UNIVERSITÄT
MANNHEIM

MANNHEIMER MANUSKRIPTE ZU RISIKOTHEORIE,
PORTFOLIO MANAGEMENT UND VERSICHERUNGSWIRTSCHAFT

Nr. 190

Ausgleich im Kollektiv, Gesetz der großen Zahlen und Nutzen der Versicherung

PETER ALBRECHT

Oktober 2015
(erste Version: September 2015)

Ausgleich im Kollektiv, Gesetz der großen Zahlen und Nutzen der Versicherung

Peter Albrecht, Mannheim

Version: Oktober 2015 (erste Version: September 2015)

1. Einführung

Der Ausgleich im Kollektiv (AIK) besitzt genuine Bedeutung für die Produktion von Versicherungsschutz[1]. Die Analyse von Ausgleichseffekten erfolgt in der versicherungswissenschaftlichen und ökonomischen Literatur jedoch primär im Rahmen der Analyse des Versicherungs*angebots*, d.h. unter Einnahme der Perspektive des Versicherungs*unternehmens*[2].

Die Bedeutung des Risikoausgleichs im Kollektiv für die Versicherungs*nachfrage*, d.h. den Abschluss eines Versicherungsvertrags durch einen Nachfrager nach Versicherungsschutz, wurde unseres Wissens hingegen noch keiner systematischen wissenschaftlichen Analyse unterzogen[3]. Speziell in der Theorie der Versicherungsnachfrage[4] als Teilgebiet der "Insurance Economics" erfährt die Möglichkeit der Einbettung von Risiken in ein Risikokollektiv als Einflussfaktor für die Entscheidung über den Abschluss eines Versicherungsvertrags keine Aufmerksamkeit[5].

In der vorliegenden Ausarbeitung nehmen wir eine generelle nutzentheoretische Analyse der Konsequenzen der Kollektivbildung für den Abschluss eines Versicherungsvertrags vor und es gelingt uns, auf der Basis des starken Gesetzes der großen Zahlen (GdgZ) weitgehend allgemeine Resultate zu erzielen, die nur auf standardmäßigen Anforderungen an die Nutzenfunktion und an die Verteilung der individuellen Jahresschäden beruhen. Im Hinblick auf die unterstellte Kollektivstruktur beschränken wir uns in diesem Beitrag auf unabhängige und identisch verteilte Risiken ("IID-Kollektiv"). Es zeigt sich, dass der Möglichkeit der Einbettung eines abzugebenden Risikos in ein IID-Kollektiv eine fundamentale Bedeutung für den Abschluss eines Versicherungsvertrags zukommt.

---

[1] Dies schließt nicht aus, dass die Versicherung eines Risikos auch ohne Vorhandensein eines entsprechenden Kollektivs grundsätzlich möglich ist. Wie in der weiteren Ausarbeitung noch herausgearbeitet wird, befördert aber der Ausgleich im Kollektiv den Nutzen der Versicherungsnahme.

[2] Einen ausgezeichneten aktuellen Überblick über die relevante Literatur bieten Gatzert/Schmeiser (2012).

[3] Die einzige uns bekannte Ausarbeitung, die der Frage nachgeht, inwieweit AIK-Effekte Vorteile für den Versicherungskunden beinhalten, ist Gatzert/Schmeiser (2012). Gatzert/Schmeiser (2012) beschränken sich jedoch in ihrer Analyse auf eine einfache Basiskonstellation (normalverteilte Schäden, (μ, σ)-Präferenzen).

[4] Vgl. hierzu die aktuelle Übersicht von Schlesinger (2013).

[5] Als Indiz hierfür kann angesehen werden, dass in dem von Dionne (2013) herausgegebenen Handbook of Insurance der Begriff „pooling of risks“ nicht im Stichwortverzeichnis vorkommt.

Aus einer generellen Sicht erweist es sich, dass aus Sicht der potentiellen Nachfrager nach Versicherungsschutz die entscheidende Wirkgröße das Gesetz der großen Zahlen ist. In einem homogenen Versicherungskollektiv vom Umfang n besitzt der einzelne Versicherte einen Anteil von 1/n am Gesamtkollektiv, damit ist die Bildung des Durchschnitts einer Summe von unabhängigen Risiken der relevante Sachverhalt. Beim Ausgleich im Kollektiv aus Sicht des Versicherungsunternehmens hingegen spielen Gesetzmäßigkeiten (Zentraler Grenzwertsatz, große Abweichungen[6]) im Hinblick auf die Addition unabhängiger Risiken die entscheidende Rolle.

Als Konstellationen des Versicherungsangebots behandeln wir den Fall einer reinen Gegenseitigkeitsversicherung sowie den einer Versicherungsaktiengesellschaft, wobei im letzteren Fall unterschiedliche Prinzipien der Prämienkalkulation betrachtet werden.

2. Die Entscheidungssituation eines potentiellen Versicherungsnehmers

Der betrachtete Entscheidungsträger besitze ein anfängliches ($t = 0$) Vermögen in Höhe von W_0. Der potentielle Gesamtschaden $X \geq 0$ aus einer Versicherungsart sei zufallsabhängig und realisiere sich am Ende der Periode. Blenden wir Verzinsungseffekte aus bzw. unterstellen wir einen risikolosen Periodenzins der Höhe $r = 0$, so beträgt das resultierende Periodenendvermögen ($t = 1$) im Falle der Nichtversicherung des betrachteten Risikos

(2.1) $$W^{NI} = W_0 - X.$$

Bei diesem Ansatz vernachlässigen wir weitere versicherbare sowie nicht-versicherbare Risiken des Entscheidungsträgers[7] und ebenso potentielle Einkünfte (etwa Einkommen aus Arbeit oder aus Rentenansprüchen), die grundsätzlich das Endvermögen unter (2.1) beeinflussen können. Entsprechende Verallgemeinerungen sollen im Rahmen einer weiterführenden Arbeit verfolgt werden.

Als alternative Position betrachten wir den Abschluss eines Versicherungsvertrags zur Individualprämie π. Diese Prämie fassen wir grundsätzlich als Gesamtprämie auf, da nur diese realiter die Versicherungsentscheidung beeinflusst. Dabei setzen wir generell $\pi \leq W_0$ voraus.

[6] Vgl. hierzu Hammarlid (2005).
[7] Damit wird insbesondere der Aspekt des Background Risk, vgl. hierzu etwa Schlesinger (2013, S. 180 ff.), ausgeblendet.

Ferner gehen wir vereinfachend[8] davon aus, dass eine vollständige Deckung möglich ist, d.h. kein Selbstbehalt vereinbart wird und die Entschädigung nicht begrenzt ist (Illimité-Deckung). Damit wird es nicht notwendig, zwischen Schaden und Entschädigung zu unterscheiden. Schließlich gehen wir davon aus, dass der Versicherungsnehmer seitens des Versicherers in ein IID-Kollektiv der Größe n eingebettet wird, d.h. in ein homogenes Kollektiv von n unabhängigen Risiken X_i ($i = 1,\ldots, n$) mit $X_i \sim (\mathrm{IID})X$. Die Parameter der Verteilung von X werden dabei als bekannt angenommen, d.h. wir blenden in dieser Ausarbeitung den Aspekt "parameter uncertainty" aus. Weitergehend setzen wir zunächst nur voraus, dass E(X) einen endlichen Wert annimmt[9]. Ferner gehen wir vereinfachend davon aus, dass das Versicherungsunternehmen nur dieses homogene Kollektiv versichert. Damit können das vorhandene Risikokapital sowie die Verluste und Gewinne des Versicherers eindeutig dem betrachteten IID-Kollektiv zugeordnet werden. Die Analyse des Falls eines heterogenen Gesamtkollektivs erfolgt im Rahmen einer weiterführenden Ausarbeitung.

