Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft

Nr. 183

Safety first-Investoren : Separation, Performancemessung und Kapitalmarktgleichgewicht

von

PETER ALBRECHT

Mannheim 10/2010

Safety first-Investoren : Separation, Performancemessung und Kapitalmarktgleichgewicht

Peter Albrecht, Mannheim

Zusammenfassung: Auf der Grundlage der Konzeption der Safety first-Investoren und einem damit verbundenen Separationstheorem wird eine risikoadjustierte Performancekennziffer entwickelt und diskutiert, die Safety first-Ratio. Diese Performancekennziffer wird zunächst im Rahmen eines Investmentkontexts verwendet, um eine Alternative (die Mean-Value at Risk-Ratio) zur Sharpe-Ratio theoretisch zu fundieren, die das Downside-Risiko berücksichtigt. In einer zweiten Anwendung wird im Kontext des Risikomanagements von Unternehmen eine alternative RORAC-Kennziffer entwickelt und theoretisch fundiert. Zugleich gelingt damit eine einheitliche Fundierung zweier Forschungsfelder, die in der Literatur bislang weitgehend separat nebeneinander stehen. Abschließend wird auf der Basis von Ergebnissen im Kontext von Quantilableitungen eine strukturelle Charakterisierung des Kapitalmarktgleichgewichts vorgenommen. Im Falle des Vorliegens von elliptischen Renditeverteilungen stimmt dieses mit dem CAPM überein.

Schlüsselworte*:* Safety first-Prinzip · Separationstheorem · Downside-Risiko · risikoadjustierte Performancemessung · Mean-Value at Risk-Ratio · Sharpe-Ratio · Safety first-RORAC · Quantilableitung · elliptische Verteilungen · Safety first-Kapitalmarktgleichgewicht · CAPM

JEL-Classification: G 11 · G 32

1. Einführung

Arzac/Bawa 1977 entwickeln eine verallgemeinerte Konzeption des Safety first-Prinzips nach Telser 1955, um das Entscheidungsverhalten von Investoren bei der Portfolioselektion zu charakterisieren. Dieses auf einem lexikographischen Ansatz basierende Entscheidungsprinzip stellt - wie Arzac/Bawa 1977 eingehend begründen - eine eigenständige Alternative zum Bernoulli-Prinzip dar und steht damit neben anderen Alternativen zum Bernoulli-Prinzip, wie beispielsweise der Prospect Theory nach Kahnemann/Tversky oder der dualen Erwartungsnutzentheorie nach Yaari. Wie in Abschnitt 2 eingehender begründet ist das Safety first-Prinzip vor allem für Banken und Versicherungsunternehmen zur Formalisierung ihres Entscheidungsverhaltens geeignet, da diese aus regulatorischen Gründen eine absolute Limitierung ihrer Risikoposition vornehmen müssen, was auf der einen Seite konsistent zum Safety first-Prinzip ist und auf der anderen Seite inkonsistent zum Bernoulli-Prinzip, da durch diese Restriktion das Stetigkeitsaxiom und das Unabhängigkeitsaxiom verletzt werden.
Arzac/Bawa 1977 weisen nach, das im Rahmen des Safety first-Prinzips ein Separationstheorem in Analogie zum Separationstheorem von Tobin gültig ist. Auf dieser Basis geben Arzac/Bawa eine strukturelle Charakterisierung des Kapitalmarktgleichgewichts in einem Kapitalmarkt von Safety first-Investoren und zeigen, dass im Falle der Normalverteilung dieses Kapitalmarktgleichgewicht mit dem CAPM zusammenfällt.
Im vorliegenden Beitrag führen wir in Abschnitt 3 zunächst einen alternativen Beweis des Separationstheorems von Arzac/Bawa 1977, der direkt an den Eigenschaften des Quantils einer Verteilung ansetzt. In Abschnitt 4 charakterisieren wir auf der Basis einer alternativen Repräsentation der Separationseigenschaft die durch das Safety first-Prinzip induzierte Risikomessung sowie die darauf aufbauende risikoorientierte Performancemessung (Safety first-Performance), die sich in der Safety first-Ratio konkretisiert. Diese Konzeption wird dann im Rahmen eines partialanalytischen Ansatzes zwei Anwendungen zugeführt. Zum einen kann in Abschnitt 5 im Rahmen des Investmentmanagements ein risikoadjustiertes Performancemaß (die Mean-Value at Risk-Ratio) als Alternative zur Sharpe Ratio abgeleitet werden, welches das Downside-Risiko berücksichtigt. Es wird nachgewiesen, dass im Falle des Vorliegens elliptischer Renditeverteilungen die Mean-Value at Risk-Ratio proportional zur Sharpe-Ratio ist und daher zu einem identischen Performanceranking führt. Im Falle asymmetrischer Renditeverteilungen gilt dies nicht mehr, was am Beispiel der logarithmischen Normalverteilung demonstriert wird. Eine zweite Anwendung findet die Safety first-Ratio in Abschnitt 6 im Rahmen des Risikomanagements von Unternehmen und konkretisiert sich hier in Form des Safety first-RORAC. Damit werden zudem zwei Gebiete, die in der Literatur bislang weitgehend separat nebeneinander stehen, verbunden und auf eine gemeinsame theoretische Grundlage gestellt. Im abschließenden Abschnitt 7 geben wir auf der Basis der alternativen Darstellung der Separationseigenschaft und von Ergebnissen im Kontext von Quantilableitungen eine zu Arzac/Bawa 1977 alternative Charakterisierung des Kapitalmarktgleichgewichts. Wir zeigen dann, dass das CAPM in einem gewissen Sinne als lineare Approximation dieses Kapitalmarktgleichgewichts angesehen werden kann und, dass für elliptische Verteilungen dieses Kapitalmarktgleichgewicht mit dem CAPM identisch ist.

2. Das Safety first-Prinzip

Das Safety first-Prinzip in der lexikographischen Variante nach Arzac/Bawa 1977 lässt sich wie folgt formulieren, wobei wir uns aufgrund der intendierten Anwendungen auf Renditegrößen als Resultate von ökonomischen Handlungen konzentrieren. Gegeben sei eine Menge D von Einperiodenrenditen $R \in D$. Spezifiziert werde nun eine vorgegebene Zielrendite[1] z sowie eine vorgegebene (kleine) Wahrscheinlichkeit $0 < \alpha < 1$, mit der die Zielrendite z höchstens unterschritten (bzw. nicht übertroffen) werden kann. Für zwei Renditen $R_1 \in D$ und $R_2 \in D$ mit zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $p_1 = P(R_1 \le z)$ und $p_2 = P(R_2 \le z)$ gilt dann die folgende (strikte) Präferenzordnung

$$R_1 \prec R_2 \Leftrightarrow \begin{cases} E(R_1) < E(R_2)\,, & \text{wenn } p_1 \le \alpha \text{ und } p_2 \le \alpha \\ p_1 > \alpha \text{ und } p_2 \le \alpha & \\ p_2 < p_1\,, & \text{wenn } p_1 > \alpha \text{ und } p_2 > \alpha. \end{cases} \tag{1}$$

Diese beiden Renditen sind indifferent $(R_1 \sim R_2)$, wenn entweder $E(R_1) = E(R_2)$ im Falle $p_1 \le \alpha$ und $p_2 \le \alpha$ oder $p_1 = p_2$ im Falle $p_1 > \alpha$ und $p_2 > \alpha$.

Die Präferenzordnung orientiert sich zunächst primär an den Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2. Bevorzugt wird diejenige Zufallsvariable, die hier den kleineren Wert, d.h. eine kleinere Shortfallwahrscheinlichkeit[2] aufweist – außer in dem Falle, dass beide Wahrscheinlichkeiten die kritische Wahrscheinlichkeit α nicht übersteigen. In diesem Falle wird die Zufallsvariable mit dem höheren Erwartungswert bevorzugt. Die lexikographische Variante des Safety first-Prinzips besitzt gegenüber der Originalvariante von Telser 1955 den Vorteil, dass sie dem Prinzip der absoluten Präferenz (Dominanzprinzip[3]) genügt[4]. Die Ordnungsrelation (1) induziert eine vollständige Ordnung auf jeder Menge von Zufallsvariablen mit einem endlichen Erwartungswert. Darüber hinaus vermag es, risikoaversives Verhalten von Investoren zu modellieren[5].

Es ist festzuhalten, dass das Entscheidungsprinzip (1) sowohl das Stetigkeitsaxiom als auch das Unabhängigkeitsaxiom verletzt[6], d.h. das Safety first-Prinzip ist nicht kompatibel zum Bernoulli-Prinzip. Da aber auch Stetigkeits- und Unabhängigkeitsaxiom in der Literatur durchaus kontrovers diskutiert werden[7], gibt es *a priori* keinen Grund, das Bernoulli-Prinzip als das einzig zulässige Entscheidungsprinzip anzusehen. Das Safety first-Prinzip stellt ein Entscheidungsprinzip dar, das als eigenständige Alternative zum Bernoulli-Prinzip anzusehen ist.

Bei einer Untersuchung der Zielfunktion von Versicherungsunternehmen weist Albrecht 1994 darauf hin, dass die im Versicherungssektor bestehende Solvabilitätsregulierung (d.h. intuitiv die Regulierung des Risikokapitals als Funktion des eingegangenen Risikoexposures) verhindert[8], dass Versicherungsunternehmen beliebig hohe Risiken eingehen können und damit dass Stetigkeits- und Unabhängigkeitsaxiom de facto ebenfalls verletzt werden. Zudem kann eine Solvabilitätsregulierung in Form von Shortfall-Restriktionen[9] (Shortfall-Constraints) der Form $P(R \le z) \le \alpha$ quantifiziert werden[10]. Es spricht also einiges dafür, dass die reale Entscheidungssituation von Versicherungsunternehmen besser durch das Safety first-Prinzip quantifiziert werden kann als durch das Bernoulli-Prinzip. Die vorstehende Argumentation kann unverändert auf alle Finanzdienstleistungsunternehmen übertragen werden, die ebenfalls einer Regulierung ihres Risikokapitals unterliegen oder darüber hinausgehend auf alle Unternehmen, die im Rahmen ihres Risikomanagements einem Value at Risk-Ansatz folgen. Soweit zur Substantiierung der praktischen Relevanz des Safety first-Prinzips.

