} \|D^3(f)\|_{\Omega_T} h^{3-r}, \quad r = 1, 2,$$

wobei $\tilde{C} = (1 + \frac{3}{2}\tilde{C}_M)\tilde{C}_T$ eine von f und h unabhängige Konstante ist. □

6.2.4. Numerische Tests und Visualisierung

In diesem Unterabschnitt bestätigen wir die Approximationseigenschaften der Splines $s_f = Q_k(f)$, indem wir numerische Tests mit Hilfe differenzierbarer Testfunktionen f für Parameterwerte $k = 2$ und $k = 3$ durchführen. Zur Berechnung der Splines verwenden wir dabei die Werte der Funktionen f an den Gitterpunkten $v \in \mathcal{V}$ wie in Unterabschnitt 6.2.1 beschrieben. Wir untersuchen das Verhalten des Approximationsfehlers für die Werte sowie die ersten und zweiten Ableitungen von f , bei sukzessiver Verfeinerung der zugrundeliegenden Partition. Abschließend zeigen wir einige erste Ergebnisse der Volumenvisualisierung für den Operator Q_2 , welche die effiziente Verwendung der Splines in diesem Bereich motivieren.

In den folgenden Tests verwenden wir drei wohlbekannte trivariate Testfunktionen. Die *blob*-Funktion (siehe [89])

$$\text{blob}(v) = e^{-5((x-1/2)^2+y^2+z^2)} + e^{-5(x^2+(y-1/2)^2+z^2)}$$

ist eine in der Computergraphik oft verwendete Testfunktion. Als weitere Exponentialfunktion verwenden wir *Frankes* trivariate Testfunktion (siehe [37])

$$\begin{aligned} fr(v) = & 1/2e^{-10((x-1/4)^2+(y-1/4)^2)} + 3/4e^{-16((x-1/4)^2+(y-1/4)^2+(z-1/4)^2)} \\ & + 1/2e^{-10((x-3/4)^2+(y-1/8)^2+(z-1/2)^2)} - 1/4e^{-20((x-3/4)^2+(y-3/4)^2)}. \end{aligned}$$

Schließlich verwenden wir noch die stark oszillierende *Marschner-Lobb*-Funktion (siehe [60]) gegeben durch

$$ml(v) = \frac{1 - \sin(\pi z/2) + \alpha(1 + \cos(2\pi f_M \cos(\pi \sqrt{x^2 + y^2}/2)))}{2(1 + \alpha)},$$

mit Parameterwerten $\alpha = \frac{1}{4}$ und $f_M = 6$, welche den anspruchvollsten Test darstellt.

Den diskreten Fehler an den Gitterpunkten zu einer Funktion f in der Maximumnorm bezeichnen wir als

$$\text{err}_{\text{data}} = \max\{|D_x^r(f(v) - s_f(v))| : v \in \mathcal{V}\}, \quad r = 0, 1, 2,$$

und den globalen Fehler auf Ω in der Maximumnorm bezeichnen wir mit

$$\text{err}_{\text{max}} = \max\{|D_x^r(f(v) - s_f(v))| : v \in \mathcal{X}\}, \quad r = 0, 1, 2.$$

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

Den globalen Fehler bestimmen wir dabei näherungsweise auf einer feinen Diskretisierung \mathcal{X} , indem wir in jedem Tetraeder den Fehler an 220 gleichverteilten Punkten bestimmen. Zur Vollständigkeit geben wir auch den mittleren Fehler err_{mean} ,

$$\text{err}_{\text{mean}} = \frac{1}{|\mathcal{X}|} \sum_{v \in \mathcal{X}} |D_x^r(f(v) - s_f(v))|, \quad r = 0, 1, 2,$$

sowie den mittleren quadratischen Fehler (*Root-Mean-Square-Error*)

$$\text{err}_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{|\mathcal{X}|} \sum_{v \in \mathcal{X}} (D_x^r(f(v) - s_f(v)))^2}, \quad r = 0, 1, 2,$$

auf der gleichen feinen Diskretisierung \mathcal{X} an.

Aus Tabelle 6.1 geht hervor, dass die globalen Approximationsfehler err_{max} , err_{mean} und err_{rms} für $s_f = Q_3(f)$ bei jeder Verfeinerung der Partition von h zu $h/2$ um den Faktor zwei sinken, während der diskrete Approximationsfehler an den Datenpunkten um den Faktor vier sinkt. Dies bestätigt die Ergebnisse von Satz 6.8 des vorhergehenden Unterabschnitts 6.2.3.

$1/h$	$\text{err}_{\text{data}}^{\text{blob}}$	$\text{err}_{\text{max}}^{\text{blob}}$	$\text{err}_{\text{mean}}^{\text{blob}}$	$\text{err}_{\text{rms}}^{\text{blob}}$
8	0.07232590	0.0809447	0.01172100	0.01859390
16	0.01885980	0.0237130	0.00398319	0.00583713
32	0.00476562	0.0083607	0.00150337	0.00207445
64	0.00119498	0.0035041	0.00065814	0.00089226
128	0.00029940	0.0016146	0.00031451	0.00042672

$1/h$	$\text{err}_{\text{data}}^{\text{fr}}$	$\text{err}_{\text{max}}^{\text{fr}}$	$\text{err}_{\text{mean}}^{\text{fr}}$	$\text{err}_{\text{rms}}^{\text{fr}}$
8	0.2004200	0.2005360	0.01000050	0.02202190
16	0.0565250	0.0658433	0.00339222	0.00722884
32	0.0145831	0.0196277	0.00118928	0.00238082
64	0.0036855	0.0073331	0.00048196	0.00091769
128	0.0009267	0.0031859	0.00022156	0.00041459

$1/h$	$\text{err}_{\text{data}}^{\text{ml}}$	$\text{err}_{\text{max}}^{\text{ml}}$	$\text{err}_{\text{mean}}^{\text{ml}}$	$\text{err}_{\text{rms}}^{\text{ml}}$
8	0.0935998	0.1652220	0.0607474	0.0712580
16	0.0913610	0.1020680	0.0377678	0.0450034
32	0.0453692	0.0483350	0.0126823	0.0158189
64	0.0137861	0.0151583	0.0034744	0.0043887
128	0.0033092	0.0048792	0.0010035	0.0012671

Tabelle 6.1.: Approximationsfehler für $k = 3$.

Die Tabelle 6.2 zeigt den Approximationsfehler für $s_f = Q_2(f)$ bezüglich der Funktionswerte, während die Tabellen 6.3 und 6.4 den Approximationsfehler bezüglich der ersten bzw. zweiten Ableitungen in x -Richtung ($D_x(f)$ bzw. $D_{xx}(f)$) darstellen. Es werden dabei die Ergebnisse von Satz 6.9 bestätigt, da die Fehler der Funktionswerte

6.2. Eine Familie von Quasi-Interpolanten auf dem Cubic Grid

und der ersten Ableitungen bei Halbierung der Gittergröße h um den Faktor vier sinken, während sich der Fehler der zweiten Ableitungen ebenfalls halbiert. Dies weist auch numerisch die optimale Approximationsordnung des Operators Q_2 für die Ableitungen differenzierbarer Funktionen nach. In Abbildung 6.6 veranschaulichen wir die Konvergenz des Approximationsfehlers der Funktionswerte und in Abbildung 6.7 die Konvergenz des Approximationsfehlers der ersten Ableitung in x erneut an Hand der Marschner-Lobb-Funktion in einer log-log-Auftragung.

In den numerischen Tests nutzen wir verschiedene Techniken des CAGD, wie den de Casteljau Algorithmus zur schnellen Auswertung der Werte und Ableitungen der Splines (siehe [35] und [72]). Auf der feinsten Partition wurden zur Berechnung des Splines s_f etwa zwei Millionen Datenpunkte verwendet. Die schnelle Berechnung und der niedrige Grad der Splines ermöglichen die effiziente Verwendung der Splines zur Volumenvisualisierung. In den letzten Jahren wurden bereits Quasi-Interpolationsmethoden mit quadratischen Supersplines (siehe [74] und [76]) und mit kubischen C^1 -Splines erfolgreich implementiert (siehe [49]).

In den Abbildungen 6.8 bis 6.13 zeigen wir einige Möglichkeiten zur Visualisierung von 3D Datensätzen. Die Daten sind dabei zum Teil gegeben aus algebraischen Gleichungen, wie dem Torus in Abbildung 6.8 und Barths Sextic in Abbildung 6.13 oder aus gemessenen Datensätzen. Dies sind z.B. Daten von einem Computertomographen wie in Abbildung 6.10 oder von einem generierten Distanzfeld aus einem gegebenen Dreiecksmesh wie in den Abbildungen 6.9 und 6.12.

Für die Berechnung der Isosurfaces wurden bei allen Datensätzen zwischen 0,5 und 20 Sekunden benötigt, abhängig von der jeweiligen Datensatzgröße. Der verwendete Prozessor war in diesem Fall ein Dual Core E8400 mit 3GHz. Da alle Berechnungen voll parallelisierbar sind, skaliert diese Rechenzeit linear mit der Anzahl der zur Verfügung stehenden Kerne. Eine interaktive Darstellung der Isosurfaces (Drehen, Zoomen, etc.) nach der Raycasting Methode war mit Hilfe des Blossom Ansatzes und der einfachen Nullstellenberechnung auf den stückweisen quadratischen Polynomstücken entlang eines Strahls bei allen Datensätzen möglich. Noch einmal deutlich schnellere Berechnungen wurden durch eine Implementierung mit Cuda auf der GPU erzielt. Hier ist jedoch bei großen Datensätzen der zur Verfügung stehende Graphikkartenspeicher ein limitierendes Element, da bereits für die Berechnung der Isosurface aus einem Datensatz mit 128^3 Datenpunkten 512 MB Graphikkartenspeicher vorhanden sein sollten.

Im direkten Vergleich zu anderen Techniken wie Tensor-Produkt-Splines und Subdivision-Methoden erreichen die hier vorgestellten Splines eine für den Betrachter

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

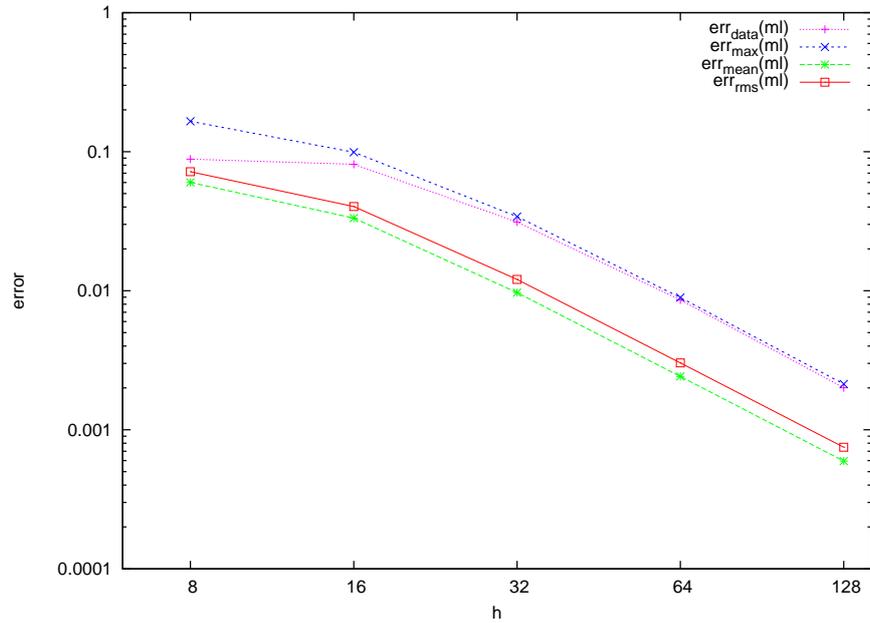


Abbildung 6.6.: log-log-Auftragung des Approximationsfehlers der Werte der Marschner-Lobb-Funktion bei Verfeinerung der Partition für $k = 2$.

visuell mindestens gleichwertige Qualität. Im Gegensatz zu den häufig zur Oberflächendarstellung verwendeten Subdivision-Methoden erhalten wir hier jedoch ein vollständiges Volumenmodell der Daten, das auch zur Analyse der Daten, wie es zum Beispiel mit Finite-Elemente-Methoden möglich ist, verwendet werden kann. Interessant wären hier in Zukunft auch Untersuchungen auf die Verwendbarkeit im Bereich der Computational Fluid Dynamics, in denen differenzierbare Modelle bei bestimmten Berechnungen und Simulationen von Vorteil sind. Im Bereich der Approximation sind die hier erzielten Ergebnisse nur mit Tensorprodukt-Splines hohen polynomiellen Grades möglich, so dass trotz der einfachen Repräsentation der Tensorprodukt-Splines dort keine schnelleren Rechenzeiten oder geringere Speicheranforderungen zu erwarten sind.

Die hier präsentierten Ergebnisse sollen erste Möglichkeiten aufzeigen, welches Potential die vorgestellten Splineräume besitzen. Von großem Interesse wird in Zukunft sicher auch die Untersuchung von C^2 und höher differenzierbaren Splines auf diesen Partitionen sein. Zu erwarten ist dabei, dass hier ebenfalls Konstruktionen von lokalen Quasi-Interpolanten mit deutlich niedrigerem Grad möglich sein werden, als dies bei vergleichbaren, auf Würfel-Partitionen beruhenden, gleichmäßigen Tetraeder-Partitionen der Fall ist.

6.2. Eine Familie von Quasi-Interpolanten auf dem Cubic Grid

$1/h$	$\text{err}_{\text{data}}^{\text{blob}}$	$\text{err}_{\text{max}}^{\text{blob}}$	$\text{err}_{\text{mean}}^{\text{blob}}$	$\text{err}_{\text{rms}}^{\text{blob}}$
8	0.05344710	0.05371940	0.00787331	0.01309350
16	0.01372490	0.01378350	0.00222180	0.00357384
32	0.00345431	0.00346625	0.00058516	0.00092267
64	0.00086509	0.00086701	0.00014987	0.00023371
128	0.00021647	0.00021684	0.00003791	0.00005877

$1/h$	$\text{err}_{\text{data}}^{\text{fr}}$	$\text{err}_{\text{max}}^{\text{fr}}$	$\text{err}_{\text{mean}}^{\text{fr}}$	$\text{err}_{\text{rms}}^{\text{fr}}$
8	0.1573410	0.15738500	0.00704709	0.01612600
16	0.0429864	0.04300920	0.00213871	0.00481450
32	0.0109869	0.01099240	0.00059565	0.00131270
64	0.0027619	0.00276327	0.00015743	0.00034245
128	0.0006914	0.00069177	0.00004047	0.00008743

$1/h$	$\text{err}_{\text{data}}^{\text{ml}}$	$\text{err}_{\text{max}}^{\text{ml}}$	$\text{err}_{\text{mean}}^{\text{ml}}$	$\text{err}_{\text{rms}}^{\text{ml}}$
8	0.0883974	0.1655600	0.06017160	0.0718670
16	0.0811994	0.0992450	0.03329990	0.0403393
32	0.0312147	0.0341531	0.00969430	0.0120682
64	0.0085849	0.0089289	0.00241578	0.0030287
128	0.0020048	0.0021327	0.00059512	0.0007481

Tabelle 6.2.: Approximationsfehler für $k = 2$.

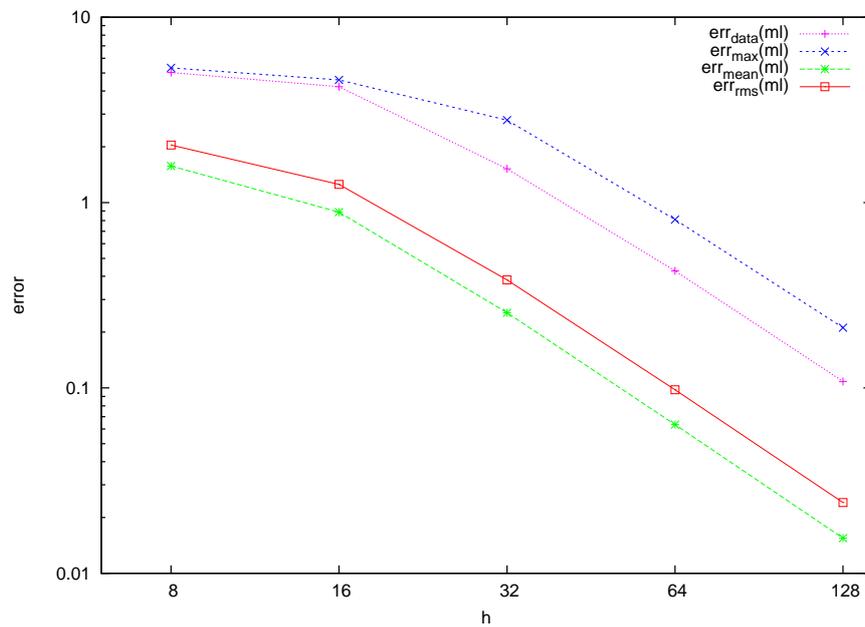


Abbildung 6.7.: log-log-Auftragung des Approximationsfehlers der ersten partiellen Ableitung in x der Marschner-Lobb-Funktion bei Verfeinerung der Partition für $k = 2$.

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

$1/h$	$\text{err}_{\text{data}}^{D_x(\text{blob})}$	$\text{err}_{\text{max}}^{D_x(\text{blob})}$	$\text{err}_{\text{mean}}^{D_x(\text{blob})}$	$\text{err}_{\text{rms}}^{D_x(\text{blob})}$
8	0.1585890	0.2417030	0.02473250	0.0385371
16	0.0411008	0.0712189	0.00708406	0.0106428
32	0.0104755	0.0188899	0.00188885	0.0027800
64	0.0026472	0.0047828	0.00048762	0.0007095
128	0.0007590	0.0012712	0.00012448	0.0001801

$1/h$	$\text{err}_{\text{data}}^{D_x(fr)}$	$\text{err}_{\text{max}}^{D_x(fr)}$	$\text{err}_{\text{mean}}^{D_x(fr)}$	$\text{err}_{\text{rms}}^{D_x(fr)}$
8	0.7384930	0.9166850	0.04234930	0.09466990
16	0.2107540	0.3006540	0.01333240	0.02900140
32	0.0574643	0.0829841	0.00370368	0.00791414
64	0.0145658	0.0212066	0.00097108	0.00205638
128	0.0036746	0.0053748	0.00024830	0.00052339

$1/h$	$\text{err}_{\text{data}}^{D_x(ml)}$	$\text{err}_{\text{max}}^{D_x(ml)}$	$\text{err}_{\text{mean}}^{D_x(ml)}$	$\text{err}_{\text{rms}}^{D_x(ml)}$
8	5.03099	5.33248	1.575060	2.042270
16	4.21588	4.58655	0.887093	1.254340
32	1.52074	2.78363	0.254649	0.382565
64	0.42781	0.80967	0.063386	0.097711
128	0.10828	0.21132	0.015481	0.024102

Tabelle 6.3.: Approximationsfehler der ersten partiellen Ableitung in x für $k = 2$.

$1/h$	$\text{err}_{\text{data}}^{D_{xx}(\text{blob})}$	$\text{err}_{\text{max}}^{D_{xx}(\text{blob})}$	$\text{err}_{\text{mean}}^{D_{xx}(\text{blob})}$	$\text{err}_{\text{rms}}^{D_{xx}(\text{blob})}$
8	2.781800	7.36277	0.647459	0.944675
16	1.513700	4.48919	0.366841	0.525985
32	0.783794	2.34272	0.192558	0.273797
64	0.398972	1.18080	0.098316	0.139153
128	0.225402	0.61108	0.049920	0.070501

$1/h$	$\text{err}_{\text{data}}^{D_{xx}(fr)}$	$\text{err}_{\text{max}}^{D_{xx}(fr)}$	$\text{err}_{\text{mean}}^{D_{xx}(fr)}$	$\text{err}_{\text{rms}}^{D_{xx}(fr)}$
8	9.48307	34.2698	1.412130	2.726820
16	6.56458	24.2788	0.876069	1.685340
32	3.35031	13.2468	0.480231	0.916512
64	1.63083	6.82766	0.249896	0.474181
128	0.81025	3.45017	0.127268	0.240706

$1/h$	$\text{err}_{\text{data}}^{D_{xx}(ml)}$	$\text{err}_{\text{max}}^{D_{xx}(ml)}$	$\text{err}_{\text{mean}}^{D_{xx}(ml)}$	$\text{err}_{\text{rms}}^{D_{xx}(ml)}$
8	223.618	258.992	55.6158	77.3912
16	147.363	314.767	43.9654	66.5142
32	63.4782	306.433	25.2862	42.1393
64	29.2791	209.945	12.7598	22.2219
128	13.8998	118.557	6.2608	11.0415

Tabelle 6.4.: Approximationsfehler der zweiten partiellen Ableitung in x für $k = 2$.

6.2. Eine Familie von Quasi-Interpolanten auf dem Cubic Grid

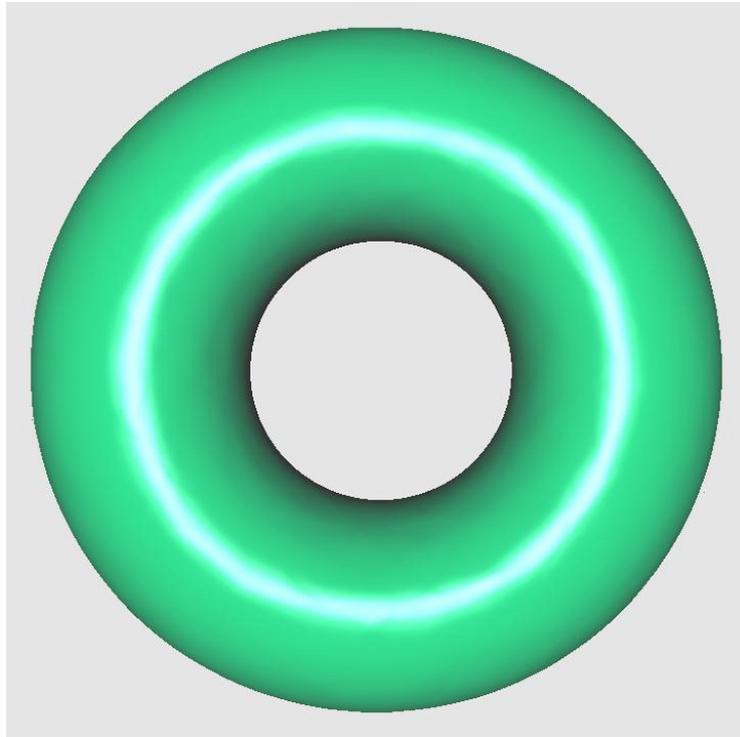


Abbildung 6.8.: Ein Torus, rekonstruiert aus 16^3 Datenpunkten.

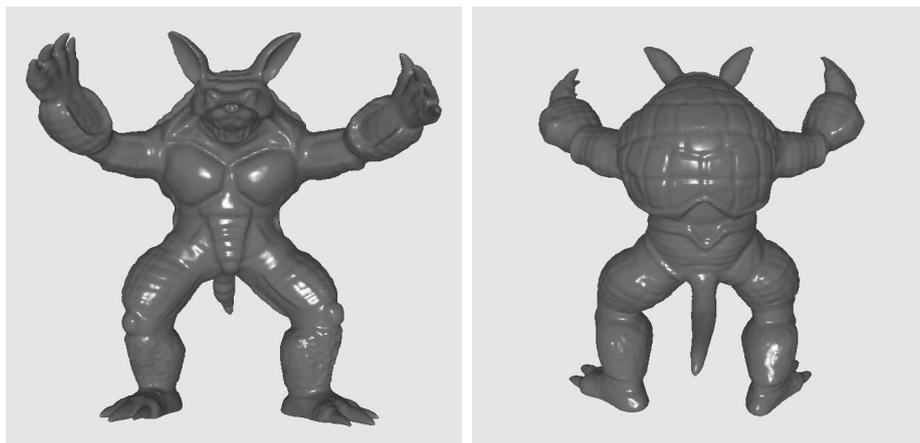


Abbildung 6.9.: Rekonstruktion aus dem Datensatz Armadillo mit 128^3 Datenpunkten aus dem Stanford University Computer Graphics Laboratory.

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

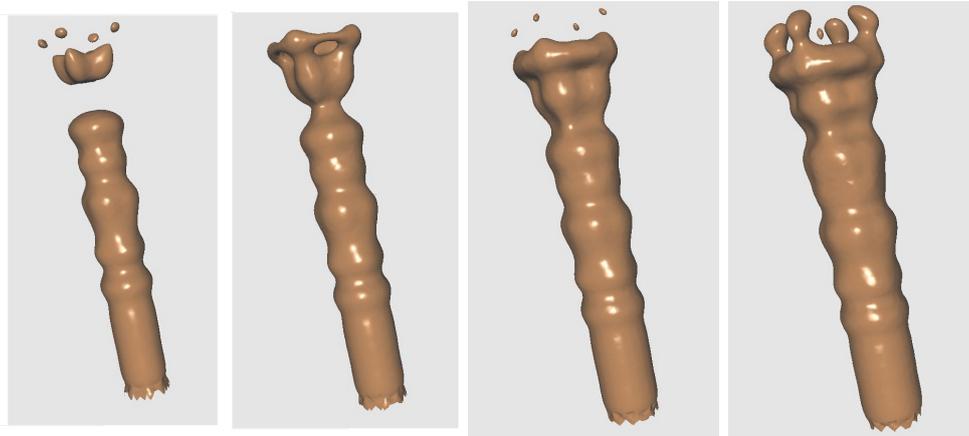


Abbildung 6.10.: Verschiedene Isosurfaces des Datensatzes Fuel, rekonstruiert aus 64^3 Datenpunkten.

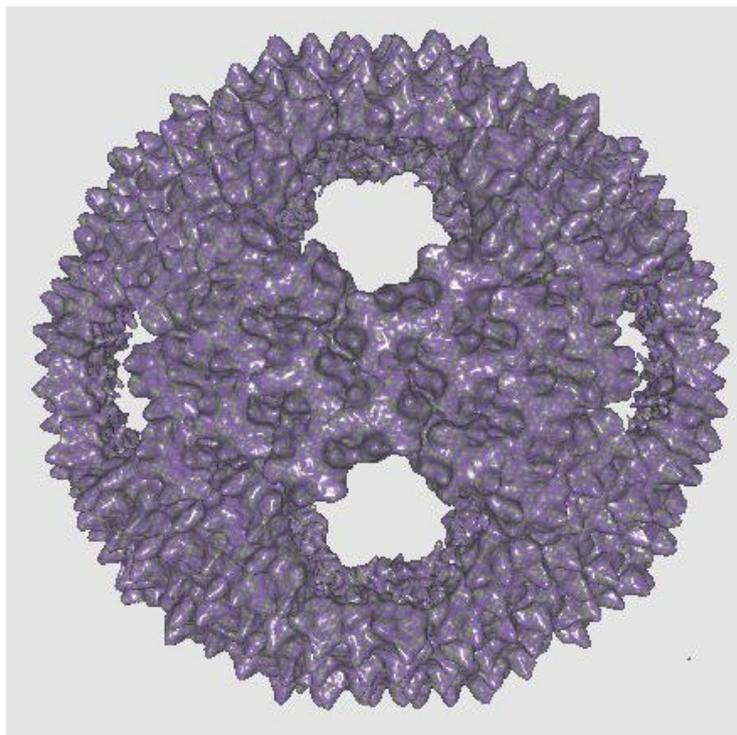


Abbildung 6.11.: Rekonstruktion des Virus Bacteriophage PRD1 Model 1hb5 aus 128^3 Datenpunkten.

6.2. Eine Familie von Quasi-Interpolanten auf dem Cubic Grid

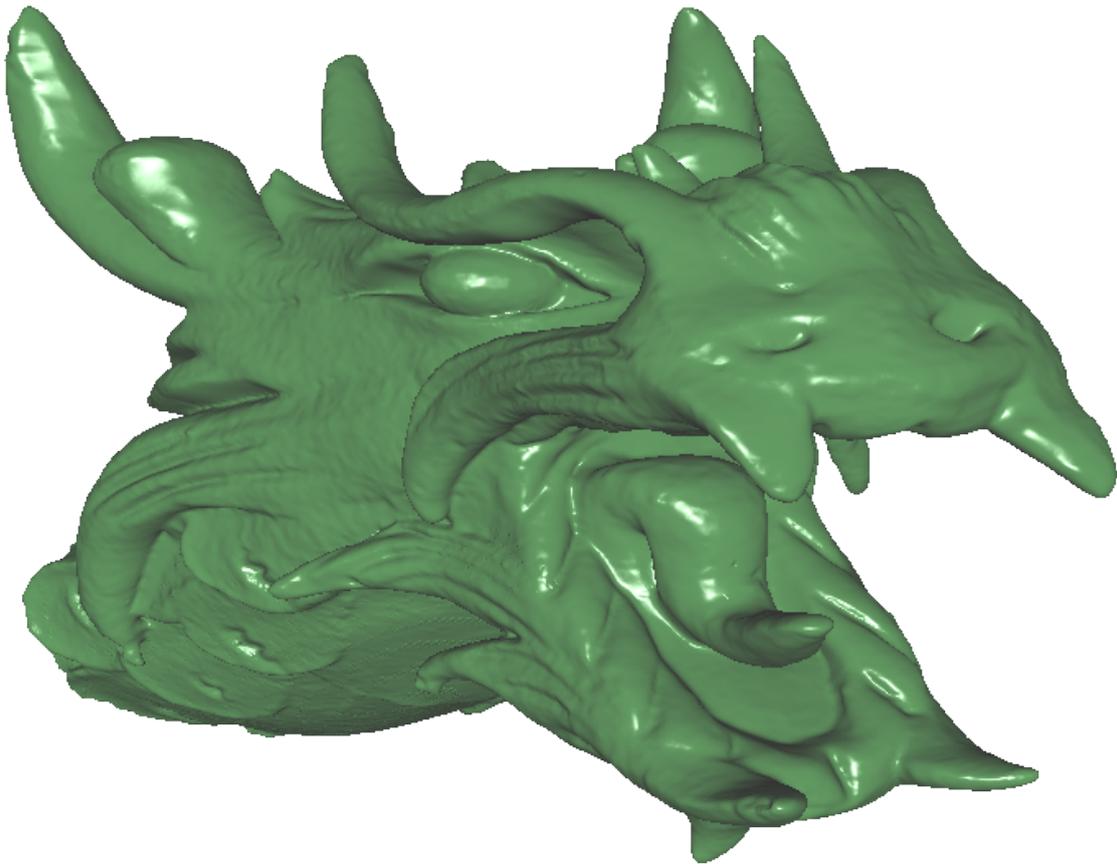


Abbildung 6.12.: Rekonstruktion eines Drachenkopfes aus 256^3 Datenpunkten.

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

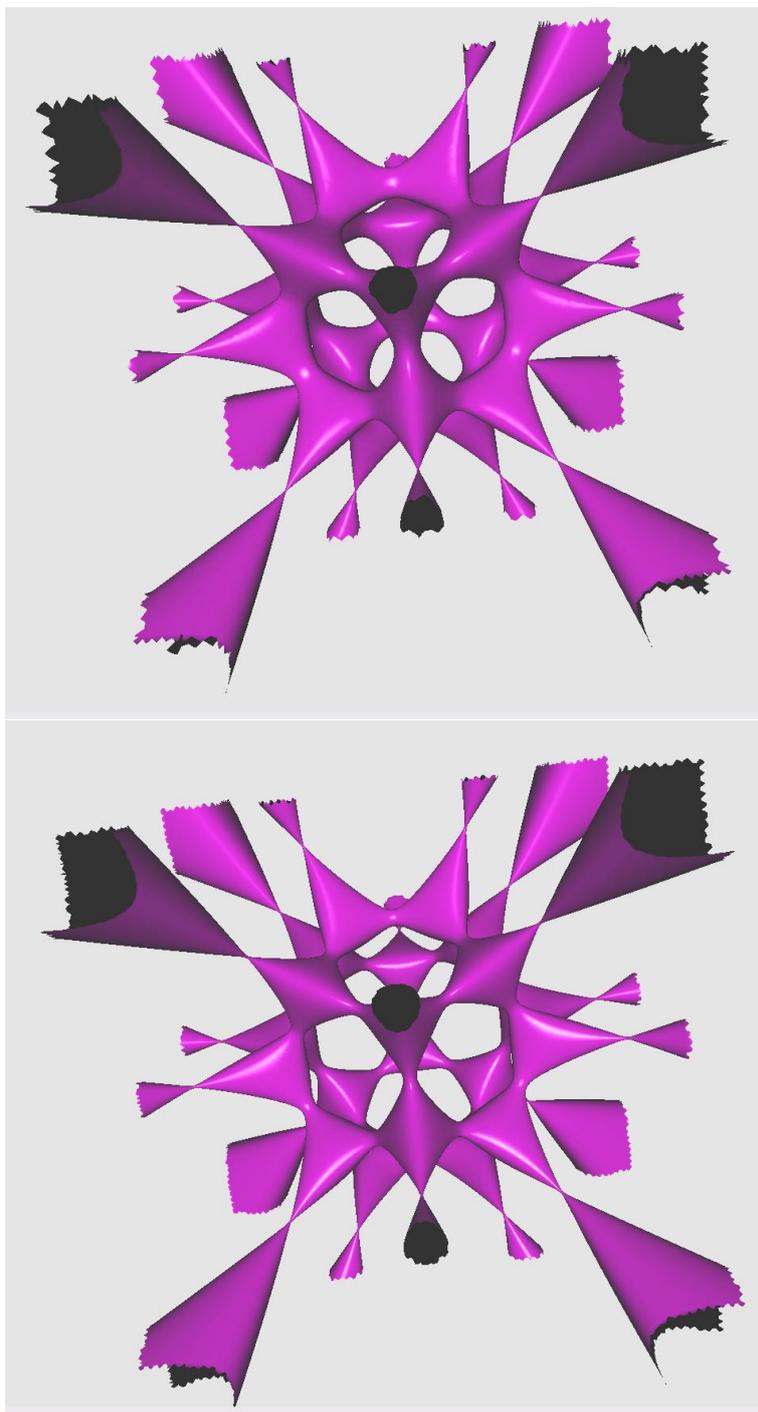


Abbildung 6.13.: Barths Sextic (siehe [7]) auf dem Gebiet $\Omega = [-2, 2]^3$ rekonstruiert aus 64^3 Datenpunkten oben und 128^3 Datenpunkten unten.