Die resultierende Endvermögensposition (t = 1) im Versicherungsfall bezeichnen wir mit $W^I(n)$. Die konkrete Spezifikation dieser Position ist abhängig von weiteren Einflussgrößen und erfolgt daher erst im weiteren Verlauf dieser Ausarbeitung.

Die Bewertung der beiden alternativen Vermögenspositionen erfolgt auf der Basis der Erwartungsnutzentheorie[10] (Bernoulli-Prinzip), d.h. es gilt in Abhängigkeit von der gewählten Risikonutzenfunktion u(x)

(2.2a) $$\Phi^{NI} = \Phi(W^{NI}) = E[u(W^{NI})]$$

sowie

(2.2b) $$\Phi^I(n) = \Phi(W^I(n)) = E[u(W^I(n))].$$

Nach (2.2b) ist dabei insbesondere der Erwartungsnutzen der versicherten Position abhängig von der Größe des IID-Kollektivs, in das der potentielle Versicherungsnehmer eingebettet wird.

Im Hinblick auf die Risikonutzenfunktion u setzen wir voraus, dass diese streng monoton steigend sowie streng konkav ist. Der betrachtete Entscheidungsträger weist somit globale

---

[8] Dies stellt keine Einschränkung dar. Bezeichnet $Y = h(X)$ den versicherten Anteil des Originalrisikos X, so ist die Vorteilhaftigkeitsanalyse einer Versicherungsnahme im Hinblick auf Y, d.h. den versicherten Teil des Schadens, durchzuführen.

[9] Da $X \geq 0$, gilt damit auch $|E(X)| < \infty$, d.h. X ist absolut integrierbar. Dies sichert zusammen mit der IID-Annahme die Gültigkeit des starken GdgZ.

[10] Dies schließt Ansätze der subjektiven Erwartungsnutzentheorie (vgl. hierzu etwa Chateauneuf et al. (2009)) mit ein, denn bei diesen kann die Bewertung zurückgeführt werden auf die Standardform E[u(X)] des Bernoulli-Prinzips.

Risikoaversion auf. Diese Annahmen sichern insbesondere die Stetigkeit[11] der Nutzenfunktion sowie die Existenz einer (wiederum streng monoton steigenden) Umkehrfunktion u^{-1}.

Im Weiteren gehen wir grundsätzlich davon aus, dass die in (2.2) eingeführten Größen $E[u(W^{NI})]$ und $E[u(W^{I}(n))]$ jeweils einen endlichen Wert annehmen.

Im Hinblick auf den nutzensteigernden Effekt der Kollektivbildung betrachten wir zwei Varianten. Die erste („starke“) Variante fordert die strenge Monotonie dieses Effekts, die zweite („schwache“) Variante schwächt diese Anforderung ab.

Damit ein AIK zum Nutzen des Nachfragers nach Versicherungsschutz vorliegt, fordern wir in der starken Variante die Erfüllung der beiden folgenden Bedingungen:

(2.3a) $\Phi^{I}(2) > \Phi^{NI}$

(2.3b) $\Phi^{I}(n+1) > \Phi^{I}(n)$ für alle $n \geq 2$.

Wir fordern also, dass bereits die Einbettung in ein IID-Kollektiv der Größe zwei dazu führt, dass der Abschluss einer Versicherung präferiert wird gegenüber dem Nicht-Abschluss einer Versicherung. Ferner fordern wir, dass der Nutzen der Versicherungsnahme mit steigender Kollektivgröße monoton zunimmt.

In der schwachen Variante ist der Abschluss eines Versicherungsvertrags und die Einbettung in ein Versichertenkollektiv dann vorteilhaft für den Entscheidungsträger, wenn es eine Kollektivgröße n_0 gibt, mit

(2.4a) $\Phi^{I}(n) > \Phi^{NI}$ für alle $n \geq n_0$.

Die Bedingung (2.4a) kann alternativ auch in Termen des Sicherheitsäquivalents formuliert werden, d.h. in der Form $CE^{I}(n) > CE^{NI}$, wobei $CE^{I}(n) := u^{-1}(\Phi^{I}(n))$ und $CE^{NI} := u^{-1}(\Phi^{NI})$. Die Bedingung (2.4a) ist offenbar erfüllt, wenn nachgewiesen werden kann, dass $\lim_{n\to\infty} \Phi^{I}(n) > \Phi^{NI}$ bzw. $\lim_{n\to\infty} CE^{I}(n) > CE^{NI}$.

Des Weiteren liegt ein nutzensteigernder Effekt einer Kollektivvergrößerung in der schwachen Variante dann vor, wenn es für alle $n \geq n_0$ eine Kollektivgröße $k_n > n$ gibt mit

(2.4b) $\Phi^{I}(k) \geq \Phi^{I}(n)$ für alle $k \geq k_n$.

---

[11] Ist der Wertebereich von u ein links abgeschlossenes Intervall, so muss für das linke Intervallende die Stetigkeit separat postuliert werden.

Auch (2.4b) kann äquivalent in Termen des Sicherheitsäquivalents formuliert werden. Die Existenz eines Grenzwerts $\lim_{n\to\infty} \Phi^I(n) > \Phi^{NI}$ bzw. $\lim_{n\to\infty} CE^I(n) > CE^{NI}$ sichert offenbar auch die Erfüllung von (2.4b).

Die Bedingung (2.4a) beinhaltet, dass es für ein fixiertes Risiko X und eine fixierte individuelle Risikonutzenfunktion u(x) ein IID-Kollektiv $X_i \sim (\text{IID})X$ mit einer Mindestgröße n_0 gibt, so dass der Abschluss eines Versicherungsvertrags auf jeden Fall vorteilhaft für einen Entscheidungsträger mit Risikonutzenfunktion u ist. Die Eigenschaft (2.4b) beinhaltet, dass die Einbettung in ein (hinreichend) größeres Kollektiv zu einer weiteren Nutzensteigerung seitens des Versicherten führt.

In beiden Varianten ist damit die Möglichkeit der Einbettung eines abzugebenden Risikos in ein IID-Kollektiv von zentraler Bedeutung für den Abschluss eines Versicherungsvertrags. Die die Einbettung in (hinreichend) größere Kollektive führt zu einer weiteren Nutzensteigerung seitens des Versicherten.

3. Reine Gegenseitigkeitsversicherung

3.1 Ausgangspunkte

Im Falle einer reinen Gegenseitigkeitsversicherung sind alle Versicherungsnehmer zugleich Eigentümer des Versicherungsunternehmens. Dies führt zu der Forderung, dass die Versicherten an allen Erträgen einer Periode ebenso zu beteiligen sind wie an allen Verlusten. Wir gehen dabei vereinfachend davon aus, dass das Versicherungsunternehmen eventuelle Erträge vollständig ausschütten kann[12]. Im Falle eines homogenen Kollektivs erhält dabei konsequenterweise jeder Versicherte den gleichen Anteil am Ertrag des Kollektivs. Ebenso gehen wir davon aus, dass im Falle eines Verlustes auf Ebene des betrachteten Kollektivs die Mitglieder des Kollektivs gleichmäßig am Verlust beteiligt werden[13].

Bezeichnen wir mit $S_n \coloneqq X_1 + \ldots + X_n$ den Gesamtschaden des IID-Kollektivs und mit $\bar{S}_n := S_n/n$ den Gesamtschaden pro Versichertem des Kollektivs (Schadenbedarf), so lautet[14]

[12] Damit werden insbesondere Ertragssteuern in der vorliegenden Arbeit ausgeblendet, ebenso wie die Möglichkeit einer Erhöhung der Reserven des Unternehmens.

