**Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie,
Portfolio Management und Versicherungswirtschaft**

Nr. 184

Theoretische Grundlagen des Minimum-Value at Risk-Hedges

von

PETER ALBRECHT

Mannheim 11/2010

Theoretische Grundlagen des Minimum-Value at Risk-Hedges

Peter Albrecht

Zusammenfassung

Der vorliegende Beitrag befasst sich mit der Bestimmung der optimalen Hedge Ratio auf der Basis von Future-Kontrakten unter Zugrundelegung der Forderung, dass der Value at Risk der Hedge-Position minimiert werden soll. Unter Verwendung von Ergebnissen im Kontext von Quantilableitungen gelingt hier zunächst die Bestimmung einer allgemeinen strukturellen Lösung. Unter Ausnutzung der Eigenschaften von elliptischen Verteilungen gelingt darüber hinaus eine explizite Bestimmung der optimalen Hedge Ratio und damit eine systematische Verallgemeinerung der in der Literatur entwickelten Lösung für den Normalverteilungsfall.

JEL-Classification : G11, G 32.

Keywords : Hedge Ratio; Quantile Derivative; Elliptical Distributions; Linear Prediction

1 Einleitung

Das Hedgen mit Future-Kontrakten ist eines der zentralen Anwendungsfelder des Investmentmanagements. Entsprechend umfangreich und vielfältig ist die hierzu existierende Literatur. In ihrem Review identifizieren *Chen et al.* (2003) zwei zentrale Problemkreise in diesem Kontext. Zum einen ist dies die modelltheoretische Bestimmung der optimalen Hedge Ratio, zum anderen die Entwicklung von ökonometrischen Modellen zur Schätzung der optimalen Hedge Ratio. Im Zentrum der Analysen der vorliegenden Arbeit steht der erste Problemkreis, die modelltheoretische Bestimmung der optimalen Hedge Ratio. Die optimale Hedge Ratio ist nun offenkundig abhängig von der verwendeten Zielfunktion. Die traditionelle Hedge-Strategie ist dabei das bereits von

Johnson (1960) entwickelte varianzminimale Hedge[1]. Die Zielfunktion besteht hier in der Minimierung der Varianz der Hedge-Position, also der Minimierung eines Maßes für das Risiko der Hedge-Position. Die etwa in *Chen et al.* (2003) dokumentierten in der Literatur entwickelten Alternativen zum varianzminimalen Hedge umfassen hierbei primär alternative Risikomaße (beispielsweise die Semivarianz oder Lower Partial Moments) sowie Kombinationen von Risiko- und Wertmaßen, in *Hung et al.* (2006) als Mean-Risk-Ansätze bezeichnet (beispielsweise Zielfunktionen, die auf einem Trade-off von Erwartungswert und Varianz beruhen oder auf der Sharpe Ratio oder aber auf einer Präferenzfunktion im Rahmen der Bernoullischen Erwartungsnutzentheorie).

In einem aktuellen Beitrag schlagen nun *Hung et al.* (2006) den Value at Risk (auf Renditeebene) als Zielfunktion vor und bestimmen die entsprechende optimale Hedge Ratio im Normalverteilungsfall. Die Herleitung der optimalen Hedge Ratio in *Hung et al.* (2006) geschieht auf eine elementare Weise und ist auf den Normalverteilungsfall zugeschnitten. Sie enthält dabei jedoch keinerlei Anhaltspunkte für systematische Verallgemeinerungen.

Unter Verwendung von Ergebnissen im Kontext von Quantilableitungen und den Eigenschaften von elliptischen Verteilungsfunktionen entwickeln wir im vorliegenden Beitrag einen systematischen Ansatz zur Bestimmung der Value at Risk (VaR)-minimalen Hedge Ratio, der die Lösung von *Hung et al.* (2006) als Spezialfall enthält und zugleich ein strukturelles Ergebnis für den allgemeinen Fall darstellt. Darüber hinaus betrachten wir nicht nur wie *Hung et al.* (2006) die lageabhängige Value at Risk-Variante, die auf einen Mean-Risk-Ansatz hinausläuft, sondern auch eine lageunabhängige Variante, die die Minimierung eines (lageunabhängigen) Risikomaßes beinhaltet.

2 Value at Risk-Hedge: Der allgemeine Fall

Als Ausgangspunkt unserer weiteren Analysen fixieren wir ein Zeitintervall [s,t] und betrachten eine zu sichernde (Spot-)Position, die aus n Einheiten eines Finanztitels besteht. Die Sicherung erfolge im Zeitpunkt s mittels des Einsatzes von Futures[2] auf den Finanztitel, wobei sich jeder Futurekontrakt auf eine Einheit des Finanztitels beziehe.

---

[1] Für eine Lehrbuchdarstellung des varianzminimalen Hedges vgl. etwa *Albrecht/Maurer* (2008), S. 579 ff.

[2] Wobei wir bei der weiteren Analyse wie üblich die bei Abschluss eines Futurekontraktes zu entrichtenden Sicherheitsleistungen (Margins) ausblenden, da diese nicht Bestandteil der eigentlichen Hedge-Operation sind.

Als Sicherungszeitpunkt werde der Zeitpunkt t gewählt. Bezeichnen K_s und K_t die Marktwerte des Finanztitels zu den Zeitpunkten s und t sowie entsprechend F_s und F_t die Marktwerte des Futures, so lautet die Marktwertveränderung der Hedge-Position

$$\Delta V = n(K_t - K_s) - x(F_t - F_s)\,, \tag{1}$$

wenn wir ein Short Hedge unter Einsatz von x Futurekontrakten etablieren. Wie in *Chen et al.* (2003) sowie *Hung et al.* (2006) gehen wir nun über zur Renditedarstellung der Hedge-Position, wobei – da der Abschluss von Futurekontrakten keinen anfänglichen Kapitaleinsatz erfordert – wir die Rendite auf den Wert der ungesicherten Position zum Zeitpunkt s beziehen

$$\begin{aligned} R_h &= \frac{n(K_t - K_s) - x(F_t - F_s)}{nK_s} = R_S - \frac{x(F_t - F_s)}{nK_s} \\ &= R_S - hR_F\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei bezeichne $R_S = (K_t - K_s)/K_s$ die Rendite der Spotposition, $R_F = (F_t - F_s)/F_s$ die (formale[3]) Rendite der Futureposition sowie

$$h = \frac{xF_s}{nK_s} \tag{3}$$

die Hedge-Ratio (auf Renditeebene[4]). Um die Existenz der für die Herleitung des Ergebnisses erforderlichen Quantilableitung zu sichern, setzen wir im Weiteren generell voraus, dass das Renditepaar (R_S, R_F) eine (zweidimensionale) Dichtefunktion besitzt.