Existiert im Entscheidungsraum D mindestens eine Rendite R, die der Shortfall-Restriktion $P(R \le z) \le \alpha$ genügt – in der im Weiteren analysierten Entscheidungssituation ist diese Annahme stets erfüllt –, so ergibt sich die optimale Handlung auf der Basis des folgenden Optimierungsproblems

(2a) $$E(R) \to \max!$$

(2b) $$P(R \le z) \le \alpha$$

(2c) $$R \in D\,.$$

Dies entspricht dem Safety first-Prinzip in der Originalvariante von Telser 1955.

Zur Vorbereitung der weiteren Ableitungen formulieren wir noch eine äquivalente Variante dieses Optimierungsproblems. Wir definieren wie üblich das α-Quantil $Q_\alpha(R)$ der Verteilung der Zufallsvariablen R durch die Forderung $P[R \le Q_\alpha(R)] = \alpha$ und nehmen an, dass die im Weiteren betrachteten Zufallsvariablen stets eine Dichtefunktion besitzen, um die eindeutige Existenz des so definierten Quantils zu sichern. Äquivalent zu der Shortfall-Restriktion (2b) ist dann[11] die Restriktion $Q_\alpha(R) \ge z$, d.h. das Optimierungsproblem lautet in äquivalenter Formulierung

(2a) $$E(R) \to \max!$$

(2b') $$Q_\alpha(R) \ge z$$

(2c) $$R \in D\,.$$

Die Größen z (Zielrendite) und α (Konfidenzniveau) sind dabei modellexogen zu spezifizieren.

3. Optimale Portfolios von SF-Investoren: Ein Separationstheorem

Investoren, die ihre Entscheidungen auf der Grundlage von (1) bzw. (2) treffen, bezeichnen wir im Weiteren als *Safety first-Investoren* (SF-Investoren). Zur Explikation der zulässigen Renditegrößen $R \in D$ unterstellen wir im Weiteren das Einperioden-Grundmodell der Portfoliotheorie unter Einbeziehung einer sicheren Anlage[12]. Neben n (rein) riskanten Finanztiteln mit zugehörigen Einperiodenrenditen $R_i (i = 1,...,n)$ existiere ein sicherer Zins r_0, zu dem beliebige Beträge angelegt bzw. Kredite aufgenommen werden können. Im Folgenden konzentrieren wir uns zunächst auf Kombinationen von einem beliebigen, aber zunächst fixierten rein riskanten Portfolio P aus den n riskanten Finanztiteln und der sicheren Anlage. Bezeichne $0 \le a < \infty$ das anteilige Investment in P und $-\infty < 1 - a \le 1$ das anteilige Investment in die sichere Anlage, so gilt für die zugehörige Gesamtrendite R des Kombinationsportfolios

(3) $$R = aR_P + (1-a)r_0\,.$$

Ziel der weiteren Analyse ist die Ableitung eines Separationstheorems (Two Fund-Theorem) für SF-Investoren in Analogie zum Separationstheorem von Tobin[13] im Rahmen der Markowitzschen Portfoliotheorie, d.h. im Falle von Erwartungswert-Varianz (EV)-Investoren. Dieses Separationstheorem wurde erstmals von Arzac/Bawa 1977, S. 280 ff. abgeleitet. Im Folgenden präsentieren wir eine alternative Ableitung dieses Separationstheorems, die direkt auf Eigenschaften des Quantils einer Verteilung (vgl. hierzu die im Anhang zusammengestellten Ableitungen) rekurriert.

Zunächst bemerken wir, dass für die Zielrendite z sinnvollerweise

(4) $$z < r_0$$

gelten muss[14]. Ebenso ist eine positive Risikoprämie $E(R_P) - r_0$ für riskante Portfolios vorauszusetzen, d.h.

(5) $$E(R_P) > r_0 .$$

Für den Erwartungswert des Kombinationsportfolios gilt nun

(6) $$E(R) = aE(R_P) + (1-a)r_0 = r_0 + a[E(R_P) - r_0] .$$

Aufgrund von (5) ist somit der Erwartungswert des Kombinationsportfolios streng monoton steigend im Investmentgewicht a.

Gemäß (2b') müssen zulässige Kombinationsportfolios die Eigenschaft $Q_\alpha(R) \geq z$ erfüllen. Gilt hingegen $Q_\alpha(R) < z$, so ist die Shortfall-Restriktion (2b) nicht erfüllt, das Investment beinhaltet ein nicht mehr tolerierbares Risiko (material risk[15]) und darf nicht realisiert werden. Aufgrund der Linearitätseigenschaft des Quantils bei positiven linearen Transformationen[16] gilt nun

(7) $$Q_\alpha(R) = a Q_\alpha(R_P) + (1-a)r_0 = r_0 - a[r_0 - Q_\alpha(R_P)] .$$

Wir gehen im Weiteren noch davon aus, dass

(8) $$Q_\alpha(R_P) < r_0$$

gilt. Für empirisch repräsentative (d.h. sehr kleine) Konfidenzniveaus kann von dieser Eigenschaft ausgegangen werden, da aufgrund von[17] $R_P \geq -1$ gilt $\lim_{\alpha \to 0} Q_\alpha(R_P) = -1$. Es liegen dann insgesamt die in Abbildung 1 illustrierten typischen Konstellationen im Hinblick auf die betrachteten Renditeverteilungen (für rein riskante Investments) vor[18].

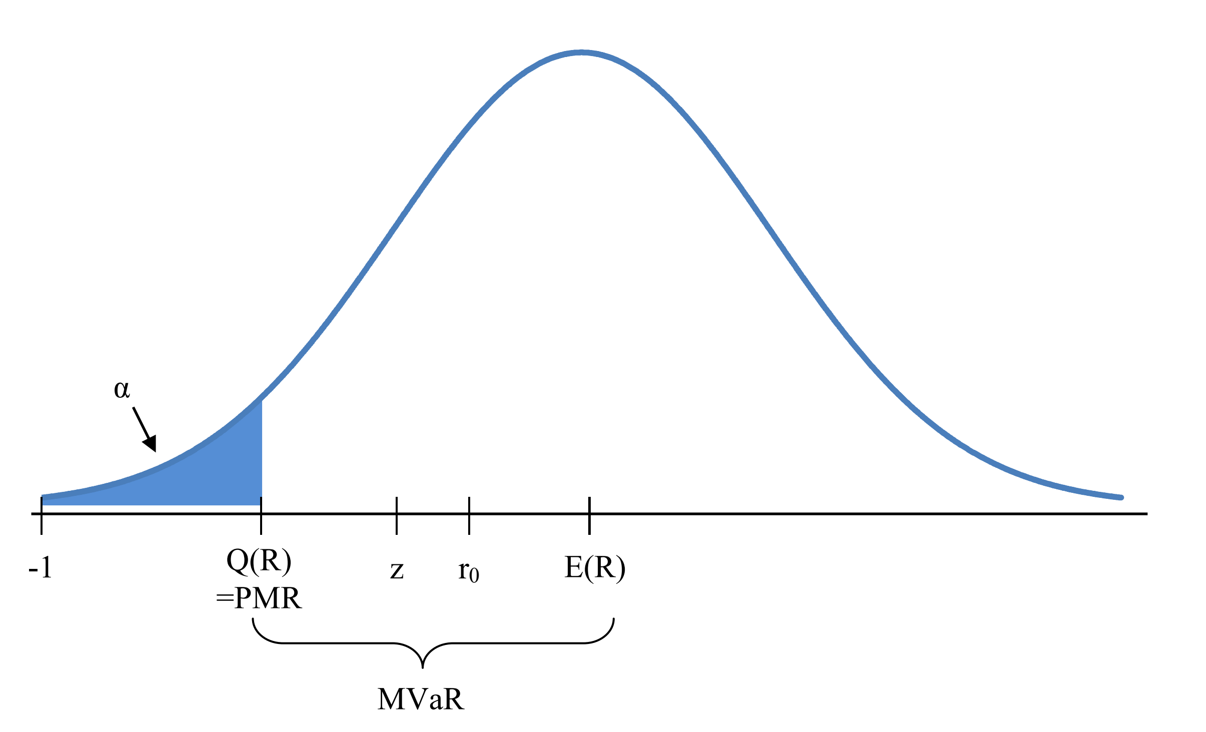

Abb. 1: Typische Konstellation bei der Renditeverteilung rein riskanter Investments

Unter Annahme der Bedingung (8) ist somit das α-Quantil gemäß (7) eine im Investmentgewicht a streng monoton fallende Größe. Insbesondere gilt

(9) $$\lim_{a\to\infty} Q_\alpha(R) = -\infty\,, \quad \lim_{a\to 0} Q_\alpha(R) = r_0\,.$$

Die Shortfall-Restriktion (2b') konkretisiert sich für Kombinationsportfolios somit zu $r_0 - a[r_0 - Q_\alpha(R_P)] \geq z$ bzw.

(10) $$a \leq \frac{r_0 - z}{r_0 - Q_\alpha(R_P)}\,.$$

Ist die Ungleichung (10) nicht erfüllt, so ist der Investmentanteil des rein riskanten Portfolios P im Kombinationsportfolio "zu groß", das resultierende Risiko ist nicht mehr tolerierbar.