[13] Wir schließen damit aus, dass der Versicherer einen Kredit aufnimmt, um den entstandenen Verlust (zwischen) zu finanzieren.

[14] Der Fall der reinen Gegenseitigkeitsversicherung ist auch der in Gatzert/Schmeiser (2012) zentral behandelte Fall. Die von Gatzert/Schmeiser (2012) dargestellte Position ist jedoch komplexer. Dies liegt daran, dass die Autoren die Verlustbeteiligung und die Gewinnbeteiligung separat ansetzen. Da $n\,\pi - S_n = \max(n\,\pi - S_n, 0) - \max(S_n - n\,\pi, 0)$, sind die resultierenden Positionen jedoch identisch.

die Vermögensposition im Falle der reinen Gegenseitigkeitsversicherung bei Einbettung in ein IID-Kollektiv der Größe n

(3.1) $$W^I(n) = W_0 - \pi + \frac{1}{n}(n\,\pi - S_n) = W_0 - \bar{S}_n.$$

Dabei wird angenommen, dass alle Mitglieder des homogenen Kollektivs konsequenterweise die gleiche Individualprämie π entrichten.

Interessanterweise ist im Falle einer reinen Gegenseitigkeitsversicherung die Vermögensposition eines Versicherten (unter den spezifizierten Prämissen) vollständig unabhängig von der geforderten Individualprämie π. Diese kann also insbesondere höher oder niedriger sein als die faire Prämie, d.h. $\pi = E(X)$. Im Extremfall kann sie sogar null sein[15]. Die Forderung, dass die Versicherten an allen Erträgen wie Verlusten gleichmäßig zu beteiligen sind, führt dazu, dass die Höhe der Prämie irrelevant für die Analyse wird. Es ist das Verdienst von Gatzert/Schmeiser (2012), auf diese spezifische Versicherungskonstellation aufmerksam gemacht zu haben.

3.2 AIK-Effekte

Theorem 1: *Die Position (3.1) der reinen Gegenseitigkeitsversicherung erfüllt die Anforderungen (2.3) an die Vorteilhaftigkeit einer Kollektivbildung für alle Nachfrager nach Versicherungsschutz mit streng monoton steigender und streng konkaver Risikonutzenfunktion.*

Dieses Resultat ist nicht nur vor dem Hintergrund einer spezifischen Rechtsform des Versicherungsunternehmens von Interesse. Die reine Gegenseitigkeitsversicherung stellt eine der historischen Wurzeln des modernen Versicherungswesens dar und ihr Grundgedanke besteht darin, dass es besser ist, Risiken in einem Kollektiv umzuverteilen als sie alleine zu tragen. Theorem 1 beinhaltet eine Rechtfertigung dieses Grundgedankens aus einer nutzentheoretischen Perspektive.

Der Beweis von Theorem 1 ist in Anhang A enthalten, die Beweisidee soll im Folgenden skizziert werden. Theorem 1 beruht auf dem Nachweis, dass sowohl die Konstellation W^{NI} „riskanter“ ist als die Konstellation $W^I(2)$ als auch die Konstellation $W^I(n)$ jeweils „riskanter“ ist als die Konstellation $W^I(n+1)$. „Riskanter als“ ist dabei im Sinne einer der äquivalenten

[15] Allerdings ist hierzu anzumerken, dass wir nur die Position der Versicherungsnehmer betrachten und die Position des Versicherungsunternehmens ausblenden. Hier können regulatorische Anforderungen dazu führen, dass nicht beliebige Prämienhöhen zulässig sind.

Versionen (konkret: Y = X + „Noise“) der Konzeption des „Increasing Risk“ nach Rothschild/Stiglitz (1970) zu verstehen. Setzen wir $Y = W^I(n)$ und $X = W^I(n+1)$, so resultiert als Noise-Größe $\varepsilon = \bar{S}_{n+1} - \bar{S}_n$. Der Nachweis der Bedingung $E(\varepsilon|X) = 0$ führt dann insbesondere auf die Auswertung der Größen $E(\bar{S}_n|\bar{S}_{n+1})$. Hierfür verwenden wir die Tatsache, dass die Folge $\{\bar{S}_n\}$ ein Rückwärtsmartingal[16] ist.

Abschließend illustrieren wir das Ergebnis von Theorem 1 auf der Basis des Präferenzfunktionals (a > 0)

$$\Phi(X) = E(X) - a\,Var(X)\,. \tag{3.2}$$

Dieses ist auf der Klasse der Normalverteilungen konsistent zum Bernoulli-Prinzip[17]. Ausgangspunkt unseres Beispiels sind somit IID- normalverteilte Risiken X_i, d.h. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Wir erhalten $\Phi^{NI} = \Phi(W_0 - X) = E(W_0 - X) - a\,Var(W_0 - X)$ und damit insgesamt

$$\Phi^{NI} = W_0 - \mu - a\,\sigma^2. \tag{3.3}$$

Auf der anderen Seite gilt $\bar{S}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ und wir erhalten $\Phi^I(n) = E(W_0 - \bar{S}_n) - aVar(W_0 - \bar{S}_n)$ und damit insgesamt

$$\Phi^I(n) = W_0 - \mu - a\frac{\sigma^2}{n}. \tag{3.4}$$

Offensichtlich gilt dann $\Phi^I(2) > \Phi^{NI}$ sowie $\Phi^I(n+1) > \Phi^I(n)$ für alle $n \geq 2$. Damit ist bereits die Einbettung in ein Kollektiv aus zwei Versicherten vorteilhaft für den Nachfrager nach Versicherungsschutz und jede weitere Kollektivvergrößerung mehrt seinen Nutzen.

4. Versicherungsaktiengesellschaft

4.1 Ausgangspunkte

Wir gehen aus von einer Versicherungsaktiengesellschaft mit einem anfänglichen (t=0) Kapital der Höhe C. Der Fall der (technischen) Insolvenz des Versicherers tritt dann ein, wenn $S_n > n\,\pi + C$, d.h. der akkumulierte Gesamtschaden des Kollektivs übersteigt die akkumulierten Prämien sowie das vorhandene Kapital. Damit ist der resultierende Verlust $L_n = \max(S_n - n\,\pi - C, 0)$ von der Gemeinschaft der Versicherten selbst zu tragen. Vor diesem

[16] Man vgl. hierzu etwa Klenke (2006, Abschnitt 12.2).

[17] Vgl. hierzu Schneeweiß (1967, S. 149). Dabei erzeugt die Klasse der exponentiellen Risikonutzenfunktionen eine Präferenzordnung, die zu (3.4) äquivalent ist.

Hintergrund wenden wir uns zwei Problemkreisen zu. Zunächst untersuchen wir das Verhalten des anteiligen Verlusts[18] $\bar{L}_n = L_n/n$ pro Mitglied des IID-Kollektivs. Es gilt

$$\bar{L}_n = \max(\bar{S}_n - \pi - C/n, 0). \tag{5.1}$$

Aus Sicht des einzelnen Versicherten ist von der Größe $-\bar{L}_n$ auszugehen, da der anteilige Verlust seine Vermögensposition vermindert. Diese Größe kann als Short-Position in einer Call-Option („Default-Call") angesehen werden. Der Transfer des Risikos zur Prämie π auf die Versicherungsaktiengesellschaft impliziert, dass jeder Versicherte pro Kopf gesehen eine Stillhalterposition in diesem Default-Call einnimmt. Der Call ist relativ zur durchschnittlichen Verlustgröße $\bar{S}_n$ definiert und besitzt einen Ausübungspreis in Höhe von $\pi + C/n$. Da durchschnittliche Verlustgrößen (ebenso wie absolute Verlustgrößen) nicht fortlaufend am Markt gehandelt werden (und die Option auch nicht durch eine dynamische Handelsstrategie synthetisch erzeugt werden kann), halten wir es für wenig realistisch, die Option einer arbitragefreien Bewertung zu unterziehen, d.h. Resultate der Optionspreistheorie anzuwenden, sondern wir gehen zur Bewertung dieser Call weiterhin vom Bernoulli-Prinzip aus.