Zu bestimmen ist nun eine optimale Hedge Ratio h und damit die optimale Anzahl x von zu verkaufenden Futurekontrakten. Wie schon in der Einleitung angemerkt, ist hierzu die Vorgabe einer Zielfunktion notwendig, in Bezug auf die die Optimierung durchgeführt wird. Im Weiteren sind dies der Value at Risk (VaR) sowie der Mean-Value at Risk[5] (MVaR), jeweils auf Renditeebene. Wir definieren zunächst unter Vorgabe eines

---

[3] Da F_s im Zeitpunkt s nicht zu entrichten ist, ist R_F nur formal die Rendite der Future-Position.

[4] Analysiert man die Hedge-Position in Termen von Wertveränderungen und nicht Renditen, so wird die Hedge-Ratio durch H = x/n definiert, vgl. *Chen et al.* (2003), S. 436; *Albrecht/Maurer* (2008), S. 580.

[5] Wir folgen hier der Nomenklatur von *McNeil et al.* (2005), S. 38; *Albrecht/Maurer* (2008), S. 889 verwenden den Terminus *Zentrierter Value at Risk; Jorion* (2007), S. 108 spricht von *relative* (to the mean) VaR im Gegensatz zu *absolute* VaR.

Konfidenzniveaus $0 < \alpha < 1$ das α-Quantil Q_α einer Renditegröße R wie üblich[6] durch die Forderung

(4) $$P[R \le Q_\alpha(R)] = \alpha .$$

Unter der Annahme, dass die Zufallsgröße R eine (strikt positive) Dichte besitzt, existiert das so definierte Quantil in eindeutiger Weise.

Der Value at Risk auf Renditeebene ist dann definiert durch[7]

(5) $$VaR_\alpha(R) = -Q_\alpha(R)$$

und der Mean-Value at Risk entsprechend durch[8]

(6) $$MVaR_\alpha(R) = E(R) - Q_\alpha(R) .$$

Das α-Quantil und damit der Value at Risk ist ein lageabhängiges Risikomaß, d.h. seine Höhe wird vom Erwartungswert der zugrundeliegenden Verteilung beeinflusst. Am einfachsten kann dieser Sachverhalt unter Zugrundelegung einer normalverteilten Rendite R illustriert werden. In diesem Fall gilt

(7) $$\begin{aligned} VaR_\alpha(R) &= -Q_\alpha(R) = -[E(R) - N_{1-\alpha}\sigma(R)] \\ &= N_{1-\alpha}\sigma(R) - E(R) , \end{aligned}$$

wobei $N_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$-Quantil der Standardnormalverteilung bezeichne. Der Value at Risk ist somit lageabhängig und damit nicht direkt mit einem traditionellen Risikomaß wie die Renditestandardabweichung $\sigma(R)$ vergleichbar. Der Mean-Value at Risk ist per Konstruktion ein lageunabhängiges Risikomaß und im Normalverteilungsfall gilt

(8) $$MVaR_\alpha(R) = N_{1-\alpha}\sigma(R) ,$$

was die Relevanz der Konstruktion noch einmal unterstreicht. In der Terminologie von *Albrecht/Maurer* (2008, 120) ist der VaR ein Risikomaß des Typus II (Risiko als notwendiges Kapital bzw. notwendige Rendite). Standardabweichung und MVaR sind hingegen Risikomaße des Typus I (Risiko als Abweichung von einer Zielgröße). Sie entsprechen der traditionellen Vorstellung eines Risikomaßes. Wie in *Albrecht/Maurer*

---

6 Vgl. etwa *Albrecht/Maurer* (2008), S. 127.

7 Man vgl. hierzu Anhang A. Insbesondere wird hierbei wiederum die Existenz einer (strikt positiven) Dichtefunktion vorausgesetzt.

8 Ebenda.

(2008, 320) ausgeführt, kann der VaR auch als ein risikoadjustiertes Performancemaß interpretiert werden, denn er enthält implizit einen Trade-off zwischen dem Erwartungswert und einer Risikobewertung (im Sinne des Typus I). Aus diesem Grunde wird in *Hung et al.* (2006) die VaR-minimale Hedge Ratio auch den Mean-Risk-Ansätzen zugeordnet und nicht den risikominimierenden Ansätzen. Die Minimierung des MVaR hingegen wäre ein risikominimierender Hedge-Ansatz. Vor diesem Hintergrund verfolgen wir beide Ansätze im Weiteren parallel.

Offenbar stimmen beide Ansätze überein, wenn (zumindest approximativ) $E(R) = 0$, was in der Literatur[9] zur optimalen Hedge Ratio als reiner Martingalfall apostrophiert wird[10].

Damit ist die Vorgabe der Zielfunktionen geklärt, unter denen eine optimale Hedge Ratio h bestimmt werden soll. Zum einen ist die Größe $VaR_\alpha(R_h)$ zu minimieren, zum anderen die Größe $MVaR_\alpha(R_h)$, wobei R_h gemäß (2) definiert ist und generell[11] $-\infty < h < \infty$. Zur Verdeutlichung der Abhängigkeit von h definieren wir unter Ausblendung des Konfidenzniveaus α die Größen

(9a) $$E(h) = E(R_h) = E(R_S - hR_F) = E(R_S) - hE(R_F)$$

(9b) $$Q(h) = Q_\alpha(R_h) = Q_\alpha(R_S - hR_F)$$

(9c) $$VaR(h) = VaR_\alpha(R_h) = -Q_\alpha(R_h) = -Q(h)$$

(9d) $$MVaR(h) = E(R_h) - Q_\alpha(R_h) = E(h) - Q(h).$$

Alle vorstehenden Funktionen sind reelle Funktionen des Parameters h und somit wohldefiniert. Formal lauten damit die zu lösenden Optimierungsaufgaben

(10a) $$VaR(h) \to \min! \quad (h \in IR)$$

bzw.

[9] Vgl. etwa *Chen et al.* (2006), S. 434; *Hung et al.* (2006), S. 259.

[10] Die Martingaleigenschaft ist zunächst über bedingte Erwartungswerte definiert, vgl. etwa *Albrecht/Maurer* (2008), S. 162. Aus der Martingaleigenschaft folgt die zeitliche Konstanz des Erwartungswerts. Ein "reiner" Martingalprozess (Zero Mean-Martingale) hätte dann einen Erwartungswert in Höhe von null.

[11] Sinnvollerweise ist $h \geq 0$, aber das Vorliegen dieser Eigenschaft kann erst nach Bestimmung der optimalen Hedge Ratio untersucht werden.