Da $r_0 > z$ und auch $r_0 > Q_\alpha(R_P)$, ist der Quotient auf der rechten Seite von (10) positiv und damit die Ungleichung erfüllbar. Durch "genügend geringes" anteiliges Investment in das riskante Portfolio kann das Gesamtrisiko des Kombinationsportfolios somit genügend klein gemacht werden – egal wie groß das Risiko des riskanten Portfolios selbst ist.

Welches der zulässigen Portfolios mit tolerierbarem Risiko wird aber nun der SF-Investor wählen? Da er gemäß (2a) grundsätzlich den Erwartungswert maximiert und der Erwartungswert des Kombinationsportfolios gemäß (6) monoton steigend in a ist, wird er unter den zulässigen Investmentgewichten a gemäß (10) das maximal realisierbare wählen. Das optimale Kombinationsportfolio ist daher durch die folgende Wahl $a = a(P)$ des Investmentgewichts gegeben:

$$a(P) = \frac{r_0 - z}{r_0 - Q_\alpha(R_P)}. \tag{11}$$

Für jedes fixierte rein riskante Portfolio P kann daher ein für den SF-Investor optimales Kombinationsportfolio gefunden werden. Erforderlich hierfür ist dabei die (modellexogene) Spezifikation der Größen z und α.

Wir geben nun die Fixierung des rein riskanten Portfolios P auf und lassen P in einer Menge von zulässigen Portfolios M variieren, beispielsweise könnte $R_P = \Sigma x_i R_i$ sein und die Menge M der zulässigen Portfolios durch die Forderung $\Sigma x_i = 1$ (inklusive Leerverkäufe) oder durch die Forderungen $\Sigma x_i = 1$ und $x_i \geq 0$ $(i = 1,..., n)$ (Ausschluss von Leerverkäufen) bestimmt sein. Wie lässt sich nun das (global) optimale Kombinationsportfolio bestimmen? Verbinden wir (6) mit (11), so ergibt sich

$$E(R) = r_0 + (r_0 - z)\frac{E(R_P) - r_0}{r_0 - Q_\alpha(R_P)}. \tag{12}$$

Für jedes feste P entspricht (12) dem Erwartungswert des zugehörigen optimalen Kombinationsportfolios. Variieren wir P, so wird offenbar (12) maximiert, wenn die Größe

$$\frac{E(R_P) - r_0}{r_0 - Q_\alpha(R_P)} \tag{13}$$

maximiert wird. Diese Größe bezieht sich nur noch auf das rein riskante (Teil-)Portfolio P. Die Maximierung des Quotienten (13) liefert das optimale rein riskante Portfolio P^*. Das Investmentgewicht $a(P^*)$ legt auf der Basis von (11) dann das insgesamt optimale Kombinationsportfolio fest. Der Umfang, mit dem hierbei in das rein riskante Portfolio investiert wird, hängt gemäß (11) noch ab von der Zielrendite z, die Investmentgewichte des optimalen rein riskanten Portfolios hingegen nur von dem gewählten Konfidenzniveau α. Das optimale rein riskante Portfolio P^* ist also unabhängig von der gewählten Zielrendite z ! In diesem Sinne liegt ein – erstmals von Arzac/Bawa (1977, S. 282) formuliertes – Separationstheorem vor. Die Bestimmung des optimalen (Kombinations-)Portfolios eines SF-Investors kann demgemäß in zwei Schritten erfolgen:

1. Die Bestimmung des optimalen rein riskanten Portfolios P^* auf der Basis der Maximierung von (13).

2. Die Bestimmung des optimalen Gesamtportfolios durch Festlegung der Zielrendite z.

Offenbar legt die Wahl des Konfidenzniveaus α quasi implizit das Risikomaß fest, hier $r_0 - Q_\alpha(R_P)$, auf das sich der SF-Investor bei der Bewertung der Investmentalternative stützt, und die Wahl von z den Grad der Risikoaversion[19]. Dieses Resultat ist damit in vollkommener Analogie zum Separationstheorem von Tobin. Hier ist[20] das optimale rein riskante Portfolio das Tangentialportfolio und die optimalen Portfolios unterscheiden sich nur durch den Umfang, mit dem in das Tangentialportfolio investiert wird. Das Tangentialportfolio selbst ist charakterisierbar[21] durch den maximalen Wert des Quotienten

$$\text{(14)} \qquad SR(R_P) = \frac{E(R_P) - r_0}{\sigma(R_P)},$$

der Sharpe-Ratio.

Die Gültigkeit eines Separationstheorems auch für SF-Investoren erweitert das Spektrum der in der Literatur erzielten Ergebnisse, die auf eine Verallgemeinerung des für EV-Investoren gültigen Separationstheorems abzielen. Typischerweise findet dies im Rahmen des Bernoulli-Prinzips statt und betrifft entweder die Spezifikation der zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung[22] oder der zugrunde liegenden Präferenzen[23]. Breuer/Gürtler 2007 zeigen alternativ hierzu, dass auch in einem Erwartungswert-Risiko-Modell ein Separationstheorem gültig ist, wenn das Risikomaß bestimmte Eigenschaften erfüllt[24].

4. Safety first-Risikomaß und Safety first-Performance

Wie bereits ausgeführt, kann aus den vorstehenden Ableitungen gefolgert werden, dass SF-Investoren ihre Risikoquantifizierung implizit auf Basis der Größe

$$\text{(15)} \qquad r_0 - Q_\alpha(R)$$

treffen. Zur ökonomischen Interpretation dieser Größe definieren wir zunächst die Größe Wahrscheinliche Mindestrendite[25] (Probable Minimum Return) PMR_α durch die Forderung

$$\text{(16)} \qquad P(R \le PMR_\alpha) = \alpha .$$

Eine Unterschreitung der wahrscheinlichen Mindestrendite zum Konfidenzniveau findet (im Durchschnitt) nur in $100\alpha\%$ der Realisierungen von R statt. In diesem Sinne ist PMR_α als $100\alpha\%$-Minimalrendite interpretierbar. Da offenbar $PMR_\alpha = Q_\alpha(R)$, so entspricht das Risikomaß (15) der Größe

$$\text{(17)} \qquad r_0 - PMR_\alpha$$

und gibt somit intuitiv an, in welchem Umfang bei einer riskanten Anlage die sichere Rendite r_0 "maximal" (bei Vorgabe eines Konfidenzniveaus α) verfehlt werden kann.

Das Risikomaß $r_0 - PMR_\alpha$ besitzt den Nachteil, dass es nicht lageunabhängig ist[26 27]. Damit ist auch der Quotient (13) nicht direkt vergleichbar mit der Sharpe Ratio (14), in die das lageunabhängige Risikomaß $\sigma(R)$, die Renditestandardabweichung, einfließt. Aus diesem Grund nehmen wir noch einen weiteren Analyseschritt vor. Es gilt offenbar $r_0 - Q_\alpha(R) = r_0 + E(R) - E(R) - Q_\alpha(R) = E(R) - Q_\alpha(R) - [E(R) - r_0]$ und damit

$$\text{(18)} \qquad \frac{E(R) - r_0}{r_0 - Q_\alpha(R)} = \frac{1}{\dfrac{E(R) - Q_\alpha(R)}{E(R) - r_0} - 1} .$$

Die linke Seite wird also offenbar maximiert, wenn äquivalent der Quotient

(19) $$\frac{E(R)-r_0}{E(R)-Q_\alpha(R)} = \frac{E(R)-r_0}{E(R)-PMR_\alpha}$$

maximiert wird. Das hierin eingehende Risikomaß $E(R)-PMR_\alpha$ ist nun insbesondere lageunabhängig. Zu Zwecken einer vertieften Interpretation dieses Risikomaßes nehmen wir nun eine weitere Konstruktion vor. In Analogie zur Bestimmung der Größe Value at Risk (VaR), die üblicherweise[28] in absoluten Geldeinheiten und auf Basis einer Verlustvariablen L durch (bei Vorgabe eines Konfidenzniveaus α) die Forderung $P(L > VaR_\alpha) = \alpha$ bestimmt wird, betrachten wir die der Rendite R entsprechende Verlustvariable L = –R und definieren den Value at Risk VaR_α auf Renditeebene durch die Forderung

(20) $$P(-R > VaR_\alpha) = \alpha .$$

Der Rendite-VaR entspricht damit offenbar dem $(1-\alpha)$-Quantil der Verlustverteilung:

(21) $$VaR_\alpha(R) = Q_{1-\alpha}(L) = Q_{1-\alpha}(-R) .$$

Besitzt die Zufallsvariable R eine Dichte, so gilt[29] $Q_{1-\alpha}(-R) = -Q_\alpha(R)$, d.h.

(22) $$VaR_\alpha(R) = -PMR_\alpha .$$

Da der Rendite-VaR ebenso wie PMR_α ein lageabhängiges Risikomaß ist, wenden wir die vorstehende Konstruktion weitergehend auf die zentrierte Zufallsgröße $L - E(L) = E(R) - R$ an und erhalten als Resultat die Größe $MVaR$, den Mean-Value at Risk[30] auf Renditeebene. Es gilt insgesamt[31]

(24) $$\begin{aligned} MVaR_\alpha(R) &= Q_{1-\alpha}(L - E(L)) = Q_{1-\alpha}(L) - E(L) \\ &= E(R) + VaR_\alpha(R). \end{aligned}$$

Zur Erhöhung der Transparenz betrachten wir zur Illustration den Fall einer normalverteilten Rendite- und damit Verlustvariablen, hier gilt $Q_{1-\alpha}(L) = E(L) + N_{1-\alpha}\sigma(L)$, wobei $N_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$-Quantil der Standardnormalverteilung bezeichne und damit $VaR_\alpha = E(-R) + N_{1-\alpha}\sigma(-R) = N_{1-\alpha}(R) - E(R)$. Für die Größe $MVaR_\alpha$ gilt dann auf der Basis von (24) $MVaR_\alpha = VaR_\alpha + E(R)$, d.h. insgesamt

(25) $$MVaR_\alpha(R) = N_{1-\alpha}\sigma(R) .$$

Bei normalverteilten Renditen entspricht der Mean-VaR auf Renditeebene damit einem positiven Vielfachen der Standardabweichung, d.h. ist zur Renditestandardabweichung proportional. Damit unterstreicht die Analyse des Falls der Normalverteilung noch einmal die Relevanz der vorgenommenen Konstruktion.