Betrachtet man nicht den anteiligen Verlust pro Kollektivmitglied, sondern korrigiert man alternativ die Entschädigung des i-ten Versicherten im Schadenfall proportional zur Höhe seines Schadens X_i, so erhält man als resultierende Vermögensposition[19] $W^I(n) = W_0 - \pi - L_n \cdot \frac{X_i}{S_n}$ bzw. äquivalent

$$W^I(n) = W_0 - \pi - \bar{L}_n \cdot \frac{X_i}{\bar{S}_n}. \tag{5.2}$$

Es gilt $\sum_{i=1}^{n} \left(L_n \cdot \frac{X_i}{S_n} \right) = L_n$, d.h. auf der Ebene des Kollektivs ergibt sich wiederum der Gesamtverlust L_n im Falle der Insolvenz des Versicherers.

Neben der Untersuchung der beiden Positionen (5.1) und (5.2) besteht eine weitere Variation der Analyse darin, dass unterschiedliche Formen einer systematischen Prämienfestsetzung denkbar sind.

Um die im Weiteren erforderlichen Berechnungen möglichst elementar zu halten, nehmen wir ferner $X \leq M < \infty$ an[20], d.h. der potentielle individuelle Gesamtschaden kann keine beliebig

---

[18] Dies entspricht zudem dem Verlust, den jedes Kollektivmitglied im Falle einer reinen Gegenseitigkeitsversicherung zu tragen hätte.

[19] Dabei definieren wir $X_i/S_n = 0$, wenn $X_i = 0$. Im Falle $X_i > 0$ ist auch $S_n > 0$.

[20] Dies ist auch eine Standardannahme in der Theorie der Versicherungsnachfrage, vgl. etwa Schlesinger (2013, S. 168).

hohen Werte annehmen (was zumindest aus Sicht praktischer Anwendungen eine unproblematische Annahme darstellt).

Diese zusätzliche Annahme liegt darin begründet, dass in den Beweisen der folgenden Aussagen eine Vertauschbarkeit zwischen der Bildung des Choquet-Integrals und fast sicherer Konvergenz erforderlich ist. Dies geschieht auf der Basis des Satzes von der majorisierten Konvergenz (Lebesguescher Konvergenzsatz). Hierzu ist es erforderlich, dass eine integrable majorisierende Funktion existiert. Eine streng konkave Nutzenfunktion kann nun auf einem unbegrenzten Wertebereich nicht von unten beschränkt sein. Um komplexere Annahmen[21], über das Konvergenzverhalten der Nutzenfunktion und der Verteilung der betrachteten Vermögenspositionen W^{NI} bzw. $W^I(n)$ bzw. $\overline{L}_n$ im linken Tail zu vermeiden liegt es nahe, von vorneherein von einem endlichen Wertebereich von X auszugehen[22]. Zusätzlich ist zu fordern, dass die Risikonutzenfunktion u in den Intervallenden der Wertebereiche der betrachteten Vermögenspositionen jeweils endliche Werte annimmt. Wie aus den Beweisen in Anhang A ersichtlich, ist hierfür etwa hinreichend, dass $u(W_0) < \infty$ und $u(-M) > -\infty$ gilt. Insbesondere garantieren diese Annahmen die Endlichkeit der Positionen unter (2.2), d.h. des Erwartungsnutzens der betrachteten Vermögenspositionen.

Während für die Zwecke des Abschnitts 4 die Anforderungen an die Schadengröße X verschärft werden müssen, können sie im Hinblick auf die Nutzenfunktion abgeschwächt werden. Alle im Weiteren evaluierten Vermögenspositionen, d.h. W^{NI} bzw. $W^I(n)$ bzw. $\overline{L}_n$, weisen einen Wertebereich auf, der mit dem Intervall $(-\infty, W_0]$ identisch ist oder eine Teilmenge hiervon bildet. Insofern genügt es, die Anforderungen der strengen Monotonie und der strengen Konkavität von u(x) auf den Wertebereich $(-\infty, W_0]$ zu beschränken. Außerhalb dieses Wertebereichs sind beliebige Verläufe der Nutzenfunktion möglich. Dies umfasst insbesondere Nutzenfunktionen des Friedman/Savage-Typus, die Risikoaversion auf dem Bereich $(-\infty, W_0]$ mit Risikofreude auf dem Wertebereich (W_0, ∞) verbinden.

4.2 AIK-Effekte bei additiver Prämie

[21] Man vgl. hierzu etwa Lippman/Mamer (1988) im Kontext einer nutzentheoretischen Analyse des Konvergenzverhaltens der Folge $\{S_n\}$, d.h. bei einer Addition von Zufallsvariablen (wiederholte Durchführung einer Lotterie).

[22] Eine entsprechende Annahme ist durchaus literaturüblich, so treffen etwa Föllmer/Schied (2011, S. 70 bzw. S. 77) eine entsprechende Annahme bei der Analyse der Optimalität alternativer Versicherungskontrakte bzw. bei der Analyse der wiederholten Durchführung einer Lotterie.

Im Falle einer additiven Prämienkalkulation gilt für das Prämienprinzip $\pi(\sum X_i) = \sum \pi(X_i)$. Dies impliziert insbesondere, dass die Individualprämie π als unabhängig von der Größe n des Kollektivs, in das der Nachfrager nach Versicherung eingebettet wird, angesetzt werden kann.

Wir zerlegen die individuelle Bruttoprämie in der Form $\pi = \mu + l$, wobei l einen Zuschlag (Loading) zur Nettorisikoprämie $\mu = E(X)$ bezeichne, den wir standardmäßig mit $l \geq 0$ ansetzen. Dieser Zuschlag umfasst einen Sicherheitszuschlag sowie einen Zuschlag für Betriebskosten.

Als erstes Ergebnis erhalten wir

Theorem 2: *Im Falle einer additiven Prämienkalkulation resultiert unter den getroffenen Annahmen* $E[u(-\bar{L}_n)] \to 0$ *für* $n \to \infty$.

Mit steigender Kollektivgröße geht der nutzentheoretische Wert des Default-Calls pro Versicherten, d.h. der „Mißnutzen“ aus der Insolvenz des Versicherers, gegen null. Kann das abzugebende Risiko in ein genügend großes IID-Kollektiv eingebettet werden, so spielt die Möglichkeit der Insolvenz des Versicherungsunternehmens damit konsequenterweise (im Durchschnitt) keine Rolle mehr für die Versicherungsentscheidung.

Der Beweis von Theorem 2 ist in Anhang A enthalten, wir skizzieren nachfolgend die Beweisidee. Zunächst gilt nach dem starken GdgZ $\lim_{n\to\infty} \bar{S}_n = \mu$ fast sicher (f.s.). Aufgrund von Stetigkeitsüberlegungen gilt dann $-\bar{L}_n \to 0$ f.s. und damit auch $u(-\bar{L}_n) \to u(0) = 0$ f.s. Als nächster Schritt ist die Beziehung $E[u(-\bar{L}_n)] \to E[u(0)]$ nachzuweisen. Dieser Schritt ist allerdings nicht-trivial, da aus der starken Konvergenz bekanntlich nicht die Konvergenz nach Erwartung (L^1-Konvergenz) folgt[23,24]. Zum Nachweis der erforderlichen Konvergenzbeziehung verwenden wir eine Abschätzung, die es erlaubt, den Satz von der majorisierten Konvergenz (Lebesguescher Konvergenzsatz) anzuwenden. Für weitere Details verweisen wir auf Anhang A.