(10b) $$\text{MVaR}(h) \to \min! \quad (h \in IR)\,.$$

Wählt man den üblichen Weg der Bestimmung eines lokalen Optimums über die Ableitungen einer Funktion, so ist zunächst die Differenzierbarkeit der Funktionen (9a) – (9d) zu prüfen. Für die Erwartungswertfunktion ist dies unproblematisch, es gilt

(11) $$E'(h) = \frac{dE(h)}{dh} = -E(R_F)\,.$$

Die Prüfung der Differenzierbarkeit der Funktion Q(h), d.h. die Differenzierbarkeit des Quantils als Funktion von h gestaltet sich hingegen komplexer. Grundsätzliche Ergebnisse zur Differentiation von Quantilen liegen vor von *Gourieroux et al.* (2000), *Martin/Wilde* (2002), *McNeil et al.* (2005, 258 f.) sowie *Rau-Bredow* (2004). Überträgt man die dort enthaltenen Ergebnisse unter Vornahme geringfügiger Modifikationen auf den hier vorliegenden Fall, so erhalten wir das folgende Ergebnis

(12a) $$Q'(h) = \frac{dQ}{dh} = -E[R_F \mid R_h = Q_\alpha(R_h)]\,.$$

Eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit dieses Resultats ist dabei das Vorliegen einer gemeinsamen Dichtefunktion von (R_S, R_F). Entsprechend erhalten wir

(12b) $$\text{VaR}'(h) = \frac{d\text{VaR}(h)}{dh} = E[R_F \mid R_h = Q_\alpha(R_h)]$$

sowie

(12c) $$\begin{aligned} \text{MVaR}'(h) = \frac{d\text{MVaR}(h)}{dh} &= E[R_F \mid R_h = Q_\alpha(R_h)] - E(R_F) \\ &= E[R_F - E(R_F) \mid R_h = Q_\alpha(R_h)]\,. \end{aligned}$$

Die (notwendige) Bedingung 1. Ordnung an das Vorliegen eines Optimums der Probleme (10a) bzw. (10b) lautet somit

(13a) $$E[R_F \mid R_h = Q_\alpha(R_h)] = 0$$

bzw.

(13b) $$E[R_F - E(R_F) \mid R_h = Q_\alpha(R_h)] = 0\,.$$

Dieses (strukturelle) Ergebnis ist das erste zentrale Resultat der vorliegenden Arbeit. Als Voraussetzung wurde dabei nur verwendet, dass (R_S, R_F) eine gemeinsame Dichtefunktion besitzt. Insofern ist dieses Ergebnis von sehr großer Allgemeinheit. Eine explizite Auflösung nach dem gesuchten Parameter h, der in die Bedingungen (13a) bzw. (13b) eingeht, gestaltet sich in dieser allgemeinen Form jedoch als schwierig, da analytische Ausdrücke für den bedingten Erwartungswert ohne weitere Voraussetzungen nicht vorliegen. Zudem bleibt unklar, ob die Bedingung 1. Ordnung auch zu einem globalen Optimum führt. Im Falle der Familie der elliptischen Verteilungen lassen sich beide offene Fragen in befriedigender Weise beantworten. Dies ist der Inhalt des nächsten Abschnitts.

3 Value at Risk-Hedge: Elliptische Verteilungen

Elliptische Verteilungen [12] stellen intuitiv Verallgemeinerungen der (multivariaten) Normalverteilung dar. Dies erkennt man am einfachsten an der Gestalt der Dichtefunktion[13]. Ein n-dimensionaler Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$, der einer elliptischen Verteilung folgt, ist durch die Parameter $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ sowie durch eine Funktion φ (*charakteristischer Generator*) charakterisierbar, $\mathbf{X} \sim E_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \varphi)$. Die Funktion φ spezifiziert dabei die entsprechende Unterfamilie der elliptischen Verteilungen. Die Dichtefunktion $f(\mathbf{x})$ einer elliptischen Verteilung besitzt die Form

$$f(\mathbf{x}) = |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2}\, g_n[(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})]. \tag{14}$$

Sie ist damit (nur) eine Funktion der quadratischen Form $Q = (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})$. Die Isoquanten von f, d.h. alle Punkte $\mathbf{x}$ mit $f(\mathbf{x}) = \text{const.}$, sind damit die Isoquanten von Q und dies sind Ellipsoide im Raum IR^n. Daher rührt der Name elliptische Verteilungen (auch: elliptically contoured distributions). Die Funktion g_n wird als *Dichtegenerator* bezeichnet. Im Gegensatz zum charakteristischen Generator ist der Dichtegenerator allerdings abhängig von der Dimension n des Zufallsvektors[14]. Aus diesem Grund bevorzugen wir im vorliegenden Text die Charakterisierung durch den charakteristischen Generator.

---

12 Einige für die vorliegende Ausarbeitung grundlegende Eigenschaften von elliptischen Verteilungen sind in Anhang B dargestellt. Des Weiteren sei auf die Darstellungen in *Fang/Kotz/Ng* (1990), Kapitel 2 und 3 sowie *McNeil et al.* (2005), S. 89 ff. verwiesen.

13 Deren Existenz wir im Weiteren voraussetzen (Vorliegen einer absolut stetigen Zufallsgröße).

14 Im Falle der multivariaten Normalverteilung gilt beispielsweise $g_n(x) = \exp(-x/2)/(2\pi)^{n/2}$.

Elliptische Verteilungen sind somit wie die multivariate Normalverteilung charakterisierbar durch den Parametervektor $\boldsymbol{\mu}$ und die Parametermatrix $\boldsymbol{\Sigma}$, wobei gilt

(15) $$E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}, \quad \mathrm{Cov}(\mathbf{X}) = c\,\boldsymbol{\Sigma}.$$

Dabei ist $c = -2\varphi'(0)$ ein positiver Proportionalitätsfaktor. Der Unterschied zur Normalverteilung besteht damit „lediglich" in einem unterschiedlichen Dichtegenerator, der die Gestalt der Dichte steuert. Entspricht $\boldsymbol{\mu}$ dem Nullvektor $\mathbf{0}$ und $\boldsymbol{\Sigma}$ der (n,n)-Einheitsmatrix $\mathbf{I}_n$, so liegt eine sphärische Verteilung vor und man notiert $\mathbf{X} \sim S_n(\varphi)$ anstelle von $\mathbf{X} \sim E_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n, \varphi)$. Sphärische Verteilungen stellen intuitiv eine Verallgemeinerung der multivariaten Standard-Normalverteilung, $\mathbf{X} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$ dar. Entsprechend führt die Standardisierung einer elliptischen Verteilung auf eine sphärische Verteilung, d.h.