Kehren wir zum allgemeinen Fall zurück. Unter Benutzung von (22) erhalten wir die folgende zu (24) alternative Darstellung

(26) $$\mathrm{MVaR}_\alpha(R) = E(R) - \mathrm{PMR}_\alpha .$$

Dies ist aber genau der Nenner von (19). Man vergleiche zu dieser Größe auch den entsprechenden Eintrag in Abbildung 1. Wir können damit insgesamt festhalten:

i) SF-Investoren treffen ihre Investmententscheidungen unter Verwendung des Risikomaßes $\mathrm{MVaR}_\alpha(R)$, dem Mean Value at Risk auf Renditeebene.

ii) Das optimale riskante Portfolio R_P wird von SF-Investoren auf der Basis des Quotienten

(27) $$\mathrm{SFR}(R) = \frac{E(R) - r_0}{\mathrm{MVaR}_\alpha(R)},$$

bestimmt, den wir im Weiteren als Safety first-Ratio (SF-Ratio) bezeichnen. Die Saftety first-Ratio (27) ist daher das relevante Maß zur Quantifizierung der Safety first-Performance (SF-Performance).

In den nächsten beiden Abschnitten wird dieses risikoadjustierte Performancemaß im Rahmen eines partialanalytischen Ansatzes (im Gegensatz zu einem Kapitalmarktgleichgewichtsansatz[32]) ökonomischen Anwendungen zugeführt. Betrachtet wird dabei jeweils ein Investor bzw. Entscheidungsträger, der als Preisnehmer agiert.

5. Anwendung im Investmentmanagement: Safety first-Ratio

Die Sharpe-Ratio[33] (14) ist nach wie vor unzweifelhaft *das* Standardmaß für eine risikoadjustierte Performancemessung im Bereich des Investmentmanagements. Intuitiv misst sie die Höhe der Risikoprämie $E(R) - r_0$ pro Einheit Risiko, quantifiziert durch die Renditestandardabweichung. Das in die Sharpe-Ratio eingehende Risikomaß, die Renditestandardabweichung liefert zugleich den zentralen Kritikpunkt an der Sharpe-Ratio. Die Standardabweichung ist[34] nur für solche Verteilungen ein gutes Risikomaß, die (approximativ) symmetrisch um den Erwartungswert verteilt sind, wie etwa die Normalverteilung oder generell elliptische Verteilungen. Zu den "Stylized Facts" der Zeitreihen von Finanzmarktdaten zählt aber insbesondere[35], dass viele Finanzmarktrenditen asymmetrischer Natur sind (dies gilt insbesondere für Alternative Investments oder Optionspositionen).

Vor diesem Hintergrund sind in der Literatur zahlreiche Risikomaße entwickelt worden[36], die im Gegensatz zur Standardabweichung auf einer asymmetrischen Risikomessung (etwa auf der Basis von Lower Partial Moments, dem Value at Risk oder dem Conditional Value at Risk), d.h. auf einer Berücksichtigung des Downside-Risikos, beruhen. Korrespondierend sind in der Literatur zahlreiche risikoadjustierte Performancemaße entwickelt worden[37], die auf asymmetrischen Risikomaßen beruhen. Diese sind jedoch überwiegend[38] dem Grunde nach reine Ad hoc-Modifikationen der Sharpe-Ratio, indem einfach das Risikomaß Standardabweichung durch ein asymmetrisches Risikomaß ersetzt wird[39]. Im Gegensatz zur Sharpe-Ratio besitzen sie keine theoretische Begründung. Die zentrale entscheidungstheoretische Eigenschaft der Sharpe-Ratio besteht darin, dass[40]

i) alle Erwartungswert-Varianz (EV)-Investoren im rein riskanten Teil ihres Portfolios das Tangentialportfolio, d.h. das Portfolio mit der maximalen Sharpe-Ratio, realisieren,

ii) alle optimalen (Kombinations-) Portfolios die gleiche Sharpe-Ratio aufweisen wie das Tangentialportfolio.

Dieses für EV-Investoren gültige Resultat lässt sich in vollkommener Analogie für SF-Investoren formulieren. Alle SF-Investoren realisieren dasjenige rein riskante Portfolio mit maximalem Quotienten (13) bzw. – wie wir gezeigt haben – äquivalent hierzu mit maximaler SF-Ratio (27). Alle optimalen Kombinationsportfolios weisen zudem die gleiche maximale SF-Ratio auf. Dies sieht man etwa wie folgt. Ist P das optimale rein riskante Portfolio, so hat offenbar jedes auf P beruhende Kombinationsportfolio mit zugehöriger Rendite R gemäß (3) die gleiche SF-Ratio wie P. Im Zähler der SF-Ratio haben wir unter Verwendung von (6) $E(R) - r_0 = r_0 + a[E(R_P) - r_0] - r_0 = a[E(R_P) - r_0]$. Im Nenner der SF-Ratio haben wir unter Verwendung von (6) und (7)

$$
\begin{aligned}
MVaR_\alpha(R) &= E(R) - Q_\alpha(R) \\
&= r_0 + a[E(R_P) - r_0] - r_0 + a[r_0 - Q_\alpha(R_P)] \\
&= a[E(R_P) - Q_\alpha(R_P)].
\end{aligned}
$$

Damit haben wir insgesamt

$$
(28) \qquad SFR(R) = \frac{a[E(R_P) - r_0]}{a[E(R_P) - Q_\alpha(R_P)]} = \frac{E(R_P) - r_0}{MRVaR_\alpha(R_P)} = SFR(R_P),
$$

d.h. den Nachweis der getätigten Behauptung.

So wie die Sharpe-Ratio die adäquate risikoadjustierte Performancekennzahl für EV-Investoren ist, so ist die SF-Ratio die adäquate risikoadjustierte Performancekennzahl für SF-Investoren. Damit beinhaltet die SF-Ratio eine Performancekennzahl unter Berücksichtigung des Downside-Risikos, die – im Gegensatz zu alternativen in der Literatur entwickelten Performancemaßen unter Berücksichtigung des Downside-Risikos – entscheidungstheoretisch fundiert ist und keine reine Ad hoc-Modifikation der Sharpe-Ratio darstellt. Zu den zahlreichen Ad hoc-Modifikationen der Sharpe-Ratio zählt auch der VaR-Ratio[41], bei dem im Nenner der Sharpe-Ratio die Standardabweichung durch den Value at Risk (auf Renditebasis) ersetzt wird. In der Variante, in der auf den Mean-Value at Risk (auf Renditeebene) abgestellt wird[42], entspricht dieses Performancemaß der SF-Ratio und erfährt damit eine theoretische Begründung. Die SF-Ratio kann somit auch als Mean VaR-Ratio oder als Reward to Mean-VaR-Ratio bezeichnet werden.

Abschließend betrachten wir noch den Fall normalverteilter Renditen, aufgrund von (25) konkretisiert sich die SF-Ratio hier zu

$$
(29) \qquad SFR(R) = \frac{E(R) - r_0}{N_{1-\alpha}\sigma(R)} = \frac{1}{N_{1-\alpha}} \cdot SR(R).
$$

Die Safety first-Ratio ist in diesem Fall somit ein konstantes Vielfaches der Sharpe-Ratio. Dieses Resultat lässt sich systematisch ausdehnen auf den Fall elliptischer Verteilungen[43], wie wir im Folgenden skizzieren werden. Folgt die Renditeverteilung einer (hier univariaten) elliptischen Verteilung mit Dichtegenerator g, $R \sim E_1(\mu, \sigma^2, g)$, so besitzt sie eine Dichtefunktion der Form

(30)
$$f(x) = \frac{1}{\sigma} g\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right].$$

Gilt für den Dichtegenerator $g(x) = \exp(-x/2)/(2\pi)^{1/2}$, so liegt im Spezialfall eine Normalverteilung vor. Elliptische Verteilungen stellen also insoweit Verallgemeinerungen der Normalverteilung dar, als dass sie ebenfalls nur von den Parametern μ und σ abhängen, jedoch eine andere Form der Dichte besitzen. Die Form des Dichtegenerators g legt die betreffende Unterfamilie der Familie der elliptischen Verteilungen fest. Allgemein gelten dabei die Beziehungen $E(R) = \mu$ und $\mathrm{Var}(R) = c\sigma^2$ mit einer Proportionalitätskonstante $c > 0$ (wobei im Falle der Normalverteilung $c = 1$ ist). Aus der Beziehung (30) wird zudem deutlich, dass die Dichten elliptischer Verteilungen wie im Falle der Normalverteilung symmetrisch zum Erwartungswert sind. Bekannte Vertreter der elliptischen Verteilungen sind die t-Verteilung $(c = n/(n-2)$, wobei n dem Freiheitsgrad der Verteilung entspricht) sowie die logistische Verteilung $(c = \pi^2/3)$. Daneben gehören die (symmetrische) stabile Verteilung und die (symmetrische) hyperbolische Verteilung zur Familie der elliptischen Verteilungen. Insbesondere können innerhalb der Familie der elliptischen Verteilungen beliebig schwere Verteilungsenden repräsentiert werden, was in Übereinstimmung mit den bereits angeführten Stylized Facts von Finanzmarktzeitreihen steht. Lediglich Asymmetrien in der Verteilung (wie etwa bei optionierten Positionen oder alternativen Investments regelmäßig der Fall) können im Rahmen elliptischer Verteilungen nicht abgebildet werden.