Weitergehend untersuchen wir den nutzentheoretischen Wert der Position (4.2). Für die Original-Schadenposition (kein Abschluss eines Versicherungsvertrags) gilt

[23] Man vgl. etwa Klenke (2006, Anmerkung 6.11).

[24] Für die Folge $\{\bar{S}_n\}$ ist die L^1-Konvergenz gesichert, da $\{\bar{S}_n\}$ ein Rückwärtsmartingal und damit gleichgradig integrierbar ist. Dies überträgt sich jedoch nicht notwendigerweise auf die Folge $\{u(-\bar{L}_n)\}$.

$\Phi(W^{NI}) = E[u(W_0 - X)]$. Im Falle der Risikoaversion[25] gilt für das Sicherheitsäquivalent $CE^{NI} = u^{-1}[\Phi(W^{NI})] < E(W^{NI}) = W_0 - E(X) = W_0 - \mu$. Damit gilt insgesamt

(5.4a) $\qquad CE^{NI} < W_0 - \mu$

bzw. äquivalent

(5.4b) $\qquad \Phi^{NI} < u(W_0 - \mu)$.

Für eine fixierte Schadengröße X und eine fixierte Risikonutzenfunktion u(x) definieren wir daher die Größe $\Delta := |W_0 - \mu - CE^{NI}| > 0$.

Theorem 3: *Gilt $l < \Delta$ und liegt eine additive Prämienkalkulation vor, so genügt unter den getroffenen Annahmen die Position (4.2) der Versicherungsaktiengesellschaft den Anforderungen (2.4).*

Der Beweis Theorem 3 befindet sich in Anhang A. Der Beweis folgt den Argumentationslinien des Beweises von Theorem 2. Als Resultat erhalten wir $\lim_{n\to\infty} \Phi^I = \lim_{n\to\infty} E[W^I(n)] = u(W_0 - \pi)$, wobei die Größe $W^I(n)$ durch (4.2) gegeben ist. Die zusätzliche Bedingung erklärt sich dann wie folgt. Aus dem Beweis von Theorem 3 folgt zunächst $\lim_{n\to\infty} \Phi^I(n) = u(W_0 - \pi)$. Damit (2.4a) erfüllt ist, muss dann gelten $u(W_0 - \pi) > \Phi^{NI}$ bzw. äquivalent $W_0 - \pi > CE^{NI}$. Für einen risikoaversen Versicherungsnehmer gilt gemäß (5.4a) $W_0 - \mu > CE^{NI}$. Die zusätzliche Bedingung $l < \Delta$ sichert somit $W_0 - \pi > CE^{NI}$.

Die Bedingung $l < \Delta$ beinhaltet eine Restriktion im Hinblick auf die Höhe der geforderten Prämie π. Nur wenn diese gewahrt ist, bleibt die Möglichkeit einer Kollektivbildung seitens des Versicherers vorteilhaft für den Nachfrager nach Versicherungsschutz. Eine weitere Erhöhung der Gesamtprämie vermindert zwar die Insolvenzwahrscheinlichkeit des Versicherers und beeinflusst damit den Wert der Call-Option $\max(\bar{S}_n - \pi - C/n, 0)$. Dies wird aber - im Hinblick auf den Gesamtnutzen des Nachfragers nach Versicherung - überkompensiert durch den negativen Effekt einer höheren Prämie π.

Von besonderem Interesse ist der Fall $l = 0$, d.h. die Prämie entspricht dem Schadenerwartungswert (in der Literatur auch als aktuariell faire Prämie bezeichnet), $\pi = \mu$. In diesem Fall gilt für die Insolvenzwahrscheinlichkeit des Versicherers[26]

[25] Nach unserer Annahme ist u(x) strikt konkav. Wenn wir zudem annehmen, dass die Zufallsgröße nicht entartet (keine Konstante) ist, so gilt nach der Jensenschen Ungleichung, dass das Sicherheitsäquivalent strikt kleiner als der Erwartungswert ist.

[26] Dabei nehmen wir vereinfachend $C = 0$ an.

$P(S_n > n\,\mu) = P(\frac{S_n - n\,\mu}{\sigma\sqrt{n}} > 0)$. Nach dem Zentralen Grenzwertsatz strebt diese Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$ gegen (N bezeichne die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung) 1 - N(0) = ½. Die Insolvenzwahrscheinlichkeit konvergiert somit für wachsende IID-Kollektive nicht gegen null, sondern stabilisiert sich bei ½. Man könnte intuitiv erwarten, dass dieses Resultat von kritischer Bedeutung für die Evaluation der Positionen (4.1) und (4.2) ist, denn die vorstehende Eigenschaft nimmt Einfluss auf die Größe $\overline{L}_n = \max(\overline{S}_n - \pi, 0) = \frac{1}{n}\max(S_n - n\,\mu, 0)$. Dies ist jedoch weder für Theorem 2 noch für Theorem 3 (für $l = 0$ ist die Bedingung $l < \Delta$ trivialerweise erfüllt) der Fall. Dieses Resultat zeigt, dass die Insolvenzwahrscheinlichkeit des Versicherungsunternehmens auf der einen Seite und das auf Basis des Bernoulli-Prinzips gemessene Risiko des Versicherten auf der anderen Seite in keiner unmittelbaren Beziehung stehen müssen.

Wenden wir uns zur Illustration wieder dem Beispielfall des Abschnitts 3.2 zu, d.h. unterstellen normalverteilte Risiken in Verbindung mit dem Präferenzfunktional (3.2). Da die Auswertung der Position (4.2) selbst in diesem Basisfall nicht in geschlossener Weise möglich ist, konzentrieren wir uns auf die Auswertung der Position (4.1). Zusätzlich unterstellen wir aus Vereinfachungsgründen[27] $\pi = \mu$, d.h. die Gesamtprämie entspricht der Nettorisikoprämie (Schadenerwartungswert) sowie ein anfängliches Kapital des Versicherers in Höhe von C = 0. Gemäß Anhang B.2 erhalten wir dann

(4.4a) $$E(\overline{L}_n) = n(0)\,\sigma/\sqrt{n}$$

(4.4b) $$Var(\overline{L}_n) = [0.5 - n(0)^2]\,\sigma^2/n\,.$$

Dabei bezeichne n(x) die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung. Es gilt $n(0) \approx 0.4$ und $[0.5 - n(0)^2] \approx 0.341$. Offenbar gilt $\lim_{n\to\infty} E(\overline{L}_n) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} Var(\overline{L}_n) = 0$, wobei $E(\overline{L}_n)$ und $Var(\overline{L}_n)$ streng monoton in n fallen. Dies bestätigt die Aussage des Theorems 2 für diese Beispielkonstellation, denn mit $E\left[u(-\overline{L}_n)\right] = a\,Var(\overline{L}_n) - E(\overline{L}_n)$ gilt offenbar $\lim_{n\to\infty} E[u(-\overline{L}_n)] = 0$. Dieses Resultat bestätigt auch die allgemeine Analyse, dass es auch im Fall $\pi = \mu$ auf Seiten des Nachfragers nach Versicherung zu nutzensteigernden Effekten durch die Kollektivbildung kommt. Zugleich zeigt sich, dass in speziellen Konstellationen auf die Annahme der Endlichkeit des Wertebereichs von X verzichtet werden kann. Insbesondere gilt

[27] Die Auswertung des Terms $\max(\overline{S}_n - \pi - C/n, 0)$ in (4.1) erfordert die Berechnung von partiellen Momenten, der allgemeine Ansatz ist in Anhang B dargestellt. Die Berechnungen führen im allgemeinen Fall zu unhandlichen Ausdrücken. Insofern beschränken wir uns zu Illustrationszwecken auf einen Basisfall.

dies im Falle der Normalverteilung, da diese im Kontext des Bernoulli-Prinzips auf Präferenzen führt, die nur vom Erwartungswert und der Varianz der zu evaluierenden Größe abhängen.