(16) $$\mathbf{X} \sim E_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \varphi) \Rightarrow \mathbf{Y} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim S_n(\varphi).$$

Die Familie der elliptischen Verteilungen ist sehr reichhaltig. Sie umfasst[15] (in jeweils univariater wie multivariater Form) neben der Normalverteilung als Hauptvertreter die t-Verteilung, die logistische Verteilung sowie die symmetrische stabile Verteilung. Daneben umfasst sie alle varianzbasierten[16] Mischungen von Normalverteilungen (Normal Mixture Distributions), d.h. Verteilungen, die intuitiv dadurch entstehen, dass die Varianz der Normalverteilung selbst als Zufallsvariable angesehen wird[17]. Da die Kovarianzmatrix einer Normal Mixture Distribution gegeben ist durch $\mathrm{Cov}(\mathbf{X}) = E(W)\boldsymbol{\Sigma}$, wobei W die mischende Verteilung ist, ist einsichtig, dass durch die Wahl von W die Schwere der Verteilungsenden gesteuert werden kann. Der Fall E(W) = 1 entspricht der Normalverteilung. Die Familie der elliptischen Verteilungen beinhaltet also ein ganzes Spektrum von Verteilungen mit schwereren Verteilungsenden (heavy tails) als die Normalverteilung, was in Übereinstimmung mit den sog. Stylized Facts[18] von Finanzmarktzeitreihen steht[19]. Zu den Normal Mixture Distributions gehören die t-Verteilung[20]

---

15 Wir verweisen hierzu auf die bereits angeführte Literatur zu elliptischen Verteilungen.

16 Nicht hingegen varianz- und erwartungswertbasierte Mischungen, da diese nicht mehr symmetrisch sind.

17 Zur präzisen Definition der „normal variance mixture distributions" vgl. etwa *McNeil et al.* (2005), S.73.

18 Vgl. etwa *Cont* (2001); *McNeil et al.* (2005), S. 117.

19 Nicht unerwähnt bleiben soll das Defizit, das elliptische Verteilungen aufweisen. Sie sind sämtlich symmetrischer Natur und können daher keine Schiefeeffekte abbilden, wie sie beispielsweise bei Portfolios mit Optionspositionen oder auch bei alternativen Investments auftreten können.

(mischende Verteilung ist hier eine Gammaverteilung) sowie die (symmetrische) verallgemeinerte hyperbolische Verteilung[21] (mischende Verteilung ist hier die Verallgemeinerte Inverse Gauß-Verteilung).

Die Familie der elliptischen Verteilungen weist drei Strukturelemente auf, die eine vollständige Lösung der Aufgabe der Bestimmung eines VaR-minimalen Hedges ermöglichen:

- der Value at Risk weist für elliptische Verteilungen die Eigenschaft der Subadditivität auf,
- die Größe $E(\mathbf{Y} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x})$, die beste Vorhersage von Y gegeben die Information $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ ist linear in $\mathbf{X} = \mathbf{x}$,
- das Quantil einer beliebigen elliptischen Verteilung mit charakteristischem Generator φ kann durch Standardisierung zurückgeführt werden auf das Quantil der resultierenden sphärischen Verteilung.

Wir gehen im Weiteren somit davon aus, dass der Zufallsvektor $(R_S, R_F)^T$ einer bivariaten elliptischen Verteilung mit charakteristischem Generator φ folgt, $(R_S, R_F)^T \sim E_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \varphi)$.

Als erstes Resultat ergibt sich aus der Subadditivität des Value at Risk im elliptischen Fall die Aussage, dass die Funktion VaR(h) gemäß (9c) konvex in h ist. Der entsprechende Nachweis wird in Anhang C geführt. Damit ist jeder lokale Extremwert von VaR(h), d.h. jede Lösung von (13a), ein globales Minimum. Da die Funktion E(h) gemäß (9a) linear in h ist, ist auch die Funktion $\mathrm{MVaR}(h) = \mathrm{VaR}(h) + E(h)$ gemäß (9d) konvex in h. Damit ist auch jeder lokale Extremwert von E(h), d.h. jede Lösung von (13b) ein globales Minimum. Damit lässt sich die Frage nach der Existenz und der Bestimmung eines globalen Minimums der zu optimierenden Funktionen im Falle elliptischer Verteilungen vollständig befriedigend klären.

Zur weiteren Auswertung von (13a) bzw. (13b) benutzen wir nun das bereits angeführte Ergebnis[22], dass für elliptische Verteilungen die bedingte Erwartung $E(\mathbf{Y} \mid \mathbf{X})$ explizit bestimmbar und zudem linear in $\mathbf{X}$ ist. Konkret folgt hieraus[23]

---

[20] *McNeil et al.* (2005), S. 75 weisen darauf hin, dass die multivariate t-Verteilung im Vergleich zur Normalverteilung auch eine größere Tendenz für das simultane Auftreten von Extremereignissen aufweist.

[21] Zu Anwendungen der symmetrischen hyperbolischen Verteilung im Finanzmarktkontext vgl. etwa *Bauer* (2000); *Bingham/Kiesel* (2001).

(17a) $$0 = E[R_F \mid R_h = Q_\alpha(h)] = E(R_F) + \frac{Cov(R_F, R_h)}{Var(R_h)}[Q_\alpha(R_h) - E(R_h)]$$

bzw.

(17b) $$0 = E[R_F \mid R_h = Q_\alpha(h)] - E(R_F) = \frac{Cov(R_F, R_h)}{Var(R_h)}[Q_\alpha(R_h) - E(R_h)].$$

Offenbar ergibt sich die Lösung von (17b), d.h. die Minimierung von MVaR(h), wenn wir in (17a) $E(R_F) = 0$ setzen, d.h. wir brauchen nur noch die Lösung (17a) weiter zu verfolgen.

Als letzter Schritt ist nun noch eine Normierung der Darstellung des Quantils notwendig. Zunächst ist mit $(R_S, R_F)^T \sim E_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \varphi)$ auch die Zufallsgröße $R_h = R_S - hR_F$ elliptisch verteilt[24], es gilt

(18) $$R_h \sim E_1(\mu, \sigma^2, \varphi)$$

Dabei ist zu beachten, dass $\boldsymbol{\sigma^2}$ nur bis auf den positiven Proportionalitätsparameter $c = -2\varphi'(0)$ der Varianz von R_h entspricht.

Wir betrachten im Weiteren den Übergang auf die sphärische Variante von R_h, d.h. die Standardisierung $(c = -2\varphi'(0))$

(19) $$R_h^* = \frac{R_h - \mu}{\sigma} = \frac{R_h - E(R_h)}{\sigma(R_h)/\sqrt{c}}.$$

Die Zufallsgröße R_h^* ist die zu der Familie univariater elliptischer Verteilungen mit gleichem charakteristischem Generator φ zugehörige sphärische Verteilung, d.h. es gilt $R_h^* \sim E_1(0,1,\varphi)$ bzw. $R_h^* \sim S_1(\varphi)$. Das α-Quantil bzw. $(1-\alpha)$-Quantil dieser sphärischen Verteilung bezeichnen wir mit $Z_\alpha(\varphi)$ bzw. $Z_{1-\alpha}(\varphi)$. Aufgrund der Symmetrie

---

22 Vgl. bereits *Kelker* (1970), S. 424.

23 In dieses Ergebnis fließt ein, dass $(R_h, R_F)^T$ als lineare Transformation von $(R_S,R_F)^T$ ebenfalls elliptisch verteilt (mit gleichem Generator) ist. Ich danke *Markus Huggenberger* für diesen Hinweis.