Wir standardisieren nun die Renditeverteilung, d.h. betrachten die Transformation

(31)
$$R^* = \frac{R-\mu}{\sigma} = \frac{R - E(R)}{\sigma(R)/\sqrt{c}}.$$

Hieraus resultiert eine Zufallsgröße mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 1$. Im Falle der Normalverteilung entspricht dies der Standardnormalverteilung, im allgemeinen Fall dem Übergang zu der sog. sphärischen Verteilung $R^* \sim S_1(g)$ innerhalb der Unterfamilie der elliptischen Verteilungen mit Dichtegenerator g. Das α-Quantil bzw. das $1-\alpha$-Quantil dieser sphärischen Verteilung bezeichnen wir mit $Z_\alpha(g)$ bzw. $Z_{1-\alpha}(g)$. Aufgrund der Symmetrie sphärischer Verteilungen gilt $Z_{1-\alpha}(g) = -Z_\alpha(g)$. Aufgrund der im Anhang nachgewiesenen Linearität des Quantils bei positiven linearen Transformationen gilt nun

(32)
$$Q_\alpha(R^*) = \frac{Q_\alpha(R) - E(R)}{\sigma(R)/\sqrt{c}}$$

und damit

(33)
$$Q_\alpha(R) = E(R) + Q_\alpha(R^*)\sigma(R)/\sqrt{c}.$$

Da offenbar $Q_\alpha(R^*) = Z_\alpha(g)$ und unter Ausnutzung der Eigenschaft $Z_{1-\alpha}(g) = -Z_\alpha(g)$, erhalten wir insgesamt

(34) $$Q_\alpha(R) = E(R) - \frac{1}{\sqrt{c}} Z_{1-\alpha}(g)\sigma(R).$$

Da $MVaR_\alpha(R) = E(R) - Q_\alpha(R)$ folgt hieraus insgesamt für die elliptische Verteilungen

(35) $$MVaR_\alpha(R) = \frac{1}{\sqrt{c}} Z_{1-\alpha}(g)\sigma(R),$$

d.h. der Mean Value at Risk auf Renditeebene ist proportional zur Standardabweichung. Die Safety first-Ratio im Falle elliptischer Verteilungen lautet somit

(36) $$SFR(R) = \frac{E(R) - r_0}{Z_{1-\alpha}(g)\sigma(R)\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c}}{Z_{1-\alpha}(g)} SR(R)$$

und ist damit proportional zur Sharpe-Ratio. Die Maximierung der SF-Ratio und die Maximierung der Sharpe-Ratio sind somit im Falle elliptischer Verteilungen zueinander äquivalent. Erst im Falle asymmetrischer Renditeverteilungen wird es daher zu unterschiedlichen Ergebnissen kommen, wenn man die SF-Ratio anstelle der Sharpe-Ratio zu Zwecken der Performancemessung verwendet. Dies demonstrieren wir im Weiteren anhand der logarithmischen Normalverteilung, d.h. $1 + R \sim LN(m, v^2)$, wobei dieses Ergebnis ohne Probleme auf log-elliptische Verteilungen ausgedehnt werden kann. Es gilt zunächst[44] $E(R) = \exp(m + \tfrac{1}{2}v^2) - 1$ sowie $\sigma(R) = E(R)\sqrt{\exp(v^2) - 1}$, d.h. die Sharpe Ratio ergibt sich bei Annahme einer logarithmischen Normalverteilung von $1 + R$ zu

(37) $$SR(R) = \frac{\exp(m + \frac{1}{2}v^2) - (1 + r_0)}{[\exp(m + \frac{1}{2}v^2) - 1]\sqrt{\exp(v^2) - 1}}.$$

Des Weiteren ist der PMR in diesem Fall gegeben durch[45] $PMR_\alpha = \exp(m - N_{1-\alpha}v) - 1$. Für die SF-Ratio gilt daher im Falle einer logarithmisch normalverteilten Größe $1 + R$

(38) $$SFR(R) = \frac{\exp(m + \frac{1}{2}v^2) - (1 + r_0)}{\exp(m + \frac{1}{2}v^2) - \exp(m - N_{1-\alpha}v)}.$$

Der Nenner der Sharpe Ratio (37) ist gegeben durch $E(R) \cdot \sqrt{\exp(v^2) - 1}$, der Nenner der SF-Ratio hingegen durch $[E(R) - 1] - [\exp(m - N_{1-\alpha}v) - 1]$. Offenbar stehen diese beiden Größen nicht in einer zueinander proportionalen (von m und v unabhängigen) Beziehung. Sharpe-Ratio und SF-Ratio führen daher im Falle logarithmisch normalverteilter Renditen (bzw. präzise logarithmisch normalverteilter Aufzinsungsfaktoren $1 + R$) im Allgemeinen zu unterschiedlichen Rankings bei Durchführung einer Performancemessung.

6. Anwendung im Risikomanagement: Safety first-RORAC

Im Rahmen eines unternehmensweiten Risikomanagements[46], insbesondere im Banken[47]- und Versicherungsbereich[48], ist der sogenannte Return on Risk Adjusted Capital (RORAC) eine zentrale (risikoadjustierte) Steuerungsgröße. In seiner Grundform ist der RORAC definiert durch[49]

(39) $$\text{RORAC} = \frac{\text{erwarteter Gewinn}}{\text{Risikokapital}},$$

wobei in vielen Anwendungen[50] das *Risikokapital* dem *ökonomischen Kapital* entspricht. Das ökonomische Kapital ist dabei dasjenige Kapital, das zur Deckung des[51] "Unexpected Loss", d.h. der Größe $L - E(L)$ dient, wobei $L = -G$ die der Gewinngröße G entsprechende Verlustgröße bezeichne. Verwenden wir nun standardmäßig die Value at Risk-Konzeption zu einem vorgegebenen Konfidenzniveau α zur Bestimmung des Risikokapitals, so wird klar, dass im vorliegenden Fall der bereits angesprochene Mean-VaR die zentrale Größe zur Bestimmung des Risikokapitals ist und wir erhalten als quantitatives Gegenstück zu (27)

(40) $$\text{RORAC} = \frac{E(G)}{\text{MVaR}_\alpha(G)},$$

wobei $\text{MVaR}_\alpha(G) = Q_{1-\alpha}(L) - E(L) = \text{VaR}_\alpha(G) - E(L) = \text{VaR}_\alpha(G) + E(G)$.

Soweit zunächst einmal zu RORAC-Standardansatz des Risikomanagements. Wie sehen nun die Verhältnisse unter Zugrundelegung der in Abschnitt 4 gewonnenen Ergebnisse über die Safty first-Performance aus? Hierzu müssen wir die auf der Basis von Renditegrößen gewonnenen Ergebnisse auf die Ebene von absoluten Geldeinheiten transformieren. Bezeichne dazu v_0 den (bekannten) anfänglichen Marktwert eines (einperiodigen) Investments und V_1 den (unsicheren) Periodenendwert. Die entsprechende Wertänderung ist $\Delta V = V_1 - v_0$, dies entspricht dem Periodengewinn in absoluter Höhe, d.h. $G = \Delta V$. Wir haben daher die folgenden Zusammenhänge zwischen Gewinn- und Renditegröße

(41) $$R = \frac{\Delta V}{v_0} = \frac{G}{v_0} \quad \text{bzw.} \quad G = \Delta V = v_0 R.$$

Für die korrespondierende Verlustgröße $L = -G$ gilt daher

(42) $$L = -\Delta V = -v_0 R.$$

Der Value at Risk VaR zum Konfidenzniveau α ist definiert durch die Forderung $P(L > \text{VaR}_\alpha) = \alpha$ und es gilt $\text{VaR}_\alpha = Q_{1-\alpha}(L)$. Der Mean-Value at Risk ergibt sich entsprechend zu

(43) $$\text{MVaR}_\alpha(G) = Q_{1-\alpha}(L) - E(L) = Q_{1-\alpha}(L) + E(G).$$

Für den Zähler der SF-Ratio (27) gilt $E(R) - r_0 = [E(G) - r_0 v_0]/v_0$ und für den Nenner[52] $MVaR_\alpha(R) = E(R) - Q_{1-\alpha}(-R)$. Da gemäß (42) $Q_{1-\alpha}(-R) = Q_{1-\alpha}(L/v_0) = Q_{1-\alpha}(L)/v_0$ und $E(R) = E(G)/v_0$, haben wir somit

(44)
$$\begin{aligned} SFR(G) &= \frac{[E(G) - r_0 v_0]/v_0}{[Q_{1-\alpha}(L) + E(G)]/v_0} \\ &= \frac{E(G) - r_0 v_0}{MVaR_{1-\alpha}(G)}. \end{aligned}$$

Im Kontext eines unternehmensweiten Risikomanagements liefert die SF-Ratio damit eine entscheidungstheoretische Fundierung[53] einer RORAC-Größe, die wir im Weiteren als Safety first-RORAC (SF-RORAC) bezeichnen.

Es gilt dann gemäß (44)

(45)
$$\text{SF-RORAC} = \frac{E(G) - r_0 v_0}{MVaR_\alpha(G)}.$$

Der Unterschied zur "literaturüblichen" RORAC-Größe gemäß (40) besteht demnach lediglich in der Berücksichtigung des sicheren Gewinnes $r_0 v_0$ bei einer alternativen sicheren Anlage des anfänglichen Vermögenswerts v_0.

Eine Maximierung des Safety first-RORAC führt damit zu einer optimalen Steuerung der (riskanten) Gesamtposition eines Unternehmens, die konsistent ist zum Ansatz einer Safety first-Optimierung.

In praxi wird die RORAC-Steuerung typischerweise so umgesetzt, dass ein Mindestwert für die RORAC vorgegeben wird, die sogenannte Hurdle Rate r_H, d.h.