6.3. Optimale Approximation auf dem Cubic Grid

In diesem Abschnitt geben wir eine weitere Familie von Quasi-Interpolationsoperatoren Q_α mit Parameterwerten $0 \leq \alpha \leq 1$ zur Approximation von Daten auf dem kubischen Gitter (Cubic Grid) an. Die Koeffizienten der Splines $s \in \mathcal{S}_2^1(\Delta)$ werden aus lokalen Datenwerten stabil berechnet. Jedem Truncated Octahedron sind dabei gewisse Datenpunkte zugeordnet, die im Schwerpunkt der quadratischen Seitenflächen sowie im Schwerpunkt des Truncated Octahedrons selbst liegen. Wir verwenden damit eine andere Einbettung des kubischen Gitters in Δ , als bei der in Abschnitt 6.2 vorgestellten Methode. In Unterabschnitt 6.3.1 geben wir explizite Formeln für die Berechnung der Koeffizienten eines Splines $s \in \mathcal{S}_2^0(\Delta)$ in seiner Bernstein-Bézier-Darstellung bezüglich Δ an und zeigen, dass diese Splines auch alle Differenzierbarkeitsbedingungen des Raums $\mathcal{S}_2^1(\Delta)$ erfüllen. In Unterabschnitt 6.3.2 geben wir einige wichtige Eigenschaften der Operatoren Q_α für unterschiedliche Parameterwerte $0 \leq \alpha \leq 1$ an. Wir zeigen, dass alle Operatoren beschränkt sind und lineare Polynome exakt reproduzieren. Für den Parameterwert $\alpha = 0$ werden auch quadratische Polynome exakt reproduziert. In Unterabschnitt 6.3.3 zeigen wir, dass alle Operatoren Q_α , $0 \leq \alpha \leq 1$, mindestens die Approximationsordnung zwei besitzen. Der Operator Q_0 besitzt darüber hinaus die optimale Approximationsordnung drei des Raums $\mathcal{S}_2^1(\Delta)$.

6.3.1. Definition der Quasi-Interpolanten

In diesem Unterabschnitt beschreiben wir die Konstruktion einer Familie von Quasi-Interpolationsoperatoren auf Δ zur Approximation von Daten auf dem kubischen Gitter. Wir verwenden dazu eine Einbettung des kubischen Gitters in Δ , die sich von der in Unterabschnitt 6.3.1 verwendeten Einbettung unterscheidet. Jedem Truncated Octahedron werden gewisse Datenpunkte zugeordnet, die im Schwerpunkt und auf den quadratischen Seitenflächen der Truncated Octahedrons liegen. Die Quasi-Interpolationsoperatoren geben wir durch explizite Berechnung der Koeffizienten der Splines an und zeigen, dass die resultierenden Splines C^1 -differenzierbar zusammengesetzt sind.

Sei \diamond die Truncated Octahedron Partition mit Truncated Octahedrons der Größe h , deren Schwerpunkte auf den Gitterpunkten des kubischen Gitters

$$\tilde{\mathcal{V}} := \{v_{ijk} = (ih, jh, kh) : i, j, k = 1, \dots, (n-1)\},$$

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, liegen. Wir nehmen an, dass die Werte einer Funktion $f \in C(\Omega^*)$, wobei $\Omega^* = [-2h, (n+2)h]^3 \subset \mathbb{R}^3$, an den Gitterpunkten des kubischen Gitters $\mathcal{V} \supset \tilde{\mathcal{V}}$ mit Gittergröße h , gegeben durch

$$\mathcal{V} := \{v_{ijk} = (ih, jh, kh) : i, j, k = -2, \dots, (n+2)\},$$

bekannt sind. Damit liegen in jedem Truncated Octahedron $\mathcal{T} \in \diamond$ stets genau ein Punkt der Menge \mathcal{V} im Schwerpunkt von \mathcal{T} und sechs weitere Punkte jeweils im Schwerpunkt der quadratischen Seitenflächen von \mathcal{T} . Wir ordnen nun dem Truncated Octahedron \mathcal{T} diese sieben Punkte zu und bezeichnen sie mit $\mathcal{V}_{\mathcal{T}} := \{z_0^{\mathcal{T}}, \dots, z_6^{\mathcal{T}}\}$. Dabei bezeichnen wir den Punkt im Schwerpunkt von \mathcal{T} mit $z_0^{\mathcal{T}}$. Die Bezeichnung der restlichen Punkte wird, wie auch in Unterabschnitt 6.7, individuell für jeden Domain-Point $\xi \in \mathcal{T}$ nach aufsteigenden (euklidischen) Distanzen zu ξ festgelegt. D.h. also, dass gilt $\|\xi - z_i\|_2 \leq \|\xi - z_j\|_2$ für $i < j$ und $i, j \in \{1, \dots, 6\}$. Es ist zu beachten, dass dadurch die Datenpunkte auf den quadratischen Seitenflächen in der Regel zwei Truncated Octahedrons zugeordnet sind. Im Folgenden gehen wir davon aus, dass obwohl \mathcal{V} auch Punkte enthält, die nicht von \diamond überdeckt werden, auch diese Datenpunkte Truncated Octahedrons zugeordnet werden können.

Sei Δ die gleichmäßige Tetraeder-Partition von \diamond wie in Abschnitt 6.1 beschrieben und $\Omega \subset \Omega^*$ das überdeckte Gebiet im \mathbb{R}^3 . Wir beschreiben nun wie die Koeffizienten b_{ξ} , $\xi \in \mathcal{D}_{\Delta}$, eines quadratischen Splines s_f in Bernstein-Bézier-Darstellung auf Δ als Linearkombinationen von lokalen Datenwerten in einer bestimmten Umgebung von ξ bestimmt werden können. Dabei werden wir sehen, dass für die Berechnung eines Koeffizienten b_{ξ} nur Datenwerte $f(z)$, $z \in \mathcal{V}$, notwendig sind, deren Datenpunkte z einem Truncated Octahedron zugeordnet sind, das auch den Domain-Point ξ enthält. Wir beschreiben die jeweils verwendeten Datenwerte im Folgenden im Detail. Dabei bezeichnen wir stets mit T_0, \dots, T_6 die sieben Datenwerte von f an den Datenpunkten $z_0^{\mathcal{T}}, \dots, z_6^{\mathcal{T}}$, die dem Truncated Octahedron \mathcal{T} zugeordnet sind.

Falls der Domain-Point ξ im Inneren eines Truncated Octahedrons $\mathcal{A} \in \diamond$ liegt, so berechnet sich der assoziierte Koeffizient b_{ξ} durch

$$b_{\xi} = \sum_{i=0, \dots, 6} w_i^{\mathcal{A}} A_i, \quad w_i^{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}.$$

wobei $A_i := f(z_i^{\mathcal{A}})$, $z_i^{\mathcal{A}} \in \mathcal{V}_{\mathcal{A}}$, $i = 0, \dots, 6$, die sieben Datenwerte bezüglich \mathcal{A} bezeichnen. Liegt der Domain-Point ξ im Inneren einer gemeinsamen Seitenfläche zweier Truncated Octahedrons, so wird der zugehörige Koeffizient b_{ξ} berechnet als Linearkombination der Datenwerte, die diesen beiden Truncated Octahedrons zuge-

6.3. Optimale Approximation auf dem Cubic Grid

ordnet sind. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \diamond$ zwei Truncated Octahedrons mit gemeinsamer Seitenfläche, so wird b_ξ , $\xi \in \text{int}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, bestimmt durch

$$b_\xi = \sum_{i=0, \dots, 6} w_i^A A_i + \sum_{i=0, \dots, 6} w_i^B B_i, \quad w_i^A, w_i^B \in \mathbb{R},$$

wobei $B_i := f(z_i^B)$, $z_i^B \in \mathcal{V}_B$, $i = 0, \dots, 6$. Hier bezeichnet \mathcal{A} das Truncated Octahedron, für das gilt $\|\xi - z_1^A\|_2 \geq \|\xi - z_1^B\|_2$. Diese Bedingung, die die Bezeichnung der Truncated Octahedrons für einen Domain-Point festlegt, unterscheidet sich von der in Unterabschnitt 6.7 gewählten Bedingung, garantiert jedoch, dass für einen Domain-Point die Bezeichnung der Truncated Octahedrons für beide Methoden identisch verläuft. Wichtig wird dies insbesondere dann, wenn es darum geht, beide Methoden mit einer zu kombinieren. Falls \mathcal{A} und \mathcal{B} eine quadratische Seitenfläche gemeinsam haben, so besitzen sie auch den gemeinsamen Datenpunkt $z_1^A = z_1^B$ und der Datenwert $A_1 = B_1$ wird somit gewichtet mit $w_1^A + w_1^B$. Liegt der Domain-Point ξ im Inneren einer gemeinsamen Kante dreier Truncated Octahedrons, so wird der assoziierte Koeffizient b_ξ berechnet als Linearkombination der Datenwerte, die diesen drei Truncated Octahedrons zugeordnet sind. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \diamond$ drei Truncated Octahedrons mit gemeinsamer Kante, so wird b_ξ , $\xi \in \text{int}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C})$, bestimmt durch

$$b_\xi = \sum_{i=0, \dots, 6} w_i^A A_i + \sum_{i=0, \dots, 6} w_i^B B_i + \sum_{i=0, \dots, 6} w_i^C C_i,$$

wobei $w_i^A, w_i^B, w_i^C \in \mathbb{R}$, und $C_i := f(z_i^C)$, $z_i^C \in \mathcal{V}_C$, $i = 0, \dots, 6$. Hier bezeichnet \mathcal{A} wiederum das Truncated Octahedron, für das gilt $\|\xi - z_1^A\|_2 = \max_{\mathcal{T} \in \diamond} \|\xi - z_1^{\mathcal{T}}\|_2$. Da \mathcal{B} und \mathcal{C} eine gemeinsame quadratische Seitenfläche besitzen, haben sie den gemeinsamen Datenpunkt $z_1^B = z_1^C$ und der entsprechende Datenwert wird somit gewichtet mit $w_1^B + w_1^C$. Ist der Domain-Point ξ identisch mit einem gemeinsamen Eckpunkt von vier Truncated Octahedrons, so wird der zugehörige Koeffizient b_ξ berechnet als Linearkombination der Datenwerte, die diesen vier Truncated Octahedrons zugeordnet sind. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in \diamond$ vier Truncated Octahedrons mit gemeinsamem Eckpunkt v , so wird b_ξ , $\xi = v$, bestimmt durch

$$b_\xi = \sum_{i=0, \dots, 6} w_i^A A_i + \sum_{i=0, \dots, 6} w_i^B B_i + \sum_{i=0, \dots, 6} w_i^C C_i + \sum_{i=0, \dots, 6} w_i^D D_i,$$

wobei $w_i^A, w_i^B, w_i^C, w_i^D \in \mathbb{R}$, und $D_i := f(z_i^D)$, $z_i^D \in \mathcal{V}_D$, $i = 0, \dots, 6$. Auf Grund der Symmetrie kann die Bezeichnung der Truncated Octahedrons in diesem Fall beliebig gewählt werden. Da genau zwei quadratische Seitenflächen den Eckpunkt v gemeinsam haben, gibt es auch in diesem Fall gemeinsame Datenpunkte. Diese seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z_1^A = z_1^D$ und $z_1^B = z_1^C$.

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

Wir beschreiben nun eine Familie von Quasi-Interpolationsoperatoren $Q_\alpha : C(\Omega^*) \rightarrow S_2^0(\Delta)$ für Parameterwerte $0 \leq \alpha \leq 1$, indem wir explizit die Berechnung der Koeffizienten der Splines $s_f := Q_\alpha(f)$ in ihrer Bernstein-Bézier-Darstellung bezüglich Δ angeben. Wir nehmen dabei an, dass die benötigten Datenwerte an den Gitterpunkten von \mathcal{V} von einer stetigen Funktion $f \in C(\Omega^*)$ stammen. Die notwendige Unterscheidung gewisser Koeffizienten in die Fälle b_ξ^S und b_ξ^H sowie die kompakte Notationsweise $AB_{1,2} := A_1 + B_1 + A_2 + B_2$ erfolgt dabei wie in Abschnitt 6.7. Die Berechnung der Bernstein-Bézier-Koeffizienten ist wie folgt:

$$\begin{aligned}
b_{0011} &:= \frac{1}{4}(1-\alpha)A_0 + \frac{1}{96}((4\alpha+6)A_1 + (4\alpha+3)A_2 \\
&\quad + 4\alpha A_{3,4} + (4\alpha-3)A_5 + (4\alpha-6)A_6) \\
&\quad + \frac{3}{8}(1-\alpha)BC_0 + \frac{1}{64}((4\alpha+6)BC_1 + (4\alpha+3)BC_2 \\
&\quad + 4\alpha BC_{3,4} + (4\alpha-3)BC_5 + (4\alpha-6)BC_6) \\
b_{0020} &:= \frac{1}{4}(1-\alpha)A_0 + \frac{1}{192}((8\alpha+9)A_{1,2} + 8\alpha A_{3,4} + (8\alpha-9)A_{5,6}) \\
&\quad + \frac{3}{8}(1-\alpha)BC_0 + \frac{1}{128}((8\alpha+12)BC_1 + (8\alpha+3)BC_{2,3} \\
&\quad + (8\alpha-3)BC_{4,5} + (8\alpha-12)BC_6) \\
b_{0002} &:= \frac{1}{4}(1-\alpha)ABCD_0 + \frac{1}{96}((4\alpha+6)ABCD_1 + (4\alpha+3)ABCD_2 \\
&\quad + 4\alpha ABCD_{3,4} + (4\alpha-3)ABCD_5 + (4\alpha-6)ABCD_6) \\
b_{0101}^{S,H} &:= \frac{1}{2}(1-\alpha)AB_0 + \frac{1}{48}((4\alpha+6)AB_1 + (4\alpha+3)AB_2 \\
&\quad + 4\alpha AB_{3,4} + (4\alpha-3)AB_5 + (4\alpha-6)AB_6) \\
b_{0110}^S &:= \frac{1}{2}(1-\alpha)AB_0 + \frac{1}{96}((8\alpha+12)AB_1 + (8\alpha+3)AB_{2,3} \\
&\quad + (8\alpha-3)AB_{4,5} + (8\alpha-12)AB_6) \tag{6.8} \\
b_{0110}^H &:= \frac{1}{2}(1-\alpha)AB_0 + \frac{1}{96}((8\alpha+9)A_{1,2} + 8\alpha A_{3,4} + (8\alpha-9)A_{5,6} \\
&\quad + (8\alpha+12)B_1 + (8\alpha+3)B_{2,3} + (8\alpha-3)B_{4,5} + (8\alpha-12)B_6) \\
b_{0200}^S &:= \frac{1}{2}(1-\alpha)AB_0 + \frac{1}{24}((2\alpha+3)AB_1 + 2\alpha AB_{2,3,4,5} + (2\alpha-3)AB_6) \\
b_{0200}^H &:= \frac{1}{2}(1-\alpha)AB_0 + \frac{1}{48}((4\alpha+3)AB_{1,2,3} + (4\alpha-3)AB_{4,5,6}) \\
b_{1001} &:= (1-\alpha)A_0 + \frac{1}{24}((4\alpha+6)A_1 + (4\alpha+3)A_2 \\
&\quad + 4\alpha A_{3,4} + (4\alpha-3)A_5 + (4\alpha-6)A_6) \\
b_{1010}^S &:= (1-\alpha)A_0 + \frac{1}{48}((8\alpha+12)A_1 + (8\alpha+3)A_{2,3} \\
&\quad + (8\alpha-3)A_{4,5} + (8\alpha-12)A_6) \\
b_{1010}^H &:= (1-\alpha)A_0 + \frac{1}{48}((8\alpha+9)A_{1,2} + 8\alpha A_{3,4} + (8\alpha-9)A_{5,6}) \\
b_{1100}^S &:= (1-\alpha)A_0 + \frac{1}{12}((2\alpha+3)A_1 + 2\alpha A_{2,3,4,5} + (2\alpha-3)A_6) \\
b_{1100}^H &:= (1-\alpha)A_0 + \frac{1}{24}((4\alpha+3)A_{1,2,3} + (4\alpha-3)A_{4,5,6}) \\
b_{2000} &:= (1-\alpha)A_0 + \frac{1}{6}\alpha A_{1,2,3,4,5,6}
\end{aligned}$$

6.3. Optimale Approximation auf dem Cubic Grid

Da alle Koeffizienten b_ξ , $\xi \in \mathcal{D}_\Delta$, eindeutig bestimmt sind, folgt direkt, dass für den resultierenden Spline s_f gilt $s_f \in \mathcal{S}_2^0(\Delta)$. Das nächste wichtige Resultat wird zeigen, dass die Gewichte so gewählt sind, dass der Spline s_f auch global C^1 -differenzierbar auf Ω ist.

Satz 6.10 (C^1 -Differenzierbarkeit)

Der Quasi-Interpolationsoperator $Q_\alpha : C(\Omega^*) \rightarrow \mathcal{S}_2^0(\Delta)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, ist eine lineare Abbildung in den Raum $\mathcal{S}_2^1(\Delta)$.

Beweis: Es muss gezeigt werden, dass die Splines $s_f := Q_\alpha(f)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, die C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen (6.1)-(6.6) für alle inneren Dreiecksflächen von Δ gleichzeitig erfüllen. Da der vollständige Beweis lang ist, geben wir an dieser Stelle, wie auch im Beweis zu Satz 6.2, lediglich das Vorgehen für zwei typische Bedingungen an. Der vollständige Beweis verläuft analog zum vollständigen Beweis von Satz 6.2, der im Anhang A zu finden ist.

Zunächst betrachten wir die Bedingung (6.1a) univariaten Typs, wenn die Dreiecksseite F_0^S auf einer gemeinsamen quadratischen Seitenfläche zweier benachbarter Truncated Octahedrons liegt:

$$b_{1100}^S + \tilde{b}_{1100}^S = 2b_{0200}^S.$$

Wir verwenden (6.8) für die involvierten Koeffizienten und erhalten damit auf der linken Seite der Gleichung

$$(1 - \alpha)A\tilde{A}_0 + \frac{1}{12}((2\alpha + 3)A\tilde{A}_1 + 2\alpha A\tilde{A}_{2,3,4,5} + (2\alpha - 3)A\tilde{A}_6).$$

Da $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{B}$ gilt, ist dies genau zweimal der Koeffizient b_{0200}^S und die Bedingung ist erfüllt.

Wir überprüfen mit (6.3a) noch eine Bedingung bivariaten Typs, wobei F_2^H eine gemeinsame Dreiecksfläche zweier benachbarter Tetraeder $T, \tilde{T} \in T^S$ innerhalb eines Truncated Octahedrons ist. Es muss gelten

$$b_{1010}^S + \tilde{b}_{1010}^S = \frac{1}{2}b_{1100}^S + \frac{3}{2}b_{1001}^S.$$

Wir verwenden nun (6.8) für die Koeffizienten auf der rechten Seite der Gleichung und erhalten

$$2(1 - \alpha)A_0 + \frac{1}{24}((8\alpha + 12)A_1 + (8\alpha + 3)A_2 + 8\alpha A_{3,4} + (8\alpha - 3)A_5 + (8\alpha - 12)A_6).$$

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

Betrachten wir nun die Koeffizienten auf der linken Seite der Gleichung, so sehen wir, dass lediglich der Koeffizient b_{1010}^S die gleiche Datenpunktordnung besitzt wie die Koeffizienten auf der rechten Seite der Gleichung. Daher bezeichnen wir die Datenwerte bezüglich des Koeffizienten \tilde{b}_{1010}^S zunächst mit $\tilde{A}_0, \dots, \tilde{A}_6$ und erhalten mit (6.8)

$$(1 - \alpha)A\tilde{A}_0 + \frac{1}{48}((8\alpha + 12)A\tilde{A}_1 + (8\alpha + 3)A\tilde{A}_{2,3} \\ + (8\alpha - 3)A\tilde{A}_{4,5} + (8\alpha - 12)A\tilde{A}_6).$$

Untersuchen wir nun die unterschiedlichen Datenpunktordnungen, so ergibt sich der folgende Zusammenhang

$$\tilde{A}_0 = A_0, \tilde{A}_1 = A_1, \tilde{A}_2 = A_2, \tilde{A}_3 = A_4, \tilde{A}_4 = A_3, \tilde{A}_5 = A_5, \tilde{A}_6 = A_6.$$

Wenden wir dies nun auf den obigen Term an, so erhalten wir

$$2(1 - \alpha)A_0 + \frac{1}{48}((16\alpha + 24)A_1 + (16\alpha + 6)A_2 \\ + 16\alpha A_{3,4} + (16\alpha - 6)A_5 + (16\alpha - 24)A_6)$$

und die Bedingung (6.4a) ist erfüllt.

Alle Bedingungen (6.1)-(6.6) können mit analogem Vorgehen nachgewiesen werden, wobei stets die Ordnung der Datenpunkte für jeden Koeffizienten individuell beachtet werden muss.

□

6.3.2. Eigenschaften der Quasi-Interpolanten

In diesem Unterabschnitt beweisen wir einige wichtige Eigenschaften der Operatoren Q_α , $0 \leq \alpha \leq 1$. Wir untersuchen die Reproduktionseigenschaften der Operatoren für unterschiedliche Parameterwerte und zeigen, dass die resultierenden Splines stabil berechnet werden können.

Das nächste Lemma zeigt, dass die Quasi-Interpolationsoperatoren Q_α , $0 \leq \alpha \leq 1$, gewisse Polynome reproduzieren. Insbesondere für den Parameterwert $\alpha = 0$ werden quadratische Polynome durch diesen Operator exakt reproduziert.

Lemma 6.11 (Reproduktionseigenschaften)

Es gelten die folgenden Aussagen:

- (i) $Q_\alpha(p) \equiv p, \forall p \in \mathcal{P}_1$ und $0 \leq \alpha \leq 1$
- (ii) $Q_0(p) \equiv p, \forall p \in \mathcal{P}_2$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass Q_α für alle Parameterwerte $0 \leq \alpha \leq 1$ Konstanten $C \in \mathbb{R}$ reproduziert. Sind alle Datenwerte in den Formeln (6.8) gleich 1, so sind auch alle Koeffizienten b_ξ gleich 1. Damit folgt nach Satz 2.10(i), dass gilt $Q_\alpha(1) \equiv 1$, für $0 \leq \alpha \leq 1$. Mit der Linearität von Q_α folgt schließlich $Q_\alpha(C) \equiv C$ für alle $C \in \mathbb{R}$ und $0 \leq \alpha \leq 1$.

Nun können wir zeigen, dass die Operatoren $Q_\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$, auch lineare Polynome $p \in \mathcal{P}_1$ reproduzieren. Wegen der Linearität genügt es, die Reproduktion der Monome $\{x, y, z\}$ nachzuweisen. Durch Lemma 6.1 ist eine bestimmende Menge \mathcal{M} für den Raum $\mathcal{S}_2^1(\Delta)$ gegeben. Daher muss die Reproduktion lediglich für die Koeffizienten $b_\xi, \xi \in \mathcal{M}$, nachgewiesen werden. Mit der Reproduktion von Konstanten und der Linearität der Operatoren $Q_\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$, ist die Reproduktion darüber hinaus unabhängig von der Wahl des Ursprungs. Daher betrachten wir im Folgenden den Tetraeder $T = [v_0, v_1, v_2, v_3] \in \Delta$, wobei $v_0 = (0, 0, 0)$, $v_1 = (h, 0, 0)$, $v_2 = (h, \frac{h}{4}, \frac{h}{4})$ und $v_3 = (h, \frac{h}{2}, 0)$. Dieser Tetraeder liegt innerhalb eines im Ursprung zentrierten Truncated Octahedrons der Größe h . Da der Koeffizient $b_\xi, \xi = \xi_{0002}$, nur in der Menge \mathcal{M} enthalten ist, falls ξ auf dem Rand von Δ liegt, genügt es die Reproduktionseigenschaft für den Koeffizienten $b_\xi \in \mathcal{M}, \xi = \xi_{0011}$, zu zeigen. Falls die Reproduktionseigenschaft für diesen Koeffizienten erfüllt ist, so folgt auf Grund der C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen direkt die Reproduktionseigenschaft der Koeffizienten $b_\xi, \xi = \xi_{0002}$, im Inneren von Δ und mit (6.8) somit auch für alle Koeffizienten $b_\xi, \xi = \xi_{0002}$. Wenden wir eine mögliche Datenpunktordnung für die Datenpunkte der drei Truncated Octahedrons mit gemeinsamer Kante $[v_2, v_3]$ bezüglich des Domain-Points $\xi = \xi_{0011}$ des Tetraeders T an, so erhalten wir

$$\begin{array}{lll}
 z_0^A = (h, h, h), & z_0^B = (0, 0, 0), & z_0^C = (2h, 0, 0), \\
 z_1^A = (h, h, 0), & z_1^B = (h, 0, 0), & z_1^C = (h, 0, 0), \\
 z_2^A = (h, 0, h), & z_2^B = (0, h, 0), & z_2^C = (2h, h, 0), \\
 z_3^A = (2h, h, h), & z_3^B = (0, 0, h), & z_3^C = (2h, 0, h), \\
 z_4^A = (0, h, h), & z_4^B = (0, 0, -h), & z_4^C = (2h, 0, -h), \\
 z_5^A = (h, 2h, h), & z_5^B = (0, -h, 0), & z_5^C = (2h, -h, 0), \\
 z_6^A = (h, h, 2h), & z_6^B = (-h, 0, 0), & z_6^C = (3h, 0, 0).
 \end{array}$$

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

Hier bezeichnet \mathcal{A} das in (h, h, h) zentrierte Truncated Octahedron der Größe h , während \mathcal{B} und \mathcal{C} die in $(0, 0, 0)$ und $(2h, 0, 0)$ zentrierten Truncated Octahedron der Größe h bezeichnen. Wir zeigen nun, dass der Koeffizient b_ξ , $\xi = \xi_{0011}$, des Splines $Q_\alpha(p)$ bezüglich T , für $p \in \{x, y, z\}$, identisch ist mit dem Koeffizienten von p in seiner Bernstein-Bézier-Darstellung bezüglich T . Seien $p_1(x, y, z) := x$, $p_2(x, y, z) := y$ und $p_3(x, y, z) := z$ quadratische Polynome in ihrer Bernstein-Bézier-Darstellung bezüglich T . Wie in Lemma 6.4 erhalten wir die folgenden Werte für die Koeffizienten $b_{0011}^{[i]}$, $i = 1, 2, 3$:

$$b_{0011}^{[1]} = h, \quad b_{0011}^{[2]} = \frac{3}{8}h \quad \text{und} \quad b_{0011}^{[3]} = \frac{1}{8}h.$$

Setzen wir nun die Werte der Funktionen p_i , $i = 1, 2, 3$, an den obigen Datenpunkten in die Formel (6.8) für den Koeffizienten b_{0011} ein, so ergibt sich die exakte Reproduktion der Koeffizienten $b_{0011}^{[i]}$, für $i = 1, 2, 3$.

Auch die Reproduktion quadratischer Polynome können wir analog zeigen. Mit der Reproduktion linearer Polynome und der Linearität von Q_α ist die Reproduktion unabhängig von der Wahl des Ursprungs. Wir vergleichen nun die in (6.8) berechneten Koeffizienten b_{0011} für die Werte der Polynome $p \in \{xy, xz, yz, x^2, y^2, z^2\}$, mit den Koeffizienten $b_{0011}^{[p]}$ der Polynome p in ihrer Bernstein-Bézier-Darstellung bezüglich T . Es zeigt sich, dass $b_{0011} = b_{0011}^{[p]}$ gilt für alle $p \in \{xy, xz, yz, x^2, y^2, z^2\}$. Damit folgt dann auch $Q_\alpha(p) \equiv p$ für alle $p \in \mathcal{P}_2$. □

Das folgende Resultat zeigt, dass die Operatoren Q_α für $0 \leq \alpha \leq 1$ beschränkt sind. Die resultierenden Splines werden also stabil berechnet. Hier sowie auch im Folgenden verwenden wir die Maximumsnorm

$$\|f\|_\Gamma := \max_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|,$$

wobei Γ ein Gebiet im \mathbb{R}^3 und f eine stetige Funktion auf Γ ist.

Lemma 6.12 (Beschränktheit)

Seien $f \in C(\Omega^*)$ und $T = [v_0, v_1, v_2, v_3] \in \Delta$, dann gilt

$$\|Q_\alpha(f)\|_T \leq \frac{7}{4} \|f\|_{\Omega_T}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

wobei Ω_T der in v_3 zentrierte Würfel mit Kantenlänge $\frac{3}{2}h$ ist.

6.3. Optimale Approximation auf dem Cubic Grid

Beweis: In Ω_T sind alle Datenpunkte enthalten, die zur Berechnung der Koeffizienten b_ξ , $\xi \in \mathcal{D}_T$, in (6.7) benötigt werden. Daher gilt für $0 \leq \alpha \leq 1$

$$|b_\xi| \leq \max\left\{1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right\} \|f\|_{\Omega_T}.$$

Mit der Nicht-Negativität der Bernstein-Polynome und Satz 2.10(i) folgt nun

$$\|Q_\alpha(f)\|_T \leq \max\{|b_\xi| : \xi \in \mathcal{D}_T\}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

und der Beweis ist vollständig. □

6.3.3. Approximationseigenschaften

In diesem Unterabschnitt untersuchen wir die Approximationseigenschaften der Splines $Q_\alpha(f)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, für die Werte und Ableitungen einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion f auf Ω . Wir verwenden dabei die gleiche Notation wie in den vorherigen Unterabschnitten und zeigen, dass alle Operatoren Q_α , $0 \leq \alpha \leq 1$, die Approximationsordnung zwei besitzen. Für den Parameterwert $\alpha = 0$ erhalten wir die optimale Approximationsordnung drei des Raums $\mathcal{S}_2^1(\Delta)$.

Für die Norm der Ableitungen von differenzierbaren Funktionen verwenden wir

$$\|D^r(f)\|_\Gamma := \max\{\|D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma(f)\|_\Gamma : \alpha + \beta + \gamma = r\}.$$

Hier ist Γ ein Gebiet im \mathbb{R}^3 und f eine r -mal stetig differenzierbare Funktion auf Γ .

Satz 6.13 (Approximationsordnung)

Seien $f \in C(\Omega^*)$ und $Q_\alpha(f)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, der in (6.8) definierte Spline bezüglich der Werte von f in den Punkten $\mathcal{V} \cap \Omega$. Es gelten die folgenden Aussagen:

(i) Wenn $f \in C^2(\Omega^*)$, so gilt für $0 \leq \alpha \leq 1$

$$\|f - Q_\alpha(f)\|_\Omega \leq C \|D^2(f)\|_{\Omega^*} h^2,$$

wobei $C > 0$ eine von f und h unabhängige Konstante ist.

(ii) Wenn $f \in C^3(\Omega^*)$, so gilt

$$\|D^r(f - Q_0(f))\|_\Omega \leq \tilde{C} \|D^3(f)\|_{\Omega^*} h^{3-r}, \quad r = 0, 1, 2,$$

wobei $\tilde{C} > 0$ eine von f und h unabhängige Konstante ist.

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

Beweis: (i) Seien $f \in C^2(\Omega^*)$, $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ ein beliebiger Tetraeder in Δ mit Eckpunkten wie in Abschnitt 6.1 beschrieben und $\alpha \in [0, 1]$. Weiter sei Ω_T wie in Lemma 6.12 definiert und $p_f \in \mathcal{P}_2$ das lineare Taylorpolynom von f in v_3 . Dann existiert eine Konstante $C_T > 0$ unabhängig von f und h , so dass gilt

$$\|f - p_f\|_{\Omega_T} \leq C_T \|D^2(f)\|_{\Omega_T} h^2.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt weiter, dass gilt

$$\|f - Q_\alpha(f)\|_T \leq \|f - p_f\|_{\Omega_T} + \|Q_\alpha(f) - p_f\|_T.$$

Nach Lemma 6.11(i), mit der Linearität von Q_α und Korollar 6.12 erhalten wir nun

$$\|Q_\alpha(f) - p_f\|_T = \|Q_\alpha(f - p_f)\|_T \leq \frac{7}{4} \|f - p_f\|_{\Omega_T}.$$

Verwenden wir dies in obiger Gleichung, so ergibt sich

$$\|f - Q_\alpha(f)\|_T \leq C \|D^3(f)\|_{\Omega_T} h^2,$$

wobei $C = \frac{11}{4} C_T$ eine von f und h unabhängige Konstante ist.