24 Dies folgt aus der Tatsache, dass lineare Transformationen einer elliptischen Verteilung wiederum elliptisch verteilt sind und den gleichen charakteristischen Generator besitzen, vgl. etwa *Fang et al.* (1990), S. 43; *McNeil et al.* (2005), S. 95.

der sphärischen Verteilungen gilt $Z_{1-\alpha}(\varphi) = -Z_{\alpha}(\varphi)$. Die Quantile vieler sphärischen Verteilungen liegen in tabellierter Form vor[25].

Aufgrund der in Anhang A nachgewiesenen Linearität des Quantils bei positiven linearen Transformationen gilt nun

(20) $$Q_{\alpha}(R_h^*) = \frac{Q_{\alpha}(R_h) - E(R_h)}{\sigma(R_h)/\sqrt{c}}$$

und damit

(21) $$Q_{\alpha}(R_h) = E(R_h) + Q_{\alpha}(R_h^*)\sigma(R_h)/\sqrt{c}\,.$$

Da $Z_{\alpha}(\varphi)$ definitionsgemäß gleich $Q_{\alpha}(R_h^*)$ war und $Z_{\alpha}(\varphi) = -Z_{1-\alpha}(\varphi)$, erhalten wir insgesamt

(22) $$Q_{\alpha}(R_h) = E(R_h) - \frac{1}{\sqrt{c}} Z_{1-\alpha}(\varphi)\sigma(R_h)\,.$$

In Anhang D sind für ausgewählte sphärische Verteilungen (Normalverteilung, t(5)-, t(4)- und t(3)-Verteilung, logistische Verteilung) die zugehörige Proportionalitätsparameter c und ausgewählte Quantile $Z_{1-\alpha}(\varphi)$ zusammengestellt. Im Falle der (Standard-) Normalverteilung gilt beispielsweise $c = 1$ und $Z_{1-\alpha}(\varphi) = N_{1-\alpha}$, wobei $N_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$ -Quantil der Standardnormalverteilung bezeichne.

Durch diesen Rückgriff auf das $(1-\alpha)$ -Quantil der standardisierten Variante von R_h sind wir in der Lage, den Ausdruck (17a) weiter zu vereinfachen[26]. Wir erhalten nun

(23) $$\begin{aligned} 0 &= E(R_F) - Z_{1-\alpha}(\varphi)\frac{Cov(R_F, R_h)}{\sqrt{c}\ \sigma(R_h)} \\ &= E(R_F) - Z_{1-\alpha}(\varphi)\frac{Cov(R_F, R_S) - h\,Var(R_F)}{\sqrt{c}\ \sqrt{Var(R_S - h\,R_F)}} \end{aligned}$$

und damit

[25] Man vgl. die weiterführenden Ausführungen in Anhang D.

[26] Wie bereits angemerkt, ergibt sich die korrespondierende Lösung von (17b), wenn wir bei der Lösung von (17a) $E(R_F) = 0$ setzen.

$$\begin{aligned}(24)\qquad \frac{\sqrt{c}\,\mu_F}{Z_{1-\alpha}(\varphi)} &= \frac{\mathrm{Cov}(R_F, R_S) - h\,\mathrm{Var}(R_F)}{\sqrt{\mathrm{Var}(R_S) - 2h\,\mathrm{Cov}(R_S, R_F) + h^2\,\mathrm{Var}(R_F)}} \\ &= \frac{\rho\sigma_S\sigma_F - h\sigma_F^2}{\sqrt{\sigma_S^2 - 2h\rho\sigma_S\sigma_F + h^2\sigma_F^2}}\,,\end{aligned}$$

wobei $\mu_F = E(R_F)$, $\sigma_S^2 = \mathrm{Var}(R_S)$, $\sigma_F^2 = \mathrm{Var}(R_F)$ und $\rho = \rho(R_S, R_F)$.

Dieser Ausdruck kann nun in expliziter und eindeutiger Weise aufgelöst werden. Die entsprechende elementare Berechnung ist in Anhang E dargestellt. Wir erhalten dann insgesamt als optimale Hedge Ratio im Falle der Minimierung des Value at Risk

$$(25)\qquad h^* = \rho\left(\frac{\sigma_S}{\sigma_F}\right) - \mu_F\left(\frac{\sigma_S}{\sigma_F}\right)\sqrt{\frac{1-\rho^2}{Z_{1-\alpha}^2(\varphi)\,\sigma_F^2/c - \mu_F^2}}\,.$$

Folgt $(R_S, R_F)^T$ einer bivariaten Normalverteilung, so gilt c = 1 und es ist $Z_{1-\alpha}(\varphi)/\sqrt{c} = N_{1-\alpha}$, dem $(1-\alpha)$-Quantil der Standard-Normalverteilung. In diesem Falle entspricht die Lösung (25) der von *Hung et al.* (2006). Damit wird das Resultat von *Hung et al.* (2006) für den Fall der Normalverteilung in einfacher struktureller Weise auf beliebige elliptische Verteilungen verallgemeinert. Damit haben wir das zweite zentrale Resultat der vorliegenden Arbeit erreicht.

Analysieren wir abschließend die Gleichung (25) noch etwas genauer. Zunächst ist zu klären, ob die darin enthaltene Wurzelfunktion wohldefiniert ist. Da $\rho^2 \le 1$, ist der Zähler des Ausdrucks unter der Wurzel nicht-negativ. Für den Nenner gilt

$$\begin{aligned}&Z_{1-\alpha}^2(\varphi)\,\sigma_F^2/c - \mu_F^2 \\ &= -(\mu_F - Z_{1-\alpha}(\varphi)\,\sigma_F/\sqrt{c})(\mu_F + Z_{1-\alpha}(\varphi)\,\sigma_F/\sqrt{c})\,.\end{aligned}$$

Da R_F als Randverteilung einer elliptischen Verteilung wiederum elliptisch verteilt mit gleichem charakteristischem Generator ist, kann man für R_F in vollständig analoger Weise eine Standardisierung durchführen wie für R_h und erhält analog zu (22) $Q_\alpha(R_F) = \mu_F - Z_{1-\alpha}(\varphi)\sigma_F/\sqrt{c}$ und damit $Q_{1-\alpha}(R_F) = \mu_F + Z_{1-\alpha}(\varphi)\sigma_F/\sqrt{c}$. Da R_F eine symmetrische Verteilung ist, gilt (zumindest für genügend kleine Konfidenzniveaus) $Q_\alpha(R_F) < 0$ und $Q_{1-\alpha}(R_F) > 0$. Insgesamt ist damit (für genügend kleine Konfidenzniveaus) gesichert, dass der Ausdruck $Z^2_{1-\alpha}(\varphi)\sigma^2_F / c - \mu^2_F$ positiv ist. Damit ist die in (23) eingehende Wurzel wohldefiniert.