(46)
$$RORAC \geq r_H.$$

Diese Steuerungskonzeption angewendet auf den SF-RORAC gemäß (45) führt zu der Forderung

(47)
$$E(G) \geq r_0 v_0 + MVaR_\alpha(G) \cdot r_H.$$

Dies impliziert, dass das Unternehmen einen Aufschlag auf den risikolos zu erzielenden Ertrag auf den anfänglichen Vermögenswert v_0 fordert, wenn riskante Aktivitäten realisiert werden sollen. Der geforderte Aufschlag ist dabei proportional zu dem durch den Mean-VaR quantifizierten Risiko.

7. Kapitalmarktgleichgewicht

Auf der Basis des Separationstheorems von Tobin lassen sich im Falle von EV-Investoren die erwarteten Renditen von Wertpapierportfolios im Kapitalmarktgleichgewicht durch Maximierung der Sharpe-Ratio bestimmen[54]. Das entsprechende Resultat, die sog. Wertpapiermarktlinie, ist eines der beiden Hauptresultate des Capital Asset Pricing-Modells (CAPM). Entsprechend lässt sich auch für SF-Investoren eine Kapitalmarktgleichgewichtsbeziehung herleiten. Arzac/Bawa 1977 gelingt vor diesem Hintergrund eine allgemeine strukturelle Charakterisierung des Kapitalmarktgleichgewichts und eine explizite Lösung (die mit der CAPM-Wertpapiermarktlinie übereinstimmt) für den Fall der Normalverteilung. Durch Verwendung von Ergebnissen im Kontext von Quantilableitungen können wir das strukturelle Ergebnis von Arzac/Bawa 1977 weiter substantiieren und können die Bestimmung einer expliziten Lösung auf den Fall der elliptischen Verteilungen verallgemeinern.

Zur Vorbereitung der weiteren Ableitungen definieren wir zunächst die Safety first-Ratio (27) in Termen der Portfoliogewichte der rein riskanten Finanztitel:

(48) $$SFR(x_1,...,x_n) = \frac{E(R) - r_0}{MVaR_\alpha(R)} = \frac{F(x_1,...,x_n)}{G(x_1,...,x_n)}.$$

Dabei sind die Größen $x_1,...,x_n$ beliebige reelle Zahlen. Diese müssen sich nicht mehr zu eins aufaddieren, da die Differenz zu eins den Umfang der risikolosen Anlage bzw. der risikolosen Kapitalaufnahme angibt. Mit $R - r_0 = \Sigma x_i(R_i - r_0)$ ergibt sich

$$F(x_1,...,x_n) = E(R - r_0) = \Sigma x_i[E(R_i) - r_0]$$

sowie

$$G(x_1,...,x_n) = \Sigma x_i[E(R_i) - Q_\alpha(\Sigma x_i R_i)].$$

Im Optimum müssen die Bedingungen 1. Ordnung gelten, d.h. $\partial SFR / \partial x_j = 0$ für alle $j = 1,..., n$. Dies ist offenbar äquivalent zu

(49) $$\partial F / \partial x_j = \partial G / \partial x_j \cdot \frac{F}{G} \quad (j = 1,...,n).$$

Die partiellen Ableitungen $\partial F / \partial x_j$ sind dabei gegeben durch die Größe $E(R_j) - r_0$. Zur Bestimmung der Größen $\partial F / \partial x_j$ müssen zunächst die Quantilableitungen $\partial Q_\alpha(R) / \partial x_j$ bestimmt werden, die bei Arzac/Bawa 1977 nicht weiter spezifiziert werden. Ergebnisse zur quantitativen Bestimmung von Quantilableitungen wurden inzwischen erzielt von Gourieroux/Laurent/Scaillet 2000 und Martin/Wilde 2002. Auf Basis dieser Ergebnisse erhalten wir

(50) $$\partial Q_\alpha(R) / \partial x_j = -E[R_j \mid R = Q_\alpha(R)].$$

Die Validität dieses Ergebnisses setzt dabei (nur) voraus, dass der Vektor $(R_1,...,R_n)$ der riskanten Finanztitel eine gemeinsame (multivariate) Dichtefunktion $f(r_1,...,r_n) \geq 0$ besitzt. Das Ergebnis (50) ist somit unter relativ schwachen Voraussetzungen valide. Strukturell ist die Quantilableitung bestimmbar durch den bedingten Erwartungswert der Größe R_j gegeben die Information, dass die Realisation der Rendite des Kombinationsportfolios dem Quantil der

Renditeverteilung entspricht. Die Größe $E[R_j \mid R = Q_\alpha(R)]$ ist dabei charakterisierbar[55] als die beste Vorhersage[56] (best prediction) der Größe R_j gegeben die Information $R = Q_\alpha(R)$.

Insgesamt haben wir damit das Ergebnis

(51) $$\partial G / \partial x_j = E(R_j) - E[R_j \mid R = Q_\alpha(R)].$$

Berücksichtigt man nun noch, dass im Kapitalmarktgleichgewicht das optimale riskante Portfolio dem Marktportfolio entsprechen muss[57], so lauten die Bedingungen 1. Ordnung insgesamt

(51a) $$E(R_j) - r_0 = [E(R_M) - r_0] \cdot \frac{E(R_j) - E[R_j \mid R_M = Q_\alpha(R_M)]}{MVaR_\alpha(R_M)}.$$

Der "Betafaktor" im SF-Kapitalmarktgleichgewicht lautet somit

(51b) $$\begin{aligned}\beta_{SF}(R_j, R_M) &= \frac{E(R_j) - E[R_j \mid R_M = Q_\alpha(R_M)]}{MVaR_\alpha(R_M)} \\ &= \frac{E(R_j) - E[R_j \mid R_M = Q_\alpha(R_M)]}{E(R_M) - Q_\alpha(R_M)}.\end{aligned}$$

Dieses Resultat setzt nur die Existenz der Quantilableitungen (50) voraus, wofür – wie bereits ausgeführt – nur die Existenz einer gemeinsamen Dichtefunktion von $(R_1, \ldots, R_n)$ erforderlich ist.

Zur weiteren Interpretation merken wir an, dass das Quantil $Q_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = Q_\alpha(\Sigma x_i R_i)$ eine positive homogene Funktion ist und damit nach Eulers Theorem gilt

$$Q_\alpha(\Sigma x_i R_i) = \Sigma x_j \, \partial Q_\alpha / \partial x_j = \Sigma x_j \, E[R_j \mid R_M = Q_\alpha(R_M)].$$

Da der Erwartungswert linear ist, entspricht somit insgesamt der Zähler von (51b) den Risikobeiträgen des j-ten Finanztitels zum Gesamtrisiko $MVaR_\alpha(R_M)$ des Marktportfolios. Dieses Ergebnis ist vollständig analog zum CAPM, d.h. dem Kapitalmarktgleichgewicht für EV-Investoren. Hier lautet der Betafaktor $\beta(R_j, R_M) = Cov(R_j, R_M)/Var(R_M)$ und es gilt
$\Sigma x_j^M \, Cov(R_j, R_M) = \Sigma Cov(x_j^M R_j, R_M) = Cov(R_M, R_M) = Var(R_M)$.

Problematisch an der SF-Wertpapiermarktlinie ist nun allerdings, dass der Zähler des Betafaktors β_{SF} in (51b) nur strukturell gegeben ist und nicht durch einen expliziten analytischen Ausdruck. Aus empirischer Sicht stellt dies aber kein gravierendes Problem dar, auf der Basis der Theorie der Kerndichteschätzer lässt sich der in (51b) eingehende (bedingte) Erwartungswert etwa durch den Nadaraya-Watson-Kernschätzer[58] (in der entsprechend bedingten Variante) im Rahmen einer nichtparametrischen Schätzung bestimmen. Im Weiteren soll der Fokus jedoch darauf liegen, auf der analytischen Ebene weitere Ergebnisse zu erzielen. Zunächst bietet es sich, die beste Vorhersage $E(Y \mid X)$ einer Zufallsvariable Y durch die Zufallsvariable X zu approximieren durch die korrespondierende beste lineare Vorhersage, d.h. Lösung der

Minimierungsaufgabe $E[(Y - a_0 - a_1 X)^2)] \rightarrow \min!$. Diese resultierende Approximation ist allgemein gegeben durch[59]

$$(52) \qquad E(Y \mid X) \approx E(Y) + \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)}\,[X - E(X)].$$

Auf der Basis dieses Ergebnisses erhalten wir die folgende Approximation des SF-Betafaktors gemäß (51b):

$$(53) \qquad \begin{aligned} &\beta_{SF}(R_j, R_M) \\ &\approx -\frac{[\mathrm{Cov}(R_j, R_M)/\mathrm{Var}(R_M)]\,[Q_\alpha(R_M) - E(R_M)]}{E(R_M) - Q_\alpha(R_M)} \\ &= \frac{\mathrm{Cov}(R_j, R_M)}{\mathrm{Var}(R_M)} = \beta(R_j, R_M)\,. \end{aligned}$$

Ersetzen wir somit den im Zähler von (51b) auftretenden bedingten Erwartungswert durch seine lineare Approximation, so erhalten wir genau den Betafaktor des CAPM. In diesem Sinne kann somit die Wertpapiermarktlinie im CAPM-Gleichgewicht als lineare Approximation der Wertpapiermarktlinie im SF-Kapitalmarktgleichgewicht angesehen werden!