4.3 Ausgleich im Kollektiv-Effekte bei subadditiver Prämie

Albrecht (1982) unterscheidet zwei Varianten des Ausgleichs im Kollektiv, im Weiteren Typ A und Typ B genannt. Bei Typ A führt ein wachsendes Kollektiv zu einer Verringerung der Insolvenzwahrscheinlichkeit (in der Grenze auf null). Bei Typ B wird die Höhe der Insolvenzwahrscheinlichkeit vorgegeben und der AIK schlägt sich in einer Reduktion der erforderlichen Prämie pro Kollektivmitglied nieder (in der Grenze geht dabei der Sicherheitszuschlag in der Prämie pro Versichertem auf null). Typ B beinhaltet intuitiv die "Weitergabe" von AIK-Effekten an die Kollektivmitglieder bei Wahrung einer ausreichenden Unternehmenssicherheit. In der Variante B führt der AIK somit zu subadditiven Prämien. Ein nutzentheoretisches Analogon dieser Überlegung geht auf Diamond (1984, S. 405 ff.) zurück[28]. Diamond postuliert, dass die Diversifikation bei der Addition von Risiken dazu führen müsse, dass die Prämie pro Risiko sinkt.

Aufgrund der zentralen Bedeutung des AIK für die Versicherungsproduktion wird entsprechend der Subadditivität als Anforderung an ein Prämienprinzip[29] eine hohe Bedeutung beigemessen. So formulieren etwa Wang et al. (1997) ein Axiomensystem für Preise in einem kompetitiven Versicherungsmarkt, das auf ein Choquet-Preisfunktional und damit subadditive Prämien führt.

Subadditive Prämien unterliegen der Kritik[30], dass sie gegen das fundamentale Prinzip der Arbitragefreiheit verstoßen, da dieses zu linearen Prämienfunktionalen führt. Allerdings ist diese Kritik nur für friktionslose Märkte valide, nicht für Märkte mit Friktionen (etwa Transaktionskosten[31] oder Handelsbeschränkungen). De Waegenaere et al. (2003) weisen in

[28] Man vgl. hierzu auch die weiteren Ausführungen in Denuit et al. (2011, S. 243 f.).

[29] Ein Analogon hierzu besteht in der Forderung der Subadditivität des Risikokapitals bzw. der Subadditivität von Risikomaßen nach Artzner et al. (1999).

[30] Man vgl. etwa Gatzert/Schmeiser (2012, S. 188, S. 190). Auch Borch (1982, S. 1295) formuliert: "if a competitive market is in equilibrium, values must be additive…".

[31] Gollier (2013, S. 118) führt aus, dass die Transaktionskosten im Versicherungsfall ca. 30% der Prämie betragen.

einem solchen Kontext nach, dass ein Choquet-Preisfunktional konsistent mit einem Versicherungsmarkt[32] im Gleichgewicht ist.

Wir betrachten im Weiteren eine Festsetzung der individuellen Versicherungsprämie der Form

(4.5) $$\pi = \mu + l(n),$$

wobei $l(n) \geq 0$ ein Zuschlag (pro Risiko) ist, der von der Kollektivgröße abhängt[33]. Des Weiteren fordern wir $\lim_{n\to\infty} l(n) = 0$. Im Gegensatz zu Abschnitt 4.2 ist damit die Individualprämie abhängig von der Kollektivgröße, d.h. $\pi = \pi(n)$.

Zunächst ist festzuhalten, dass die Aussage des Theorems 2 in unveränderter Form auch für den Fall einer subadditiven Prämie erhalten bleibt, d.h. der Mißnutzen aus der Insolvenz des Versicherers konvergiert mit steigender Kollektivgröße gegen null. Der Beweis dieser Aussage ist vollständig parallel zum Beweis von Theorem 2. Ferner haben wir

Theorem 4: *Im Falle einer subadditiven Prämie der Form (4.5) genügt unter den getroffenen Annahmen die Position (4.2) der Versicherungsaktiengesellschaft den Anforderungen (2.4).*

Der Beweis von Theorem 4 befindet sich in Anhang A und folgt dem Beweisprinzip von Theorem 2. Im Unterschied zu Theorem 3 sind hier keine weiteren Restriktionen für den Zuschlag l erforderlich. Die Konvergenzbedingung $l(n) \to 0$ sichert bereits die Erfüllung der Anforderungen (2.4).

Wenden wir uns auch im Falle subadditiver Prämien einem abschließenden Beispiel zu**,** wobei wir uns wieder auf die Evaluation der Position (4.1) beschränken. Wir betrachten ein IID-Kollektiv normalverteilter Risiken in Verbindung mit dem Präferenzfunktional (3.2). Wir setzen vereinfachend C = 0. Des Weiteren fixieren wir das Niveau α $(0 < \alpha < 0{,}5)$ der Insolvenzwahrscheinlichkeit, d.h. $P(S_n > n\pi(n)) = \alpha$. Damit muss per Definition die Größe $n\pi(n)$ dem $(1\text{-}\alpha)$-Quantil der Verteilung von S_n entsprechen. Da S_n normalverteilt ist, erhalten wir hieraus die Bedingung $n\pi(n) = E(S_n) + N_{1-\alpha}\,\sigma(S_n) = n\mu + N_{1-\alpha}\sigma\sqrt{n}$. Hieraus folgt für die Struktur des (individuellen) Sicherheitszuschlags

(4.6) $$l(n) = N_{1-\alpha}\sigma/\sqrt{n}.$$

[32] Ein entsprechendes Resultat für Finanzmärkte erzielen Chateauneuf et al. (1996).

[33] Der Zuschlag setzt sich dabei etwa zusammen aus der Verteilung eines degressiv wachsenden Sicherheitszuschlags sowie von Betriebskosten, die einem Degressionseffekt (fixe Betriebskosten) unterliegen.

Der Sicherheitszuschlag entwickelt sich somit in reziprokem Verhältnis zur Wurzel aus der Kollektivgröße.

Auf der Basis der Prämienforderung $\pi(n) = \mu + l(n)$ erhalten wir dann[34]

(4.7a) $$E(\overline{L}_n) = h_1(\alpha)\, \sigma/\sqrt{n}$$

(4.7b) $$Var(\overline{L}_n) = h_2(\alpha)\, \sigma^2/n.$$

Dabei sind $h_1(\alpha) > 0$ und $h_2(\alpha) > 0$ zwei positive reelle Größen, die nur von dem vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsniveau α abhängen, nicht aber von der Kollektivgröße.

Dies bestätigt auch für diese Beispielkonstellation die Aussage des Theorems 2, denn mit $E[u(-\overline{L}_n)] = a\, Var(\overline{L}_n) - E(\overline{L}_n)$ gilt offenbar $\lim_{n\to\infty} E[u(-\overline{L}_n)] = 0$.

5. Schlussfolgerungen

In der vorliegenden Ausarbeitung sind wir der Frage nachgegangen, welchen Einfluss die Möglichkeit der Einbettung eines abzugebenden Risikos in ein IID-Versicherungskollektiv auf den Abschluss eines Versicherungsvertrags besitzt, wenn der Entscheidungsträger dem Bernoulli-Prinzip folgt. Auf der Basis des starken GdgZ sind wir in der Lage, hier allgemeine Resultate zu erzielen, die nur auf standardmäßigen Anforderungen an die Risikonutzenfunktion des Entscheidungsträgers sowie an die Verteilung der individuellen Gesamtschäden beruhen.