Zwei Spezialfälle sind bemerkenswert. Herrschen zunächst Cost of Carry-Preise an dem betrachteten Future-Markt, so gilt[27] $\rho(S_t, F_t) = 1$ für die Spot-Preise S_t und die Future-Preise F_t und damit auch $\rho = \rho(R_S, R_F) = 1$. Die Gleichung (25) reduziert sich in diesem Fall auf

$$h^* = \frac{\sigma_S}{\sigma_F}. \tag{26}$$

Die optimale Hedge Ratio ist damit in diesem Fall unabhängig von der unterstellten elliptischen Verteilung für (R_S, R_F) und zudem identisch mit der optimalen Hedge Ratio beim varianzminimalen Hedge!

Minimieren wir nun nicht den Value at Risk, sondern den Mean Value at Risk, so müssen wir nach unseren Vorüberlegungen in (25) nur $\mu_F = 0$ setzen und erhalten dann

$$h^* = \rho\frac{\sigma_S}{\sigma_F}. \tag{27}$$

Wiederum ist dieses unabhängig von der unterstellten elliptischen Verteilung und zudem ist dies identisch[28] mit der traditionellen Hedge Ratio des varianzminimalen Hedges, d.h. der Minimierung der Zielfunktion $Var(R_h)$. Dies ist allerdings nicht überraschend, denn auf der Basis von (22) gilt im Falle elliptischer Verteilung für den Mean-Value at Risk $MVaR(R_h) = E(R_h) - Q_\alpha(R_h) = Z_{1-\alpha}(\varphi)\sigma(R_h)/\sqrt{c}$, d.h. der Mean-Value at Risk ist proportional zur Standardabweichung $\sigma(R_h)$ bzw. eine monotone Transformation der Varianz $Var(R_h)$ und damit muss sich ein identisches Minimum gemäß (27) ergeben.

Die Wahl einer spezifischen Unterfamilie der elliptischen Verteilungen, etwa der t-Verteilung oder der (symmetrischen) hyperbolischen Verteilung, spielt also im Falle der reinen Risikominimierung keine Rolle, sie wird erst relevant in einem Mean-Risk-Modell, wo ein Trade-off zwischen $E(R_h)$ und $\sigma(R_h)$ stattfindet.

---

[27] Vgl. etwa *Albrecht/Maurer* (2008), S. 566.

[28] Vgl. etwa *Albrecht/Maurer* (2008), S. 580; *Chen et al.* (2003), S. 437.

Der Vergleich von (27) – d.h. dem Fall $\mu_F = 0$ – mit (25) zeigt auch die Reaktion der optimalen Hedge Ratio in Bezug auf die Größe μ_F. Ist $\mu_F > 0$, so vermindert sich die optimale Hedge Ratio, im Falle $\mu_F < 0$ erhöht sich die optimale Hedge Ratio (jeweils ceteris paribus). Eine positive erwartete Future-Rendite vermindert also den Value at Risk der Hedge-Position, eine negative erwartete Future-Rendite erhöht ihn. Dies lässt sich anhand des Spezialfalls einer normalverteilten Rendite R_h leicht plausibilisieren. Hier gilt

$$VaR(R_h) = -Q_\alpha(R_h) = N_{1-\alpha}\sigma(R_h) + h\mu_F - \mu_S,$$

d.h. ein positives μ_F erhöht den VaR und damit muss h geringer sein, um den VaR zu minimieren und vice versa. Analog argumentiert man für den generellen Fall auf der Basis von (22).

Anhang A: Value at Risk auf Renditeebene

Der Value at Risk wird üblicherweise[29] in Termen einer Verlustfunktion L durch die Forderung

(A.1) $$P(L > VaR_\alpha) = \alpha$$

definiert. Gehen wir von einer Renditegröße R aus, so ist entsprechend $L = -R$ zu wählen.

Da wir generell die Existenz einer Dichtefunktion voraussetzen, definieren wir das α-Quantil von L durch $Q_\alpha(L) = F_L^{-1}(\alpha)$, wobei F_L die Verteilungsfunktion von L bezeichne. Offenbar gilt $P(L \le Q_{1-\alpha}(L)) = 1-\alpha$ und somit $P(L > Q_{1-\alpha}(L)) = \alpha$. Durch Vergleich mit (A.1) erhalten wir das Ergebnis

(A.2) $$VaR_\alpha(R) = Q_{1-\alpha}(L) = Q_{1-\alpha}(-R).$$

Dieses Ergebnis werden wir in Anhang C verwenden. Eine zweite Repräsentation des VaR erhalten wir durch die folgende Überlegung (die Existenz einer Dichtefunktion ist wiederum vorausgesetzt): $P(-R > VaR_\alpha) = P(R < -VaR_\alpha) = P(R \le -VaR_\alpha)$.

---

[29] Vgl. etwa *McNeil et al.* (2005), S. 38; *Albrecht/Maurer* (2008) S. 130.

Da andererseits $P(R \le Q_\alpha) = \alpha$, gilt damit

(A.3) $$VaR_\alpha(R) = -Q_\alpha(R).$$

Wir untersuchen nun das Verhalten des Quantils bei einer positiven linearen Transformation, d.h. gesucht ist ein Ausdruck für $Q_\alpha(a + bR)$ für b > 0. Es gilt $\alpha = P[a + bR \le Q_\alpha(a + bR)] = P[R \le (Q_\alpha(a + bR) - a)/b]$ und damit $Q_\alpha(R) = (Q_\alpha(a + bR) - a)/b$. Hieraus folgt insgesamt (b > 0)

(A.4) $$Q_\alpha(a + bR) = a + bQ_\alpha(R).$$

Das Quantil ist somit linear bei einer positiven linearen Transformation der zugrundeliegenden Zufallsgröße. Kommen wir damit zum Mean-Value at Risk, dieser bezieht sich auf die zentrierten Größen $L - E(L) = -R - E(-R) = E(R) - R$. Aus (A.4) folgt hieraus $MVaR = VaR[L - E(L)] = VaR(L) - E(L) = -Q_\alpha(R) - E(-R)$ und damit insgesamt

(A.5) $$MVaR_\alpha(R) = E(R) - Q_\alpha(R).$$

Anhang B: Elliptische Verteilungen: Einige Grundlagen

Zur Einführung der Familie der elliptischen Verteilungen existieren verschiedene Zugänge[30]. Ziel ist dabei jeweils die Charakterisierung der (mehrdimensionalen) Verteilung eines Zufallsvektors $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$. Wir betrachten zunächst den Zugang über die charakteristische Funktion. Gegeben sei hierzu ein (n,1)-Vektor $\boldsymbol{\mu}$ und – als Standardfall – eine (n,n)-Matrix $\boldsymbol{\Sigma}$. Die charakteristische Funktion einer elliptischen Verteilung ist dann darstellbar als

(B.1) $$E[\exp(i\,\mathbf{t}^T\mathbf{X})] = \exp(i\,\mathbf{t}^T\boldsymbol{\mu})\,\varphi(\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{t}).$$

Die Funktion φ wird als *charakteristischer Generator* von **X** bezeichnet. Er bestimmt, welche Unterfamilie der elliptischen Verteilungen vorliegt. Da $\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{t}$ eine reelle Zahl ist, ist entsprechend der charakteristische Generator eine reelle Funktion $\varphi(u)$. Bei-

---

[30] Vgl. etwa *Fang et al.* (1990), S 26 ff; *McNeil et al.* (2005), S. 89 ff.

spielsweise gilt für die Familie der multivariaten Normalverteilungen $\varphi(u) = \exp(-u/2)$.