(ii) Seien nun $f \in C^3(\Omega^*)$, $T = [v_0, v_1, v_2, v_3] \in \Delta$ und $p_f \in \mathcal{P}_2$ das quadratische Taylorpolynom von f in v_3 . Es existiert eine Konstante $\tilde{C}_T > 0$ unabhängig von f und h , so dass gilt

$$\|D^r(f - p_f)\|_{\Omega_T} \leq \tilde{C}_T \|D^3(f)\|_{\Omega_T} h^{3-r}, \quad r = 0, 1, 2.$$

Wir verwenden nun die Dreiecksungleichung und erhalten

$$\|D^r(f - Q_0(f))\|_T \leq \|D^r(f - p_f)\|_{\Omega_T} + \|D^r(Q_0(f) - p_f)\|_T, \quad r = 0, 1, 2.$$

Nach Lemma 6.11(ii) und mit der Linearität von Q_α erhalten wir für $r = 0, 1, 2$,

$$\|D^r(Q_0(f) - p_f)\|_T = \|D^r(Q_0(f - p_f))\|_T.$$

Wir verwenden nun die Markov-Ungleichung für trivariate Polynome sowie Korollar 6.12 für $\alpha = 0$ und erhalten

$$\|D^r(Q_0(f - p_f))\|_T \leq \frac{\tilde{C}_M}{h^r} \|Q_0(f - p_f)\|_T \leq \frac{\tilde{C}_M}{h^r} \frac{7}{4} \|f - p_f\|_{\Omega_T}, \quad r = 0, 1, 2,$$

wobei $\tilde{C}_M > 0$ eine von f und h unabhängige Konstante ist. Die Kombination dieser Ungleichungen führt zu

$$\|D^r(f - Q_0(f))\|_T \leq \tilde{C} \|D^3(f)\|_{\Omega_T} h^{3-r}, \quad r = 0, 1, 2,$$

wobei $\tilde{C} = (1 + \frac{7}{4} \tilde{C}_M) \tilde{C}_T$ eine von f und h unabhängige Konstante ist. □

6.3.4. Numerische Tests

In diesem Unterabschnitt führen wir numerische Tests mit Hilfe differenzierbarer Testfunktionen f für den Operator Q_α mit Parameterwert $\alpha = 0$ durch. Unsere Ergebnisse bestätigen die Approximationseigenschaften der Splines $s_f = Q_0(f)$, die wir im vorherigen Unterabschnitt gezeigt haben. Zur Berechnung der Splines verwenden wir dabei die Werte der Funktionen f an den Gitterpunkten $v \in \mathcal{V}$ wie in Unterabschnitt 6.3.1 beschrieben. Wir untersuchen das Verhalten des Approximationsfehlers für die Werte und die ersten partiellen Ableitungen in x von f , bei schrittweiser Verfeinerung des Datengitters und der zugrundeliegenden Partition.

In Tabelle 6.5 geben wir den Approximationsfehler des Splines s_f zu den Werten der Testfunktionen f an und in Tabelle 6.6 den Approximationsfehler zu den ersten partiellen Ableitungen in x der Testfunktionen f . Wir verwenden die gleichen Testfunktionen wie bereits in Unterabschnitt 6.2.4. Dies sind die *blob*-Funktion f_{blob} , *Frankes* trivariate Testfunktion f_{fr} und die *Marschner-Lobb*-Funktion f_{ml} . Wir betrachten den diskreten Fehler an den Gitterpunkten err_{data} , den maximalen Fehler err_{max} , den mittleren Fehler err_{mean} und den mittleren quadratischen Fehler err_{rms} .

Aus Tabelle 6.5 ist ersichtlich, dass die Approximationsfehler von allen Testfunktionen bei jeder Verfeinerung der Partition von h zu $h/2$ um den Faktor acht sinken. Dies bestätigt das Ergebnis von Satz 6.13(ii) für $r = 0$. Wir veranschaulichen die Konvergenz des Approximationsfehlers am Beispiel der Marschner-Lobb-Funktion mit Hilfe einer log-log-Auftragung in Abbildung 6.14.

Betrachten wir nun Tabelle 6.6, so sehen wir, dass hier die Approximationsfehler der ersten partiellen Ableitungen in x immer um den Faktor vier bei Verfeinerung der Partition von h zu $h/2$ sinken. Dies bestätigt auch das Ergebnis von Satz 6.13(ii) für $r = 1$. In Abbildung 6.15 veranschaulichen wir erneut die Konvergenz des Approximationsfehlers der ersten Ableitung in x an Hand der Marschner-Lobb-Funktion in einer log-log-Auftragung.

An dieser Stelle möchten wir auch die Möglichkeit der Kombination verschiedener Operatoren aufzeigen. Beispielsweise lässt sich ein Quasi-Interpolationsoperator zur Approximation von Daten auf dem raumzentrierten kubischen Gitter (BCC-Grid), durch (lineare) Kombination eines Operators Q_α dieses Abschnitts und eines Operators Q_k des vorherigen Abschnitts, leicht konstruieren. Durch geschickte Wahl der Linearkombination bei der Konstruktion des neuen Operators sowie der Parameter α und k , ist es so auch möglich einen neuen Operator zu konstruieren dessen Approximationsordnung höher ist als die der ursprünglichen Operatoren.

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

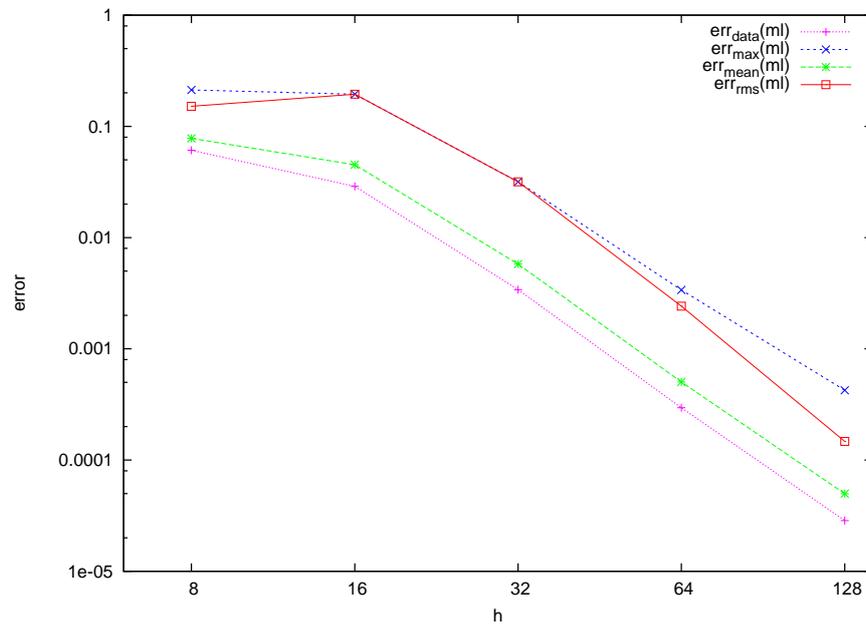


Abbildung 6.14.: log-log-Auftragung des Approximationsfehlers der Werte der Marschner-Lobb-Funktion bei Verfeinerung der Partition für $\alpha = 0$.

$1/h$	$\text{err}_{\text{data}}^{\text{blob}}$	$\text{err}_{\text{max}}^{\text{blob}}$	$\text{err}_{\text{mean}}^{\text{blob}}$	$\text{err}_{\text{rms}}^{\text{blob}}$
8	7.75×10^{-3}	1.11×10^{-2}	1.35×10^{-3}	2.13×10^{-3}
16	5.94×10^{-4}	1.10×10^{-3}	1.52×10^{-4}	2.24×10^{-4}
32	3.90×10^{-5}	1.24×10^{-4}	1.80×10^{-5}	2.59×10^{-5}
64	2.47×10^{-6}	1.46×10^{-5}	2.23×10^{-6}	3.19×10^{-6}
128	1.55×10^{-7}	1.82×10^{-6}	2.65×10^{-7}	3.98×10^{-7}

$1/h$	$\text{err}_{\text{data}}^{\text{fr}}$	$\text{err}_{\text{max}}^{\text{fr}}$	$\text{err}_{\text{mean}}^{\text{fr}}$	$\text{err}_{\text{rms}}^{\text{fr}}$
8	4.39×10^{-2}	6.17×10^{-2}	2.80×10^{-3}	6.31×10^{-3}
16	4.62×10^{-3}	7.06×10^{-3}	3.18×10^{-4}	6.89×10^{-4}
32	3.32×10^{-4}	7.16×10^{-4}	3.56×10^{-5}	7.45×10^{-5}
64	2.15×10^{-5}	8.16×10^{-5}	4.26×10^{-6}	8.83×10^{-6}
128	1.35×10^{-6}	9.83×10^{-6}	5.16×10^{-7}	1.09×10^{-6}

$1/h$	$\text{err}_{\text{data}}^{\text{ml}}$	$\text{err}_{\text{max}}^{\text{ml}}$	$\text{err}_{\text{mean}}^{\text{ml}}$	$\text{err}_{\text{rms}}^{\text{ml}}$
8	1.52×10^{-1}	2.12×10^{-1}	6.10×10^{-2}	7.81×10^{-2}
16	1.95×10^{-1}	1.94×10^{-1}	2.89×10^{-2}	4.52×10^{-2}
32	3.18×10^{-2}	3.18×10^{-2}	3.40×10^{-3}	5.78×10^{-3}
64	2.42×10^{-3}	3.39×10^{-3}	2.95×10^{-4}	5.04×10^{-4}
128	1.47×10^{-4}	4.24×10^{-4}	2.85×10^{-5}	4.96×10^{-5}

Tabelle 6.5.: Approximationsfehler für $\alpha = 0$.

6.3. Optimale Approximation auf dem Cubic Grid

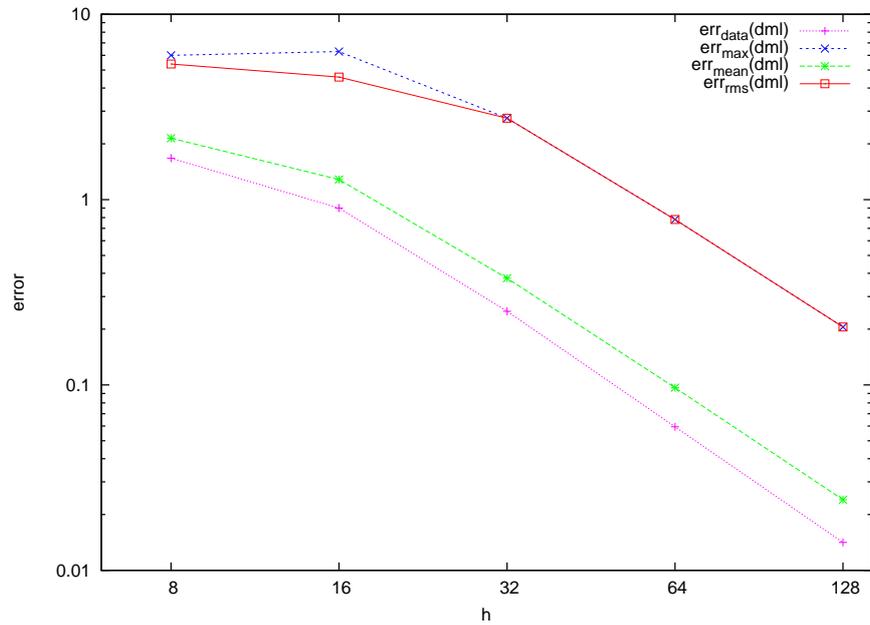


Abbildung 6.15.: log-log-Auftragung des Approximationsfehlers der ersten partiellen Ableitung in x der Marschner-Lobb-Funktion bei Verfeinerung der Partition für $\alpha = 0$.

$1/h$	$\text{err}_{\text{data}}^{D_x(\text{blob})}$	$\text{err}_{\text{max}}^{D_x(\text{blob})}$	$\text{err}_{\text{mean}}^{D_x(\text{blob})}$	$\text{err}_{\text{rms}}^{D_x(\text{blob})}$
8	2.43×10^{-1}	2.67×10^{-1}	2.48×10^{-2}	3.88×10^{-2}
16	6.93×10^{-2}	7.09×10^{-2}	6.75×10^{-3}	1.05×10^{-2}
32	1.79×10^{-2}	1.79×10^{-2}	1.75×10^{-3}	2.71×10^{-3}
64	4.51×10^{-3}	4.51×10^{-3}	4.49×10^{-4}	6.90×10^{-4}
128	1.13×10^{-3}	1.13×10^{-3}	1.14×10^{-4}	1.74×10^{-4}

$1/h$	$\text{err}_{\text{data}}^{D_x(fr)}$	$\text{err}_{\text{max}}^{D_x(fr)}$	$\text{err}_{\text{mean}}^{D_x(fr)}$	$\text{err}_{\text{rms}}^{D_x(fr)}$
8	0.99839	1.13724	4.62×10^{-2}	9.69×10^{-2}
16	3.31×10^{-1}	3.36×10^{-1}	1.40×10^{-2}	2.99×10^{-2}
32	8.78×10^{-2}	9.29×10^{-2}	3.79×10^{-3}	8.18×10^{-3}
64	2.25×10^{-2}	2.37×10^{-2}	9.86×10^{-4}	2.13×10^{-3}
128	5.65×10^{-3}	5.92×10^{-3}	2.51×10^{-4}	5.42×10^{-4}

$1/h$	$\text{err}_{\text{data}}^{D_x(ml)}$	$\text{err}_{\text{max}}^{D_x(ml)}$	$\text{err}_{\text{mean}}^{D_x(ml)}$	$\text{err}_{\text{rms}}^{D_x(ml)}$
8	5.38497	5.99968	1.67326	2.14401
16	4.57993	6.29369	0.90067	1.28309
32	2.74902	2.74902	0.24997	0.37670
64	0.78145	0.78145	0.05952	0.09664
128	0.20560	0.20560	0.01415	0.02404

Tabelle 6.6.: Approximationsfehler der ersten partiellen Ableitung in x für $\alpha = 0$.

6.4. Interpolation auf dem BCC-Grid

Wir geben in diesem Abschnitt einen Quasi-Interpolationsoperator Q zur Interpolation von Daten auf dem raumzentrierten kubischen Gitter (BCC-Grid) an. Dieses Gitter kann auf natürliche Weise in Δ eingebettet werden, da auch die Schwerpunkte der Truncated Octahedrons in Δ auf einem BCC-Grid liegen. In Unterabschnitt 6.4.1 geben wir explizite Formeln für die Berechnung der Koeffizienten eines Splines $s \in S_2^0(\Delta)$ in seiner Bernstein-Bézier-Darstellung bezüglich Δ aus lokalen Datenwerten an und zeigen, dass diese Splines alle Differenzierbarkeitsbedingungen des Raums $S_2^1(\Delta)$ erfüllen. In Unterabschnitt 6.4.2 zeigen wir, dass der Operator Q beschränkt ist und quadratische Polynome exakt reproduziert. Hier weisen wir auch nach, dass der Operator die Daten interpoliert. In Unterabschnitt 6.4.3 zeigen wir schließlich, dass der Operator Q die optimale Approximationsordnung drei besitzt.

6.4.1. Definition des Quasi-Interpolanten

In diesem Unterabschnitt beschreiben wir die Konstruktion eines Quasi-Interpolationsoperators auf Truncated Octahedron Partitionen Δ zur Approximation von Daten auf dem kubisch-raumzentrierten Gitter (BCC-Grid). Den Quasi-Interpolationsoperator geben wir durch explizite Berechnung der Koeffizienten des Splines an und zeigen, dass der resultierende Spline C^1 -differenzierbar zusammengesetzt ist.

Es sei \diamond die Truncated Octahedron Partition mit Truncated Octahedrons der Größe h , deren Schwerpunkte auf den Gitterpunkten des BCC-Grids

$$\mathcal{V} := \{(ih, jh, kh) : i, j, k = 0, \dots, n, i, j, k \text{ alle gerade oder } i, j, k \text{ alle ungerade}\}$$

liegen. Wir nehmen an, dass die Werte einer Funktion $f \in C(\Omega^*)$, wobei $\Omega^* = [-3h, (n+3)h]^3 \subseteq \mathbb{R}^3$, an den Gitterpunkten des auf das Gebiet Ω^* erweiterten BCC-Grids \mathcal{V} bekannt sind. D.h. im Schwerpunkt jedes Truncated Octahedrons liegt genau ein Punkt $z \in \mathcal{V}$. Wir bezeichnen den Schwerpunkt eines Truncated Octahedrons $\mathcal{T} \in \diamond$ mit $z_0^{\mathcal{T}}$ und den Datenwert an dieser Stelle mit $T_0 := f(z_0^{\mathcal{T}})$. Darüber hinaus ordnen wir jedem Truncated Octahedron noch die acht Datenpunkte zu, die im Schwerpunkt der über die hexagonalen Flächen benachbart liegenden Truncated Octahedrons liegen. Wir bezeichnen diese bezüglich eines Domain-Points $\xi \in \mathcal{T}$ mit $z_1^{\mathcal{T}}, \dots, z_8^{\mathcal{T}}$, wobei die Punkte nach aufsteigenden (euklidischen) Distanzen zum Punkt ξ geordnet sind. Die entsprechenden Datenwerte an diesen Stellen bezeichnen wir mit $T_i := f(z_i^{\mathcal{T}})$, $i = 1, \dots, 8$. Dies bedeutet also, dass gilt $\|\xi - z_i\|_2 \leq \|\xi - z_j\|_2$

für $i < j$. Im Fall gleicher Abstände kann die Bezeichnung der Punkte, wie in Unterabschnitt 6.2.1, beliebig gewählt werden. Die Abbildungen 6.4 und 6.5 aus Unterabschnitt 6.2.1 können verwendet werden, um sich typische Datenpunktordnungen für bestimmte Mengen von Domain-Points auf der Hülle eines aufgeklappten Truncated Octahedrons \mathcal{T} zu veranschaulichen. Dabei bezeichnen nun jedoch die eingezeichneten Datenpunkte auf den hexagonalen Seitenflächen den entsprechenden Datenpunkt in dem über diese Seitenflächen benachbart liegenden Truncated Octahedron. Die Menge der Datenpunkte, die dem Truncated Octahedron \mathcal{T} zugeordnet sind, bezeichnen wir mit $\mathcal{V}_{\mathcal{T}} := \{z_0^{\mathcal{T}}, \dots, z_8^{\mathcal{T}}\}$. Durch diese Art der Zuordnung ist also jeder Datenpunkt in der Regel mehreren Truncated Octahedrons zugeordnet. Im Folgenden gehen wir davon aus, dass jedem Truncated Octahedron $\mathcal{T} \in \diamond$ neun Datenpunkte zugeordnet werden können, auch wenn \mathcal{T} am Rand von \diamond liegt. Wir nehmen dazu an, dass auch die Punkte von \mathcal{V} , die nicht von \diamond überdeckt werden, Truncated Octahedrons zugeordnet werden können.

Sei Δ die gleichmäßige Tetraeder-Partition von \diamond wie in Abschnitt 6.1 beschrieben und $\Omega \subset \Omega^*$ das überdeckte Gebiet im \mathbb{R}^3 . Wir beschreiben nun, wie die Koeffizienten b_{ξ} , $\xi \in \mathcal{D}_{\Delta}$, eines quadratischen Splines s_f in seiner Bernstein-Bézier-Darstellung bezüglich Δ als Linearkombinationen von gewissen Datenwerten berechnet werden können. Dazu werden jeweils nur lokale Daten in einer bestimmten Umgebung von ξ verwendet, was wir im Folgenden im Detail beschreiben.

Falls der Domain-Point ξ im Inneren eines Truncated Octahedrons $\mathcal{A} \in \diamond$ liegt, so berechnet sich der assoziierte Koeffizient b_{ξ} als Linearkombination der neun Datenwerte $A_i = f(z_i^{\mathcal{A}})$, $z_i^{\mathcal{A}} \in \mathcal{V}_{\mathcal{A}}$, $i = 0, \dots, 8$, wie folgt:

$$b_{\xi} = \sum_{i=0, \dots, 8} w_i^{\mathcal{A}} A_i, \quad w_i^{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}.$$

Liegt der Domain-Point ξ im Inneren einer gemeinsamen Seitenfläche zweier Truncated Octahedrons, so wird der zugehörige Koeffizient b_{ξ} berechnet als Linearkombination der Datenwerte, die diesen beiden Truncated Octahedrons zugeordnet sind. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \diamond$ zwei Truncated Octahedrons mit gemeinsamer Seitenfläche, so wird b_{ξ} , $\xi \in \text{int}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, bestimmt durch

$$b_{\xi} = \sum_{i=0, \dots, 8} w_i^{\mathcal{A}} A_i + \sum_{i=0, \dots, 8} w_i^{\mathcal{B}} B_i, \quad w_i^{\mathcal{A}}, w_i^{\mathcal{B}} \in \mathbb{R},$$

wobei $B_i := f(z_i^{\mathcal{B}})$, $z_i^{\mathcal{B}} \in \mathcal{V}_{\mathcal{B}}$, $i = 0, \dots, 8$. Hier bezeichnet \mathcal{A} das Truncated Octahedron, für das gilt $\|\xi - z_2^{\mathcal{A}}\|_2 \leq \|\xi - z_2^{\mathcal{B}}\|_2$. Falls \mathcal{A} und \mathcal{B} eine gemeinsame quadratische Seitenfläche besitzen, so sind die Distanzen identisch und die Bezeichnung kann beliebig gewählt werden.

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

Liegt der Domain-Point ξ im Inneren einer gemeinsamen Kante dreier Truncated Octahedrons, so wird der assoziierte Koeffizient b_ξ berechnet als Linearkombination der Datenwerte, die diesen drei Truncated Octahedrons zugeordnet sind. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \diamond$ drei Truncated Octahedrons mit gemeinsamer Kante, so wird b_ξ , $\xi \in \text{int}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C})$, bestimmt durch

$$b_\xi = \sum_{i=0, \dots, 8} w_i^A A_i + \sum_{i=0, \dots, 8} w_i^B B_i + \sum_{i=0, \dots, 8} w_i^C C_i,$$

wobei $w_i^A, w_i^B, w_i^C \in \mathbb{R}$ und $C_i := f(z_i^C)$, $z_i^C \in \mathcal{V}_C$, $i = 0, \dots, 8$. Hier bezeichnet \mathcal{A} wiederum das Truncated Octahedron, für das gilt $\|\xi - z_2^A\|_2 = \min_{\mathcal{T} \in \diamond} \|\xi - z_2^T\|_2$.

Ist der Domain-Point ξ identisch mit einem gemeinsamen Eckpunkt von vier Truncated Octahedrons, so wird der zugehörige Koeffizient b_ξ als Linearkombination der Datenwerte berechnet, die diesen vier Truncated Octahedrons zugeordnet sind. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in \diamond$ vier Truncated Octahedrons mit gemeinsamen Eckpunkt v , so wird b_ξ , $\xi = v$, bestimmt durch

$$b_\xi = \sum_{i=0, \dots, 8} w_i^A A_i + \sum_{i=0, \dots, 8} w_i^B B_i + \sum_{i=0, \dots, 8} w_i^C C_i + \sum_{i=0, \dots, 8} w_i^D D_i,$$

wobei $w_i^A, w_i^B, w_i^C, w_i^D \in \mathbb{R}$ und $D_i := f(z_i^D)$, $z_i^D \in \mathcal{V}_D$, $i = 0, \dots, 8$. Auf Grund der Symmetrie kann die Bezeichnung der Truncated Octahedrons in diesem Fall beliebig gewählt werden.

Im Folgenden beschreiben wir einen Quasi-Interpolationsoperator $Q : C(\Omega^*) \rightarrow S_2^0(\Delta)$, indem wir explizit die Berechnung der Koeffizienten des Splines $s_f := Q(f)$ in seiner Bernstein-Bézier-Darstellung bezüglich Δ angeben. Wir nehmen dabei an, dass die benötigten Datenwerte an den Gitterpunkten von \mathcal{V} von einer stetigen Funktion $f \in C(\Omega^*)$ stammen. Wie in Unterabschnitt 6.2.1 muss auch hier unterschieden werden, aus welchem Typ von Tetraeder die Koeffizienten b_ξ stammen. Liegt ξ in einem Tetraeder vom Typ T^S (siehe Abschnitt 6.1), so bezeichnen wir den assoziierten Koeffizienten mit b_ξ^S . In allen anderen Fällen bezeichnen wir die Koeffizienten mit b_ξ^H . Wir verwenden hier erneut die aus den vorhergehenden Abschnitten bekannte Notation $AB_{1,2} := A_1 + B_1 + A_2 + B_2$. Die Berechnung der Bernstein-Bézier-Koeffizienten ist wie folgt:

$$\begin{aligned}
b_{0011} &:= 2^{-8} (64A_0 + 2 (3A_{1,2} + A_{3,4} - A_{5,6} - 3A_{7,8}) \\
&\quad + 96BC_0 + 3 (3BC_{1,2} + BC_{3,4} - BC_{5,6} - 3BC_{7,8})) \\
b_{0020} &:= 2^{-8} (64A_0 + 2 (3A_{1,2} - 3A_{7,8}) \\
&\quad + 96BC_0 + 3 (3BC_1 + 2BC_{2,3} + BC_4 - BC_5 - 2BC_{6,7} - 3BC_8)) \\
b_{0002} &:= 2^{-7} (32ABCD_0 + 3ABCD_{1,2} + ABCD_{3,4} - ABCD_{5,6} - 3ABCD_{7,8}) \\
b_{0101}^{S,H} &:= 2^{-6} (32AB_0 + 3AB_{1,2} + AB_{3,4} - AB_{5,6} - 3AB_{7,8}) \\
b_{0110}^S &:= 2^{-6} (32AB_0 + 3AB_1 + 2AB_{2,3} + AB_4 - AB_5 - 2AB_{6,7} - 3AB_8) \\
b_{0110}^H &:= 2^{-6} (32AB_0 + 3A_{1,2} - 3A_{7,8} + 3B_1 + 2B_{2,3} + B_4 - B_5 - 2B_{6,7} - 3B_8) \\
b_{0200}^S &:= 2^{-5} (16AB_0 + AB_{1,2,3,4} - AB_{5,6,7,8}) \\
b_{0200}^H &:= 2^{-6} (32AB_0 + 3AB_1 + AB_{2,3,4} - AB_{5,6,7} - 3AB_8) \\
b_{1001} &:= A_0 + 2^{-5} (3A_{1,2} + A_{3,4} - A_{5,6} - 3A_{7,8}) \\
b_{1010}^S &:= A_0 + 2^{-5} (3A_1 + 2A_{2,3} + A_4 - A_5 - 2A_{6,7} - 3A_8) \\
b_{1010}^H &:= A_0 + 2^{-5} (3A_{1,2} - 3A_{7,8}) \\
b_{1100}^S &:= A_0 + 2^{-4} (A_{1,2,3,4} - A_{5,6,7,8}) \\
b_{1100}^H &:= A_0 + 2^{-5} (3A_1 + A_{2,3,4} - A_{5,6,7} - 3A_8) \\
b_{2000} &:= A_0
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Da alle Koeffizienten b_ξ , $\xi \in \mathcal{D}_\Delta$, eindeutig bestimmt sind, folgt direkt, dass für den resultierenden Spline s_f gilt $s_f \in \mathcal{S}_2^0(\Delta)$. Das nächste wichtige Resultat wird zeigen, dass die Gewichte so gewählt sind, dass der Spline s_f auch global C^1 -differenzierbar auf Ω ist.

Satz 6.14 (C^1 -Differenzierbarkeit)

Der Quasi-Interpolationsoperator $Q : C(\Omega^*) \rightarrow \mathcal{S}_2^0(\Delta)$ ist eine lineare Abbildung in den Raum $\mathcal{S}_2^1(\Delta)$.

Beweis: Es muss gezeigt werden, dass die Bernstein-Bézier-Koeffizienten des Splines $s_f := Q(f)$ in (6.9) die C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen (6.1)-(6.6) für alle inneren Dreiecksflächen von Δ gleichzeitig erfüllen. Wir geben an dieser Stelle wie auch im Beweis von Satz 6.2 in Unterabschnitt 6.2.1 zunächst nur das Vorgehen für zwei typische Bedingungen an. Der vollständige Beweis verläuft analog zu dem im Anhang A geführten vollständigen Beweis von Satz 6.2.

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

Wir betrachten zunächst die Bedingung (6.1a) univariaten Typs, wenn die Dreiecksseite F_0^S auf einer gemeinsamen quadratischen Seitenfläche zweier benachbarter Truncated Octahedrons liegt:

$$b_{1100}^S + \tilde{b}_{1100}^S = 2b_{0200}^S.$$

Nun verwenden wir (6.9) für die involvierten Koeffizienten auf der linken Seite der Gleichung und erhalten

$$A\tilde{A}_0 + 2^{-4} (A\tilde{A}_{1,2,3,4} - A\tilde{A}_{5,6,7,8}).$$

Da $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{B}$ gilt, ist dies genau zweimal der Koeffizient b_{0200}^S in (6.9) und die Bedingung ist erfüllt.

Als nächstes untersuchen wir (6.4a), eine Bedingung bivariaten Typs, wobei F_2^H eine gemeinsame Dreiecksfläche zweier benachbarter Tetraeder $T \in T^H$ und $\tilde{T} \in T^H$, innerhalb eines Truncated Octahedrons ist. Es muss gelten

$$b_{1010}^S + \tilde{b}_{1010}^H = \frac{1}{2}b_{1100}^H + \frac{3}{2}b_{1001},$$

wobei genau einer der beiden Koeffizienten auf der linken Seite vom Typ b_ξ^S sein muss und der andere vom Typ b_ξ^H . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir sagen, dass $b_{1010} = b_{1010}^S$ und $\tilde{b}_{1010} = \tilde{b}_{1010}^H$. Da die Domain-Points der in diese Gleichung involvierten Koeffizienten alle im gleichen Truncated Octahedron liegen, gilt $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$. Verwenden wir nun (6.9) für die Koeffizienten auf der linken Seite der Gleichung, so erhalten wir

$$2A_0 + 2^{-5} (6A_1 + 5A_2 + 2A_3 + A_4 - A_5 - 2A_6 - 5A_7 - 6A_8),$$

da beide Koeffizienten die gleiche Datenpunktordnung besitzen können. Auf der rechten Seite der Gleichung müssen wir jedoch beachten, dass lediglich der Koeffizient b_{1001} die gleiche Datenpunktordnung besitzt wie die Koeffizienten b_{1010}^S und \tilde{b}_{1010}^H . Daher bezeichnen wir die Datenwerte bezüglich b_{1100}^H zunächst mit $\hat{A}_0, \dots, \hat{A}_8$ und erhalten mit (6.9)

$$\frac{1}{2}(\hat{A}_0 + 3A_0) + 2^{-6} (3\hat{A}_1 + \hat{A}_{2,3,4} - \hat{A}_{5,6,7} - 3\hat{A}_8 + 9A_{1,2} + 3A_{3,4} - 3A_{5,6} - 9A_{7,8}).$$

Betrachten wir nun die unterschiedlichen Datenpunktordnungen, so ergibt sich der folgende Zusammenhang

$$\begin{array}{lll} \hat{A}_0 = A_0, & \hat{A}_1 = A_1, & \hat{A}_2 = A_2, \\ \hat{A}_3 = A_3, & \hat{A}_4 = A_5, & \hat{A}_5 = A_4, \\ \hat{A}_6 = A_6, & \hat{A}_7 = A_7, & \hat{A}_8 = A_8. \end{array}$$

Wenden wir dies nun auf den obigen Term an, so ist leicht ersichtlich, dass die Bedingung (6.4a) ebenfalls erfüllt ist.

Alle Bedingungen (6.1)-(6.6) können mit analogem Vorgehen nachgewiesen werden, wobei stets die Ordnung der Datenpunkte für jeden Koeffizienten individuell beachtet werden muss.

□

6.4.2. Eigenschaften des Quasi-Interpolanten

In diesem Unterabschnitt beweisen wir einige wichtige Eigenschaften des im vorherigen Unterabschnitt definierten Quasi-Interpolationsoperators $Q : C(\Omega^*) \rightarrow S_2^1(\Delta)$. Wir zeigen, dass der Spline $s_f := Q(f)$ die Werte einer gegebenen Funktion $f \in C(\Omega^*)$ an den Daten interpoliert. Falls f aus dem Raum der quadratischen Polynome stammt, so wird f auf ganz Ω exakt reproduziert. Abschließend zeigen wir, dass alle Operatoren beschränkt sind und die resultierenden Splines stabil berechnet werden können.

Wir zeigen zunächst, dass der Operator $Q : C(\Omega^*) \rightarrow S_2^1(\Delta)$ die Interpolationsbedingung an den Datenpunkten $z \in \mathcal{V}$ erfüllt.

Korollar 6.15 (Interpolationseigenschaft)

Sei $f \in C(\Omega^*)$ und \mathcal{V} das BCC-Grid, wie in Unterabschnitt 6.4.1. Es gilt

$$Q(f)(z) = f(z), \quad \forall z \in \mathcal{V}.$$

Beweis: Sei $z \in \mathcal{V}$ und $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ ein Tetraeder in Δ mit Eckpunkt $v_0 = z$. Durch die Eckpunktinterpolation der Bernsteinpolynome gilt $Q(f)(z) = b_{2000}$, wobei b_{2000} der Bernstein-Bézier-Koeffizient von $Q(f)$ bezüglich T ist. Mit der Formel für den Koeffizienten b_{2000} in (6.9) folgt dann also $Q(f)(z) = f(z)$.

□

Das nächste Lemma zeigt, dass der Quasi-Interpolationsoperator Q quadratische Polynome exakt reproduziert. Diese wichtige Reproduktionseigenschaft ist die Voraussetzung dafür, dass Q die optimale Approximationsordnung besitzt.

Lemma 6.16 (Reproduktionseigenschaften)

Es gilt $Q(p) \equiv p$ für alle $p \in \mathcal{P}_2$.