Es existiert in diesem Kontext noch ein weitergehendes Resultat. Es ist bekannt, dass im Falle elliptischer Verteilungen die beste Vorhersage linear ist[60], d.h. in der Beziehung (52) gilt die Identität. Setzen wir also voraus, dass der Vektor $(R_1, \ldots, R_n)$ der riskanten Finanztitel multivariat elliptisch verteilt ist[61], so gilt auch in der Beziehung (53) die Identität. Es kann also festgehalten werden, dass im Falle elliptischer Verteilungen die Wertpapiermarktlinie für SF-Investoren und EV-Investoren identisch ist. Angesichts des Ergebnisses (35), dass im Falle der elliptischen Verteilungen der Mean Value at Risk auf Renditeebene proportional zur Standardabweichung ist, ist dies allerdings auch nicht verwunderlich. Wiederum ergeben sich Abweichungen von den Ergebnissen für EV-Investoren erst im Falle asymmetrischer Renditeverteilungen. Dies wird etwa ersichtlich, wenn man statt der besten linearen Vorhersage als Approximation für $E(Y \mid X)$ die beste quadratische Vorhersage verwendet, d.h. die Lösung der Minimierungsaufgabe $E[(Y - a_0 - a_1 X - a_2 X^2)^2] \rightarrow \min!$ Auf Basis der resultierenden Lösung dieses Problems erhalten wir die folgende[62] Approximation für den Zähler des SF-Betafaktors aus (51b):

$$(54a) \qquad \begin{aligned} &E(R_j) - E[R_j \mid R_M = Q_\alpha(R_M)] \\ &\approx a_1[Q_\alpha(R_M) - E(R_M)] + a_2[Q_\alpha(R_M)^2 - E(R_M^2)]\,, \end{aligned}$$

wobei

$$(54b) \qquad a_1 = \frac{1}{H}[\mathrm{Cov}(R_j, R_M)\,\mathrm{Var}(R_M^2) - \mathrm{Cov}(R_j, R_M^2)\,\mathrm{Cov}(R_M, R_M^2)]$$

$$(54c) \qquad a_2 = \frac{1}{H}[\mathrm{Cov}(R_j, R_M^2)\,\mathrm{Var}(R_M) - \mathrm{Cov}(R_j, R_M)\,\mathrm{Cov}(R_M, R_M^2)]$$

(54d)
$$\begin{aligned} H &= \mathrm{Var}(R_M)\cdot \mathrm{Var}(R_M^2) - \mathrm{Cov}(R_M, R_M^2)^2 \\ &= \mathrm{Var}(R_M)\cdot \mathrm{Var}(R_M^2)[1-\rho^2(R_M, R_M^2)]\ . \end{aligned}$$

Berücksichtigt man noch die Zusammenhänge

(55a)
$$\mathrm{Var}(R_M^2) = E(R_M^4) - (E(R_M^2))^2$$

(55b)
$$\mathrm{Cov}(R_M, R_M^2) = E(R_M^3) - E(R_M)\ E(R_M^2)\ ,$$

so wird deutlich, dass nunmehr auch die dritten und vierten Momente, mithin also letztlich Schiefe und Kurtosis der Rendite des Marktportfolios in der SF-Kapitalmarktgleichgewichtsbeziehung zu berücksichtigen sind. Neben die Kovarianz von R_j und R_M tritt im Vergleich zur linearen Approximation bzw. zum CAPM-Gleichgewicht zudem noch der Kovarianzterm $\mathrm{Cov}(R_j, R_M^2)$.

Eine Möglichkeit, den letzten Ausdruck zu approximieren, besteht in der folgenden Vorgehensweise. Entwickeln wir die Zufallsvariable $Z = f(Y)$ in eine Potenzreihe um E(Y), so erhalten wir approximativ $Z \approx f[E(Y)] + [Y - E(Y)]\ f'[E(Y)]$ und damit

(56)
$$\mathrm{Cov}(X, f(Y)) \approx f'[E(Y)]\ \mathrm{Cov}(X, Y)\ .$$

Mit $X = R_j$, $Y = R_M$ und $f(y) = y^2$ erhalten wir daher approximativ

(57)
$$\mathrm{Cov}(R_j, R_M^2) \approx 2\,\mathrm{Cov}(R_j, R_M)\,E(R_M)\ .$$

Gilt in (56) die Identität, so ist diese Beziehung als Steins Lemma bekannt. Für breite Klassen von Verteilungen, so etwa für die Klasse der elliptischen Verteilungen[63], der Exponentialfamilie von Verteilungen[64] sowie Verteilungen, die dem Pearson-System angehören[65], kann nachgewiesen werden, dass Steins Lemma erfüllt ist.

Anhang: Eigenschaften des Quantils einer Verteilung

Wir definieren das Quantil $Q_\alpha(X)$ der Verteilung der Zufallsvariablen X durch die Forderung $P[X \le Q_\alpha(X)] = \alpha$ und unterstellen, dass X eine Dichtefunktion besitzt, um diese Definition eindeutig zu machen[66]. Die Zufallsvariable $Y = aX + b$ sei nun eine positive ($a > 0$) lineare Transformation der Zufallsvariablen X. Für das α-Quantil $Q_\alpha(Y)$ von Y gilt dann

$$\alpha = P[Y \le Q_\alpha(Y)] = P[aX + b \le Q_\alpha(Y)] = P[X \le (Q_\alpha(Y) - b)/a].$$

Somit gilt für das α-Quantil $Q_\alpha(X)$ von X

$Q_\alpha(X) = (Q_\alpha(Y) - b)/a$ und damit $Q_\alpha(Y) = a\,Q_\alpha(X) + b$.

Auf Ebene der Quantile besteht somit eine identische positive lineare Beziehung.

Die Zufallsvariable X (und damit auch die Zufallsvariable –X) besitzt eine Dichte, insbesondere gilt somit $P(-X < a) = P(-X \le a)$. Es gilt dann für das $(1-\alpha)$-Quantil $Q_{1-\alpha}(X)$ von X:

$$\alpha = P[X > Q_{1-\alpha}(X)] = P[-X < -Q_{1-\alpha}(X)] = P[-X \le -Q_{1-\alpha}(X)]$$

und damit

$Q_\alpha(-X) = -Q_{1-\alpha}(X)$ bzw. $Q_\alpha(X) = -Q_{1-\alpha}(-X)$.

Anmerkungen

1 In der Literatur auch als Benchmarkrendite, (angestrebte) Mindestrendite, Targetrendite, Threshold oder Desaster Level bezeichnet.

2 Vgl. zu dieser Nomenklatur etwa Albrecht/Maurer 2008, S. 123.

3 Vgl. zu diesem Prinzip etwa Schneeweiß 1967, S. 39.

4 Vgl. hierzu Arzac/Bawa 1977, S. 278.

5 Ebenda.

6 Vgl. hierzu Arzac/Bawa 1977, S. 279.

7 Ebenda.

8 Zumindest auf der konzeptuellen Ebene.

9 Vgl. zu dieser Nomenklatur etwa Albrecht/Maurer 2008, S. 281.

10 Vgl. Albrecht 1994, S. 6 ff.

11 Vgl. etwa Albrecht/Maurer 2008, S. 281.

12 Ebenda, S. 303 ff.

13 Vgl. etwa Albrecht/Maurer 2008, S. 306.

14 $R_0 \equiv r_0$ ist eine zulässige Rendite und es kann $P(R_0 \le z) \le \alpha < 1$ nur gelten, wenn $z < r_0$, ansonsten ist $P(R_0 \le z) = 1$, d.h. die sichere Anlage wäre keine für einen SF-Investor realisierbare Anlage.

15 So die Nomenklatur in Arzac/Bawa 1977, S. 280.

16 Vgl. den Anhang.

17 Wird eine Verteilung von R_P mit Träger $(-\infty,+\infty)$ unterstellt, dann gilt sogar $\lim_{\alpha \to 0} Q_\alpha(R_P) = -\infty$

18 Die in der Abbildung enthaltene Größe MVaR wird in Abschnitt 4 eingeführt.

19 Arzac/Bawa 1977, S. 281 führen ferner aus, dass die *relative* Risikoaversion steigend ist für z > 0, konstant für z = 0 sowie fallend für z > 0.

20 Vgl. etwa Albrecht/Maurer 2008, S. 306.

21 Ebenda.

22 Vgl. etwa Owen/Rabinovitch 1983, die elliptische Renditeverteilungen zugrundelegen.

23 Vgl. etwa Cass/Stiglitz 1970 sowie Breuer/Gürtler 2006, die von Nutzenfunktionen des HARA-Typus ausgehen.

24 Der im Zentrum des vorliegenden Beitrags stehende Value at Risk bzw. Mean Value at Risk erfüllt diese Bedingungen allerdings nicht. Zudem ist der Safety first-Ansatz nicht unter die Erwartungswert-Risiko-Modelle subsumierbar.

25 Vgl. hierzu etwa Albrecht/Maurer 2008, S. 132.

26 Dies sieht man am einfachsten für normalverteilte Renditen, hier gilt – vgl. etwa Albrecht/Maurer 2008, S. 132 $PMR_\alpha = E(R) - N_{1-\alpha}\sigma(R)$, wobei $N_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$-Quantil der Standardnormalverteilung bezeichne. Damit geht die Höhe des Erwartungswerts in PMR_α und damit auch (17) ein.

27 Im Sinne der Terminologie von Albrecht/Maurer 2008, S. 120 liegt ein Risikomaß des Typus II (Risiko als notwendiges Kapital bzw. als notwendige Rendite) und nicht des Typus I (Risiko als Ausmaß der Abweichungen von einer Zielgröße) vor. Rockafellar et al. 2008 bezeichnen Risikomaße des Typus I als Deviation Measures, geben für diese eine Axiomatisierung und leiten eine generelle Beziehung zu kohärenten Risikomaßen (des Typus II) her.

28 Vgl. etwa Albrecht/Maurer 2008, S. 130 ff.; McNeil et al. 2005, S. 35 ff.

29 Man vgl. die entsprechende Ableitung im Anhang.

30 Wir folgen hier der Nomenklatur von McNeil et al. 2005, S. 38. In Albrecht/Maurer 2008, S. 889 wird die entsprechende Größe als zentrierter Value at Risk bezeichnet. Jorion 2007, S. 108 spricht in diesem Kontext von "relative (to the mean) VaR" im Gegensatz zum "absolute VaR".