Zur Charakterisierung einer elliptischen Verteilung benötigen wir somit die Größen $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ und φ und notieren entsprechend $\mathbf{X} \sim E_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \varphi)$. Die Größe $\boldsymbol{\mu}$ entspricht dabei dem Erwartungsvektor von $\mathbf{X}$, d.h. $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{X})$. Für die Kovarianz gilt

(B.2) $$\mathrm{Cov}(\mathbf{X}) = -2\varphi'(0)\boldsymbol{\Sigma} = c\boldsymbol{\Sigma}.$$

Die Kovarianzmatrix ist somit proportional (mit einem positiven Proportionalitätsparameter c) zur Parametermatrix $\boldsymbol{\Sigma}$. So gilt etwa für die t-Verteilung $c = n/(n-2)$, wobei n den Freiheitsgrad der t-Verteilung bedeute.

Anhang C: Konvexitätsüberlegungen

Aus der Literatur ist bekannt[31], dass der Value at Risk im Falle elliptisch verteilter Verlustvariablen (für $0 < \alpha \le 0.5$) subadditiv ist. Gehen wir also im univariaten Fall von zwei elliptisch verteilten Verlustvariablen L_1 und L_2 mit identischem charakteristischem Generator, d.h. $L_1 \sim E_1(\mu_1, \sigma_1, \varphi)$ und $L_2 \sim E_2(\mu_2, \sigma_2, \varphi)$ aus, so gilt somit (gemäß Anhang A entspricht der Value at Risk dem $(1-\alpha)$-Quantil der Verlustverteilung)

(C.1) $$Q_{1-\alpha}(L_1 + L_2) \le Q_{1-\alpha}(L_1) + Q_{1-\alpha}(L_2).$$

Generell gilt des Weiteren, dass der Value at Risk positiv homogen ist, d.h. es gilt für $\lambda > 0$ und in Termen des Quantils

(C.2) $$Q_{1-\alpha}(\lambda L) = \lambda\, Q_{1-\alpha}(L).$$

Dies ist ein Spezialfall der in Anhang A nachgewiesenen Eigenschaft (A.4).

Damit sind wir in der Lage, für die Funktion $\mathrm{VaR}(h)$ gemäß (9c) die Konvexität, d.h. $\mathrm{VaR}[\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2] \le \lambda \mathrm{VaR}(h_1) + (1-\lambda)\mathrm{VaR}(h_2)$ für $0 < \lambda < 1$ nachzuweisen. Wir benutzen hierzu die zu (9c) alternative Value at Risk-Repräsentation (A.2). Wir definieren hierzu die Verlustvariable L(h) durch

---

31 Vgl. etwa *McNeil et al.* (2005), S. 242 f. Zu beachten ist dabei, dass das von *McNeil et al.* (2005) verwendete Konfidenzniveau α im vorliegenden Text einem Konfidenzniveau von $1-\alpha$ entspricht.

$L(h) = -R_h = -[R_S - hR_F] = -R_S - h(-R_F) = L_S - hL_F$, wobei $L_F = -R_F$.

Zunächst gilt

$$
\begin{aligned}
&L[\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2] \\
&= L_S - [\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2]L_F \\
&= [\lambda + (1-\lambda)]L_S - [\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2]L_F \\
&= \lambda(L_S - h_1 L_F) + (1-\lambda)(L_S - h_2 L_F) \\
&= \lambda L(h_1) + (1-\lambda)L(h_2)\,.
\end{aligned}
$$

Damit gilt für die Funktion $\mathrm{VaR}(h)$ gemäß (9c)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{VaR}[\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2] \\
&= Q_{1-\alpha}[L(\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2)] \\
&= Q_{1-\alpha}[\lambda L(h_1) + (1-\lambda)L(h_2)] \le Q_{1-\alpha}[\lambda L(h_1)] + Q_{1-\alpha}[(1-\lambda)L(h_2)] \\
&= \lambda Q_{1-\alpha}[L(h_1)] + (1-\lambda)Q_{1-\alpha}[L(h_2)] \\
&= \lambda \mathrm{VaR}(h_1) + (1-\lambda)\mathrm{VaR}(h_2)\,.
\end{aligned}
$$

Die Ungleichung folgt hierbei aus der Subadditivitätsbeziehung (C.1) und die vorletzte Gleichung unter Ausnutzung der positiven Homogenität (C.2).

Die Funktion $\mathrm{VaR}(h)$ gemäß (9c) ist damit konvex. Da die Erwartungswertfunktion linear ist, ist damit auch die Funktion $\mathrm{MVaR}(h)$ gemäß (9d) konvex.

Anhang D: Beispiele für univariate sphärische Verteilungen

Die sphärische Variante der *t-Verteilung mit n Freiheitsgraden*, wobei n eine natürliche Zahl mit $n \ge 3$ (damit Erwartungswert und Varianz existieren) ist, besitzt die Dichtefunktion[32] ($x \in IR$)

(D.1)
$$
f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2},
$$

wobei $\Gamma(\cdot)$ die Gammafunktion bezeichne. Es gilt E(X) = 0 und $\mathrm{Var}(X) = \frac{n}{n-2}$, d.h. die relevante Proportionalitätskonstante ist $c = n/(n-2)$.

[32] Vgl. etwa *McNeil et al.* (2005), S. 93; *Johnson/Kotz* (1970), S. 95 f.

Als Grenzfälle der standardisierten t-Verteilung ergeben sich die (zentrierte) Cauchy-Verteilung (n = 1) und die Standard-Normalverteilung $(n \to \infty)$. Die Quantile der t-Verteilung sind umfangreich tabelliert[33].

Die standardisierte Variante der *logistischen Verteilung* lautet[34] $x \in IR$

(D.2) $$f(x) = \frac{\exp(-x)}{(1+\exp(-x))^2} = \frac{\exp(x)}{(1+\exp(x))^2}.$$

Die zugehörige Verteilungsfunktion ist explizit bestimmbar und lautet

(D.3) $$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

Die Umkehrfunktion von F(x) lautet

(D.4) $$F^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = \ln(y) - \ln(1-y).$$

Damit sind das α-Quantil bzw. das $(1-\alpha)$-Quantil gegeben durch

(D.5a) $$Z_\alpha = \ln(\alpha) - \ln(1-\alpha)$$

(D.5b) $$Z_{1-\alpha} = \ln(1-\alpha) - \ln(\alpha)$$

und es bestätigt sich die Symmetrieeigenschaft $Z_{1-\alpha} = -Z_\alpha$. Es gilt des Weiteren $E(X) = 0$ und $Var(X) = \pi^2/3$. Die Proportionalitätskonstante ist damit $c = \pi^2/3$.