Es zeigt sich, dass die Möglichkeit der Kollektivbildung zentralen Einfluss auf die Versicherungsentscheidung nimmt. Ferner führen (hinreichende) Vergrößerungen des Kollektivs zu einer weiteren Nutzenmehrung seitens der Versicherten.

Die Bedeutung der Kollektivbildung für den Abschluss von Versicherungsverträgen stellt einen zentralen Unterschied von Versicherungsprodukten im Vergleich zu anderen Finanzprodukten dar. Dies bestätigt erneut, dass die Produktion von Versicherungsschutz auf einer Produktionsgesetzmäßigkeit sui generis (Ausgleich im Kollektiv) beruht.

[34] Wie beim vorangegangenen Beispiel ist wieder die Berechnung von partiellen Momenten erforderlich. Dies ist in Anhang B.3 dargestellt.

Anhang A: Beweise der Theoreme

Beweis von Theorem 1:

Wir nutzen aus, dass die Folge $\{\bar{S}_n; n \geq 1\}$ ein Rückwärtsmartingal (Backwards Martingale, Reverse Martingale) bildet[35]. Konkret gilt mit $Y_n \coloneqq \bar{S}_n$ und $J_{-n} \coloneqq \sigma(\{S_k; k \geq n\})$, dass $(Y_n, J_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ ein Martingal mit der Indexmenge $-\mathbb{N}$ ist. Dabei bezeichne $\sigma(\{S_k; k \geq n\})$ die von der Menge der Zufallsvariablen $\{S_k; k \geq n\}$ erzeugte σ-Algebra. Damit folgt insbesondere $E(\bar{S}_{n-j}|J_{-n}) = \bar{S}_n$ für $n \geq 2$ and $1 \leq j \leq n-1$.

Des Weiteren gilt (da $S_{k+1} - S_k = X_{k+1}$ für alle $k \geq 1$ und die Zufallsvariablen $\{X_i\}$ stochastisch unabhängig sind), $E(\bar{S}_{n-j}|J_{-n}) = E(\bar{S}_{n-j}|S_n, S_{n+1},\ldots) = E(\bar{S}_{n-j}|S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots) = E(\bar{S}_{n-j}|S_n)$.

Da $\sigma(\{S_n\}) = \sigma(\{\frac{1}{n}S_n\})$ folgt ferner $E(\bar{S}_{n-j}|S_n) = E(\bar{S}_{n-j}|\bar{S}_n)$. Insgesamt haben wir damit

$$E(\bar{S}_{n-j}|\bar{S}_n) = \bar{S}_n.$$

Mit $Y \coloneqq W_0 - X_1$ und $X \coloneqq W_0 - \bar{S}_n$ gilt zunächst $Y = X + \varepsilon$, wobei $\varepsilon = \bar{S}_n - X_1$. Weiter gilt, da $\bar{S}_1 = X_1$), $E(\varepsilon|W_0 - \bar{S}_n) = E(\varepsilon|\bar{S}_n) - E(\bar{S}_n|\bar{S}_n) = E(X_1|\bar{S}_n) = \bar{S}_n - \bar{S}_n = 0$.

Damit ist $W_0 - X_1$ "riskanter" (more risky) als $W_0 - \bar{S}_n$ im Sinne der Definition von[36] Rothschild/Stiglitz (1970), d.h. $W_0 - X_1 = (W_0 - \bar{S}_n)$ + "Noise". Hieraus folgt[37] $E[u(W_0 - \bar{S}_n)] \geq E[u(W_0 - X_1)]$ für alle risikoaversen Entscheidungsträger. Die Anforderung (2.3a) entspricht dem Fall n = 2.

Des Weiteren definieren wir $Y \coloneqq W_0 - \bar{S}_{n-1}$ und $X \coloneqq W_0 - \bar{S}_n$. Es gilt dann $Y = X + \varepsilon$ mit $\varepsilon = \bar{S}_n - \bar{S}_{n-1}$. Hieraus folgt $E(\varepsilon|W_0 - \bar{S}_n) = E(\varepsilon|\bar{S}_n) = E(\bar{S}_n|\bar{S}_n) - E(\bar{S}_{n-1}|\bar{S}_n) = \bar{S}_n - \bar{S}_n = 0$. Damit ist auch $W_0 - \bar{S}_{n-1}$ riskanter als $W_0 - \bar{S}_n$.

[35] Vgl. hierzu etwa Klenke (2006, Abschnitt 12.2).
[36] Vgl. hierzu auch Levy (1992, S. 563 f.).
[37] Da wir nur diese Richtung der Folgerung benötigen und nicht die Äquivalenz der Aussagen, müssen an die Verteilungsfunktion keine zusätzlichen Anforderungen gestellt werden, wie Rothschild/Stiglitz (1970) dies tun.

Beweis von Theorem 2:

Wir gehen aus von $\pi = \mu + l$ mit $l \geq 0$. Die Funktionen $f(x) = \max(x,0)$, $g(x)=\min(x,0)$ und $u(x)$ sind stetig. Damit folgt aus $\bar{S}_n \rightarrow \mu$ f.s. und $C/n \rightarrow 0$ (für alle $\omega \in \Omega$) zunächst, dass $-\bar{L}_n = -\max\left(\bar{S}_n - \mu - l - C/n, 0\right) = \min\left(\mu + l + C/n - \bar{S}_n, 0\right) \rightarrow \min(l,0) = 0$ f.s. und damit auch $u(-\bar{L}_n) \rightarrow 0$ f.s. Mit $0 \leq X \leq M$ gilt auch $0 \leq \bar{S}_n \leq M$ und damit $-M < \min(\pi + C/n - \bar{S}_n, 0) \leq 0$. Hieraus folgt $|u(-\bar{L}_n)| \leq |u(-M)| < \infty$. Die Majorante $|u(-M)|$ ist offenbar absolut integrierbar. Wir können daher den Lebesgueschen Konvergenzsatz[38] (Satz von der majorisierten Konvergenz) anwenden und erhalten damit $\lim_{n\rightarrow\infty} E[u(-\bar{L}_n)] = E[\lim_{n\rightarrow\infty} u(-\bar{L}_n)] = 0$.

Beweis von Theorem 3:

Wir folgen dem Beweis von Theorem 2. Aus $\bar{S}_n \rightarrow \mu$ f.s. und $\bar{L}_n \rightarrow 0$ f.s. folgt $W^I(n) \rightarrow W_0 - \pi$ f.s., wobei $W^I(n) = W_0 - \pi - (\bar{L}_n/\bar{S}_n)X_i$. Damit gilt auch $u(W^I(n)) \rightarrow u(W_0 - \pi)$ f.s. Ferner gilt $-M < W^I(n) \leq W_0 - \pi < W_0$ und damit $u(-M) < u(W^I(n)) < u(W_0)$. Insgesamt gilt damit $|u(W^I(n))| \leq \max\left(u(W_0), |u(-M)|\right) < \infty$. Damit haben wir eine integrierbare Majorante gefunden und können wieder den Lebesgueschen Konvergenzsatz anwenden. Es folgt $E[u(W^I(n))] \rightarrow E\left[u\left(W_0 - \pi\right)\right] = u(W_0 - \pi)$.