31 Wiederum unter Benutzung der Linearitätseigenschaft des Quantils.

[32] Zur Abgrenzung und Diskussion eines partialanalytischen Ansatzes im Vergleich zu einem Gleichgewichtsansatz vgl. auch Breuer/Gürtler 2006, S. 649 f.

[33] Vgl. für viele Albrecht/Maurer 2008, S. 314 ff.

[34] Vgl. etwa McNeil et al. 2005, S. 43 f.; Albrecht/Maurer 2008, S. 122 f.

[35] Vgl. etwa Cont 2001, S. 224.

[36] Für einen aktuellen Überblick vgl. etwa Biglova et al. 2004.

[37] Für aktuelle Überblicke vgl. etwa Biglova et al. 2004; Eling/Schuhmacher 2006; Farinelli et al. 2008.

[38] Eine Ausnahme stellen etwa die Resultate von Breuer/Gürtler 2006 im Hinblick auf Verallgemeinerungen der Sharpe-Ratio (sowie ebenso der Treynor-Ratio und Jensens Alpha) dar, die auf Nutzenfunktionen des HARA-Typus beruhen. Eine weitere Ausnahme bildet das auf einem verallgemeinerten Gini-Maß als Risikomaß basierende risikoadjustierte Performancemaß von Breuer/Gürtler 2007.

[39] Teilweise wird auch zusätzlich das in der Sharpe-Ratio eingehende Wertmaß $E(R) - r_0$ durch ein alternatives Wertmaß, etwa ein Upper Partial Moment, ersetzt.

[40] Vgl. hierzu etwa Albrecht/Maurer 2008, S. 306.

[41] Vgl. Biglova et al. 2004, S. 106.

[42] Wie dies etwa in Farinelli et al. 2008, S. 2059 geschieht.

[43] Für elliptische Verteilungen und ihre Standardeigenschaften verweisen wir generell auf Fang/Kotz 1990, Kapitel 2 und 3 sowie McNeil/Frey/Embrechts 2005, S. 89 ff.

[44] Vgl. etwa Albrecht/Maurer 208, S. 109.

[45] Ebenda., S. 132.

[46] Vgl. etwa McNeil et al. 2005, S. 256.

[47] Vgl. etwa Bessis 2010; Hartmann-Wendels et al. 2007, S. 343 ff.; Lehar et al. 1998.

[48] Vgl. etwa Albrecht 1998; Cummins 2000.

[49] Vgl. etwa McNeil et al. 2005, S. 256.

[50] Ebenda.

[51] Vgl. etwa McNeil et al. 2005, S. 412.

[52] Man vgl. hierzu (26) und (21).

[53] Stoughton/Zechner 2007 diskutieren die Kennzahlen EVA und RAROC (also RORAC minus Hurdle Rate) im Rahmen eines agencytheoretischen Ansatzes und im Hinblick auf eine Risikokapitalallokation.

[54] Vgl. hierzu etwa Albrecht/Maurer 2008, S. 310.

[55] Vgl. etwa Klenke 2005, S. 171, Bemerkung 8.15.

[56] Im Sinne der Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers.

[57] Vgl. zu diesem Argument etwa Albrecht/Maurer 2008, S. 308.

[58] Vgl. etwa Pagan/Ullah 1999, Theorem 3.4.

[59] Vgl. etwa Parzen 1960, S. 387.

[60] Vgl. zu diesem Resultat bereits Kelker 1970.

[61] Damit ist dann auch (R_j, R_M) jeweils bivariat elliptisch verteilt, d.h. $E(R_j, R_M)$ ist linear in R_M.

[62] Dieses Resultat erhält man unter Zugrundelegung der besten Vorhersage von Y durch X_1 und X_2, vgl. hierzu etwa Parzen 1960, S. 388, wenn man $X_1 = X$ und $X_2 = X^2$ setzt.

[63] Vgl. etwa Landsman/Neslehova 2008.

[64] Vgl. etwa Arnold/Castillo/Sarabia 2001.

[65] Vgl. etwa Kattumanil 2008.

[66] Ansonsten wäre mit einer verallgemeinerten Quantildefinition zu arbeiten, vgl. hierzu etwa McNeil et al. 2005, S. 39.

Literatur

Albrecht P 1994 Gewinn und Sicherheit als Ziele der Versicherungsunternehmung: Bernoulli-Prinzip vs. Safety first-Prinzip, in: Schwebler R (Hrsg.) Dieter Farny und die Versicherungswissenschaft, Karlsruhe: 1-18

Albrecht P 1998 Risikoadjustierte Performancesteuerung n der Schadenversicherung, in: Oehler A (Hrsg.) Credit Risk und VaR-Alternativen, Stuttgart: 229-257

Albrecht P, Maurer R 2008 Investment- und Risikomanagement, 3. Aufl., Stuttgart

Arnold BC, Castillo E, Sarabia, JM 2001 A multivariate version of Stein´s identity with applications to moment calculations and estimation of conditionally specified distributions, Communications in Statistics, Theory and Methods 30 : 2512 - 2542

Arzac ER, Bawa VS 1977 Portfolio Choice and Equilibrium in Capital Markets with Safety-first Investors, Journal of Financial Economics 4: 277-288

Bessis J 2010 Risk Management in Banking, 3. Aufl., Chichester

Biglova A, Ortobelli S, Rachev ST, Stoyanov S 2004 Different approaches to risk estimation in portfolio theory, Journal of Portfolio Management, Fall 2004: 103-112

Breuer W, Gürtler M 2006 Performance Evaluation, Portfolio Selection and HARA Utility, European Journal of Finance 12 : 649 – 669

Breuer W, Gürtler M 2007 Yaari´s Dual Theory of Choice, Generalized Gini´s Mean Differences, and Performance Evaluation of Mutual Funds, in : Gregoriou GN (Hrsg.) Performance of Mutual Funds, An International Perspective : 127 - 151

Cass D, Stiglitz J 1970 The Structure of Investor Preferences and Asset Returns, and Separability in Portfolio Allocation: A Contribution to the Pure Theory of Mutual Funds, Journal of Economic Theory 2: 122-160

Cont R 2001 Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues, Quantitative Finance 1: 223-236

Cummins D 2000 Allocation of Capital in the Insurance Industry, Risk Management and Insurance Review 3: 7-27

Eling M, Schuhmacher F 2006 Hat die Wahl des Performancemaßes einen Einfluss auf die Beurteilung von Hedgefondsindizes?, Kredit und Kapital 39: 419-357

Farinelli S, Ferreira M, Rosello D, Thoeny M, Tibiletti L 2008 Beyond Sharpe Ratio: Optimal asset allocation using different performance ratios, Journal of Banking and Finance 32: 2057-2063

Gourieroux C, Laurent JP, Scaillet O 2000 Sensitivity Analysis of Value at Risk, Journal of Empirical Finance 7 : 225 - 245

Hartmann-Wendels T, Pfingsten A, Weber M 2007 Bankbetriebslehre, 4. Aufl., Berlin u.a.

Jorion P 2007 Value at Risk. The New Benchmark for Managing Financial Risk, 3. Aufl, New York u.a.

Kattumanil SK 2008 On Steins´s Identity and its Application, Indian Statistical Institute, New Delhi [http://www.isid.ac.in/~statmath/eprints]

Kelker D 1970 Distribution Theory of Spherical Distributions and a Location-Scale Parameter Generalization, Sankhya 32 : 419 - 430

Klenke, A 2006 Wahrscheinlichkeitstheorie, Berlin u.a.

Landsman Z, Neslehova J 2008 Stein´s Lemma for elliptical random vectors, Journal of Multivariate Analysis 99 : 912 - 927

Lehar A, Welt F, Wiesmar C, Zechner J 1998 Risikoadjustierte Performancemessung in Banken – Konzepte zur Risiko-Ertragssteuerung, Österreichisches Bankarchiv 46: 857-862, 949-955

Martin R, Wilde T 2002 Unsystematic credit risk, RISK, November 2002 : 123 - 128

McNeil AJ, Frey R, Embrechts P 2005 Quantitative Risk Management, Princeton, Oxford

Owen, J, Rabinovitch R 1983 On the Class of Elliptical Distributions and Their Applications to the Theory of Portfolio Choice, Journal of Finance 38: 745-752

Pagan A, Ullah A 1999 Nonparametric Econometrics, Cambridge

Parzen E 1960 Modern Probability Theory and its Applications New York u.a.

Rockafellar RT, Uryasev S, Zabarankin M 2006 Generalized Deviations in Risk Analysis Finance and Stochastics 10: 51-74

Schneeweiß H 1967 Entscheidungskriterien bei Risiko, Berlin u.a.

Stoughton N, Zechner J 2007 Optimal capital allocation using RAROC and EVA, Journal of Financial Intermediation 16: 312-342

Telser LG 1955 Safety First and Hedging, Review of Economic Studies 23: 1-16

Safety first-investors : Separation, performance measurement and capital market equilibrium

Abstract: Based on the concept of safety first-investors and a corresponding separation theorem the present contribution develops and discusses a new risk adjusted-performance measure, the safety first-ratio. In a first application this measure is applied to investment management and a performance measure (mean-value at risk-ratio) is derived, which possesses a theoretical basis and is able to take downside risk into consideration. In a second application this measure is applied to enterprise risk management and a new RORAC-measure is derived, which again possesses a decision theoretic foundation. This means at the same time that we are able to derive a common theoretical basis for two fields of research, which are up to now considered more or less separately in literature. Finally we use results in connection with quantile derivatives so derive a structural characterization of capital market equilibrium for safety first-investors. For elliptically distributed return distributions this capital market equilibrium is shown to be identical to the CAPM.

Keywords: Safety first-principle · separation theorem · downside risk · risk adjusted performance measurement · mean-value at risk-ratio · Sharpe ratio · safety first- RORAC · quantile derivative · elliptical distributions · safety first-capital market equilibrium · CAPM

JEL-Classification: G 11 · G 32