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass Q Konstanten reproduziert. Sind alle Datenwerte in den Formeln (6.9) gleich 1, so sind auch alle Koeffizienten b_ξ gleich 1. Damit folgt nach Satz 2.10(i), dass gilt $Q(1) \equiv 1$. Mit der Linearität von Q folgt dann auch $Q(C) \equiv C$, für alle $C \in \mathbb{R}$.

Mit diesem Ergebnis können wir nun zeigen, dass Q auch lineare Polynome $p \in \mathcal{P}_1$ reproduziert. Wegen der Linearität genügt es, die Reproduktion der Monome $\{x, y, z\}$ nachzuweisen. Da durch Lemma 6.1 eine bestimmende Menge \mathcal{M} für den Raum $\mathcal{S}_2^1(\Delta)$ gegeben ist, muss die Reproduktion lediglich für die Koeffizienten b_ξ , $\xi \in \mathcal{M}$, nachgewiesen werden. Mit der Reproduktion von Konstanten und der Linearität des Operators Q ist die Reproduktion darüber hinaus unabhängig von der Wahl des Ursprungs. Daher betrachten wir im Folgenden den Tetraeder $T = [v_0, v_1, v_2, v_3] \in \Delta$, wobei $v_0 = (0, 0, 0)$, $v_1 = (h, 0, 0)$, $v_2 = (h, \frac{h}{4}, \frac{h}{4})$ und $v_3 = (h, \frac{h}{2}, 0)$. Dieser Tetraeder liegt innerhalb eines im Ursprung zentrierten Truncated Octahedrons der Größe h . Da der Koeffizient b_ξ , $\xi = \xi_{0002}$, nur in der Menge \mathcal{M} enthalten ist, falls ξ auf dem Rand von Δ liegt, genügt es die Reproduktionseigenschaft für den Koeffizienten $b_\xi \in \mathcal{M}$, $\xi = \xi_{0011}$, zu zeigen. Falls die Reproduktionseigenschaft für diesen Koeffizienten erfüllt ist, so folgt auf Grund der C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen direkt die Reproduktionseigenschaft der Koeffizienten b_ξ , $\xi = \xi_{0002}$, im Inneren von Δ und mit (6.9) somit auch für alle Koeffizienten b_ξ , $\xi = \xi_{0002}$. Wir wenden nun eine mögliche Datenpunktordnung für die Datenpunkte der drei Truncated Octahedrons mit gemeinsamer Kante $[v_2, v_3]$ bezüglich des Domain-Points $\xi = \xi_{0011}$ des Tetraeders T an und erhalten

$$\begin{array}{lll}
 z_0^A = (h, h, h), & z_1^A = (0, 0, 0), & z_2^A = (2h, 0, 0), \\
 z_3^A = (0, 2h, 0), & z_4^A = (2h, 2h, 0), & z_5^A = (0, 0, 2h), \\
 z_6^A = (2h, 0, 2h), & z_7^A = (2h, 2h, 2h), & z_8^A = (0, 2h, 2h), \\
 z_0^B = (0, 0, 0), & z_1^B = (h, h, h), & z_2^B = (h, h, -h), \\
 z_3^B = (h, -h, h), & z_4^B = (h, -h, -h), & z_5^B = (-h, h, h), \\
 z_6^B = (-h, h, -h), & z_7^B = (-h, -h, h), & z_8^B = (-h, -h, -h), \\
 z_0^C = (2h, 0, 0), & z_1^C = (h, h, h), & z_2^C = (h, h, -h), \\
 z_3^C = (h, -h, h), & z_4^C = (h, -h, -h), & z_5^C = (3h, h, h), \\
 z_6^C = (3h, h, -h), & z_7^C = (3h, -h, h), & z_8^C = (3h, -h, -h).
 \end{array}$$

Hier bezeichnet \mathcal{A} das in (h, h, h) zentrierte Truncated Octahedron der Größe h , während \mathcal{B} und \mathcal{C} die in $(0, 0, 0)$ bzw. $(2h, 0, 0)$ zentrierten Truncated Octahedrons der Größe h bezeichnet. Wir zeigen nun, dass der Koeffizient b_ξ , $\xi = \xi_{0011}$, des Splines $Q(p)$ bezüglich T für $p \in \{x, y, z\}$ identisch mit dem Koeffizienten von p in seiner

Bernstein-Bézier-Darstellung bezüglich T ist. Seien $p_1(x, y, z) := x$, $p_2(x, y, z) := y$ und $p_3(x, y, z) := z$ gegeben in ihrer Bernstein-Bézier-Darstellung bezüglich T . Wie in Lemma 6.4 ergeben sich die folgenden Werte für die Koeffizienten $b_{0011}^{[i]}$, $i = 1, 2, 3$:

$$b_{0011}^{[1]} = h, \quad b_{0011}^{[2]} = \frac{3}{8}h \quad \text{und} \quad b_{0011}^{[3]} = \frac{1}{8}h.$$

Einfaches Einsetzen der Werte der Funktionen p_i , $i = 1, 2, 3$, an den obigen Datenpunkten in die Formel (6.9) für den Koeffizienten b_{0011} zeigt nun die exakte Reproduktion der Koeffizienten $b_{0011}^{[i]}$ für $i = 1, 2, 3$.

Auch die Reproduktion quadratischer Polynome kann analog gezeigt werden. Mit der Reproduktion linearer Polynome und der Linearität von Q ist die Reproduktion erneut unabhängig von der Wahl des Ursprungs. Ein Vergleich der in (6.9) berechneten Koeffizienten b_{0011} für $Q(p)$, wobei $p \in \{xy, xz, yz, x^2, y^2, z^2\}$, mit den Koeffizienten $b_{0011}^{[p]}$ der Polynome p in ihrer Bernstein-Bézier-Darstellung bezüglich T zeigt nun, dass gilt $b_{0011} = b_{0011}^{[p]}$. Damit folgt dann auch $Q(p) \equiv p$ für alle $p \in \mathcal{P}_2$.

□

Das nächste wichtige Resultat zeigt, dass der Operator Q beschränkt ist. Dies garantiert auch die stabile Berechnung des resultierenden Splines. Hier, wie auch im Folgenden verwenden wir die Maximumsnorm

$$\|f\|_{\Gamma} := \max_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|,$$

wobei Γ ein Gebiet im \mathbb{R}^3 und f eine stetige Funktion auf Γ ist.

Lemma 6.17 (Beschränktheit)

Seien $f \in C(\Omega^*)$ und $T = [v_0, v_1, v_2, v_3] \in \Delta$. Dann gilt

$$\|Q(f)\|_T \leq \frac{3}{2} \|f\|_{\Omega_T},$$

wobei Ω_T der in v_3 zentrierte Würfel mit Kantenlänge $2h$ ist.

Beweis: Da Ω_T alle Datenpunkte enthält, die zur Berechnung der Koeffizienten b_{ξ} , $\xi \in \mathcal{D}_T$, in (6.9) benötigt werden, gilt

$$|b_{\xi}| \leq \max\left\{1, \frac{47}{32}, \frac{23}{16}, \frac{11}{8}, \frac{3}{2}\right\} \|f\|_{\Omega_T}.$$

Auf Grund der Nicht-Negativität der Bernstein-Polynome und Satz 2.10(i) folgt

$$\|Q(f)\|_T \leq \max\{|b_{\xi}| : \xi \in \mathcal{D}_T\},$$

und der Beweis ist vollständig.

□

6.4.3. Approximationseigenschaften

In diesem Unterabschnitt untersuchen wir die Approximationseigenschaften des Splines $Q(f)$ für die Werte und Ableitungen einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion f auf Ω . Wir verwenden dabei die gleiche Notation wie in den vorherigen Unterabschnitten und zeigen, dass der Operator Q die optimale Approximationsordnung besitzt.

Für die Norm der Ableitungen von differenzierbaren Funktionen verwenden wir im Folgenden

$$\|D^r(f)\|_{\Gamma} := \max\{\|D_x^{\alpha}D_y^{\beta}D_z^{\gamma}(f)\|_{\Gamma} : \alpha + \beta + \gamma = r\}.$$

Hier ist Γ ein Gebiet im \mathbb{R}^3 und f eine r -mal stetig differenzierbare Funktion auf Γ .

Satz 6.18 (Approximationsordnung)

Seien $f \in C^3(\Omega^*)$ und $Q(f)$ der in (6.9) definierte Spline bezüglich f , so gilt

$$\|D^r(f - Q(f))\|_{\Omega} \leq C\|D^3(f)\|_{\Omega^*}h^{3-r}, \quad r = 0, 1, 2,$$

wobei $C > 0$ eine von f und h unabhängige Konstante ist.

Beweis: Seien $f \in C^3(\Omega^*)$, $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ ein beliebiger Tetraeder in Δ mit Eckpunkten wie in Abschnitt 6.1 beschrieben, Ω_T wie in Lemma 6.17 definiert und $p_f \in \mathcal{P}_2$ das quadratische Taylorpolynom von f in v_3 . Es existiert eine Konstante $C_T > 0$ unabhängig von f und h , so dass gilt

$$\|D^r(f - p_f)\|_{\Omega_T} \leq C_T\|D^3(f)\|_{\Omega_T}h^{3-r}, \quad r = 0, 1, 2.$$

Weiterhin folgt mit der Dreiecksungleichung, dass gilt

$$\|D^r(f - Q(f))\|_T \leq \|D^r(f - p_f)\|_{\Omega_T} + \|D^r(Q(f) - p_f)\|_T, \quad r = 0, 1, 2.$$

Mit Lemma 6.16 und der Linearität von Q erhalten wir für $r = 0, 1, 2$,

$$\|D^r(Q(f) - p_f)\|_T = \|D^r(Q(f - p_f))\|_T.$$

Nun verwenden wir die Markov-Ungleichung für trivariate Polynome sowie Korollar 6.17 und erhalten

$$\|D^r(Q(f - p_f))\|_T \leq \frac{C_M}{h^r}\|Q(f - p_f)\|_T \leq \frac{C_M}{h^r}\frac{3}{2}\|f - p_f\|_{\Omega_T}, \quad r = 0, 1, 2,$$

wobei $C_M > 0$ eine von f und h unabhängige Konstante ist. Durch Kombination dieser Ungleichungen erhalten wir

$$\|D^r(f - Q(f))\|_T \leq C\|D^3(f)\|_{\Omega_T}h^{3-r}, \quad r = 0, 1, 2,$$

wobei $C = (1 + \frac{3}{2}C_M)C_T$ eine von f und h unabhängige Konstante ist. □

6.4.4. Numerische Tests

Wir bestätigen in diesem Unterabschnitt die Approximationseigenschaften des Splines $s_f = Q(f)$, indem wir numerische Tests mit Hilfe differenzierbarer Testfunktionen f durchführen. Die Ergebnisse des Unterabschnitts 6.4.3 zur Approximationsordnung dieses Operatores werden dabei bestätigt. Wir verwenden zur Berechnung der Splines die Werte der Funktionen f an den Gitterpunkten $v \in \mathcal{V}$ wie in Unterabschnitt 6.4.1. und untersuchen das Verhalten des Approximationsfehlers für die Werte und die ersten partiellen Ableitungen in x von f bei sukzessiver Verfeinerung von \mathcal{V} bzw. der Partition Δ .

In Tabelle 6.7 geben wir den Approximationsfehler des Splines s_f zu den Werten der Testfunktionen f an und in Tabelle 6.8 den Approximationsfehler zu den ersten partiellen Ableitungen in x der Testfunktionen f . Es werden dabei die gleichen Testfunktionen f wie bereits in Unterabschnitt 6.2.4 verwendet, d.h. die *blob*-Funktion f_{blob} , *Frankes* trivariate Testfunktion f_{fr} und die *Marschner-Lobb*-Funktion f_{ml} . Es wird der diskrete Fehler an den Gitterpunkten err_{data} , der maximale Fehler err_{max} , der mittlere Fehler err_{mean} sowie der mittlere quadratische Fehler err_{rms} untersucht. Das Konvergenzverhalten der Approximationsfehler veranschaulichen wir für die Marschner-Lobb-Funktion in den Abbildungen 6.16 und 6.17. Die Werte für den Approximationsfehler in Tabelle 6.7 zeigen, dass die Approximationsfehler von allen Testfunktionen bei jeder Verfeinerung der Partition von h zu $h/2$ um den Faktor acht sinken. Dies bestätigt die optimale Approximationsordnung des Operators Q (siehe Satz 6.18 für $r = 0$). In Tabelle 6.8 sinken die Approximationsfehler der ersten partiellen Ableitungen in x immer um den Faktor vier bei Verfeinerung der Partition von h zu $h/2$. Damit wird auch das Ergebnis von Satz 6.18 für $r = 1$ bestätigt.

Es ist wohl bekannt, dass das BCC-Grid nach dem Abtasttheorem von Shannon (siehe [80]) ein optimales Sampling-Grid im 3D darstellt und in dieser Hinsicht dem kubischen Gitter vorzuziehen ist. Aus Approximationstheoretischer Sicht bedeutet dies, dass auch mit einer reduzierten Datenmenge auf dem BCC-Grid eine gleich gute Approximation wie auf dem kubischen Gitter erreicht werden kann. Zusätzlich besitzt das BCC-Grid einen höheren Grad an Symmetrie und einige wichtige topologische Eigenschaften, die sich auch in der Struktur der Truncated Octahedron Partition widerspiegeln. Daher möchten wir an dieser Stelle die Möglichkeit aufzeigen, in eine Truncated Octahedron Partition neben dem BCC-Grid auch viele andere aus der Kristallographie bekannte Gitter einzubetten und unter Verwendung der in diesem Kapitel vorgestellten Techniken einen Quasi-Interpolationsoperator zu entwickeln.

6. Quasi-Interpolation auf Truncated Octahedron Partitionen

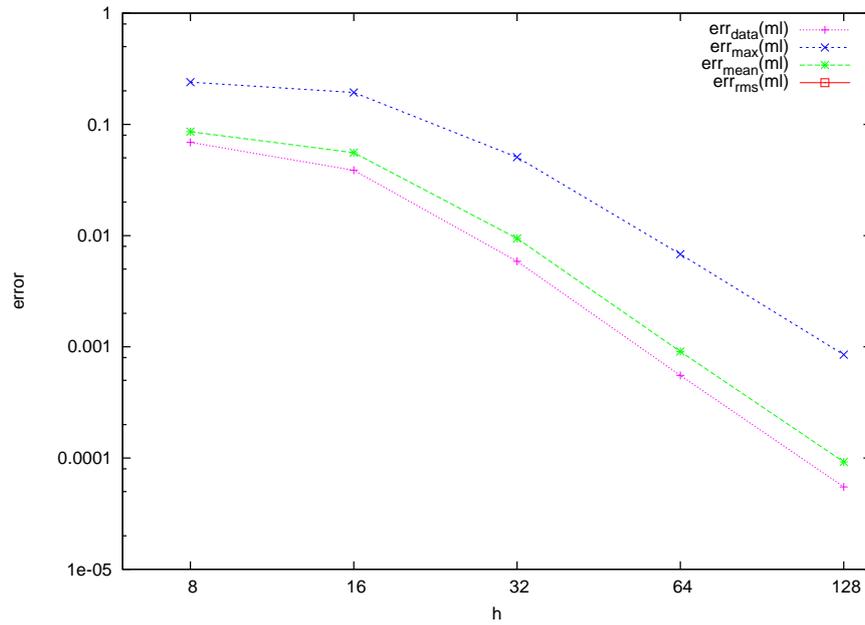


Abbildung 6.16.: log-log-Auftragung des Approximationsfehlers der Werte der Marschner-Lobb-Funktion bei Verfeinerung der Partition.

$1/h$	err_{data}^{blob}	err_{max}^{blob}	err_{mean}^{blob}	err_{rms}^{blob}
8	0	2.20×10^{-2}	2.69×10^{-3}	4.25×10^{-3}
16	0	2.40×10^{-3}	3.14×10^{-4}	4.74×10^{-4}
32	0	2.85×10^{-4}	3.76×10^{-5}	5.60×10^{-5}
64	0	3.48×10^{-5}	4.56×10^{-6}	6.92×10^{-6}
128	0	4.30×10^{-6}	5.74×10^{-7}	8.65×10^{-7}

$1/h$	err_{data}^{fr}	err_{max}^{fr}	err_{mean}^{fr}	err_{rms}^{fr}
8	0	1.11×10^{-1}	3.86×10^{-3}	9.64×10^{-3}
16	0	1.36×10^{-2}	4.84×10^{-4}	1.18×10^{-3}
32	0	1.44×10^{-3}	5.69×10^{-5}	1.35×10^{-4}
64	0	1.70×10^{-4}	6.98×10^{-6}	1.63×10^{-5}
128	0	2.07×10^{-5}	8.61×10^{-7}	2.03×10^{-6}

$1/h$	err_{data}^{ml}	err_{max}^{ml}	err_{mean}^{ml}	err_{rms}^{ml}
8	0	2.40×10^{-1}	6.88×10^{-2}	8.60×10^{-2}
16	0	1.94×10^{-1}	3.86×10^{-2}	5.57×10^{-2}
32	0	5.07×10^{-2}	5.87×10^{-3}	9.42×10^{-3}
64	0	6.81×10^{-3}	5.53×10^{-4}	9.06×10^{-4}
128	0	8.49×10^{-4}	5.49×10^{-5}	9.22×10^{-5}

Tabelle 6.7.: Approximationsfehler.

6.4. Interpolation auf dem BCC-Grid

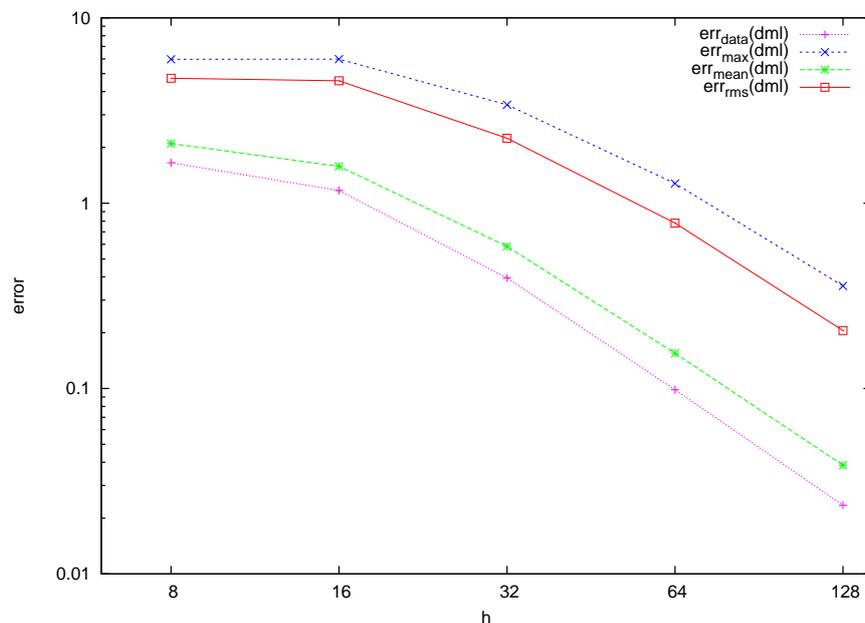


Abbildung 6.17.: log-log-Auftragung des Approximationsfehlers der ersten partiellen Ableitung in x der Marschner-Lob-Funktion bei Verfeinerung der Partition.

$1/h$	$\text{err}_{\text{data}}^{D_x(\text{blob})}$	$\text{err}_{\text{max}}^{D_x(\text{blob})}$	$\text{err}_{\text{mean}}^{D_x(\text{blob})}$	$\text{err}_{\text{rms}}^{D_x(\text{blob})}$
8	3.41×10^{-1}	4.49×10^{-1}	4.90×10^{-2}	7.76×10^{-2}
16	9.64×10^{-2}	1.38×10^{-1}	1.42×10^{-2}	2.23×10^{-2}
32	2.48×10^{-2}	3.72×10^{-2}	3.75×10^{-3}	5.86×10^{-3}
64	6.25×10^{-3}	9.44×10^{-3}	9.64×10^{-4}	1.50×10^{-3}
128	1.57×10^{-3}	2.37×10^{-3}	2.44×10^{-4}	3.77×10^{-4}

$1/h$	$\text{err}_{\text{data}}^{D_x(\text{fr})}$	$\text{err}_{\text{max}}^{D_x(\text{fr})}$	$\text{err}_{\text{mean}}^{D_x(\text{fr})}$	$\text{err}_{\text{rms}}^{D_x(\text{fr})}$
8	1.30405	1.64636	6.61×10^{-2}	1.48×10^{-1}
16	4.60×10^{-1}	6.11×10^{-1}	2.05×10^{-2}	4.89×10^{-2}
32	1.26×10^{-1}	1.75×10^{-1}	5.64×10^{-3}	1.37×10^{-3}
64	3.23×10^{-2}	4.60×10^{-2}	1.47×10^{-3}	3.59×10^{-3}
128	8.12×10^{-3}	1.16×10^{-2}	3.77×10^{-4}	9.15×10^{-4}

$1/h$	$\text{err}_{\text{data}}^{D_x(\text{ml})}$	$\text{err}_{\text{max}}^{D_x(\text{ml})}$	$\text{err}_{\text{mean}}^{D_x(\text{ml})}$	$\text{err}_{\text{rms}}^{D_x(\text{ml})}$
8	4.71704	5.97206	1.65160	2.09770
16	4.57226	5.97972	1.16968	1.58010
32	2.23948	3.39394	0.39483	0.58403
64	0.78144	1.27763	0.09853	0.15490
128	0.20548	0.35780	0.02350	0.03858

Tabelle 6.8.: Approximationsfehler der ersten partiellen Ableitung in x .

7. Lokale Lagrange-Interpolation auf Typ-6 Partitionen Δ_6

In diesem Kapitel beschreiben wir eine Methode zur lokalen Lagrange-Interpolation mit quintischen C^1 -Splines auf Typ-6 Partitionen Δ_6 . Wir verwenden dabei als Grundlage das Prioritätsprinzip zur lokalen Bestimmung der Splines (siehe [13],[64],[63],[66],[67],[69] und [70]). Die Idee des trivariaten Prioritätsprinzips ist es, grob gesprochen eine Tetraeder-Partition in Klassen von Tetraedern einzuteilen und einen Spline nacheinander auf den Tetraedern der einzelnen Klassen zu bestimmen, wobei Differenzierbarkeitsbedingungen über gemeinsame Eckpunkte, Kanten und Dreiecksseiten mit Tetraedern schon bestimmter Klassen berücksichtigt werden. Tetraeder, in denen durch die induzierten Differenzierbarkeitsbedingungen die Koeffizienten überbestimmt wären, werden mit einem vom gewählten Splinegrad abhängigen und aus der Theorie der Makro-Element-Methoden bekannten Split weiter unterteilt (siehe [43],[44] und [68]). Bei der Auswahl der Tetraederklassen wird dabei darauf geachtet, dass die Bestimmung des Splines möglichst lokal verläuft, d.h. dass zur Bestimmung eines Splines auf einem Tetraeder T nur Daten in einer Umgebung von T benötigt werden. Insbesondere auf gleichmäßigen Partitionen konnten so bereits sehr effiziente Klasseneinteilungen und Interpolationsmethoden beschrieben werden (siehe [42] und [61]). Wir stellen nun erstmals eine lokale Lagrange-Interpolationsmethode vor, die auf diesem Prinzip beruht und keine weitere Unterteilung der Tetraeder der zu Grunde liegenden Partition erfordert. Dazu zeigen wir zunächst, dass Δ_6 als gleichmäßige Oktaeder-Partition aufgefasst werden kann. Die spezielle Eigenschaft eines Oktaeders für quintische C^1 -Splines liegt darin, dass auch, wenn von allen Seiten des Oktaeders Differenzierbarkeitsbedingungen induziert werden, keine Überbestimmung der Koeffizienten bezüglich dieses Oktaeders auftritt. Dies ermöglicht uns Δ_6 in Klassen von Oktaedern einzuteilen und eine Interpolationsmenge zur lokalen Bestimmung eines C^1 -Splines anzugeben, ohne einzelne Tetraeder von Δ_6 weiter zu unterteilen.

In Abschnitt 7.1 beschreiben wir die Typ-6 Partition Δ_6 und untersuchen quintische C^1 -Splines auf einem speziellen Superspliner Raum $\mathcal{S}(\Delta_6)$. Abschnitt 7.2 enthält

7. Lokale Lagrange-Interpolation auf Typ-6 Partitionen Δ_6

dann die Einteilung in Klassen von Oktaedern sowie eine Untersuchung der Gemeinsamkeiten der Elemente dieser Klassen. In Abschnitt 7.3 geben wir eine Lagrange-Interpolationsmenge für den Raum $\mathcal{S}(\Delta_6)$ an und zeigen, dass ein so bestimmter Spline $s \in \mathcal{S}(\Delta_6)$ lokal, stabil und in linearer Komplexität berechnet werden kann. Abschließend zeigen wir in Abschnitt 7.4, dass diese Interpolationsmethode auch die optimale Approximationsordnung besitzt.

7.1. Der Superspliner Raum $\mathcal{S}(\Delta_6)$

In diesem Abschnitt untersuchen wir spezielle C^1 -Splines auf der Typ-6 Partition Δ_6 . Wir zeigen, wie Δ_6 als Oktaederpartition aufgefasst werden kann und führen eine für die folgenden Abschnitte notwendige genaue Beschreibung für die Elemente dieser Partition ein. Weiter definieren wir einen speziellen Superspliner Raum $\mathcal{S}(\Delta_6)$ bezüglich dieser Partition und analysieren die auftretenden Differenzierbarkeitsbedingungen. Abschließend bestimmen wir die Dimension dieses Raums.

Sei \diamond die gleichmäßige Würfelpartition des Einheitswürfels $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$. Wir erhalten \diamond definiert durch

$$\diamond := \{Q_{(i,j,k)} : Q_{(i,j,k)} = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] \times \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], i, j, k = 1, \dots, n\},$$

indem wir Ω in jeder der 3 Raumrichtungen mit $n-1$ parallelen Ebenen schneiden. Wir erzeugen nun eine Tetraeder-Partition Δ_6 von \diamond , indem wir jeden Würfel $Q_{(i,j,k)} \in \diamond$, $i, j, k = 1, \dots, n$, mit dem trivariaten S_1 -Split (siehe Definition 4.7 in Abschnitt 4.2) in 24 Tetraeder unterteilen. Daher ist diese Partition auch als 24er-Zerlegung bekannt. In der Literatur wird Δ_6 häufig auch als Typ-6 Partition bezeichnet, da diese Unterteilung auch erreicht wird, indem jeder Würfel $Q_{(i,j,k)}$, $i, j, k = 1, \dots, n$, mit den 6 Ebenen $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6 \subset \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\begin{aligned} L_1 : x - y &= \frac{i-j}{n}, & L_2 : x - z &= \frac{i-k}{n}, & L_3 : y - z &= \frac{j-k}{n}, \\ L_4 : x + y &= \frac{i-j+1}{n}, & L_5 : x + z &= \frac{i-k+1}{n}, & L_6 : y + z &= \frac{j-k+1}{n}, \end{aligned}$$

geschnitten wird. Es ist leicht ersichtlich, dass wir auf diese Weise auf jeder der $(n+1)$ parallelen xy -, xz - und yz -Ebenen sowie auf allen Schnittebenen L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 und L_6 eine bivariate Δ_2 -Triangulierung (siehe Abschnitt 4.1) erhalten. Damit stellt die Typ-6 Partition eine natürliche, trivariate Verallgemeinerung dieser bekannten, gleichmäßigen bivariaten Partition dar. Dies ist ein zu erwartender Zusammenhang, da auch die Δ_2 -Triangulierung konstruiert werden kann, indem auf jedem Quadrat einer gleichmäßigen Viereckspartition der bivariate S_1 -Split angewandt wird.

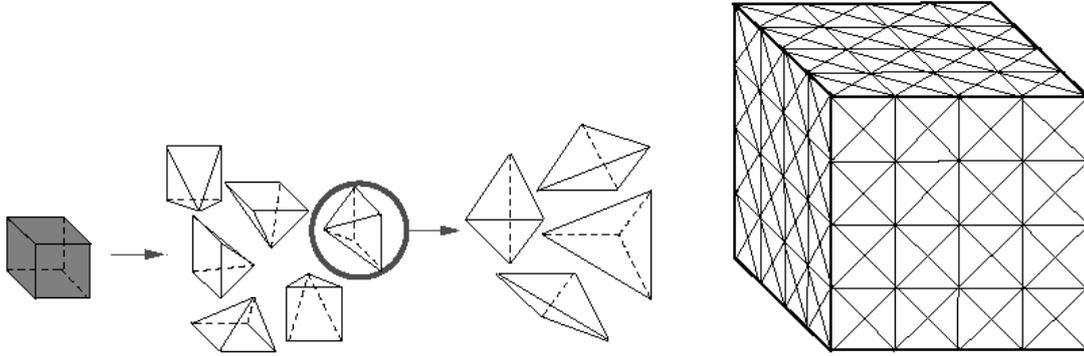


Abbildung 7.1.: Die Typ-6 Partition oder 24er-Zerlegung Δ_6 . Jeder Würfel einer gleichmäßigen Würfelpartition ist in 6 regelmäßige Pyramiden mit quadratischer Grundfläche und gemeinsamer Spitze im Mittelpunkt des Würfels unterteilt. Jede dieser Pyramiden wiederum besteht aus vier Tetraedern, welche die Pyramidenachse als gemeinsame Kante besitzen. Auf diese Weise entsteht eine Unterteilung jedes Würfels in 24 Tetraeder (links). Durch diese Konstruktion entsteht auf jeder der Schnittebenen von Δ_6 eine bivariate Δ_2 -Triangulierung (rechts). Jeweils zwei Pyramiden in benachbarten Würfeln ergeben zusammen einen Oktaeder.

Betrachten wir nun die Knoten $v_{ijk}^x := (\frac{i}{n}, \frac{2j-1}{2n}, \frac{2k-1}{2n})$ für $i = 0, \dots, n$ und $j, k = 1, \dots, n$. Dies sind die Mittelpunkte der Quadrate auf den Δ_2 -Partitionen der $(n+1)$ parallelen yz -Ebenen. Es sei weiter $O_{ijk}^x := \text{star}^1(v_{ijk}^x)$ für $i = 0, \dots, n$ und $j, k = 1, \dots, n$. Für $i = 1, \dots, (n-1)$ besteht O_{ijk}^x , $j, k = 1, \dots, n$, jeweils aus acht Tetraedern mit gemeinsamem Eckpunkt v_{ijk}^x , die einen Oktaeder bilden. Dies ist jedoch kein regulärer Oktaeder (siehe Definition 4.4), da die inneren Kanten zwei unterschiedliche Längen besitzen und damit die Seitenflächen des Oktaeders keine regulären Dreiecke sind. Wir sagen, die Oktaeder O_{ijk}^x besitzen eine *Basis* parallel zur yz -Ebene und eine *Achse* in x -Richtung, deren Endpunkte wir als *Spitzen* des Oktaeders bezeichnen. Für $i \in \{0, n\}$ besteht O_{ijk}^x , $j, k = 1, \dots, n$, jeweils aus vier Tetraedern, die einen Halboktaeder bzw. eine Pyramide bilden. Der gemeinsame Eckpunkt v_{ijk}^x liegt in diesem Fall auf dem Rand von Ω . Wir bezeichnen die Mengen der Oktaeder bzw. Halboktaeder in x -Richtung mit

$$\begin{aligned} X &:= \{O_{ijk}^x : i = 1, \dots, (n-1) \text{ und } j, k = 1, \dots, n\}, \\ \text{bzw. } \tilde{X} &:= \{O_{ijk}^x : i \in \{0, n\} \text{ und } j, k = 1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Analog definieren wir die Knoten v_{ijk}^y für $j = 0, \dots, n$ und $i, k = 1, \dots, n$ sowie v_{ijk}^z für $k = 0, \dots, n$ und $i, j = 1, \dots, n$. Ebenso wie die Oktaeder bzw. Halboktaeder O_{ijk}^y für $j = 0, \dots, n$ und $i, k = 1, \dots, n$ sowie O_{ijk}^z für $k = 0, \dots, n$ und $i, j = 1, \dots, n$.

7. Lokale Lagrange-Interpolation auf Typ-6 Partitionen Δ_6

Die entsprechenden Mengen der in y - und z -Richtung orientierten Oktaeder bzw. Halboktaeder bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} Y &:= \{O_{ijk}^y : j = 1, \dots, (n-1) \text{ und } i, k = 1, \dots, n\}, \\ \text{bzw. } \tilde{Y} &:= \{O_{ijk}^y : j \in \{0, n\} \text{ und } i, k = 1, \dots, n\}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

und

$$\begin{aligned} Z &:= \{O_{ijk}^z : k = 1, \dots, (n-1) \text{ und } i, j = 1, \dots, n\}, \\ \text{bzw. } \tilde{Z} &:= \{O_{ijk}^z : k \in \{0, n\} \text{ und } i, j = 1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Es ist nun leicht ersichtlich, dass $X \cup Y \cup Z \cup \tilde{X} \cup \tilde{Y} \cup \tilde{Z} \equiv \Delta_6$ gilt. Dies bedeutet, dass wir Δ_6 als Oktaeder-Partition $\mathcal{O} := X \cup Y \cup Z \cup \tilde{X} \cup \tilde{Y} \cup \tilde{Z}$ auffassen können, die aus ganzen Oktaedern im Inneren von Δ_6 und Halboktaedern am Rand von Δ_6 besteht. Zählen wir nun die Anzahl der Knoten V , der Kanten E und der Seitenflächen F von \mathcal{O} , so erhalten wir

$$\#V = 2n^3 + 3n^2 + 3n + 1, \quad \#E = 11n^3 + 6n^2 + 3n \quad \text{und} \quad \#F = 12n^3. \quad (7.4)$$

Weiterhin ergeben sich für die Anzahl der inneren Tetraeder T_I und äußeren Tetraeder T_B von Δ_6

$$\#T_I = 24n^3 - 24n^2 \quad \text{und} \quad \#T_B = 24n^2. \quad (7.5)$$

T_I sind hier die Tetraeder, die in Oktaedern im Inneren von \mathcal{O} liegen und T_B die Tetraeder, die in den Halboktaedern am Rand von \mathcal{O} liegen.