Die nachfolgende Tabelle enthält zum Vergleich einige ausgewählte Quantile für die Standardnormalverteilung, die t-Verteilung (sphärische Variante) mit 3, 4 und 5 Freiheitsgraden sowie die logistische Verteilung (sphärische Variante).

	Normal	t(5)	t(4)	t(3)	Logistisch
$1-\alpha = 0.90$	1.282	1.476	1.533	1.638	2.197
$1-\alpha = 0.95$	1.645	2.015	2.132	2.353	2.944
$1-\alpha = 0.99$	2.326	3.365	3.747	4.541	4.595

Tabelle D.1: Ausgewählte Quantile

[33] Man vgl. etwa die Hinweise in *Johnson/Kotz* (1970), S. 97 ff.

[34] Vgl. etwa *Johnson/Kotz* (1970), S. 3 f.

Die Tabelle veranschaulicht insbesondere die generelle Eigenschaft, dass die t-Verteilung umso gefährlicher wird (schwerere Verteilungsenden hat), je kleiner die Anzahl der Freiheitsgrade ist.

Anhang E: Lösung der Gleichung (24)

Durch Quadrieren der linken und rechten Seite von (24) erhalten wir zunächst, wobei wir $Z = Z_{1-\alpha}(\varphi)/\sqrt{c}$ setzen

(E.1) $$\frac{\mu_F^2}{Z^2} = \frac{\rho^2\,\sigma_S^2\,\sigma_F^2 - 2h\,\rho\,\sigma_S\,\sigma_F^3 + h^2\sigma_F^4}{\sigma_S^2 - 2h\,\rho\,\sigma_S\,\sigma_F + h^2\sigma_F^2}\,.$$

Wir setzen nun noch zur Vereinfachung $b = \sigma_S/\sigma_F$ und erhalten aus (E.1)

(E.2) $$\frac{\mu_F^2}{Z^2} = \frac{\rho^2\,\sigma_S^2 - 2h\,\rho\,\sigma_S\,\sigma_F + h^2\sigma_F^2}{b^2 - 2h\,\rho\,b + h^2}$$

bzw.

(E.3) $$\mu_F^2(b^2 - 2\,h\,\rho + h^2) = Z^2(\rho\,\sigma_S^2 - 2h\,\rho\,\sigma_S\,\sigma_F + h^2\,\sigma_F^2)\,.$$

Dies führt auf die folgende quadratische Gleichung für h

(E.4a) $$Ah^2 + Bh + C = 0$$

mit

(E.4b) $$A = \mu_F^2 - Z^2\sigma_F^2$$

(E.4c) $$B = 2\rho(Z^2\sigma_S\sigma_F - b\mu_F^2) = -2\rho\,b\,A$$

(E.4d) $$C = \mu_F^2 b^2 - Z^2\rho^2\sigma_S^2 = b^2[\mu_F^2(1-\rho^2) + \rho^2 A]\,.$$

Der Term –B/2A ergibt sich dann zu $\rho\,b$ und der Term $[(B^2 - 4AC)/4A^2]$ zu $b^2\mu_F^2(1-\rho^2)/(-A)$.

Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung fallen offenbar zusammen, wenn man μ_F in IR variieren lässt, d.h. die eine Lösung spiegelt den Fall $\mu_F > 0$ wider und die andere Lösung den Fall $\mu_F < 0$. Durch Analyse der Ausgangsgleichung (24) erkennt man, dass der Fall $\mu_F > 0$ zu einem geringeren Wert von h führen muss als der Fall $\mu_F = 0$. Als einheitliche Lösung ergibt sich damit insgesamt

(E.5) $$h = \rho b - b\mu_F \sqrt{\frac{1-\rho^2}{Z^2\sigma_F^2 - \mu_F^2}} \,.$$

Literatur

Albrecht, Peter/Maurer, Raimond (2008), Investment- und Risikomanagement, 3. Aufl., Stuttgart.

Bauer, Christian (2000), Value at Risk Using Hyperbolic Distributions, in: Journal of Economics and Business 52, S. 455-467.

Bingham, Nicholas H./Kiesel, Rüdiger (2001), Semi-parametric modelling in finance: theoretical foundations, in : Quantitative Finance 1, S. 1-10.

Chen, Shyang-Sheng/ Lee, Cheng-few/ Shrestha, Keshab (2003), Futures hedge ratios: a review, in: Quarterly Review of Economics and Finance 43, S. 433-465.

Cont, Rama (2001), Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues, in : Quantitative Finance 1, S. 223-236.

Fang, Kai-Tai/Kotz, Samuel/ Ng, Kai-Wang (1990): Symmetric Multivariate and Related Distributions, London, New York.

Hung, Jui-Cheng/ Chiu, Chien-Liang/Lee, Ming-Chih (2006), Hedging with zero-value at risk hedge ratio, in: Applied Financial Economics, S. 259-269.

Johnson, Leland L. (1960), The theory of hedging and speculation in commodity futures, in: Review of Economic Studies 27, S. 139-151.

Johnson, Norman Lloyd/Kotz, Samuel (1970): Continuous univariate distributions, Vol. 2, New York u.a.

Jorion, Phillipe (2007), Value at Risk, the New Benchmark for Managing Financial Risk, 3. Aufl., New York u.a.

Martin, Richard/Wilde, Tom (2002), Unsystematic credit risk, in : RISK, November 2002, S. 123-128.

McNeil, Alexander J./Frey, Rüdiger/Embrechts, Paul (2005), Quantitative Risk Management, Princeton und Oxford.

Gourieroux, Christian/Laurent, Jean-Paul/Scaillet, Olivier (2000), Sensitivity Analysis of Value at Risk, in: Journal of Empirical Finance 7, S. 225-245.

Kelker, Douglas (1970), Distribution Theory of Spherical Distributions and a Location-Scale Parameter Generalization, in: Sankhya: The Indian Journal of Statistics 32, S. 419-430.

Rau-Bredow, Hans (2004), Value at Risk, Expected Shortfall, and Marginal Risk Contribution, in: *Szegö, Giorgio* (Hrsg.), Risk Measures for the 21st Century, Chichester, S. 61-68.

Abstract

The present contribution studies the problem of determining the optimal hedge ratio in the case of minimizing the value at risk of the hedge position. Using results in connection with quantile derivatives we at first are able to characterize the general solution to the problem. Using properties of the family of elliptical distribution we then are able to develop an explicit solution to the problem which generalizes the solution for the case of a normal distribution known from the literature.