Im Folgenden untersuchen wir einen speziellen Raum quintischer Splines auf Δ_6 . Wir wissen aus Korollar 2.21 auf Seite 24, dass im Fall stetiger Splines die Dimension des stetigen Splineraums $\mathcal{S}_5^0(\Delta_6)$ gleich der Anzahl der Domain-Points $\mathcal{D}_{5, \Delta_6}$ von Δ_6 ist. Wir erhalten somit

$$\dim \mathcal{S}_5^0(\Delta_6) = 505n^3 + 150n^2 + 15n + 1.$$

Eine ausführliche Herleitung der Dimension von C^0 - und C^1 -Splines unterschiedlichen Grades auf Typ-6 Partitionen ist in [41] zu finden. Zur Untersuchung differenzierbarer Splines auf Δ_6 verwenden wir die in Abschnitt 2.1 vorgestellte stückweise Bernstein-Bézier-Darstellung bezüglich der Tetraeder $T \in \Delta_6$ und die folgende Notation. Innerhalb eines Oktaeders bezeichnen wir die Tetraeder $T = [v_0, v_1, v_2, v_3] \in \Delta_6$ mit T_1, \dots, T_8 bzw. mit T_1, \dots, T_4 im Falle eines Halboktaeders. Dabei wählen wir den Schwerpunkt der Basis des Oktaeders bzw. Halboktaeders stets als Eckpunkt v_0 und die Spitze der Achse als Eckpunkt v_3 . Die verbleibenden Eckpunkte v_1 und v_2 sind Eckpunkte der Basis und werden so gewählt, dass für zwei benachbarte Tetraeder T und \tilde{T} gilt $v_\nu = \tilde{v}_\nu$, $\nu \in \{1, 2\}$. Die jeweils dem Eckpunkt v_ν , $\nu = 0, \dots, 3$,

gegenüberliegende Dreiecksseite im Tetraeder bezeichnen wir mit F_ν . Auf diese Weise können wir nun die C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen eines Splines $s \in \mathcal{S}_5^1(\Delta_6)$ über die inneren Dreiecksseiten vom Typ F_0 beschreiben durch

$$\tilde{b}_{1,i,j,k} = \frac{1}{2}(b_{0,i+1,j,k} + b_{0,i,j+1,k}) + b_{0,i,j,k+1} - b_{1,i,j,k}, \quad (7.6)$$

wobei $i+j+k = 4$ und $b_\xi, \xi \in \mathcal{D}_T$, bzw. $\tilde{b}_\xi, \xi \in \mathcal{D}_{\tilde{T}}$, die Bernstein-Bézier-Koeffizienten von s bezüglich zweier benachbarter Tetraeder T bzw. \tilde{T} mit gemeinsamer Dreiecksfläche vom Typ F_0 sind. Die Differenzierbarkeitsbedingungen über die Dreiecksseiten vom Typ $F_\nu, \nu \in \{1, 2, 3\}$ degenerieren zu univariaten Bedingungen und lassen sich daher beschreiben durch

$$\tilde{b}_{i,1,j,k} = 2b_{i+1,0,j,k} - b_{i,1,j,k}, \quad (7.7a)$$

$$\tilde{b}_{i,j,1,k} = 2b_{i+1,j,0,k} - b_{i,j,1,k}, \quad (7.7b)$$

$$\tilde{b}_{i,j,k,1} = 2b_{i+1,j,k,0} - b_{i,j,k,1}, \quad (7.7c)$$

wobei $i + j + k = 4$ und $b_\xi, \xi \in \mathcal{D}_T$, bzw. $\tilde{b}_\xi, \xi \in \mathcal{D}_{\tilde{T}}$ die Bernstein-Bézier-Koeffizienten von s bezüglich zweier benachbarter Tetraeder T bzw. \tilde{T} mit gemeinsamer Dreiecksfläche vom Typ F_1 (7.7a), F_2 (7.7b) oder F_3 (7.7c) sind. Die C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen über die inneren Dreiecksflächen von Δ_6 werden durch die Gleichungen (7.6) und (7.7a-c) vollständig beschrieben. Im Folgenden bestimmen wir nun die Dimension des Supersplinerraums $\mathcal{S}(\Delta_6) := S_5^{1,1,2}(\Delta_6) \subset S_5^1(\Delta_6)$, wobei die C^1 -Splines $s \in \mathcal{S}(\Delta_6)$ C^2 -differenzierbar an den Eckpunkten von \mathcal{O} sind. Dabei verwenden wir ein Ergebnis von Lai und LeMéhauté (siehe [51]), welche die Dimension dieses Supersplinerraums auf reinen Oktaeder-Partitionen bestimmt haben und erweitern es um den Fall der am Rand von Ω auftretenden Halb-oktaeder.

Satz 7.1 (Dimension)

Sei Δ_6 eine Typ-6 Partition. Dann gilt für die Dimension des Supersplinerraums $\mathcal{S}(\Delta_6)$

$$\dim(\mathcal{S}(\Delta_6)) = 102n^3 + 114n^2 + 36n + 10. \quad (7.8)$$

Beweis: Wir betrachten zunächst die Oktaeder-Partition $\mathcal{O}_I := X \cup Y \cup Z$ und erhalten für die Dimension nach [51]

$$\dim(\mathcal{S}(\mathcal{O}_I)) = 10\#V + 2\#E + 3\#F + \#T_I. \quad (7.9)$$

Das bedeutet, es existiert eine minimal bestimmende Menge M mit Anzahl (7.9) Punkten, so dass alle Bernstein-Bézier-Koeffizienten eines Splines $s \in \mathcal{S}(\mathcal{O}_I)$ eindeutig bestimmt werden können. Seien nun $\mathcal{O}_B := \tilde{X} \cup \tilde{Y} \cup \tilde{Z}$, $O \in \mathcal{O}_B, T_1, \dots, T_4$

7. Lokale Lagrange-Interpolation auf Typ-6 Partitionen Δ_6

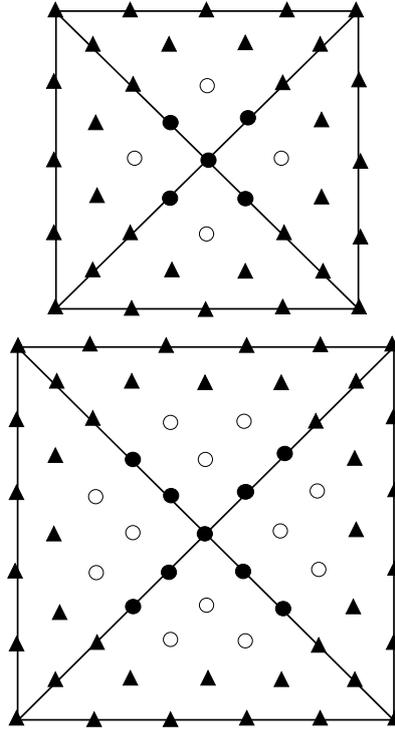


Abbildung 7.2.: Dargestellt sind die Domain-Points der Basis eines Halboktaeders (unten), und die Domain-Points in der darüber liegenden Schicht (oben).

die vier Tetraeder innerhalb von O , $M_\nu^O := \{\xi_{3,1,1,0}, \xi_{2,2,1,0}, \xi_{2,1,2,0}, \xi_{2,1,1,1}\} \subset \mathcal{D}_{T_\nu}$ für $\nu = 1, \dots, 4$ und $M^O := \cup_{\nu=1, \dots, 4} M_\nu^O$. Wir werden sehen, dass $M \cup M^O$ eine minimal bestimmende Menge für $\mathcal{S}(\mathcal{O}_I \cup O)$ ist. Seien die Koeffizienten b_ξ , $\xi \in M \cup M^O$ eines Splines $s \in \mathcal{S}(\mathcal{O}_I \cup O)$ gegeben. Da M eine minimal bestimmende Menge für den Raum $\mathcal{S}(\mathcal{O}_I)$ ist, ist s eindeutig auf \mathcal{O}_I bestimmt. Der Halboktaeder O besitzt genau 4 gemeinsame Seitenflächen mit Oktaedern aus \mathcal{O}_I . Durch die C^1 -Bedingungen (7.6) über die Seitenflächen vom Typ F_0 und die C^2 -Bedingungen an den Eckpunkten von O können nun die mit den Domain-Points $\xi_{ijkl} \in \mathcal{D}_{T_\nu}$, $i \geq 2, j, k, l \leq 2, \nu = 1, \dots, 4$, assoziierten Koeffizienten b_ξ eindeutig bestimmt werden. Durch die Koeffizienten b_ξ , $\xi \in M^O$, sind nun auch die Koeffizienten b_ξ , $\xi \in \{\xi_{4,0,1,0}, \xi_{3,0,2,0}, \xi_{3,0,1,1}\}$, durch die Bedingungen (7.7a) sowie die Koeffizienten b_ξ , $\xi \in \{\xi_{4,1,0,0}, \xi_{3,2,0,0}, \xi_{3,1,0,1}\}$, durch die Bedingungen (7.7b) in allen Tetraedern $T \in O$, eindeutig bestimmt. Da es sich bei $v_0 \in O$ um einen singulären Knoten handelt, sind schließlich auch die verbleibenden Koeffizienten b_ξ , $\xi \in \{\xi_{5,0,0,0}, \xi_{4,0,0,1}\}$, unter Beachtung der Bedingungen (7.7a) und (7.7b), in allen Tetraedern $T \in O$ bestimmt und nicht überbestimmt. Damit ist s unter Beachtung aller Differenzierbarkeitsbedingungen durch die Koeffizienten b_ξ , $\xi \in M \cup M^O$, auf $\mathcal{O}_I \cup O$ eindeutig bestimmt. Wählen wir nun die Punkte M^O

in allen Halboktaedern $O \in O_B$, so ist leicht zu sehen, dass wir eine minimal bestimmende Menge für den Raum $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ erhalten. Für die Dimension dieses Raums erhalten wir dann mit (7.9)

$$\dim(\mathcal{S}(\mathcal{O})) = 10\#V + 2\#E + 3\#F + \#T_I + 4\#T_B.$$

Mit (7.4) und (7.5) ergibt sich nun direkt die Behauptung. □

Die Reihenfolge, in der die Koeffizienten des Halboktaeders $O \in O_B$ im Beweis zu Satz 7.1 bestimmt werden, geht aus Abbildung 7.2 hervor. Die Punkte der Menge M^O sind durch weiße Kreise markiert. Domain-Points, deren assoziierte Koeffizienten durch C^1 -Bedingungen über die Seitenflächen und C^2 -Bedingungen an den Eckpunkten bestimmt werden, sind als schwarze Dreiecke dargestellt. Schwarze Kreise markieren schließlich die Punkte, deren assoziierte Koeffizienten durch die univariaten Bedingungen (7.7a) und (7.7b) sowie die Koeffizienten b_ξ , $\xi \in M^O$, bestimmt werden.

7.2. Oktaederklassen

Wir geben in diesem Abschnitt eine Einteilung der Oktaeder und Halboktaeder von \mathcal{O} in unterschiedliche Klassen an. Wir analysieren die Eigenschaften dieser speziellen Klasseneinteilung im Hinblick auf gemeinsame Eckpunkte, Kanten und Seitenflächen der Elemente unterschiedlicher Klassen.

Im vorherigen Abschnitt haben wir festgestellt, dass Δ_6 als Oktaeder-Partition $\mathcal{O} = X \cup Y \cup Z \cup \tilde{X} \cup \tilde{Y} \cup \tilde{Z}$ aufgefasst werden kann. Hier sind X , Y und Z , die in x -, y - und z -Richtung orientierten Oktaeder im Inneren von Δ_6 und \tilde{X} , \tilde{Y} und \tilde{Z} die in x -, y - und z -Richtung orientierten Halboktaeder am Rand von Δ_6 . Wir teilen nun zunächst die in x -Richtung orientierten Oktaeder X und Halboktaeder \tilde{X} in vier Klassen X_1 , X_2 , X_3 und X_4 bzw. \tilde{X}_1 , \tilde{X}_2 , \tilde{X}_3 und \tilde{X}_4 auf, indem wir für die Indizes i, j, k in (7.1) festlegen, ob sie gerade oder ungerade sind. Die eindeutige Zuordnung in die jeweils vier Klassen geht aus Tabelle 7.1 hervor. Offensichtlich gilt $X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 \equiv X$ und $X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4 \equiv \emptyset$, ebenso wie $\tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2 \cup \tilde{X}_3 \cup \tilde{X}_4 \equiv \tilde{X}$ und $\tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2 \cap \tilde{X}_3 \cap \tilde{X}_4 \equiv \emptyset$. Zählen wir nun noch die Anzahl der Elemente in diesen Klassen, so erhalten wir

$$\#X_1 = \#X_2 = \#X_3 = \#X_4 = \frac{1}{4}(n^3 - n^2) \quad (7.10)$$

7. Lokale Lagrange-Interpolation auf Typ-6 Partitionen Δ_6

Klasse	i	j	k
X_1, \tilde{X}_1	gerade	ungerade	ungerade
	ungerade	gerade	gerade
X_2, \tilde{X}_2	gerade	gerade	gerade
	ungerade	ungerade	ungerade
X_3, \tilde{X}_3	gerade	gerade	ungerade
	ungerade	ungerade	gerade
X_4, \tilde{X}_4	gerade	ungerade	gerade
	ungerade	gerade	ungerade

Tabelle 7.1.: Einteilung der in x-Richtung orientierten Oktaeder und Halboktaeder in jeweils 4 Klassen.

und

$$\#\tilde{X}_1 = \#\tilde{X}_2 = \#\tilde{X}_3 = \#\tilde{X}_4 = \frac{1}{2}n^2. \quad (7.11)$$

Hier, wie auch im Folgenden, gehen wir bei der Anzahl der Elemente in einer Klasse der Einfachheit halber davon aus, dass n gerade ist. Die Klasseneinteilung sowie die Wahl der Lagrange-Interpolationspunkte im folgenden Abschnitt ist aber unabhängig davon korrekt für gerades und ungerades n . Die gleichmäßige Verteilung der Oktaeder und Halboktaeder in den unterschiedlichen Klassen wird in Abbildung 7.3 veranschaulicht. Daraus ergeben sich die folgenden Eigenschaften für die Elemente dieser Klassen:

- Die Oktaeder und Halboktaeder der Klassen X_ν und \tilde{X}_ν sind paarweise disjunkt für $\nu \in \{1, \dots, 4\}$.
- Die Menge X_1 enthält alle Knoten, die im Inneren von Δ_6 liegen.
- Die Oktaeder der Klasse X_2 haben genau 6 Eckpunkte mit Elementen der Klassen X_1 und \tilde{X}_1 oder dem Rand von Δ_6 gemeinsam.
- Die Halboktaeder der Klasse \tilde{X}_2 haben genau 5 Eckpunkte mit Elementen der Klassen X_1 und \tilde{X}_1 oder dem Rand von Δ_6 gemeinsam.
- Die Oktaeder der Klasse X_3 haben genau die 4 Kanten ihrer Basis mit Oktaedern der Klassen X_1 und X_2 oder dem Rand von Δ_6 gemeinsam.

4	2	4	2
1	3	1	3
4	2	4	2
1	3	1	3

3	1	3	1
2	4	2	4
3	1	3	1
2	4	2	4

Abbildung 7.3.: Dargestellt ist die Verteilung der Elemente der X-Oktaederklassen in den $(n+1)$ yz-Ebenen $x = \frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, n$. Links ist die Verteilung in einer Schicht für gerades i und rechts die Verteilung in einer Schicht für ungerades i .

- Die Halboktaeder der Klasse \tilde{X}_3 haben genau die 4 Kanten ihrer Basis mit Halboktaedern der Klassen \tilde{X}_1 und \tilde{X}_2 oder dem Rand von Δ_6 gemeinsam.
- Die Oktaeder der Klasse X_4 haben genau die 4 Kanten ihrer Basis mit Oktaedern der Klassen X_1 und X_2 oder dem Rand von Δ_6 gemeinsam sowie 2 gemeinsame Eckpunkte an den Spitzen mit Elementen der Klassen X_3 oder \tilde{X}_3 .
- Die Halboktaeder der Klasse \tilde{X}_4 haben genau die 4 Kanten ihrer Basis mit Halboktaedern der Klassen \tilde{X}_1 und \tilde{X}_2 oder dem Rand von Δ_6 gemeinsam sowie einen gemeinsamen Eckpunkt an der Spitze mit einem Oktaeder der Klasse X_3 .

Als nächstes teilen wir nun die in y -Richtung orientierten Oktaeder Y und Halboktaeder \tilde{Y} in zwei Klassen Y_1 und Y_2 bzw. \tilde{Y}_1 und \tilde{Y}_2 auf, indem wir für die Indizes i, j, k in (7.2) festlegen, ob sie gerade oder ungerade sind. Die Mengen Y_1 und \tilde{Y}_1 enthalten die Oktaeder bzw. Halboktaeder, für deren Indizes gilt $(i + j + k)$ gerade und die Mengen Y_2 und \tilde{Y}_2 enthalten die Oktaeder bzw. Halboktaeder, für deren Indizes gilt $(i + j + k)$ ungerade. Für die Anzahl der Elemente in diesen Mengen erhalten wir dann

$$\#Y_1 = \#Y_2 = \frac{1}{2}(n^3 - n^2) \quad (7.12)$$

und

$$\#\tilde{Y}_1 = \#\tilde{Y}_2 = n^2. \quad (7.13)$$

Die Oktaeder dieser beiden Klassen besitzen die folgenden Eigenschaften:

- Die Oktaeder der Klassen Y_1 und Y_2 haben genau 4 Seitenflächen mit Elementen der Klassen X und \tilde{X} gemeinsam.

7. Lokale Lagrange-Interpolation auf Typ-6 Partitionen Δ_6

- Die Halboktaeder der Klassen \tilde{Y}_1 und \tilde{Y}_2 haben genau 2 Seitenflächen mit Elementen der Klassen X und \tilde{X} gemeinsam.
- Die Oktaeder bzw. Halboktaeder der Klassen Y_ν und \tilde{Y}_ν besitzen gemeinsame Eckpunkte oder sind disjunkt, $\nu \in \{1, 2\}$.
- Die Oktaeder der Klasse Y_2 haben genau die 4 Kanten ihrer Basis mit Oktaedern der Klasse Y_1 oder dem Rand von Δ_6 gemeinsam sowie 2 gemeinsame Eckpunkte an den Spitzen mit Elementen der Klassen Y_1 oder \tilde{Y}_1 .
- Die Halboktaeder der Klasse \tilde{Y}_2 haben genau die 4 Kanten ihrer Basis mit Halboktaedern der Klasse \tilde{Y}_1 oder dem Rand von Δ_6 gemeinsam sowie einen gemeinsamen Eckpunkt an der Spitze mit einem Oktaeder der Klasse Y_1 .

Die Oktaeder bzw. Halboktaeder der Klassen Z bzw. \tilde{Z} werden nicht weiter unterteilt und es gilt für die Anzahl der Elemente dieser Klassen

$$\#Z = n^3 - n^2 \quad \text{und} \quad \#\tilde{Z} = 2n^2. \quad (7.14)$$

Die Gemeinsamkeiten mit den Oktaedern bzw. Halboktaedern der anderen Klassen sind wie folgt:

- Die Oktaeder der Klasse Z haben genau 8 Seitenflächen mit Elementen der Klassen X , \tilde{X} , Y und \tilde{Y} gemeinsam.
- Die Halboktaeder der Klasse \tilde{Z} haben genau 4 Seitenflächen mit Elementen der Klassen X , \tilde{X} , Y und \tilde{Y} gemeinsam.

7.3. Lagrange-Interpolationsmenge

In diesem Abschnitt geben wir eine Lagrange-Interpolationsmenge für den Raum $\mathcal{S}(\Delta_6)$ an. Die Interpolationspunkte wählen wir dabei als Teilmenge der Domain-Points \mathcal{D}_{Δ_6} von Δ_6 . Für jede der im vorherigen Abschnitt definierten Oktaederklassen geben wir an, welche Interpolationspunkte gewählt werden. Abschließend beweisen wir unser Hauptresultat, dass es sich bei den so gewählten Punkten um eine Lagrange-Interpolationsmenge handelt. Wir zeigen dabei insbesondere, dass die so beschriebene Interpolationsmethode stabil, lokal und linear in ihrer Komplexität ist.

Wir geben zunächst die Wahl der Punkte in den Oktaedern der Klassen $X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2$ und Z an. Dazu bezeichnen wir die acht Tetraeder in diesen Oktaedern

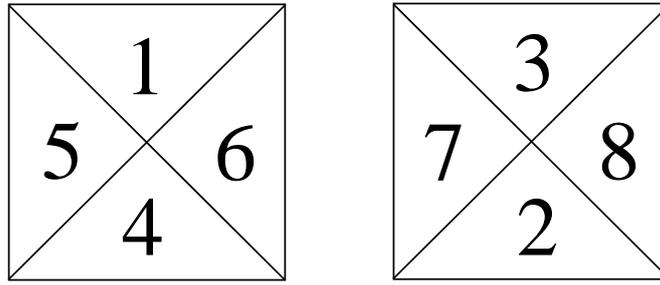


Abbildung 7.4.: Lage der Tetraeder T_1, \dots, T_8 in der oberen Hälfte (links) und unteren Hälfte (rechts) eines Oktaeders.

mit T_1, \dots, T_8 unter Beachtung der folgenden Regeln. Die Tetraeder T_1 und T_2 liegen einander gegenüber, d.h. sie besitzen nur einen gemeinsamen Eckpunkt im Schwerpunkt des Oktaeders. Die Basis eines Oktaeders teilt diesen in zwei Hälften mit je vier Tetraedern. Wir nennen nun die vier Tetraeder auf der Seite von T_1 die obere Hälfte des Oktaeders und die vier Tetraeder auf der Seite von T_2 die untere Hälfte des Oktaeders. Der Tetraeder T_3 wird nun in der oberen Hälfte so gewählt, dass er genau eine gemeinsame Kante mit T_1 besitzt. Analog wählen wir T_4 in der unteren Hälfte so, dass er genau eine gemeinsame Kante mit T_2 besitzt. Die verbleibenden zwei Tetraeder in der oberen Hälfte bezeichnen wir weiter mit T_5 und T_6 sowie die verbleibenden zwei Tetraeder in der unteren Hälfte mit T_7 und T_8 . Abbildung 7.4 zeigt eine mögliche Bezeichnung der Tetraeder innerhalb eines Oktaeders.

Die Eckpunkte eines Tetraeder bezeichnen wir wie auch in Abschnitt 7.1 stets mit v_0, \dots, v_3 , so dass v_0 im Schwerpunkt des Oktaeders liegt und v_3 an einer der Spitzen des Oktaeders. Die Eckpunkte v_1 und v_2 sind dann Eckpunkte der Basis des Oktaeders und werden so gewählt, dass für zwei benachbarte Tetraeder $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ und $\tilde{T} = [\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3]$ gilt $v_1 = \tilde{v}_1$ und $v_2 = \tilde{v}_2$. Diese Notation ermöglicht uns im Folgenden eine einfache Beschreibung der Punktmenge innerhalb der Tetraeder. In den acht Tetraedern eines Oktaeders der Menge X_1 werden nun die folgenden Punktmenge gewählt:

$$\begin{aligned}
 M_1^{X_1} &:= \mathcal{D}_{T_1}, \\
 M_2^{X_1} &:= \{\xi_{ijkl} \in \mathcal{D}_{T_2} : i \leq 3\} \setminus \{\xi_{3110}, \xi_{3101}, \xi_{3011}, \xi_{2111}\}, \\
 M_\nu^{X_1} &:= \{\xi_{0122}, \xi_{0212}, \xi_{1202}, \xi_{1022}\} \subset \mathcal{D}_{T_\nu}, \quad \nu \in \{3, 4\}, \\
 M_\nu^{X_1} &:= \{\xi_{1220}, \xi_{0221}\} \subset \mathcal{D}_{T_\nu}, \quad \nu \in \{5, 6\}, \\
 M_\nu^{X_1} &:= \emptyset, \quad \nu \in \{7, 8\}.
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

Hier beschreibt $M_\nu^{X_1}$ die Teilmenge von Domain-Points, die in dem Tetraeder T_ν , $\nu \in \{1, \dots, 8\}$, gewählt werden. In Abbildung 7.5 auf Seite 160 werden die Punkte dieser

7. Lokale Lagrange-Interpolation auf Typ-6 Partitionen Δ_6

Mengen durch weiße Kreise, Quadrate, Dreiecke und Rauten dargestellt. Analog können wir nun die Punktmenge angeben, die in den Tetraedern innerhalb eines Oktaeders der Menge X_2 , X_3 bzw. X_4 gewählt werden:

$$M_\nu^{X_2} := M_\nu^{X_1} \setminus \{\xi_{ijkl} \in \mathcal{D}_{T_\nu} : j, k, l \geq 3\}, \quad \nu \in \{1, \dots, 8\}, \quad (7.16)$$

$$M_\nu^{X_3} := M_\nu^{X_1} \setminus \{\xi_{ijkl} \in \mathcal{D}_{T_\nu} : j, k \geq 3 \wedge j = k = 2\}, \quad \nu \in \{1, \dots, 8\}, \quad (7.17)$$

$$M_\nu^{X_4} := M_\nu^{X_3} \setminus \{\xi_{ijkl} \in \mathcal{D}_{T_\nu} : l \geq 3\}, \quad \nu \in \{1, \dots, 8\}. \quad (7.18)$$

Die Punktmenge innerhalb der Tetraeder der Klasse Y_1 wählen wir nun als

$$\begin{aligned} M_\nu^{Y_1} &:= M_\nu^{X_2} \setminus \{\{\xi_{ijkl} \in \mathcal{D}_{T_\nu} : i \leq 1\} \cup \{\xi_{2210}, \xi_{2120}, \xi_{2102}\}\}, \quad \nu \in \{1, 2\}, \\ M_\nu^{Y_1} &:= M_\nu^{X_2} \setminus \{\xi_{ijkl} \in \mathcal{D}_{T_\nu} : i \leq 1\}, \quad \nu \in \{3, 4\}, \\ M_\nu^{Y_1} &:= M_\nu^{X_2}, \quad \nu \in \{5, \dots, 8\}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

und die Punktmenge innerhalb der Tetraeder der Klasse Y_2 als

$$M_\nu^{Y_2} := M_\nu^{Y_1} \setminus \{\xi_{ijkl} \in \mathcal{D}_{T_\nu} : j = k = 2\}, \quad \nu \in \{1, \dots, 8\}. \quad (7.20)$$

In den Klassen Y_1 und Y_2 muss jedoch darauf geachtet werden, dass der Tetraeder T_1 stets so gewählt wird, dass er eine gemeinsame Seitenfläche mit einem Oktaeder aus X bzw. einem Halboktaeder aus \tilde{X} besitzt. Bei den Tetraedern der Klasse Z werden lediglich im Tetraeder T_1 die folgenden Punkte gewählt

$$M_1^Z := \{\xi_{ijkl} \in \mathcal{D}_{T_1} : i \geq 4\} \cup \{\xi_{3110}, \xi_{3101}, \xi_{3011}, \xi_{2111}\}, \quad (7.21)$$

d.h. für die restlichen Tetraeder gilt $M_\nu^Z := \emptyset$, für $\nu \in \{2, \dots, 8\}$. Die Anzahl der Punkte, die auf diese Weise in den Tetraedern der jeweiligen Oktaederklassen gewählt werden, sind in Tabelle 7.2 dargestellt.

Wir geben nun noch die Punktmenge an, die in den Tetraedern der Halboktaeder gewählt werden. Dabei bezeichnen wir die vier Tetraeder innerhalb eines Halboktaeders mit T_1, \dots, T_4 , so dass der Tetraeder T_2 dem Tetraeder T_1 gegenüberliegt. Die Eckpunkte v_0, \dots, v_3 eines Tetraeders wählen wir hier analog zu dem Fall eines Oktaeders, wobei der Knoten v_0 den Schwerpunkt der Basis des Halboktaeders bezeichnet. In den vier Tetraedern eines Halboktaeders der Menge \tilde{X}_1 werden nun die folgenden Punktmenge gewählt:

$$\begin{aligned} M_1^{\tilde{X}_1} &:= \mathcal{D}_{T_1}, \\ M_2^{\tilde{X}_1} &:= \{\xi_{ijkl} \in \mathcal{D}_{T_2} : j \geq 2 \wedge k \geq 2\} \setminus \{\xi_{0202}, \xi_{0022}\}, \\ M_\nu^{\tilde{X}_1} &:= \{\xi_{0221}, \xi_{1220}\} \subset \mathcal{D}_{T_\nu}, \quad \nu \in \{3, 4\}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Klasse	$\#M_1$	$\#M_2$	$\#M_3$	$\#M_4$	$\#M_5$	$\#M_6$	$\#M_7$	$\#M_8$
X_1	56	48	4	4	2	2	0	0
X_2	26	18	4	4	2	2	0	0
X_3	34	26	4	4	0	0	0	0
X_4	24	16	4	4	0	0	0	0
Y_1	14	6	0	0	2	2	0	0
Y_2	14	6	0	0	0	0	0	0
Z	8	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 7.2.: Anzahl der gewählten Punkte in den einzelnen Tetraedern der verschiedenen Oktaederklassen.

Hier beschreibt $M_\nu^{\tilde{X}_1}$ erneut die Teilmenge von Domain-Points, die in dem Tetraeder T_ν , $\nu \in \{1, \dots, 4\}$, gewählt werden. Die Punktmenge in den Tetraedern innerhalb eines Halboktaeders der Menge \tilde{X}_2 , \tilde{X}_3 bzw. \tilde{X}_4 wählen wir wie folgt:

$$M_\nu^{\tilde{X}_2} := M_\nu^{\tilde{X}_1} \setminus \{\xi_{ijkl} \in \mathcal{D}_{T_\nu} : j, k, l \geq 3\}, \quad \nu \in \{1, \dots, 4\}, \quad (7.23)$$

$$M_\nu^{\tilde{X}_3} := M_\nu^{\tilde{X}_1} \setminus \{\xi_{ijkl} \in \mathcal{D}_{T_\nu} : j, k \geq 3 \wedge j = k = 2\}, \quad \nu \in \{1, \dots, 4\}, \quad (7.24)$$

$$M_\nu^{\tilde{X}_4} := M_\nu^{\tilde{X}_1} \setminus \{\xi_{ijkl} \in \mathcal{D}_{T_\nu} : l \geq 3\}, \quad \nu \in \{1, \dots, 4\}. \quad (7.25)$$

Die Punktmenge innerhalb der Tetraeder der Klasse \tilde{Y}_1 wählen wir als

$$\begin{aligned} M_\nu^{\tilde{Y}_1} &:= M_1^{\tilde{X}_2} \setminus \{\xi_{ijkl} \in \mathcal{D}_{T_1} : i \leq 1\} \cup \{\xi_{2102}\}, \\ M_\nu^{\tilde{Y}_1} &:= M_2^{\tilde{X}_2} \setminus \{\xi_{ijkl} \in \mathcal{D}_{T_2} : i \leq 1\}, \\ M_\nu^{\tilde{Y}_1} &:= M_\nu^{\tilde{X}_2}, \quad \nu \in \{3, 4\}, \end{aligned} \quad (7.26)$$

und die Punktmenge innerhalb der Tetraeder der Klasse \tilde{Y}_2 als

$$M_\nu^{\tilde{Y}_2} := M_\nu^{\tilde{Y}_1} \setminus \{\xi_{1,2,2,0}, \xi_{0,2,2,1}\} \subset \mathcal{D}_{T_\nu}, \quad \nu \in \{1, \dots, 4\}. \quad (7.27)$$

Hier müssen wir jedoch beachten, dass in den Klassen \tilde{Y}_1 und \tilde{Y}_2 der Tetraeder T_1 stets so gewählt wird, dass er eine gemeinsame Seitenfläche mit einem Oktaeder bzw. Halboktaeder der Klasse X oder \tilde{X} besitzt. Schließlich wählen wir noch in den Tetraedern T_1, \dots, T_4 der Klasse \tilde{Z} die Punkte

$$M_\nu^{\tilde{Z}} := M_\nu^{\tilde{Y}_2} \setminus \{\xi_{2201}, \xi_{2021}, \xi_{2012}, \xi_{3002}\}, \quad \nu \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (7.28)$$

7. Lokale Lagrange-Interpolation auf Typ-6 Partitionen Δ_6

Klasse	$\#M_1$	$\#M_2$	$\#M_3$	$\#M_4$
\tilde{X}_1	56	34	2	2
\tilde{X}_2	26	14	2	2
\tilde{X}_3	34	12	0	0
\tilde{X}_4	24	12	0	0
\tilde{Y}_1	16	6	2	2
\tilde{Y}_2	16	6	0	0
\tilde{Z}	12	4	0	0

Tabelle 7.3.: Anzahl der gewählten Punkte in den einzelnen Tetraedern der verschiedenen Halboktaederklassen.

Wir zählen nun die Anzahl der Punkte, die in den Tetraedern der unterschiedlichen Halboktaederklassen gewählt wurden und veranschaulichen dies in Tabelle 7.3.

Abschließend geben wir noch zusätzliche Punktmenge an, die in gewissen Tetraedern gewählt werden, die eine Kante mit dem Rand von Δ_6 gemeinsam haben. Für jeden Knoten $v \in V_B$ und $v \notin \{X_1, \tilde{X}_1\}$ wählen wir in genau einem Tetraeder T mit $v \in T$ die Punkte

$$M^V := \mathcal{D}_T \cap D_2(v). \quad (7.29)$$

Weiter wählen wir in gewissen Tetraedern noch die folgenden Punkte

$$M^E := \{\xi_{1,2,2,0}, \xi_{0,2,2,1}\} \subset \mathcal{D}_T, \quad (7.30)$$

wobei $T \in (X_3 \cup \tilde{X}_3 \cup X_4 \cup \tilde{X}_4 \cup Y_2 \cup \tilde{Y}_2)$ und $\overline{v_1, v_2} \in E_B$. Zählen wir nun die so gewählten Punkte, erhalten wir für deren Anzahl

$$\#M^V = 20n^2 + 30n + 10 \quad \text{und} \quad \#M^E = 6n^2 + 6n. \quad (7.31)$$

Definition 7.2 (Die Menge \mathcal{L})

Wir bezeichnen mit \mathcal{L} die in den Mengen (7.15)-(7.30) gewählten Domain-Points von Δ_6 .

Das nächste Resultat zeigt, dass die Anzahl der Punkte in \mathcal{L} identisch ist mit der Dimension des Supersplinerarums $\mathcal{S}(\Delta_6)$.

Korollar 7.3 (Kardinalität von \mathcal{L})

Es gilt $\#\mathcal{L} = \dim(\mathcal{S}(\Delta_6))$.

Beweis: Nach Satz 7.1 gilt $\dim(\mathcal{S}(\Delta_6)) = 102n^3 + 114n^2 + 36n + 10$. Zählen wir nun die Elemente der Menge \mathcal{L} , so erhalten wir mit (7.10)-(7.14)

$$\begin{aligned} \#\mathcal{L} = & (\#M_{X_1} + \#M_{X_2} + \#M_{X_3} + \#M_{X_4})(n^3 - n^2)/4 \\ & + (\#M_{Y_1} + \#M_{Y_2})(n^3 - n^2)/2 + \#M_Z(n^3 - n^2) \\ & + (\#M_{\tilde{X}_1} + \#M_{\tilde{X}_2} + \#M_{\tilde{X}_3} + \#M_{\tilde{X}_4})n^2/4 \\ & + (\#M_{\tilde{Y}_1} + \#M_{\tilde{Y}_2})n^2/2 + \#M_{\tilde{Z}}n^2 \\ & + \#M_V + \#M_E. \end{aligned}$$

Setzen wir nun (7.31) ein und summieren die Werte der Tabellen 7.2 und 7.3 auf, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \#\mathcal{L} = & ((116 + 56 + 68 + 48)/4 + (24 + 20)/2 + 8)(n^3 - n^2) \\ & + ((94 + 44 + 46 + 36)/4 + (26 + 22)/2 + 16)n^2 \\ & + (20n^2 + 30n + 10) + (6n^2 + 6n) \\ = & 102n^3 + 114n^2 + 36n + 10 \end{aligned}$$

und der Beweis ist vollständig. □

Wir benötigen nun noch die folgende wichtige Aussage zur Interpolation mit quintischen Polynomen an den Domain-Points eines Tetraeders.

Lemma 7.4 (Interpolation an Domain-Points)

Seien $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$, Γ eine beliebige Teilmenge von \mathcal{D}_T und $p \in \mathcal{P}_5$ gegeben durch

$$p \equiv \sum_{\xi \in \Gamma} b_\xi B_\xi,$$

wobei B_ξ die Bernstein-Polynome vom Grad 5 bezüglich der Domain-Points $\xi \in \Gamma$ von T sind. Dann besitzt das homogene Interpolationsproblem

$$p(\xi) = 0, \quad \xi \in \Gamma, \tag{7.32}$$

nur die triviale Lösung $p \equiv 0$.

7. Lokale Lagrange-Interpolation auf Typ-6 Partitionen Δ_6

Beweis: Eingeschränkt auf die Seitenflächen von T ist p jeweils ein bivariates Polynom vom Grad 5. Nach [56] besitzt das dem trivariaten Interpolationsproblem (7.32) entsprechende bivariate Problem eine eindeutige Lösung. Es gilt also $p|_{\text{rand}(T)} \equiv 0$ und somit $b_\xi = 0$ für $\xi = \xi_{ijkl}$ und $i, j, k, l = 0$. Es bleibt also zu zeigen, dass für $A := \{\xi_{2,1,1,1}, \xi_{1,2,1,1}, \xi_{1,1,2,1}, \xi_{1,1,1,2}\}$ das Interpolationsproblem

$$p \equiv \sum_{\xi \in (A \cap \Gamma)} b_\xi B_\xi : p(\xi) = 0, \quad \xi \in (A \cap \Gamma), \quad (7.33)$$

nur die Lösung $p \equiv 0$ besitzt. Wir unterscheiden nun die Fälle, dass die Menge $(A \cap \Gamma)$ 0, 1, 2, 3 oder 4 Elemente enthält.

1. Fall $[\#(A \cap \Gamma) = 0]$: Es folgt direkt $p \equiv 0$.

2. Fall $[\#(A \cap \Gamma) = 4]$: Da p auf allen Seitenflächen von T identisch 0 ist, existiert ein $q \in \mathcal{P}_1$, so dass gilt $p \equiv \phi_0 \phi_1 \phi_2 \phi_3 q$, wobei $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3 \in \mathcal{P}_1$ die Baryzentrischen Koordinatenfunktionen bezüglich T sind. Die Punkte in A bilden die Eckpunkte eines echten Tetraeders und sind damit eine Lagrange-Interpolationsmenge für \mathcal{P}_1 (siehe Korollar 2.17). Es gilt mit (7.33) also $q \equiv 0$ und somit auch $p \equiv 0$.

3. Fall $[\#(A \cap \Gamma) \in \{1, 2, 3\}]$: Wir betrachten die Matrix $M := [B_\xi(\hat{\xi})]_{\xi, \hat{\xi} \in (A \cap \Gamma)}$ des Interpolationsproblems (7.33). Seien $\xi, \hat{\xi} \in (A \cap \Gamma)$, so gilt für $\xi \neq \hat{\xi}$

$$B_\xi(\xi) = 2 B_\xi(\hat{\xi}) = 2 B_{\hat{\xi}}(\xi).$$

Damit ist leicht zu sehen, dass $\det(M) \neq 0$ gilt, d.h das Interpolationsproblem (7.33) besitzt nur die eindeutige Lösung $p \equiv 0$. □

Nun können wir das Hauptresultat dieses Kapitels beweisen.

Satz 7.5 (Lagrange-Interpolationsmenge)

Die Menge \mathcal{L} ist eine Interpolationsmenge für den Raum $\mathcal{S}(\Delta_6)$. Die so beschriebene Interpolationsmethode ist darüber hinaus lokal, stabil und von linearer Komplexität.

Beweis: Seien $s \in \mathcal{S}(\Delta_6)$, $b_\xi, \xi \in \mathcal{D}_{\Delta_6}$, die Bernstein-Bézier-Koeffizienten von s und \mathcal{L} wie in Definition 7.2. Mit Korollar 7.3 genügt es zu zeigen, dass aus

$$s(z) = 0, \quad \text{für } z \in \mathcal{L}, \quad (7.34)$$

folgt, dass $s \equiv 0$, d.h $b_\xi = 0$ für alle $\xi \in \mathcal{D}_{\Delta_6}$. Dazu untersuchen wir im Folgenden nacheinander die einzelnen Oktaeder- bzw. Halboktaederklassen und zeigen jeweils,

dass s mit den gewählten Interpolationspunkten identisch 0 auf den Tetraedern dieser Klassen ist. Zur Veranschaulichung dienen die Abbildungen 7.5, 7.6 und 7.7, in denen die Bestimmung der Koeffizienten in den Tetraedern gewisser Oktaederklassen dargestellt wird.

Betrachten wir zunächst die Tetraeder T_1, \dots, T_8 eines Oktaeders der Klasse X_1 . Da die Menge $M_1^{X_1} \subset \mathcal{L}$ in (7.15) alle Domain-Points von T_1 enthält, folgt aus (7.34) direkt, dass $s|_{T_1} \equiv 0$. Die Punkte dieser Menge sind in Abbildung 7.5 durch weiße Kreise dargestellt. Die Punkte, deren assoziierte Koeffizienten nun durch die C^1 -Bedingungen (7.7a-c) und die C^2 -Bedingungen an den Eckpunkten v_1, v_2, v_3 von T_1 festgelegt werden, sind durch schwarze Kreise markiert. Betrachten wir nun die Menge $M_2^{X_1} \subset \mathcal{L}$ so stellen wir fest, dass diese Menge alle Domain-Points von T_2 enthält, deren assoziierte Koeffizienten noch nicht bestimmt sind. Mit Lemma 7.4 folgt nun, dass gilt $s|_{T_2} \equiv 0$. Die Punkte der Menge $M_2^{X_1}$ sind in Abbildung 7.5 durch weiße Quadrate dargestellt. Die Domain-Points, deren assoziierte Koeffizienten nun durch die C^1 -Bedingungen (7.7a-c) und die C^2 -Bedingungen an den Eckpunkten v_1, v_2, v_3 von T_2 festgelegt werden, sind durch schwarze Quadrate markiert. Die Punkte der Mengen $M_3^{X_1} \subset \mathcal{L}$ und $M_4^{X_1} \subset \mathcal{L}$ enthalten dann alle verbleibenden Domain-Points der Tetraeder T_3 und T_4 , deren assoziierte Koeffizienten noch nicht bestimmt sind. Mit Lemma 7.4 gilt nun wiederum $s|_{T_3} \equiv 0$ und $s|_{T_4} \equiv 0$. Die Punkte der Mengen $M_3^{X_1}$ und $M_4^{X_1}$ sind in Abbildung 7.5 durch weiße Dreiecke dargestellt. Die Domain-Points in den verbleibenden vier Tetraedern, deren assoziierte Koeffizienten nun durch die C^1 -Bedingungen (7.7a-b) festgelegt werden, sind durch schwarze Dreiecke markiert. Betrachten wir nun die Mengen $M_5^{X_1} \subset \mathcal{L}$ und $M_6^{X_1} \subset \mathcal{L}$, so sehen wir, dass auch diese Mengen genau die Domain-Points enthalten, deren assoziierte Koeffizienten noch nicht bestimmt sind. Mit Lemma 7.4 folgt also, dass gilt $s|_{T_5} \equiv 0$ und $s|_{T_6} \equiv 0$. Die Punkte der Mengen $M_5^{X_1}$ und $M_6^{X_1}$ sind in Abbildung 7.5 durch weiße Rauten dargestellt. Die Domain-Points, deren assoziierte Koeffizienten durch die C^1 -Bedingungen (7.7c) in den Tetraedern T_7 und T_8 festgelegt werden, sind durch schwarze Rauten markiert. Die Koeffizienten von s bezüglich der Tetraeder T_7 und T_8 sind nun schon alle bestimmt, womit gilt $s|_{T_7} \equiv 0$ und $s|_{T_8} \equiv 0$. Damit haben wir gezeigt, dass s auf allen Oktaedern der Klasse X_1 identisch 0 ist, d.h. $s|_{X_1} \equiv 0$. Ebenso kann gezeigt werden, dass s auch auf allen Tetraedern T_1, \dots, T_4 eines Halb-oktaeders der Klasse \tilde{X}_1 identisch 0 ist. Die Menge $M_1^{\tilde{X}_1} \subset \mathcal{L}$ in (7.22) enthält alle Domain-Points von T_1 und aus (7.34) folgt direkt, dass gilt $s|_{T_1} \equiv 0$. Verwenden wir nun die C^1 -Bedingungen (7.7a-b) und die C^2 -Bedingungen an den Eckpunkten v_1, v_2, v_3 von T_1 , so stellen wir fest, dass die Menge $M_2^{\tilde{X}_1} \subset \mathcal{L}$ genau die Domain-Points von T_2 enthält, deren assoziierte Koeffizienten nicht durch diese Bedingungen festgelegt sind. Mit Lemma 7.4 folgt also, dass $s|_{T_2} \equiv 0$. Durch die C^1 -Bedingungen

7. Lokale Lagrange-Interpolation auf Typ-6 Partitionen Δ_6

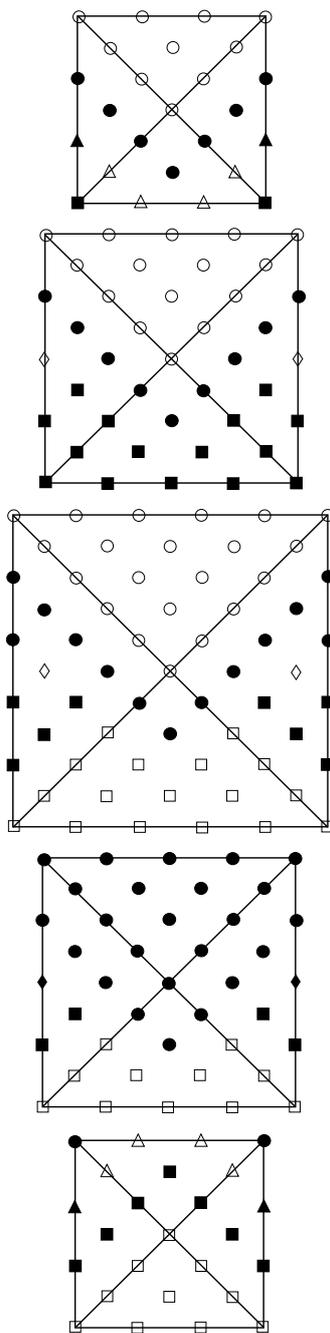


Abbildung 7.5.: Die Domain-Points eines Oktaeders der Klasse X_1 . In der Mitte liegen die Domain-Points der Basis des Oktaeders und darüber bzw. darunter die Domain-Points in den Schichten der oberen bzw. unteren Hälfte des Oktaeders. Die Bezeichnung der Tetraeder ist wie in Abbildung 7.4. Die Punkte der Mengen $M_\nu^{X_1} \subset \mathcal{L}$, $\nu = 1, \dots, 8$, sind durch weiße Kreise, Quadrate, Dreiecke und Rauten markiert.

(7.7a-b) und die C^2 -Bedingungen an den Eckpunkten v_1, v_2 von T_2 sind nun in den Tetraedern T_3 und T_4 bis auf die Koeffizienten b_ξ mit $\xi \in \{\xi_{0221}, \xi_{1220}\}$ bereits alle Koeffizienten bestimmt. Durch die Wahl der Mengen $M_3^{\tilde{X}_1} \subset \mathcal{L}$ und $M_4^{\tilde{X}_1} \subset \mathcal{L}$ folgt dann, dass $s|_{T_3} \equiv 0$ und $s|_{T_4} \equiv 0$. Damit ist s also auch auf allen Halboktaedern der Klasse \tilde{X}_1 identisch 0, d.h. $s|_{\tilde{X}_1} \equiv 0$.

Untersuchen wir als nächstes die Tetraeder T_1, \dots, T_8 eines Oktaeders der Klasse X_2 . Ein solcher Oktaeder hat genau 6 Eckpunkte mit Elementen der Klassen X_1 und \tilde{X}_1 oder dem Rand von Δ_6 gemeinsam. Durch die so induzierten Differenzierbarkeitsbedingungen und mit den Punkten der Menge M^V in (7.29) gilt $b_\xi = 0$ oder $s(\xi) = 0$ für $\xi = \xi_{ijkl} \in \mathcal{D}_{T_\nu}$, $j, k, l \geq 3$ und $\nu = 1, \dots, 8$. Aus der Wahl der Punkte der Mengen $M_\nu^{X_2}$, $\nu = 1, \dots, 8$, in (7.16) folgt nun auch, durch analoges Vorgehen wie bei den Tetraedern der Klasse X_1 , dass $s|_{X_2} \equiv 0$. Betrachten wir weiter die Halboktaeder der Klasse \tilde{X}_2 , so haben diese genau 5 Eckpunkte mit Elementen der Klassen X_1 und \tilde{X}_1 oder dem Rand von Δ_6 gemeinsam. Durch die so induzierten Differenzierbarkeitsbedingungen und mit den Punkten der Menge M^V gilt $b_\xi = 0$ oder $s(\xi) = 0$ für $\xi = \xi_{ijkl} \in \mathcal{D}_{T_\nu}$, $j, k, l \geq 3$ und $\nu = 1, \dots, 4$, wobei T_1, \dots, T_4 die 4 Tetraeder innerhalb eines Halboktaeders sind. Aus der Wahl der Punkte der Mengen $M_\nu^{\tilde{X}_2}$, $\nu = 1, \dots, 4$, in (7.23) folgt nun durch analoges Vorgehen wie bei den Tetraedern der Klasse \tilde{X}_1 , dass $s|_{\tilde{X}_2} \equiv 0$.

Wir betrachten als nächstes die Oktaeder und Halboktaeder der Klassen X_3 und \tilde{X}_3 . Die Elemente dieser Klassen haben genau die 4 Kanten ihrer Basis mit Elementen der zuvor betrachteten Klassen X_1, \tilde{X}_1, X_2 und \tilde{X}_2 oder dem Rand von Δ_6 gemeinsam. Mit den so induzierten Differenzierbarkeitsbedingungen und durch die Wahl der Punkte der Mengen M^V in (7.29) und M^E in (7.30) gilt $b_\xi = 0$ oder $s(\xi) = 0$ für $\xi = \xi_{ijkl} \in \mathcal{D}_T$, $j, k \geq 3$ und $j = k = 2$ in allen Tetraedern T dieser Klassen. Aus der Wahl der Punkte der Mengen $M_\nu^{X_3}$, $\nu = 1, \dots, 8$, in (7.16) und $M_\nu^{\tilde{X}_3}$, $\nu = 1, \dots, 4$, in (7.23) folgt nun durch analoges Vorgehen wie bei den Tetraedern der Klasse X_1 , dass gilt $s|_{X_3} \equiv 0$ und $s|_{\tilde{X}_3} \equiv 0$. Auch bei den Elementen der Klassen X_4 und \tilde{X}_4 untersuchen wir zunächst die Gemeinsamkeiten mit zuvor betrachteten Klassen und dem Rand von Δ_6 . Durch die so induzierten Differenzierbarkeitsbedingungen und die Wahl der Mengen M^V und M^E gilt $b_\xi = 0$ oder $s(\xi) = 0$ für $\xi = \xi_{ijkl} \in \mathcal{D}_T$, $j, k, l \geq 3$ und $j = k = 2$ in allen Tetraedern T dieser Klassen. Aus der Wahl der Punkte der Mengen $M_\nu^{X_4}$, $\nu = 1, \dots, 8$, in (7.16) und $M_\nu^{\tilde{X}_4}$, $\nu = 1, \dots, 4$, in (7.23) folgt nun wieder durch analoges Vorgehen wie bei den Tetraedern der Klasse X_1 bzw. \tilde{X}_1 , dass $s|_{X_4} \equiv 0$ und $s|_{\tilde{X}_4} \equiv 0$. Damit ist s auf allen in x-Richtung orientierten Oktaedern und Halboktaedern identisch 0, d.h. $s|_X \equiv 0$ und $s|_{\tilde{X}} \equiv 0$.

Im Folgenden zeigen wir, dass s auch auf den in y-Richtung orientierten Oktaedern

7. Lokale Lagrange-Interpolation auf Typ-6 Partitionen Δ_6

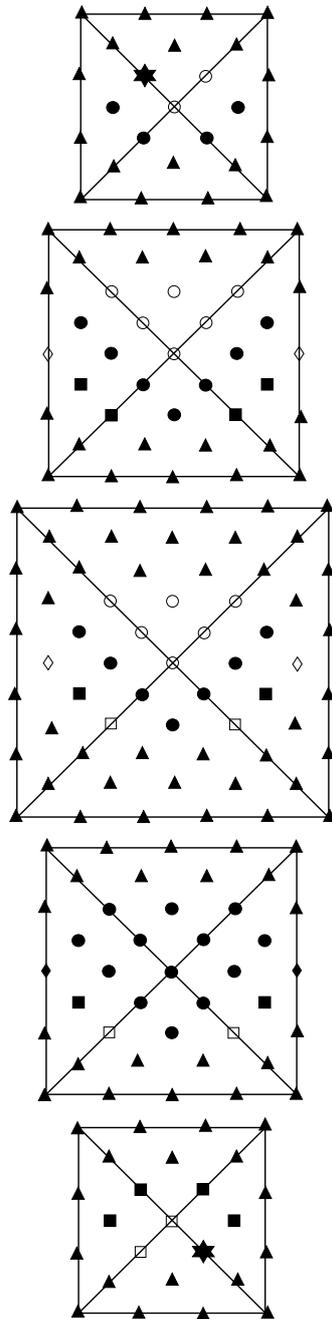


Abbildung 7.6.: Die Domain-Points eines Oktaeders der Klasse Y_1 . In der Mitte liegen die Domain-Points der Basis des Oktaeders und darüber bzw. darunter die Domain-Points in den Schichten der oberen bzw. unteren Hälfte des Oktaeders. Die Bezeichnung der Tetraeder ist wie in Abbildung 7.4. Die Punkte der Mengen $M_\nu^{Y_1} \subset \mathcal{L}$, $\nu = 1, \dots, 8$, sind durch weiße Kreise, Quadrate und Rauten markiert.

Y und Halboktaedern \tilde{Y} identisch 0 ist. Dabei können wir jedoch nicht mehr die Tetraeder strikt nacheinander betrachten, wie wir es in den Oktaedern der Klasse X getan haben. Wir betrachten zunächst die Tetraeder T_1, \dots, T_8 eines Oktaeders der Klasse Y_1 . Ein solcher Oktaeder hat genau die 4 Seitenflächen der Tetraeder T_1, \dots, T_4 mit Elementen der Klassen X und \tilde{X} gemeinsam. Die Reihenfolge, in der die Koeffizienten von s bestimmt werden, geht aus Abbildung 7.6 hervor, wobei die Bezeichnung der Tetraeder wie in Abbildung 7.4 ist. Domain-Points, deren assoziierte Koeffizienten durch C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen über die Seitenflächen (7.6) und C^2 -Differenzierbarkeitsbedingungen an den Eckpunkten des Oktaeders bestimmt werden, sind durch schwarze Dreiecke markiert. Hier ist zu beachten, dass auch die Koeffizienten b_ξ , $\xi \in \{\xi_{2210}, \xi_{2120}\}$, in den Tetraedern T_1 und T_2 direkt durch die Bedingungen (7.16c) bestimmt werden können. Nun gilt durch die Wahl der Punkte der Menge $M_1^{Y_1} \subset \mathcal{L}$ in (7.19) für s auf T_1 bereits $b_\xi = 0$ oder $s(\xi) = 0$ für $\xi \in \mathcal{D}_{T_1} \setminus \{\xi_{2102}\}$. Da s eingeschränkt auf die Dreiecksseite F_1 ein bivariates Polynom ist, gilt insbesondere $s|_{F_1} \equiv 0$. Betrachten wir nun die Koeffizienten von s , deren assoziierte Domain-Points in der Schicht mit Abstand 2 zur Basis in der oberen Hälfte des Oktaeders liegen (oben in Abbildung 7.6). Es gilt $b_\xi = 0$ für $\xi \in \{\xi_{3002}, \xi_{2012}, \xi_{1112}\} \subset \mathcal{D}_{T_1}$ und $\xi = \xi_{1112}^{T_4}$. Unter Verwendung der Bedingungen (7.16a-b) in dieser Schicht erhalten wir nun $b_\xi = 0$ für $\xi \in \{\xi_{3002}, \xi_{2012}, \xi_{2102}, \xi_{1112}\} \subset \mathcal{D}_{T_\nu}$ für alle $\nu \in \{1, 4, 5, 6\}$ und insbesondere $b_\xi = 0$ für $\xi = \xi_{2102}^{T_1}$ (markiert durch einen schwarzen Stern in Abbildung 7.6 oben). Damit gilt also $b_\xi = 0$ oder $s(\xi) = 0$ für $\xi \in \mathcal{D}_{T_1}$ und mit Lemma 7.4 folgt $s|_{T_1} \equiv 0$. Die Punkte der Menge $M_1^{Y_1}$ sind in Abbildung 7.6 durch weiße Kreise dargestellt. Die Punkte, deren assoziierte Koeffizienten nun durch die C^1 -Bedingungen (7.7a-c) und die C^2 -Bedingungen an den Eckpunkten v_1, v_2, v_3 von T_1 festgelegt werden sind durch schwarze Kreise markiert. Betrachten wir nun die Menge $M_2^{Y_1} \subset \mathcal{L}$ so stellen wir fest, dass auch in T_2 gilt $b_\xi = 0$ oder $s(\xi) = 0$ für $\xi \in \mathcal{D}_{T_2} \setminus \{\xi_{2102}\}$. Durch analoges Vorgehen wie bei T_1 in der oberen Hälfte des Oktaeders folgt, dass $b_\xi = 0$ für $\xi = \xi_{2102}^{T_2}$ (markiert durch einen schwarzen Stern in Abbildung 7.6 unten). Mit Lemma 7.4 gilt dann also auch $s|_{T_2} \equiv 0$. Die Punkte der Menge $M_2^{Y_1}$ sind in Abbildung 7.6 durch weiße Quadrate dargestellt. Die Domain-Points, deren assoziierte Koeffizienten nun durch die C^1 -Bedingungen (7.7a-c) und die C^2 -Bedingungen an den Eckpunkten v_1, v_2, v_3 von T_2 festgelegt werden, sind durch schwarze Quadrate markiert. In den Tetraedern T_3 und T_4 sind nun bereits alle Koeffizienten bestimmt und es gilt $s|_{T_3} \equiv 0$ sowie $s|_{T_4} \equiv 0$. Die noch nicht bestimmten Koeffizienten der Tetraeder T_5 und T_6 sind in den Mengen $M_\nu^{Y_1}$, $\nu \in \{5, 6\}$, enthalten und somit gilt $b_\xi = 0$ oder $s(\xi) = 0$ für $\xi \in \mathcal{D}_{T_\nu}$, $\nu \in \{5, 6\}$. Mit Lemma 7.4 folgt also $s|_{T_5} \equiv 0$ und $s|_{T_6} \equiv 0$. Damit sind dann auch alle Koeffizienten der Tetraeder T_7 und T_8 bestimmt und es gilt insgesamt $s|_{Y_1} \equiv 0$. Ebenso kann gezeigt werden, dass s auch

7. Lokale Lagrange-Interpolation auf Typ-6 Partitionen Δ_6

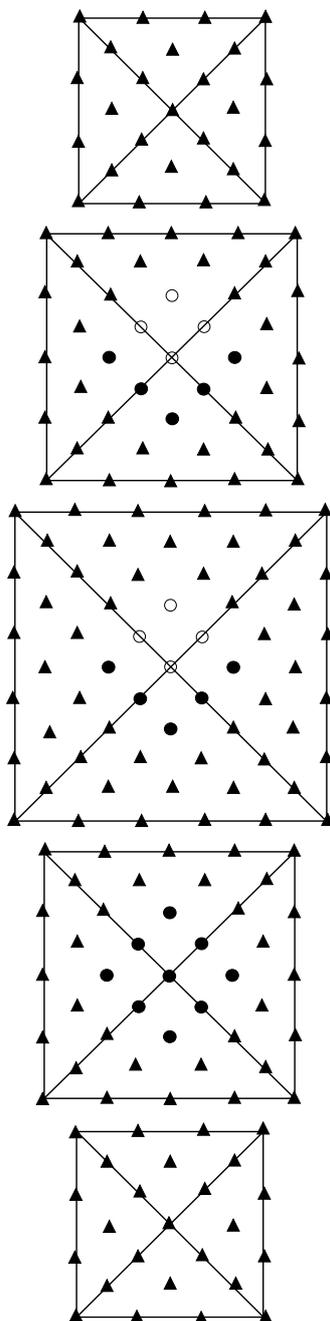


Abbildung 7.7.: Die Domain-Points eines Oktaeders der Klasse Z . In der Mitte liegen die Domain-Points der Basis des Oktaeders und darüber bzw. darunter die Domain-Points in den Schichten der oberen bzw. unteren Hälfte des Oktaeders. Die Bezeichnung der Tetraeder ist wie in Abbildung 7.4. Die Punkte der Mengen $M_1^Z \subset \mathcal{L}$ sind durch weiße Kreise markiert.

auf allen Tetraedern T_1, \dots, T_4 eines Halboktaeders der Klasse \tilde{Y}_1 identisch 0 ist. Ein solcher Halboktaeder hat genau die 2 Seitenflächen der Tetraeder T_1 und T_2 mit Elementen der Klassen X und \tilde{X} gemeinsam. Durch die C^1 -Bedingungen (7.6) über die Seitenflächen des Halboktaeders und die Wahl der Menge $M_1^{\tilde{Y}_1}$ in (7.26) gilt $b_\xi = 0$ oder $s(\xi) = 0$ für $\xi \in \mathcal{D}_{T_1} \setminus \{\xi_{2102}\}$. Analog wie im Fall eines Oktaeders aus Y_1 folgt auch hier durch die Bedingungen (7.16a-b), dass $b_\xi = 0$ für $\xi = \xi_{2102}^{T_1}$ und somit $s|_{T_1} \equiv 0$. Verwenden wir nun die C^1 -Bedingungen (7.7a-b) und die C^2 -Bedingungen an den Eckpunkten v_1, v_2, v_3 von T_1 , so stellen wir fest, dass die Menge $M_2^{\tilde{Y}_1} \subset \mathcal{L}$ genau die Domain-Points von T_2 enthält, deren assoziierte Koeffizienten nicht durch diese Bedingungen festgelegt werden. Mit Lemma 7.4 folgt also, dass $s|_{T_2} \equiv 0$. Durch die C^1 -Bedingungen (7.7a-b) und die C^2 -Bedingungen an den Eckpunkten v_1, v_2 von T_2 sind nun in den Tetraedern T_3 und T_4 bis auf die Koeffizienten b_ξ mit $\xi \in \{\xi_{0221}, \xi_{1220}\}$ bereits alle Koeffizienten bestimmt. Durch die Wahl der Mengen $M_3^{\tilde{Y}_1} \subset \mathcal{L}$ und $M_4^{\tilde{Y}_1} \subset \mathcal{L}$ folgt dann, dass gilt $s|_{T_3} \equiv 0$ und $s|_{T_4} \equiv 0$. Damit ist also auch s auf allen Halboktaedern der Klasse \tilde{Y}_1 identisch 0, d.h. $s|_{\tilde{Y}_1} \equiv 0$.

In den Oktaedern und Halboktaedern der Klassen Y_2 und \tilde{Y}_2 ist das Vorgehen analog zu den Fällen Y_1 und \tilde{Y}_1 . Im Fall eines Oktaeders der Klasse Y_2 sind lediglich die Punkte $\xi_{1,2,2,0}$ und $\xi_{0,2,2,1}$ nicht in den Mengen $M_{5,6}^{Y_2} \subset \mathcal{L}$ in (7.20) enthalten, da die damit assoziierten Koeffizienten bereits durch die C^1 -Bedingungen über gemeinsame Kanten mit Oktaedern der Klasse Y_1 bestimmt werden oder durch die Wahl der Menge M^E in (7.30) zusätzliche Interpolationsbedingungen an diesen Stellen gelten. Ebenso sind auch im Fall eines Halboktaeders der Klasse \tilde{Y}_2 lediglich die Punkte $\xi_{1,2,2,0}$ und $\xi_{0,2,2,1}$ nicht in den Mengen $M_{3,4}^{\tilde{Y}_2} \subset \mathcal{L}$ in (7.27) enthalten. Die mit diesen Punkten assoziierten Koeffizienten werden durch die C^1 -Bedingungen über die gemeinsamen Kanten mit Halboktaedern der Klasse \tilde{Y}_1 bestimmt oder es gelten durch die Wahl der Menge M^E in (7.30) zusätzliche Interpolationsbedingungen an diesen Stellen. Damit gilt also, dass s auf allen in y-Richtung orientierten Oktaedern und Halboktaedern identisch 0 ist, d.h. $s|_Y \equiv 0$.

Abschließend zeigen wir noch, dass s auch auf den in z-Richtung orientierten Oktaedern Z und Halboktaedern \tilde{Z} identisch 0 ist. Seien T_1, \dots, T_8 die acht Tetraeder eines Oktaeders der Klasse Z . Ein solcher Oktaeder hat alle 8 Seitenflächen mit Elementen der Klassen X, \tilde{X}, Y und \tilde{Y} gemeinsam. Die Reihenfolge, in der die Koeffizienten von s bestimmt werden, geht aus Abbildung 7.7 hervor, wobei die Bezeichnung der Tetraeder wie in Abbildung 7.4 ist. Domain-Points, deren assoziierte Koeffizienten durch C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen über die Seitenflächen (7.6) und C^2 -Differenzierbarkeitsbedingungen an den Eckpunkten des Oktaeders bestimmt werden, sind durch schwarze Dreiecke markiert, ebenso wie die Domain-

7. Lokale Lagrange-Interpolation auf Typ-6 Partitionen Δ_6

Points, deren Koeffizienten daraufhin direkt durch die C^1 -Bedingungen (7.7a-c) im Inneren des Oktaeders bestimmt werden können. Die Menge M_1^Z in (7.21) enthält nun alle Domain-Points von T_1 , deren assoziierte Koeffizienten noch nicht bestimmt sind. Daher gilt mit Lemma 7.4 $s|_{T_1} \equiv 0$. Die Punkte der Menge M_1^Z sind durch weiße Kreise markiert und die Domain-Points, deren assoziierte Koeffizienten daraufhin durch die C^1 -Bedingungen (7.7a-c) festgelegt werden, durch schwarze Kreise. In den Tetraedern T_2, \dots, T_8 sind nun bereits alle Koeffizienten bestimmt und damit gilt $s|_Z \equiv 0$. Seien nun T_1, \dots, T_4 die vier Tetraeder eines Halboktaeders der Klasse \tilde{Z} . Ein solcher Halboktaeder hat genau 4 Seitenflächen mit Elementen der Klassen X, \tilde{X}, Y und \tilde{Y} gemeinsam. Durch die Differenzierbarkeitsbedingungen über diese Seitenflächen und mit der Wahl der Menge $M_1^{\tilde{Z}}$ in (7.28) folgt nun, dass $b_\xi = 0$ oder $s(\xi) = 0$ für $\xi \in \mathcal{D}_{T_1}$ und mit Lemma 7.4 somit auch $s|_{T_1} \equiv 0$. Verwenden wir nun die C^1 -Bedingungen (7.7a-b) im Inneren des Halboktaeders und die Differenzierbarkeitsbedingungen über die Seite F_0 von T_2 , so stellen wir fest, dass die Menge $M_2^{\tilde{Z}} \subset \mathcal{L}$ genau die Domain-Points von T_2 enthält, deren assoziierte Koeffizienten nicht durch diese Bedingungen festgelegt sind. Mit Lemma 7.4 folgt also, dass $s|_{T_2} \equiv 0$. Durch die C^1 -Bedingungen (7.7a-b) und die Differenzierbarkeitsbedingungen über die Seite F_0 von T_3 und T_4 sind nun in diesen Tetraedern bereits alle Koeffizienten bestimmt, d.h. es gilt $s|_{T_3} \equiv 0$ und $s|_{T_4} \equiv 0$. Damit ist also s auch auf allen Halboktaedern der Klasse \tilde{Z} identisch 0, d.h. $s|_{\tilde{Z}} \equiv 0$.

Wir haben damit gezeigt, dass \mathcal{L} eine Interpolationsmenge für den Raum $\mathcal{S}(\Delta_6)$ ist. Die Berechnung eines interpolierenden Splines $s \in \mathcal{S}(\Delta_6)$ mit dieser Interpolationsmethode erfolgt dabei, indem nacheinander auf den Oktaederklassen $X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2$ und Z die Koeffizienten von s in seiner Bernstein-Bézier-Darstellung bestimmt werden (dies gilt natürlich, wie auch die folgenden Aussagen, ebenso für die Halboktaederklassen). In die Berechnung der Koeffizienten eines Oktaeders gehen dabei neben der Daten auf diesem Oktaeder lediglich Differenzierbarkeitsbedingungen von berührenden Oktaedern zuvor betrachteter Klassen ein. Die Bestimmung von s erfolgt also in linearer Komplexität und ist lokal in folgendem Sinne. Sei $T \in \Delta_6$ ein beliebiger Tetraeder innerhalb des Oktaeders O , so werden zur Berechnung der Bernstein-Bézier-Koeffizienten b_ξ , $\xi \in \mathcal{D}_T$, von s bezüglich T lediglich Daten aus $\Omega_T := \text{star}^6(O)$ benötigt. Durch die verwendete gleichmäßige Partition Δ_6 und da die Punkte von \mathcal{L} ausschließlich auf Domain-Points von Δ_6 gewählt wurden, ist die Berechnung der Koeffizienten darüber hinaus stabil und es gilt für $\xi \in \mathcal{D}_{\Delta_6}$,

$$|b_\xi| \leq C \max_{\eta \in \mathcal{L} \cap \Omega_T} |f_\eta|,$$

wobei f_η der Datenwert an der Stelle $\eta \in \mathcal{L}$ und C eine absolute Konstante ist. Wenn die Datenwerte von einer stetigen Funktion $f \in C(\Omega)$ stammen, so folgt durch die

konvexe Hülleneigenschaft der Bernstein-Bézier-Punkte (siehe Satz 2.11) auch

$$\|s\|_T \leq C_L \|f\|_{\Omega_T}, \quad (7.35)$$

wobei $\|\cdot\|_B$ die Maximumnorm bezüglich des Gebiets $B \subseteq \Omega$ bezeichnet und $C_L > 0$ eine absolute Konstante ist. □

7.4. Approximationseigenschaften

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Approximationseigenschaften der in Abschnitt 7.3 definierten interpolierenden Splines aus $\mathcal{S}(\Delta_6)$. Wir werden sehen, dass die Splines die optimale Approximationsordnung bezüglich der Werte und Ableitungen einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion besitzen.

Seien $f \in C(\Omega)$ und $\mathcal{I}(f)$ der eindeutige Spline aus $\mathcal{S}(\Delta_6)$, welcher f an den Punkten der Menge \mathcal{L} interpoliert. Damit definiert \mathcal{I} eine lineare Projektion von $C(\Omega)$ nach $\mathcal{S}(\Delta_6)$. Im Folgenden untersuchen wir nun den Fehler $\|\mathcal{I}(f) - f\|$ in der Maximumnorm sowie den Fehler der Ableitungen für eine genügend oft differenzierbare Funktion f . Sei $B \subseteq \Omega$ eine kompakte Menge, dann bezeichnen wir mit $W_\infty^m(B)$, für $m \in \mathbb{N}$ und $m > 0$, den Sobolev Raum bezüglich B mit der Halbnorm

$$|f|_{m,B} := \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha(f)\|_B,$$

wobei $\|\cdot\|_B$ die Maximumnorm auf B und $D^\alpha := D_x^{\alpha_1} D_y^{\alpha_2} D_z^{\alpha_3}$ die partiellen Ableitungen mit $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = m$.

Satz 7.6 (Approximationsordnung)

Für $f \in W_\infty^{m+1}(\Omega)$, $0 \leq m \leq 5$ und alle Multi-Indizes α mit $0 \leq |\alpha| \leq m$ gilt

$$\|D^\alpha(f - \mathcal{I}(f))\|_\Omega \leq C h^{m+1-|\alpha|} |f|_{m+1,\Omega}, \quad (7.36)$$

wobei C eine absolute Konstante und $h := \frac{1}{n}$ die Gittergröße von Δ_6 ist.

Beweis: Seien $0 \leq m \leq 5$ beliebig aber fest gewählt, $f \in W_\infty^{m+1}(\Omega)$, $T \in \Delta_6$ und Ω_T wie im Beweis von Satz 7.5. Nach [10] existiert ein Polynom $p \in \mathcal{P}_5$, so dass gilt

$$\|D^\alpha(f - p)\|_{\Omega_T} \leq C_P h^{m+1-|\alpha|} |f|_{m+1,\Omega_T},$$

7. Lokale Lagrange-Interpolation auf Typ-6 Partitionen Δ_6

für alle $0 \leq |\alpha| \leq m$ und eine Konstante C_P unabhängig von h . Da $\mathcal{I}(p) \equiv p$ und $T \subset \Omega_T$, folgt mit der Dreiecksungleichung, dass gilt

$$\|D^\alpha(f - \mathcal{I}(f))\|_T \leq \|D^\alpha(f - p)\|_{\Omega_T} + \|D^\alpha(\mathcal{I}(f - p))\|_T.$$

Mit der trivariaten Markov-Ungleichung (siehe [86]) und (7.35) erhalten wir hier für den letzten Term

$$\|D^\alpha(\mathcal{I}(f - p))\|_T \leq C_M h^{-|\alpha|} \|\mathcal{I}(f - p)\|_T \leq C_M C_L h^{-|\alpha|} \|f - p\|_{\Omega_T},$$

wobei C_M und C_L von h unabhängige Konstanten sind. Eine Kombination dieser Ungleichungen führt zu

$$\|D^\alpha(f - \mathcal{I}(f))\|_T \leq C_T h^{m+1-|\alpha|} |f|_{m+1, \Omega_T},$$

wobei $C_T = C_P(1 + C_M C_L)$. Bilden wir nun das Maximum über alle Tetraeder $T \in \Delta_6$, so ergibt sich (7.36) und der Beweis ist vollständig.

□

A. Vollständiger Beweis zu Satz 6.2

Beweis: Wir zeigen im Folgenden, dass die Splines $s_f := Q_k(f)$, $k \geq 1$, die Differenzierbarkeitsbedingungen (6.1)-(6.6) für alle inneren Dreiecksflächen von Δ gleichzeitig erfüllen. Dazu verwenden wir die Datenpunktordnungen der Abbildungen 6.4 und 6.5.

Betrachten wir die Koeffizienten, welche in die Bedingungen univariaten Typs (6.1) involviert sind, so stellen wir fest, dass die in einer Gleichung auftretenden Koeffizienten stets die gleiche Datenpunktordnung in den jeweiligen Truncated Octahedrons besitzen. Dies ist klar, da (6.1) die C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen zwischen zwei unterschiedlichen Truncated Octahedrons \mathcal{A} und \mathcal{B} beschreibt. Einfaches Einsetzen der Datenwerte von \mathcal{A} bzw. \mathcal{B} zeigt nun direkt, dass die Bedingungen (6.1) erfüllt sind.

Es bleibt noch zu zeigen, dass auch die Bedingungen (6.2)-(6.6), welche die C^1 -Differenzierbarkeitsbedingungen innerhalb eines Truncated Octahedrons beschreiben, erfüllt werden. Wir prüfen zunächst die Bedingung univariaten Typs (6.2a) über eine innere Dreiecksseite F vom Typ $F_3^{S,H}$:

$$b_{1001} + \tilde{b}_{1001} = 2b_{1010}^{S,H}.$$

Nach Abbildung 6.5 besitzen die Koeffizienten b_{1001} und b_{1010} die gleiche Datenpunktordnung; der Koeffizient \tilde{b}_{1001} jedoch eine andere Datenpunktordnung. Wir bezeichnen die Datenwerte bezüglich dieser Datenpunktordnung mit $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_8$. Mit (6.7) erhalten wir dann für die Koeffizienten b_{1001} und \tilde{b}_{1001}

$$b_{1001} = \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3)A_{1,2} + (k+1)A_{3,4} + (k-1)A_{5,6} + (k-3)A_{7,8})$$

bzw.

$$\tilde{b}_{1001} = \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3)\tilde{A}_{1,2} + (k+1)\tilde{A}_{3,4} + (k-1)\tilde{A}_{5,6} + (k-3)\tilde{A}_{7,8}).$$

Für den Koeffizienten b_{1010} ergibt sich

$$b_{1010}^S = \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3)A_1 + (k+2)A_{2,3} + (k+1)A_4 + (k-1)A_5 + (k-2)A_{6,7} + (k-3)A_8),$$

A. Vollständiger Beweis zu Satz 6.2

falls F vom Typ F_3^S ist, und

$$b_{1010}^H = \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3)A_{1,2} + kA_{3,4,5,6} + (k-3)A_{7,8}),$$

falls F vom Typ F_3^H ist. Vergleichen wir nun die unterschiedlichen Datenpunktordnungen, so erhalten wir auf Grund der Symmetrie den Zusammenhang

$$A_1 = \tilde{A}_1, A_2 = \tilde{A}_3, A_3 = \tilde{A}_2, A_4 = \tilde{A}_4, A_5 = \tilde{A}_5, A_6 = \tilde{A}_7, A_7 = \tilde{A}_6, A_8 = \tilde{A}_8,$$

falls F vom Typ F_3^S ist und

$$A_1 = \tilde{A}_1, A_2 = \tilde{A}_2, A_3 = \tilde{A}_5, A_4 = \tilde{A}_6, A_5 = \tilde{A}_3, A_6 = \tilde{A}_4, A_7 = \tilde{A}_7, A_8 = \tilde{A}_8,$$

falls F vom Typ F_3^H ist. Verwenden wir dies, so ergibt das Einsetzen in die obige Bedingung, dass (6.2a) sowohl für den Fall F vom Typ F_3^S , als auch F vom Typ F_3^H erfüllt wird.

Als nächstes prüfen wir, ob die Bedingung (6.2b) für eine innere Dreiecksseite F vom Typ $F_3^{S,H}$ erfüllt wird, d.h. dass gilt

$$b_{0101} + \tilde{b}_{0101} = 2b_{0110}.$$

Einer der beiden Koeffizienten b_{0101} besitzt dabei die gleiche Datenpunktordnung wie der Koeffizient b_{0110} und lässt sich nach (6.7) berechnen durch

$$b_{0101}^{S,H} = \frac{1}{k} 2^{-4} ((k+3)AB_{1,2} + (k+1)AB_{3,4} + (k-1)AB_{5,6} + (k-3)AB_{7,8}).$$

Der andere Koeffizient \tilde{b}_{0101} lässt sich durch dieselbe Formel berechnen, erfordert jedoch die Verwendung einer anderen Datenpunktordnung, d.h.

$$\tilde{b}_{0101}^{S,H} = \frac{1}{k} 2^{-4} ((k+3)\tilde{A}\tilde{B}_{1,2} + (k+1)\tilde{A}\tilde{B}_{3,4} + (k-1)\tilde{A}\tilde{B}_{5,6} + (k-3)\tilde{A}\tilde{B}_{7,8})$$

Für den Koeffizienten b_{0110} erhalten wir nun im Fall, dass F vom Typ F_3^S ist,

$$b_{0110}^S = \frac{1}{k} 2^{-4} ((k+3)AB_1 + (k+2)AB_{2,3} + (k+1)AB_4,$$

bzw. im Fall, dass F vom Typ F_3^H ist, gilt

$$\begin{aligned} b_{0110}^H &= \frac{1}{k} 2^{-4} ((k+3)A_{1,2} + kA_{3,4,5,6} + (k-3)A_{7,8} \\ &\quad + (k+3)B_1 + (k+2)B_{2,3} + (k+1)B_4 \\ &\quad + (k-1)B_5 + (k-2)B_{6,7} + (k-3)B_8). \end{aligned}$$

Die Datenpunktordnung des Koeffizienten \tilde{b}_{0101} ist nun ebenfalls davon abhängig, ob der zugehörige Domain-Point auf einer quadratischen Seitenfläche oder einer hexagonalen Seitenfläche eines Truncated Octahedrons liegt. Im Fall einer quadratischen Seitenfläche erhalten wir den Zusammenhang der Datenpunktordnungen

$$T_1 = \tilde{T}_1, T_2 = \tilde{T}_3, T_3 = \tilde{T}_2, T_4 = \tilde{T}_4, T_5 = \tilde{T}_5, T_6 = \tilde{T}_7, T_7 = \tilde{T}_6, T_8 = \tilde{T}_8$$

in jedem der beiden Truncated Octahedrons $\mathcal{T} = \mathcal{A}$, bzw. $\mathcal{T} = \mathcal{B}$. Im Fall einer hexagonalen Seitenfläche ergibt sich der Zusammenhang

$$A_1 = \tilde{A}_1, A_2 = \tilde{A}_2, A_3 = \tilde{A}_5, A_4 = \tilde{A}_6, A_5 = \tilde{A}_3, A_6 = \tilde{A}_4, A_7 = \tilde{A}_7, A_8 = \tilde{A}_8$$

für das Truncated Octahedron $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$ und

$$B_1 = \tilde{B}_1, B_2 = \tilde{B}_3, B_3 = \tilde{B}_2, B_4 = \tilde{B}_4, B_5 = \tilde{B}_5, B_6 = \tilde{B}_7, B_7 = \tilde{B}_6, B_8 = \tilde{B}_8$$

für das Truncated Octahedron $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}$. Einsetzen in die obige Gleichung ergibt nun, dass (6.2b) in jedem der beiden Fälle erfüllt wird.

Es bleibt als letzte Bedingung univariaten Typs noch (6.2c) zu zeigen, d.h. also das gilt

$$b_{0011} = 2b_{0020} - \tilde{b}_{0011}.$$

Da die zugehörigen Domain-Points dieser Koeffizienten alle auf einer Kante eines Truncated Octahedrons liegen, muss in diesem Fall keine Unterscheidung bezüglich der Seiten des Truncated Octahedrons getroffen werden. Die Koeffizienten b_{0011} und b_{0020} können nach Abbildung 6.5 die gleiche Datenpunktordnung besitzen und werden nach (6.7) bestimmt durch

$$b_{0011} = \frac{1}{k} 2^{-6} (2 ((k+3)A_{1,2} + (k+1)A_{3,4} + (k-1)A_{5,6} + (k-3)A_{7,8}) \\ + 3 ((k+3)BC_{1,2} + (k+1)BC_{3,4} + (k-1)BC_{5,6} + (k-3)BC_{7,8}))$$

und

$$b_{0020} = \frac{1}{k} 2^{-6} (2 ((k+3)A_{1,2} + kA_{3,4,5,6} + (k-3)A_{7,8}) \\ + 3 ((k+3)BC_1 + (k+2)BC_{2,3} + (k+1)BC_4 \\ + (k-1)BC_5 + (k-2)BC_{6,7} + (k-3)BC_8)).$$

Für den Koeffizienten \tilde{b}_{0011} , der sich berechnet aus

$$\tilde{b}_{0011} = \frac{1}{k} 2^{-6} (2 ((k+3)\tilde{A}_{1,2} + (k+1)\tilde{A}_{3,4} + (k-1)\tilde{A}_{5,6} + (k-3)\tilde{A}_{7,8}) \\ + 3 ((k+3)\tilde{B}\tilde{C}_{1,2} + (k+1)\tilde{B}\tilde{C}_{3,4} + (k-1)\tilde{B}\tilde{C}_{5,6} + (k-3)\tilde{B}\tilde{C}_{7,8})),$$

A. Vollständiger Beweis zu Satz 6.2

muss eine andere Datenpunktordnung beachtet werden. Es gilt

$$\begin{aligned} A_1 &= \tilde{A}_1, & A_2 &= \tilde{A}_2, & A_3 &= \tilde{A}_5, & A_4 &= \tilde{A}_6, & A_5 &= \tilde{A}_3, & A_6 &= \tilde{A}_4, & A_7 &= \tilde{A}_7, & A_8 &= \tilde{A}_8, \\ B_1 &= \tilde{B}_1, & B_2 &= \tilde{B}_3, & B_3 &= \tilde{B}_2, & B_4 &= \tilde{A}_4, & B_5 &= \tilde{B}_5, & B_6 &= \tilde{B}_7, & B_7 &= \tilde{B}_6, & B_8 &= \tilde{B}_8, \\ C_1 &= \tilde{C}_1, & C_2 &= \tilde{C}_3, & C_3 &= \tilde{C}_2, & C_4 &= \tilde{C}_4, & C_5 &= \tilde{C}_5, & C_6 &= \tilde{C}_7, & C_7 &= \tilde{C}_6, & C_8 &= \tilde{C}_8. \end{aligned}$$

Verwenden wir dies in (6.2c), so wird auch diese Gleichung erfüllt.

Im Folgenden prüfen wir noch die Differenzierbarkeitsbedingungen bivariaten Typs, zunächst über innere Dreiecksflächen F vom Typ F_2^S . Nach (6.3a) muss gelten

$$b_{1010}^S + \tilde{b}_{1010}^S = b_{1100}^S + b_{1001}^S.$$

Lediglich einer der Koeffizienten b_{1010}^S besitzt dabei jedoch die gleiche Datenpunktordnung wie die Koeffizienten b_{1100}^S und b_{1001}^S . Den anderen Koeffizienten bezeichnen wir mit \tilde{b}_{1010}^S und können ihn nach (6.7) berechnen durch

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{1010}^S &= \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3)\tilde{A}_1 + (k+2)\tilde{A}_{2,3} + (k+1)\tilde{A}_4 \\ &\quad + (k-1)\tilde{A}_5 + (k-2)\tilde{A}_{6,7} + (k-3)\tilde{A}_8) \end{aligned}$$

Für die anderen involvierten Koeffizienten ergeben sich die Formeln

$$\begin{aligned} b_{1010}^S &= \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3)A_1 + (k+2)A_{2,3} + (k+1)A_4 \\ &\quad + (k-1)A_5 + (k-2)A_{6,7} + (k-3)A_8), \\ b_{1100}^S &= \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+2)A_{1,2,3,4} + (k-2)A_{5,6,7,8}) \end{aligned}$$

und

$$b_{1001}^S = \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3)A_{1,2} + (k+1)A_{3,4} + (k-1)A_{5,6} + (k-3)A_{7,8}).$$

Vergleichen wir nun die unterschiedlichen Datenpunktordnungen, so erhalten wir den Zusammenhang

$$A_1 = \tilde{A}_2, \quad A_2 = \tilde{A}_1, \quad A_3 = \tilde{A}_4, \quad A_4 = \tilde{A}_3, \quad A_5 = \tilde{A}_6, \quad A_6 = \tilde{A}_5, \quad A_7 = \tilde{A}_8, \quad A_8 = \tilde{A}_7.$$

Einsetzen in die obige Gleichung zeigt, dass die Bedingung (6.3a) erfüllt ist.

Im nächsten Schritt überprüfen wir die Bedingung bivariaten Typs (6.3b):

$$b_{0110}^S + \tilde{b}_{0110}^S = b_{0200}^S + b_{0101}^S.$$

Auch hier besitzt lediglich einer der Koeffizienten b_{0110}^S die gleiche Datenpunktordnung wie die Koeffizienten b_{0200}^S und b_{0101}^S . Den anderen Koeffizienten bezeichnen wir mit \tilde{b}_{1010}^S und können ihn nach (6.7) berechnen durch

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{1010}^S = \frac{1}{k} 2^{-4} (& (k+3)\tilde{A}\tilde{B}_1 + (k+2)\tilde{A}\tilde{B}_{2,3} + (k+1)\tilde{A}\tilde{B}_4 \\ & + (k-1)\tilde{A}\tilde{B}_5 + (k-2)\tilde{A}\tilde{B}_{6,7} + (k-3)\tilde{A}\tilde{B}_8). \end{aligned}$$

Wir erhalten weiter für die restlichen involvierten Koeffizienten

$$\begin{aligned} b_{0110}^S &= \frac{1}{k} 2^{-4} ((k+3)AB_1 + (k+2)AB_{2,3} + (k+1)AB_4 \\ & \quad + (k-1)AB_5 + (k-2)AB_{6,7} + (k-3)AB_8), \\ b_{0200}^S &= \frac{1}{k} 2^{-4} ((k+2)AB_{1,2,3,4} + (k-2)AB_{5,6,7,8}) \end{aligned}$$

und

$$b_{0101}^{S,H} = \frac{1}{k} 2^{-4} ((k+3)AB_{1,2} + (k+1)AB_{3,4} + (k-1)AB_{5,6} + (k-3)AB_{7,8}).$$

Ein Vergleich der unterschiedlichen Datenpunktordnungen führt zu

$$A_1 = \tilde{A}_2, \quad A_2 = \tilde{A}_1, \quad A_3 = \tilde{A}_4, \quad A_4 = \tilde{A}_3, \quad A_5 = \tilde{A}_6, \quad A_6 = \tilde{A}_5, \quad A_7 = \tilde{A}_8, \quad A_8 = \tilde{A}_7$$

und Einsetzen in obige Gleichung zeigt, dass auch diese Bedingung erfüllt ist.

Wir prüfen noch die verbleibende Differenzierbarkeitsbedingung (6.3c). Danach muss gelten

$$b_{0011} + \tilde{b}_{0011} = b_{0101}^S + b_{0002}.$$

Nur einer der Koeffizienten b_{0011} besitzt hier die gleiche Datenpunktordnung wie die Koeffizienten b_{0101}^S und b_{0002} . Den anderen Koeffizienten bezeichnen wir mit \tilde{b}_{1010}^S und können ihn nach (6.7) berechnen durch

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{0011} &= \frac{1}{k} 2^{-6} (2 ((k+3)\tilde{A}_{1,2} + (k+1)\tilde{A}_{3,4} + (k-1)\tilde{A}_{5,6} + (k-3)\tilde{A}_{7,8}) \\ & \quad + 3 ((k+3)\tilde{B}\tilde{C}_{1,2} + (k+1)\tilde{B}\tilde{C}_{3,4} + (k-1)\tilde{B}\tilde{C}_{5,6} + (k-3)\tilde{B}\tilde{C}_{7,8})). \end{aligned}$$

Für die anderen involvierten Koeffizienten ergeben sich die Formeln

$$\begin{aligned} b_{0011} &= \frac{1}{k} 2^{-6} (2 ((k+3)A_{1,2} + (k+1)A_{3,4} + (k-1)A_{5,6} + (k-3)A_{7,8}) \\ & \quad + 3 ((k+3)BC_{1,2} + (k+1)BC_{3,4} + (k-1)BC_{5,6} + (k-3)BC_{7,8})), \\ b_{0101}^S &= \frac{1}{k} 2^{-4} ((k+3)\hat{A}B_{1,2} + (k+1)\hat{A}B_{3,4} + (k-1)\hat{A}B_{5,6} + (k-3)\hat{A}B_{7,8}) \end{aligned}$$

A. Vollständiger Beweis zu Satz 6.2

und

$$b_{0002} = \frac{1}{k} 2^{-5} ((k+3)ABCD_{1,2} + (k+1)ABCD_{3,4} + (k-1)ABCD_{5,6} + (k-3)ABCD_{7,8}).$$

Vergleichen wir die unterschiedlichen Datenpunktordnungen, so erhalten wir die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= D_2, \tilde{A}_2 = D_1, \tilde{A}_3 = D_4, \tilde{A}_4 = D_3, \tilde{A}_5 = D_6, \tilde{A}_6 = D_5, \tilde{A}_7 = D_8, \tilde{A}_8 = D_7, \\ \tilde{B}_1 &= B_2, \tilde{B}_2 = B_1, \tilde{B}_3 = B_4, \tilde{B}_4 = B_3, \tilde{B}_5 = B_6, \tilde{B}_6 = B_5, \tilde{B}_7 = B_8, \tilde{B}_8 = B_7, \\ \tilde{C}_1 &= C_2, \tilde{C}_2 = C_1, \tilde{C}_3 = C_4, \tilde{C}_4 = C_3, \tilde{C}_5 = C_6, \tilde{C}_6 = C_5, \tilde{C}_7 = C_8, \tilde{C}_8 = C_7. \end{aligned}$$

Hier muss also erstmals auch die unterschiedliche Bezeichnung der Truncated Octahedrons beachtet werden und nicht nur verschiedene Datenpunktordnungen innerhalb eines Truncated Octahedrons. Einsetzen in die obige Gleichung zeigt nun, dass auch die Bedingung (6.3c) erfüllt ist. Damit sind nun alle Differenzierbarkeitsbedingungen bivariaten Typs über innere Dreiecksflächen vom Typ F_2^S erfüllt.

Wir zeigen nun noch, dass auch die Differenzierbarkeitsbedingungen (6.3) über die inneren Dreiecksflächen vom Typ F_2^H erfüllt werden. Nach (6.3a) gilt

$$b_{1010}^S + \tilde{b}_{1010}^H = \frac{1}{2} b_{1100}^H + \frac{3}{2} b_{1001},$$

wobei genau einer der beiden Koeffizienten auf der linken Seite vom Typ b_ξ^S ist und der andere vom Typ b_ξ^H . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir sagen, dass $b_{1010} = b_{1010}^S$ und $\tilde{b}_{1010} = \tilde{b}_{1010}^H$. Wir bezeichnen die Datenwerte des Koeffizienten \tilde{b}_{1010}^H mit $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_8$ und erhalten nach (6.7)

$$b_{1010}^H = \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3)\tilde{A}_{1,2} + k\tilde{A}_{3,4,5,6} + (k-3)\tilde{A}_{7,8}).$$

Die anderen in diese Bedingung involvierten Koeffizienten besitzen die gleiche Datenpunktordnung und es gilt

$$\begin{aligned} b_{1100}^S &= \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+2)A_{1,2,3,4} + (k-2)A_{5,6,7,8}), \\ b_{1100}^H &= \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3)A_1 + (k+1)A_{2,3,4} + (k-1)A_{5,6,7} + (k-3)A_8) \end{aligned}$$

und

$$b_{1001} = \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3)A_{1,2} + (k+1)A_{3,4} + (k-1)A_{5,6} + (k-3)A_{7,8}).$$

Verwenden wir nun den Zusammenhang der Datenpunktordnungen

$$A_1 = \tilde{A}_1, A_2 = \tilde{A}_2, A_3 = \tilde{A}_3, A_4 = \tilde{A}_5, A_5 = \tilde{A}_4, A_6 = \tilde{A}_6, A_7 = \tilde{A}_7, A_8 = \tilde{A}_8,$$

so ist leicht ersichtlich, dass die Bedingung (6.3a) erfüllt wird.

Als nächstes untersuchen wir die Bedingung (6.4b):

$$b_{0110}^H - \frac{3}{2}b_{0101}^H = \frac{1}{2}b_{0200}^H - \tilde{b}_{0110}^H.$$

Die Koeffizienten auf der linken und rechten Seite besitzen hier unterschiedliche Datenpunktordnungen. Daher bezeichnen wir die Datenwerte der Koeffizienten b_{0200}^H und \tilde{b}_{1010}^H zunächst mit $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_8$ bzw. $\hat{B}_1, \dots, \hat{B}_8$ und erhalten nach (6.7)

$$b_{0200}^H = \frac{1}{k}2^{-4} ((k+3)\hat{A}\hat{B}_1 + (k+1)\hat{A}\hat{B}_{2,3,4} + (k-1)\hat{A}\hat{B}_{5,6,7} + (k-3)\hat{A}\hat{B}_8)$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{0110}^H = \frac{1}{k}2^{-4} (& (k+3)\hat{A}_{1,2} + k\hat{A}_{3,4,5,6} + (k-3)\hat{A}_{7,8} \\ & + (k+3)\hat{B}_1 + (k+2)\hat{B}_{2,3} + (k+1)\hat{B}_4 \\ & + (k-1)\hat{B}_5 + (k-2)\hat{B}_{6,7} + (k-3)\hat{B}_8). \end{aligned}$$

Die beiden Koeffizienten auf der rechten Seite der Gleichung berechnen sich durch

$$b_{0101}^H = \frac{1}{k}2^{-4} ((k+3)AB_{1,2} + (k+1)AB_{3,4} + (k-1)AB_{5,6} + (k-3)AB_{7,8}),$$

und

$$\begin{aligned} b_{0110}^H = \frac{1}{k}2^{-4} (& (k+3)A_{1,2} + kA_{3,4,5,6} + (k-3)A_{7,8} \\ & + (k+3)B_1 + (k+2)B_{2,3} + (k+1)B_4 \\ & + (k-1)B_5 + (k-2)B_{6,7} + (k-3)B_8). \end{aligned}$$

Dabei gilt der folgende Zusammenhang zwischen den Datenpunktordnungen

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 = B_1, \hat{A}_2 = B_2, \hat{A}_3 = B_3, \hat{A}_4 = B_5, \hat{A}_5 = B_4, \hat{A}_6 = B_6, \hat{A}_7 = B_7, \hat{A}_8 = B_8, \\ \hat{B}_1 = A_1, \hat{B}_2 = A_2, \hat{B}_3 = A_3, \hat{B}_4 = A_5, \hat{B}_5 = A_4, \hat{B}_6 = A_6, \hat{B}_7 = A_7, \hat{B}_8 = A_8. \end{aligned}$$

Hier muss also auch die unterschiedliche Bezeichnung der Oktaeder beachtet werden. Einsetzen in obige Gleichung zeigt nun, dass auch diese Bedingung erfüllt ist.

Es bleibt noch die Bedingung (6.4c), gegeben durch

$$b_{0011} + \tilde{b}_{0011} = \frac{1}{2}b_{0101} + \frac{3}{2}b_{0002},$$

zu zeigen. Hier besitzen nach Abbildung 6.5 alle Datenpunkte innerhalb der Truncated Octahedrons die gleiche Ordnung, jedoch muss die Bezeichnung der Truncated

A. Vollständiger Beweis zu Satz 6.2

Octahedrons für den Koeffizienten \tilde{b}_{0011} anders als für die anderen Koeffizienten gewählt werden. Wir bezeichnen die Datenwerte dieses Koeffizienten mit $\tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_8$, $T \in \{A, B, C\}$, und erhalten mit (6.7)

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{0011} = & \frac{1}{k} 2^{-6} (2 ((k+3)\tilde{A}_{1,2} + (k+1)\tilde{A}_{3,4} + (k-1)\tilde{A}_{5,6} + (k-3)\tilde{A}_{7,8}) \\ & + 3 ((k+3)\tilde{B}\tilde{C}_{1,2} + (k+1)\tilde{B}\tilde{C}_{3,4} + (k-1)\tilde{B}\tilde{C}_{5,6} + (k-3)\tilde{B}\tilde{C}_{7,8})). \end{aligned}$$

Für die anderen involvierten Koeffizienten ergeben sich die Formeln

$$\begin{aligned} b_{0101}^{S,H} &= \frac{1}{k} 2^{-4} ((k+3)AB_{1,2} + (k+1)AB_{3,4} + (k-1)AB_{5,6} + (k-3)AB_{7,8}), \\ b_{0002} &= \frac{1}{k} 2^{-5} ((k+3)ABCD_{1,2} + (k+1)ABCD_{3,4} \\ &+ (k-1)ABCD_{5,6} + (k-3)ABCD_{7,8}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b_{0011} &= \frac{1}{k} 2^{-6} (2 ((k+3)A_{1,2} + (k+1)A_{3,4} + (k-1)A_{5,6} + (k-3)A_{7,8}) \\ &+ 3 ((k+3)BC_{1,2} + (k+1)BC_{3,4} + (k-1)BC_{5,6} + (k-3)BC_{7,8})). \end{aligned}$$

Durch die unterschiedlichen Bezeichnungen der Truncated Octahedrons ergibt sich der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= B_1, \tilde{A}_2 = B_2, \tilde{A}_3 = B_3, \tilde{A}_4 = B_4, \tilde{A}_5 = B_5, \tilde{A}_6 = B_6, \tilde{A}_7 = B_7, \tilde{A}_8 = B_8, \\ \tilde{B}_1 &= A_1, \tilde{B}_2 = A_2, \tilde{B}_3 = A_3, \tilde{B}_4 = A_4, \tilde{B}_5 = A_5, \tilde{B}_6 = A_6, \tilde{B}_7 = A_7, \tilde{B}_8 = A_8, \\ \tilde{C}_1 &= D_1, \tilde{C}_2 = D_2, \tilde{C}_3 = D_3, \tilde{C}_4 = D_4, \tilde{C}_5 = D_5, \tilde{C}_6 = D_6, \tilde{C}_7 = D_7, \tilde{C}_8 = D_8. \end{aligned}$$

Damit ist auch diese Bedingung erfüllt und alle Differenzierbarkeitsbedingungen über die Seiten vom Typ F_2^H sind nachgewiesen.

Wir zeigen weiter, dass auch alle Differenzierbarkeitsbedingungen über die Seiten vom Typ F_1^S erfüllt werden. In der Bedingung (6.5a), gegeben durch

$$b_{1100}^S + \frac{2}{3}\tilde{b}_{1100}^H = \frac{1}{3}b_{2000} + \frac{4}{3}b_{1010}^S,$$

können die Koeffizienten b_{1100}^S , b_{2000} und b_{1010}^S die gleiche Datenpunktordnung besitzen. Sie werden nach (6.7) berechnet durch

$$\begin{aligned} b_{1100}^S &= \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+2)A_{1,2,3,4} + (k-2)A_{5,6,7,8}), \\ b_{2000} &= 2^{-3} A_{1,2,3,4,5,6,7,8} \end{aligned}$$

und

$$b_{1010}^S = \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3)A_1 + (k+2)A_{2,3} + (k+1)A_4 \\ + (k-1)A_5 + (k-2)A_{6,7} + (k-3)A_8).$$

Der Koeffizient \tilde{b}_{1100}^H besitzt eine andere Datenpunktordnung und die entsprechenden Datenwerte bezeichnen wir daher mit $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_8$ und erhalten nach (6.7)

$$\tilde{b}_{1100}^H = \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3)\tilde{A}_1 + (k+1)\tilde{A}_{2,3,4} + (k-1)\tilde{A}_{5,6,7} + (k-3)\tilde{A}_8).$$

Untersuchen wir nun den Zusammenhang zwischen den Datenpunktordnungen, so ergibt sich

$$\tilde{A}_1 = A_1, \tilde{A}_2 = A_2, \tilde{A}_3 = A_3, \tilde{A}_4 = A_5, \tilde{A}_5 = A_4, \tilde{A}_6 = A_6, \tilde{A}_7 = A_7, \tilde{A}_8 = A_8.$$

Einsetzen in obige Gleichung zeigt nun, dass diese Bedingung erfüllt ist.

Untersuchen wir als nächstes die Bedingung (6.5b)

$$b_{0110}^S + \frac{2}{3}\tilde{b}_{0110}^H = \frac{1}{3}b_{1010}^S + \frac{4}{3}b_{0020},$$

so sehen wir, dass nach Abbildung 6.5 alle in diese Bedingung involvierten Koeffizienten innerhalb eines Truncated Octahedrons die gleiche Datenpunktordnung besitzen können. Lediglich die Bezeichnung der Truncated Octahedrons selbst muss beachtet werden. Die Koeffizienten b_{0110}^S und \tilde{b}_{0110}^H werden nach (6.7) berechnet durch

$$b_{0110}^S = \frac{1}{k} 2^{-4} ((k+3)AB_1 + (k+2)AB_{2,3} + (k+1)AB_4 \\ + (k-1)AB_5 + (k-2)AB_{6,7} + (k-3)AB_8)$$

und

$$\tilde{b}_{0110}^H = \frac{1}{k} 2^{-4} ((k+3)\tilde{A}_{1,2} + k\tilde{A}_{3,4,5,6} + (k-3)\tilde{A}_{7,8} \\ + (k+3)\tilde{B}_1 + (k+2)\tilde{B}_{2,3} + (k+1)\tilde{B}_4 \\ + (k-1)\tilde{B}_5 + (k-2)\tilde{B}_{6,7} + (k-3)\tilde{B}_8).$$

Beachten wir nun die unterschiedliche Bezeichnung der Truncated Octahedrons, dann gilt der Zusammenhang

$$\tilde{A}_1 = C_1, \tilde{A}_2 = C_2, \tilde{A}_3 = C_3, \tilde{A}_4 = C_4, \tilde{A}_5 = C_5, \tilde{A}_6 = C_6, \tilde{A}_7 = C_7, \tilde{A}_8 = C_8, \\ \tilde{B}_1 = A_1, \tilde{B}_2 = A_2, \tilde{B}_3 = A_3, \tilde{B}_4 = A_4, \tilde{B}_5 = A_5, \tilde{B}_6 = A_6, \tilde{B}_7 = A_7, \tilde{B}_8 = A_8.$$

A. Vollständiger Beweis zu Satz 6.2

Untersuchen wir nun die Koeffizienten auf der rechten Seite der Gleichung, so sehen wir, dass auch hier unterschiedliche Bezeichnungen gewählt werden müssen. Daher bezeichnen wir die Datenwerte bezüglich des Koeffizienten b_{0020} zunächst mit $\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_8$, $T \in \{A, B, C\}$. Es gilt dann

$$b_{1010}^S = \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3)A_1 + (k+2)A_{2,3} + (k+1)A_4 \\ + (k-1)A_5 + (k-2)A_{6,7} + (k-3)A_8)$$

und

$$b_{0020} = \frac{1}{k} 2^{-6} (2 ((k+3)\hat{A}_{1,2} + k\hat{A}_{3,4,5,6} + (k-3)\hat{A}_{7,8}) \\ + 3 ((k+3)\hat{B}\hat{C}_1 + (k+2)\hat{B}\hat{C}_{2,3} + (k+1)\hat{B}\hat{C}_4 \\ + (k-1)\hat{B}\hat{C}_5 + (k-2)\hat{B}\hat{C}_{6,7} + (k-3)\hat{B}\hat{C}_8)),$$

mit dem folgenden Zusammenhang

$$\hat{A}_1 = C_1, \hat{A}_2 = C_2, \hat{A}_3 = C_3, \hat{A}_4 = C_4, \hat{A}_5 = C_5, \hat{A}_6 = C_6, \hat{A}_7 = C_7, \hat{A}_8 = C_8, \\ \hat{B}_1 = A_1, \hat{B}_2 = A_2, \hat{B}_3 = A_3, \hat{B}_4 = A_4, \hat{B}_5 = A_5, \hat{B}_6 = A_6, \hat{B}_7 = A_7, \hat{B}_8 = A_8, \\ \hat{C}_1 = B_1, \hat{C}_2 = B_2, \hat{C}_3 = B_3, \hat{C}_4 = B_4, \hat{C}_5 = B_5, \hat{C}_6 = B_6, \hat{C}_7 = B_7, \hat{C}_8 = B_8.$$

Verwenden wir dies in (6.5b), so sehen wir, dass auch diese Gleichung erfüllt wird.

Betrachten wir als nächstes die Bedingung (6.5c)

$$b_{0101}^S + \frac{2}{3}\tilde{b}_{0101}^H = \frac{1}{3}b_{1001} + \frac{4}{3}b_{0011}.$$

Nach Abbildung 6.5 können auch alle in dieser Bedingung involvierten Koeffizienten innerhalb eines Truncated Octahedrons die gleiche Datenpunktordnung besitzen. Die Koeffizienten b_{0101}^S und \tilde{b}_{0101}^H werden nach (6.7) berechnet durch

$$b_{0101}^S = \frac{1}{k} 2^{-4} ((k+3)AB_{1,2} + (k+1)AB_{3,4} + (k-1)AB_{5,6} + (k-3)AB_{7,8})$$

und

$$\tilde{b}_{0101}^H = \frac{1}{k} 2^{-4} ((k+3)\tilde{A}\tilde{B}_{1,2} + (k+1)\tilde{A}\tilde{B}_{3,4} + (k-1)\tilde{A}\tilde{B}_{5,6} + (k-3)\tilde{A}\tilde{B}_{7,8}).$$

Beachten wir nun die unterschiedliche Bezeichnung der Truncated Octahedrons, dann gilt der Zusammenhang

$$\tilde{A}_1 = C_1, \tilde{A}_2 = C_2, \tilde{A}_3 = C_3, \tilde{A}_4 = C_4, \tilde{A}_5 = C_5, \tilde{A}_6 = C_6, \tilde{A}_7 = C_7, \tilde{A}_8 = C_8, \\ \tilde{B}_1 = A_1, \tilde{B}_2 = A_2, \tilde{B}_3 = A_3, \tilde{B}_4 = A_4, \tilde{B}_5 = A_5, \tilde{B}_6 = A_6, \tilde{B}_7 = A_7, \tilde{B}_8 = A_8.$$

Für die Koeffizienten der rechten Seite der Gleichung muss für den Koeffizienten b_{0011} eine andere Bezeichnung der Truncated Octahedrons gewählt werden. Wir bezeichnen die entsprechenden Datenwerte mit $\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_8$, $T \in \{A, B, C\}$ und erhalten

$$b_{1001} = \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3)A_{1,2} + (k+1)A_{3,4} + (k-1)A_{5,6} + (k-3)A_{7,8})$$

sowie

$$b_{0011} = \frac{1}{k} 2^{-6} (2 ((k+3)\hat{A}_{1,2} + (k+1)\hat{A}_{3,4} + (k-1)\hat{A}_{5,6} + (k-3)\hat{A}_{7,8}) \\ + 3 ((k+3)\hat{B}\hat{C}_{1,2} + (k+1)\hat{B}\hat{C}_{3,4} + (k-1)\hat{B}\hat{C}_{5,6} + (k-3)\hat{B}\hat{C}_{7,8})).$$

Dabei gilt wiederum der folgende Zusammenhang

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= C_1, \hat{A}_2 = C_2, \hat{A}_3 = C_3, \hat{A}_4 = C_4, \hat{A}_5 = C_5, \hat{A}_6 = C_6, \hat{A}_7 = C_7, \hat{A}_8 = C_8, \\ \hat{B}_1 &= A_1, \hat{B}_2 = A_2, \hat{B}_3 = A_3, \hat{B}_4 = A_4, \hat{B}_5 = A_5, \hat{B}_6 = A_6, \hat{B}_7 = A_7, \hat{B}_8 = A_8, \\ \hat{C}_1 &= B_1, \hat{C}_2 = B_2, \hat{C}_3 = B_3, \hat{C}_4 = B_4, \hat{C}_5 = B_5, \hat{C}_6 = B_6, \hat{C}_7 = B_7, \hat{C}_8 = B_8. \end{aligned}$$

Einsetzen in obige Gleichung zeigt nun, dass auch diese Bedingung erfüllt ist.

Abschließend zeigen wir noch, dass die Differenzierbarkeitsbedingungen über die inneren Dreiecksseiten vom Typ F_1^H ebenfalls erfüllt werden. Wir beginnen mit der Bedingung (6.6a) gegeben durch

$$b_{1100}^H + \tilde{b}_{1100}^H = \frac{2}{3} b_{2000} + \frac{4}{3} b_{1010}^H.$$

Die Koeffizienten b_{1100}^H , b_{2000} und b_{1010}^H besitzen hier die gleiche Datenpunktordnung und werden nach (6.7) berechnet durch

$$\begin{aligned} b_{1100}^H &= \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3)A_1 + (k+1)A_{2,3,4} + (k-1)A_{5,6,7} + (k-3)A_8) \\ b_{2000} &= 2^{-3} A_{1,2,3,4,5,6,7,8} \end{aligned}$$

und

$$b_{1010}^H = \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3)A_{1,2} + kA_{3,4,5,6} + (k-3)A_{7,8}).$$

Der Koeffizient \tilde{b}_{1100}^H besitzt eine andere Datenpunktordnung. Die entsprechenden Datenwerte bezeichnen wir daher mit $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_8$. Damit ist der Koeffizient gegeben durch

$$\tilde{b}_{1100}^H = \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3)\tilde{A}_1 + (k+1)\tilde{A}_{2,3,4} + (k-1)\tilde{A}_{5,6,7} + (k-3)\tilde{A}_8).$$

A. Vollständiger Beweis zu Satz 6.2

Ein Vergleich der Datenpunktordnungen führt zu

$$\tilde{A}_1 = A_2, \tilde{A}_2 = A_1, \tilde{A}_3 = A_5, \tilde{A}_4 = A_6, \tilde{A}_5 = A_3, \tilde{A}_6 = A_4, \tilde{A}_7 = A_8, \tilde{A}_8 = A_7.$$

Damit ist die Bedingung (6.6a) erfüllt.

Als nächstes untersuchen wir die Bedingung (6.6b). Diese ist gegeben durch

$$b_{0110}^H + \tilde{b}_{0110}^H = \frac{2}{3}b_{1010}^H + \frac{4}{3}b_{0020},$$

wobei auch hier lediglich für den Koeffizienten \tilde{b}_{0110}^H eine unterschiedliche Datenpunktordnung gewählt werden muss. Die entsprechenden Datenwerte bezeichnen wir mit $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_8$ bzw. $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_8$ und erhalten mit (6.7)

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{0110}^H &= \frac{1}{k}2^{-4} ((k+3)\tilde{A}_{1,2} + k\tilde{A}_{3,4,5,6} + (k-3)\tilde{A}_{7,8} \\ &\quad + (k+3)\tilde{B}_1 + (k+2)\tilde{B}_{2,3} + (k+1)\tilde{B}_4 \\ &\quad + (k-1)\tilde{B}_5 + (k-2)\tilde{B}_{6,7} + (k-3)\tilde{B}_8). \end{aligned}$$

Für die restlichen Koeffizienten ergibt sich

$$\begin{aligned} b_{0110}^H &= \frac{1}{k}2^{-4} ((k+3)A_{1,2} + kA_{3,4,5,6} + (k-3)A_{7,8} \\ &\quad + (k+3)B_1 + (k+2)B_{2,3} + (k+1)B_4 \\ &\quad + (k-1)B_5 + (k-2)B_{6,7} + (k-3)B_8), \\ b_{1010}^H &= \frac{1}{k}2^{-3} ((k+3)A_{1,2} + kA_{3,4,5,6} + (k-3)A_{7,8}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b_{0020} &= \frac{1}{k}2^{-6} (2 ((k+3)A_{1,2} + kA_{3,4,5,6} + (k-3)A_{7,8}) \\ &\quad + 3 ((k+3)BC_1 + (k+2)BC_{2,3} + (k+1)BC_4 \\ &\quad + (k-1)BC_5 + (k-2)BC_{6,7} + (k-3)BC_8)) \end{aligned}$$

Dabei gilt der folgende Zusammenhang zwischen den Datenpunktordnungen

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= A_2, \tilde{A}_2 = A_1, \tilde{A}_3 = A_5, \tilde{A}_4 = A_6, \tilde{A}_5 = A_3, \tilde{A}_6 = A_4, \tilde{A}_7 = A_8, \tilde{A}_8 = A_7, \\ \tilde{B}_1 &= C_1, \tilde{B}_2 = C_2, \tilde{B}_3 = C_3, \tilde{B}_4 = C_4, \tilde{B}_5 = C_5, \tilde{B}_6 = C_6, \tilde{B}_7 = C_7, \tilde{B}_8 = C_8. \end{aligned}$$

Einsetzen in obige Gleichung zeigt nun, dass auch diese Bedingung erfüllt ist.

Es bleibt noch zu zeigen, dass auch die Bedingung (6.6c), gegeben durch

$$b_{0101} + \tilde{b}_{0101} = \frac{2}{3}b_{1001} + \frac{4}{3}b_{0011},$$

erfüllt ist. Auch hier besitzt lediglich der Koeffizient \tilde{b}_{0101} eine unterschiedliche Datenpunktordnung, so dass wir die entsprechenden Datenwerte für diesen Koeffizienten mit $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_8$ und $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_8$ bezeichnen. Wir erhalten somit für alle involvierten Koeffizienten die Formeln

$$\begin{aligned} b_{0101}^H &= \frac{1}{k} 2^{-4} ((k+3)AB_{1,2} + (k+1)AB_{3,4} + (k-1)AB_{5,6} + (k-3)AB_{7,8}) \\ \tilde{b}_{0101}^H &= \frac{1}{k} 2^{-4} ((k+3)\tilde{A}\tilde{B}_{1,2} + (k+1)\tilde{A}\tilde{B}_{3,4} + (k-1)\tilde{A}\tilde{B}_{5,6} + (k-3)\tilde{A}\tilde{B}_{7,8}) \\ b_{1001} &= \frac{1}{k} 2^{-3} ((k+3)A_{1,2} + (k+1)A_{3,4} + (k-1)A_{5,6} + (k-3)A_{7,8}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b_{0011} &= \frac{1}{k} 2^{-6} (2 ((k+3)A_{1,2} + (k+1)A_{3,4} + (k-1)A_{5,6} + (k-3)A_{7,8}) \\ &\quad + 3 ((k+3)BC_{1,2} + (k+1)BC_{3,4} + (k-1)BC_{5,6} + (k-3)BC_{7,8})). \end{aligned}$$

Verwenden wir nun den Zusammenhang zwischen den Datenpunktordnungen, gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= A_2, \tilde{A}_2 = A_1, \tilde{A}_3 = A_4, \tilde{A}_4 = A_3, \tilde{A}_5 = A_6, \tilde{A}_6 = A_5, \tilde{A}_7 = A_8, \tilde{A}_8 = A_7, \\ \tilde{B}_1 &= C_1, \tilde{B}_2 = C_2, \tilde{B}_3 = C_3, \tilde{B}_4 = C_4, \tilde{B}_5 = C_5, \tilde{B}_6 = C_6, \tilde{B}_7 = C_7, \tilde{B}_8 = C_8, \end{aligned}$$

so sehen wir, dass auch diese Bedingung erfüllt ist.

Damit haben wir gezeigt, dass die Splines $s_f := Q_k(f)$ für alle $k \geq 1$ die Differenzierbarkeitsbedingungen (6.1)-(6.6) für alle inneren Dreiecksflächen von Δ gleichzeitig erfüllen.

□

Literaturverzeichnis

- [1] P. Alfeld. A trivariate C^1 clough-tocher interpolation scheme. *Computer Aided Geometric Design*, 1:169–181, 1984.
- [2] P. Alfeld and L. L. Schumaker. On the dimension of bivariate spline spaces of smoothness r and degree $d = 3r + 1$. *Numerical Mathematics*, 57:651–661, 1990.
- [3] P. Alfeld and L. L. Schumaker. Smooth macro-elements based on clough-tocher triangle splits. *Numer. Math*, 90:597–616, 2000.
- [4] P. Alfeld and L. L. Schumaker. Smooth macro-elements based on powell-sabin triangle splits. *Adv. Comp. Math*, 16:29–46, 2000.
- [5] P. Alfeld, L. L. Schumaker, and M. Sirvent. The dimension and existence of local bases for multivariate spline spaces. *J. Approx. Theory*, 70:243–264, 1992.
- [6] P. Alfeld, L. L. Schumaker, and W. Whiteley. The generic dimension of the space of C^1 splines of degree $d \geq 8$ on tetrahedral decompositions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 30:889–920, 1993.
- [7] W. Barth. Two projective surfaces with many nodes admitting the symmetries of the icosahedron. *J. Alg. Geom.*, 5:173–186, 1996.
- [8] P. Bézier. *Essay de Définition Numérique des Courbes et des Surfaces Expérimentales*. PhD thesis, Université de Paris, 1977.
- [9] L. Bos. On certain configurations of points in \mathbb{R}^n which are unisolvent for polynomial interpolation. *J. Approx. Theory*, 64(3):271–280, 1991.
- [10] S. C. Brenner and L. R. Scott. *The mathematical theory of finite element methods*. Springer-Verlag, 2002.
- [11] E. Catmull and J. Clark. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological surfaces. *Computer-Aided Design*, 10(6):350–355, 1978.
- [12] C. K. Chui. *Multivariate Splines*. SIAM, 1988.

- [13] C. K. Chui, G. Hecklin, G. Nürnberger, and F. Zeilfelder. Optimal lagrange interpolation by quartic C^1 -splines on triangulations. *J. Comp. Appl. Math.*, pages 344–363, 2008.
- [14] C. K. Chui and R. H. Wang. Spaces of bivariate cubic and quartic splines on type-1 triangulations. *J. Math. Anal. Appl.*, 101:540–554, 1984.
- [15] C. K. Chui and Q. T. Jiang. Surface subdivision schemes generated by refinable bivariate spline function vectors. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 15:147–162, 2003.
- [16] C. K. Chui and Q. T. Jiang. Refinable bivariate quartic C^2 -splines for multi-level data representation and surface display. *Math. Comp.*, 74:1369–1390, 2005.
- [17] K. C. Chung and T. H. Yao. On lattices admitting unique lagrange interpolations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 14:735–743, 1977.
- [18] P. G. Ciarlet and P. A. Raviart. General lagrange and hermite interpolation in \mathbb{R}^n with applications to finite element methods. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 46:177–199, 1972.
- [19] R. W. Clough and J. L. Tocher. Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending. In *Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright Patterson A.F.B., Ohio, 1965.
- [20] H. S. M. Coxeter. Wythoffs construction for uniform polytopes. *Proc. London Math. Society, Ser. 2*, 38:327–339, 1935.
- [21] H. S. M. Coxeter. *Regular Polytopes*. Macmillan, 1963.
- [22] H. S. M. Coxeter. *Introduction to geometry*. Wiley, New York, 2nd edition, 1969.
- [23] W. Dahmen. Bernstein-bézier representation of polynomial surfaces. In *ACM SIGGRAPH*, Dallas, 1986.
- [24] O. Davydov. Stable local bases for multivariate spline spaces. *J. Approx. Theory*, 111:267–297, 2001.
- [25] O. Davydov and F. Zeilfelder. Scattered data fitting by direct extension of local polynomials to bivariate splines. *Adv. Comp. Math.*, 21:223–271, 2004.
- [26] C. de Boor. The quasi-interpolant as a tool in elementary polynomial spline theory. In G. G. Lorentz, editor, *Approximation theory*, pages 269–276. Academic Press, 1973.

- [27] C. de Boor. *A practical Guide to Splines*. Springer, New York, 1978.
- [28] C. de Boor. B-form basics. In G. Farin, editor, *Geometric Modeling: Algorithms and new trends*, pages 131–148. SIAM Publication, 1986.
- [29] C. de Boor. Quasiinterpolants and approximation power of multivariate splines. In Dahmen, Gasca, and Micchelli, editors, *Computations of curves and surfaces*, pages 313–345, Dordrecht, Netherlands, 1990. Kluwer.
- [30] C. de Boor and G. J. Fix. Spline approximation by quasi-interpolants. *J. Approx. Theory*, 8:19–45, 1973.
- [31] C. de Boor and K. Höllig. Approximation order from bivariate C^1 cubics: a counterexample. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 87:649–655, 1983.
- [32] C. de Boor and Q. Jia. A sharp upper bound on the approximation order of smooth bivariate pp functions. *J. Approx. Theory*, 72:24–33, 1993.
- [33] C. de Boor, G. G. Lorentz, C. K. Chui, and L. L. Schumaker. Splines as linear combinations of B-splines. A Survey, 1986.
- [34] M. Deza and M. Shtogrin. Uniform partitions of 3-space, their relatives and embedding. *Eur. J. Comb.*, 21(6):807–814, 2000.
- [35] G. Farin. *Kurven und Flächen im Computer Aided Geometric Design - eine praktische Einführung*. Vieweg, Braunschweig, 1994.
- [36] F. Foucher and P. Sablonnière. Approximating partial derivatives of first and second order by quadratic spline quasi-interpolants on uniform meshes. *Mathematics and Computers in Simulation*, 77(2-3):202–208, 2008.
- [37] R. Franke. A critical comparison of some methods for interpolation of scattered data. Technical Report NPS-53-79-003, Naval Postgraduate School, March 1979.
- [38] H. Freudenthal. Simplizialzerlegungen von beschränkter flachheit. *Annals of Mathematics*, 43(3):580–582, 1942.
- [39] B. Grünbaum. Uniform tilings of 3-space. *Geombinatorics*, 4:49–56, 1994.
- [40] B. Grünbaum and G. C. Shephard. *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman and Company, 1989.

- [41] T. Hangelbroek, G. Nürnberger, C. Rössl, H.-P. Seidel, and F. Zeilfelder. Dimension of C^1 -splines on type-6 tetrahedral partitions. *J. Approx. Theory*, 131:157–184, 2004.
- [42] G. Hecklin, G. Nürnberger, L.L. Schumaker, and F. Zeilfelder. A local lagrange interpolation method based on C^1 cubic splines on freudenthal partitions. *Math. Comp.*, pages 1017–1036, 2008.
- [43] G. Hecklin, G. Nürnberger, L.L. Schumaker, and F. Zeilfelder. Local lagrange interpolation with cubic C^1 -splines on tetrahedral partitions. *J. Approx. Theory*, 2008. in Press.
- [44] G. Hecklin, G. Nürnberger, and F. Zeilfelder. Local data interpolation by quintic C^1 -splines on tetrahedral partitions. In P. Chenin, T. Lyche, and L.L. Schumaker, editors, *Curve and Surface Design, Avignon 2006*, pages 163–172, Brentwood, 2007. Nashboro Press.
- [45] G. Hecklin, G. Nürnberger, and F. Zeilfelder. The structure of C^1 spline spaces on freudenthal partitions. *SIAM J. Math. Anal.*, 2:347–367, 2007.
- [46] D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. Teubner, 1899.
- [47] R. Q. Jia. Approximation by smooth bivariate splines on a three-direction mesh. In *Approximation Theory IV*, pages 539–545. Academic Press, 1983.
- [48] N. W. Johnson. Uniform polytopes. manuscript, 1991.
- [49] T. Kalbe and F. Zeilfelder. Hardware-accelerated, high-quality rendering based on trivariate splines approximating volume data. In *Eurographics*, 2008.
- [50] M.-J. Lai. Approximation order from bivariate C^1 -cubics on a four-directional mesh is full. *Computer Aided Geometric Design*, 11:215–223, 1994.
- [51] M.-J. Lai and A. LeMéhauté. A new kind of trivariate C^1 spline space. In *Advances in Comp. Math*, pages 273–292, 2003.
- [52] M.-J. Lai and L. L. Schumaker. On the approximation power of bivariate splines. *Advances in Computational Mathematics*, 9:251–279, 1998.
- [53] M.-J. Lai and L. L. Schumaker. On the approximation power of splines on triangulated quadrangulations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36(1):143–159, 1998.
- [54] M.-J. Lai and L. L. Schumaker. Macro-elements and stable local bases for splines on clough-tocher triangulations. *Math. Comp*, 72:335–354, 1999.

- [55] M.-J. Lai and L. L. Schumaker. Macro-elements and stable local bases for splines on powell-sabin triangulations. *Math. Comp*, 72:335–354, 1999.
- [56] M.-J. Lai and L. L. Schumaker. *Spline Functions on Triangulations*. Cambridge University Press, 2007.
- [57] S. L. Lee and G. M. Phillips. Interpolation on a triangle. *Comm. Appl. Num. Methods*, 3:271–276, 1987.
- [58] C. Loop. Smooth subdivision surfaces based on triangles. Master’s thesis, Utah University, 1987.
- [59] C. Manni and P. Sablonnière. Quadratic spline quasi-interpolants on powell-sabin partitions. *Adv. Comput. Math.*, 26(1-3):283–304, 2007.
- [60] S. Marschner and R. Lobb. An evaluation of reconstruction filters for volume rendering. In *Proc. of IEEE Vis.*, pages 100–107, 1994.
- [61] M. A. Matt and G. Nürnberger. Local lagrange interpolation using cubic C^1 splines on type-4 cube partitions. *J. Approx. Theory*, 2009. in Press.
- [62] G. Nürnberger. *Approximation by Spline Functions*. Springer, 1989.
- [63] G. Nürnberger, V. Rayevskaya, L. L. Schumaker, and F. Zeilfelder. Local lagrange interpolation with bivariate splines of arbitrary smoothness. *Const. Approx.*, 23:33–59, 2006.
- [64] G. Nürnberger, V. Rayevskaya, L.L. Schumaker, and F. Zeilfelder. Lagrange interpolation by C^2 splines of degree 7 on triangulations. In M. Neamtu and E. Staff, editors, *Advances in Constructive Approximation*, pages 345–370, Brentwood, 2004. Nashboro Press.
- [65] G. Nürnberger, C. Rössl, H.-P. Seidel, and F. Zeilfelder. Quasi-interpolation by quadratic piecewise polynomials in three variables. *Computer Aided Geometric Design*, 22:221–249, 2005.
- [66] G. Nürnberger, L. L. Schumaker, and F. Zeilfelder. Local lagrange interpolation by bivariate C^1 cubic splines. In T. Lyche et al., editor, *Mathematical Methods in CAGD*, pages 393–404, Nashville, 2001. Vanderbilt University Press.
- [67] G. Nürnberger, L. L. Schumaker, and F. Zeilfelder. Lagrange interpolation by C^1 cubic splines on triangulated quadrangulations. *Adv. Comp. Math.*, 21:357–380, 2004.

- [68] G. Nürnberger, L. L. Schumaker, and F. Zeilfelder. Two lagrange interpolation methods based on C^1 splines on tetrahedral partitions. In C. Chui, M. Neamtu, and L.L. Schumaker, editors, *Approximation Theory XI: Gatlinburg 2004*, pages 327–344, Brentwood, 2005. Nashboro Press.
- [69] G. Nürnberger and F. Zeilfelder. Local lagrange interpolation by cubic splines on a class of triangulations. In K. Kopotun et.al., editor, *Trends in Approximation Theory*, pages 333–350, Nashville, 2001. Vanderbilt University Press.
- [70] G. Nürnberger and F. Zeilfelder. Lagrange interpolation by bivariate C^1 -splines with optimal approximation. *Adv. Comp. Math.*, 21:381–419, 2004.
- [71] M. J. D. Powell and M. A. Sabin. Piecewise quadratic approximation on triangles. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 3:316–325, 1977.
- [72] H. Prautzsch, W. Boehm, and M. Paluszny. *Bézier and B-Spline Techniques*. Springer, Berlin, 2002.
- [73] M. Rhein and T. Kalbe. Quasi-interpolation by quadratic C^1 -splines on truncated octahedral partitions. *Computer Aided Geometric Design*, 26(8):825–841, 2009.
- [74] C. Rössl, F. Zeilfelder, G. Nürnberger, and H.-P. Seidel. Reconstruction of volume data with quadratic super splines. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 10(4):397–409, 2004.
- [75] P. Sablonnière. On some multivariate quadratic spline quasi-interpolants on bounded domains. In W. Haussmann, M. Reimer, and J. Stöckler, editors, *Modern Developments in Multivariate Approximation*, pages 262–278. Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.
- [76] G. Schlosser, J. Hesser, F. Zeilfelder, C. Rössl, R. Männer, G. Nürnberger, and H.-P. Seidel. Fast visualization by shear-warp on quadratic super-spline models using wavelet data decompositions. In *16th IEEE Visualization Conference (VIS 2005)*, 4, pages 351–358, Minneapolis, MN, USA, 2005.
- [77] L. L. Schumaker. *Spline Functions: Basic Theory*. Wiley-Interscience, New York, 1980.
- [78] L. L. Schumaker. Bounds on the dimension of spaces of multivariate piecewise polynomials. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 14:251–264, 1984.
- [79] L. L. Schumaker and T. Sorokina. Quintic spline interpolation on type-4 tetrahedral partitions. *Adv. Comput. Math.*, 21(3-4):421–444, 2004.

- [80] C. Shannon. Communication in the presence of noise. *Proceedings Institute of Radio Engineers*, 37:10–21, 1949.
- [81] T. Sorokina. On the n -dimensional clough-tocher interpolant, 2006.
- [82] T. Sorokina. A multivariate powell-sabin interpolant. *Adv. Comput. Math.*, 29(1):71–89, 2008.
- [83] T. Sorokina and F. Zeilfelder. Optimal quasi-interpolation by quadratic C^1 splines on type-2 triangulations. In *Approximation Theory XI*, pages 423–438. Nashboro Press, 2004.
- [84] T. Sorokina and F. Zeilfelder. Local quasi-interpolation by cubic C^1 splines on type-6 tetrahedral partitions. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 27(1):74–101, 2007.
- [85] T. Sorokina and F. Zeilfelder. An explicit quasi-interpolation scheme based on C^1 quartic splines on type-1 triangulations. *Computer Aided Geometric Design*, 25(1):1–13, 2008.
- [86] D. R. Wilhelmsen. A markov inequality in several dimensions. *J. Approx. Theory*, 11(3):216–220, 1974.
- [87] A. J. Worsey and G. Farin. An n -dimensional clough-tocher interpolant. *Constr. Approx.*, 3:99–110, 1987.
- [88] A. J. Worsey and B. Piper. A trivariate powell-sabin interpolant. *Computer Aided Geometric Design*, 5:177–186, 1988.
- [89] G. Wyvill, C. McPhetters, and B. Wyvill. *Data Structure for Soft Objects, The Visual Computer*, volume 2, pages 227–234. Springer, 1986.
- [90] A. Zenisek. Polynomial approximation on tetrahedrons in the finite element method. *J. Approx. Theory*, 7:334–351, 1973.