Beweis von Theorem 4:

Wir gehen aus von $\pi(n) = \mu + l(n)$ mit $l(n) \geq 0$. Unverändert gilt auch für $\bar{L}_n = \max(\bar{S}_n - \pi(n) - C/n, 0)$ wieder $\bar{L}_n \rightarrow 0$ f.s. Insgesamt folgt damit $W^I(n) \rightarrow W_0 - \mu$ f.s., wobei $W^I(n) = W_0 - \pi(n) - (\bar{L}_n/\bar{S}_n)X_i$, und damit $u(W^I(n)) \rightarrow u(W_0 - \mu)$ f.s. Im Hinblick auf $|u(W^I(n))|$ ergibt sich eine identische Majorante wie im Beweis von Theorem 3. Damit gilt schließlich $E[u(W^I(n))] \rightarrow u(W_0 - \mu)$.

[38] Vgl. etwa Billingsley (1995, Theorem 16.4).

Anhang B: Berechnungen für die Beispiele

B.1 Partielle Momente der Normalverteilung

Grundsätzlich gilt[39] für $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit $m \coloneqq (z - \mu)/\sigma$

(B.1a) $$SE_z(Y) = (z - \mu)\, N(m) + \sigma\, n(m)$$

(B.1b) $$SV_z(Y) = [(z - \mu)^2 + \sigma^2]\, N(m) + \sigma(z - \mu)\, n(m)$$

Dabei bezeichnet $N(x)$ bzw. $n(x)$ die Verteilungsfunktion bzw. die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung und SE_z bzw. SV_z den Shortfallerwartungswert bzw. die Shortfallvarianz bezüglich der Zielgröße z.

Ferner gilt aufgrund von $Y = \max(Y - z, 0) + z - \max(z-Y, 0)$, dass

(B.2a) $$XE_z(Y) = E(Y) - z + SE_z(Y)$$

(B.2b) $$XV_z(Y) = Var(Y) + (E(Y) - z)^2 - SV_z(Y).$$

Dabei bezeichnet XE_z bzw. XS_z den Excesserwartungswert bzw. die Excessvarianz bezüglich der Zielgröße z. Damit gilt für $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ und unter Ausnutzung von $1 - N(x) = N(-x)$

(B.3a) $$XE_z(Y) = \sigma\, n(m) - (z - \mu)\, N(-m)$$

(B.3b) $$XV_z(Y) = \sigma^2 N(-m) + (z - \mu)^2 N(-m) - \sigma(z - \mu)\, n(m).$$

Für $\bar{L}_n = \max(\bar{S}_n - \pi, 0)$ folgt daher mit $\bar{S}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, $z = \pi$, $\sigma = \sigma/\sqrt{n}$ und $m = m_n = \sqrt{n}\,(z - \mu)/\sigma$ zunächst

(B.4) $$E(\bar{L}_n) = XE_\pi(\bar{S}_n) = \sigma\, n(m_n)/\sqrt{n} - (z - \mu)N(-m_n).$$

Weiter gilt

(B.5a) $$E\left(\bar{L}_n^2\right) = XV_\pi(\bar{S}_n) = \frac{\sigma^2}{n} N(-m_n) + (z - \mu)^2 N(-m_n) - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(z - \mu)\, n(m_n)$$

und damit

(B.5b) $$\begin{aligned} Var(\bar{L}_n) = {} & \frac{\sigma^2}{n}[N(-m_n) - n(m_n)^2] \\ & - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(z - \mu)\, n(m_n)[1 - 2N(-m_n)] \\ & + (z - \mu)^2 N(m_n) N(-m_n). \end{aligned}$$

[39] Vgl. hierzu etwa Albrecht/Maurer (2008, S. 153, (3G.17)).

B.2 Bruttoprämie gleich Erwartungsschaden

In diesem Fall gilt $\pi = \mu$, $z - \mu = 0$, $m_n = 0$, $N(m_n)\, N(-m_n) = N(0) = 0.5$ und $n(m_n) = n(0) = 1/\sqrt{2\pi} \approx 0.3989$. Damit erhalten wir

(B.6a) $$E(\bar{L}_n) = \sigma\, n(0)/\sqrt{n} \approx 0.3989\, \sigma/\sqrt{n}$$

(B.6b) $$\mathrm{Var}(\bar{L}_n) = \frac{\sigma^2}{n}[0.5 - n(0)^2] \approx 0.341 \cdot \frac{\sigma^2}{n}\,.$$

B.3 Sicherheitszuschlag der Form (4.5)

Es gilt $z = \pi = \mu + N_{1-\alpha}\sigma/\sqrt{n}$, $z - \mu = N_{1-\alpha}\sigma/\sqrt{n}$, $m_n = N_{1-\alpha}$, $N(m_n) = N(N_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ und $N(-m_n) = \alpha$. Hieraus folgt

(B.7a) $$E(\bar{L}_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}[n(N_{1-\alpha}) + (1 - \alpha)N_{1-\alpha}]$$

bzw. mit der Hilfsgröße

(B.7b) $$h_1(\alpha) \coloneqq n(N_{1-\alpha}) + (1 - \alpha)\, N_{1-\alpha}$$

(B.7c) $$E(\bar{L}_n) = h_1(\alpha)\, \sigma/\sqrt{n}\,.$$

Dabei gilt ($\alpha < 0.5$) $h_1(\alpha) > 0$. Weiter gilt

(B.8a) $$\mathrm{Var}(\bar{L}_n) = \frac{\sigma^2}{n}[\alpha - n^2(N_{1-\alpha}) - N_{1-\alpha}\, n(N_{1-\alpha})(1 - 2\alpha) + N_{1-\alpha}^2\alpha(1 - \alpha)]$$

bzw. mit der Hilfsgröße

(B.8b) $$h_2(\alpha) \coloneqq N_{1-\alpha}^2\alpha(1 - \alpha) + \alpha - n^2(N_{1-\alpha}) - N_{1-\alpha}\, n(N_{1-\alpha})(1 - 2\alpha)$$

(B.8c) $$\mathrm{Var}(\bar{L}_n) = h_2(\alpha)\, \sigma^2/n\,.$$

Dabei gilt für $0 < \alpha < 0.5$ $h_2(\alpha) > 0$ (wie etwa ein Funktionsplot bestätigt).

Literatur

Albrecht, P. (1982): Gesetze der großen Zahlen und Ausgleich im Kollektiv – Bemerkungen zu Grundlagen der Versicherungsproduktion, Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft 71, 501 - 538.

Albrecht, P. (1992): Zur Risikotransformationstheorie der Versicherung: Grundlagen und ökonomische Konsequenzen, Karlsruhe.

Albrecht, P., R. Maurer (2008): Investment- und Risikomanagement, 3. Aufl., Stuttgart.

Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath (1999): Coherent Measures of Risk, Mathematical Finance 9, 203 - 228.

Billingsley, P. (1995): Probability and Measure, 3. Aufl., New York u.a.

Borch, K. (1982): Additive Insurance Premiums: A Note, Journal of Finance 37, 1295 - 1298.

Chateauneuf, A., M. Cohen, J.-Y. Jaffray (2009): Decision under Uncertainty: The Classical Models, in: Bouyssou, D., D. Dubois, M. Pirlot, H. Prade (eds.): Decision-making Process: Concepts and Methods, London, Hoboken (NJ), 385-400.

Chateauneuf, A., R. Kast, A. Lapied (1996): Choquet Pricing for Financial Markets with Frictions, Mathematical Finance 6, 323 - 330.

Denuit, M. M., L. Eeckhoudt, M. Menegatti (2011): A Note on the Subadditivity of Zero-Utility Premiums, ASTIN Bulletin 41(1), 239 - 250.

De Waegenaere, A., R. Kast, A. Lapied (2003): Choquet pricing and equilibrium, Insurance: Mathematic and Economics 32, 359 - 370.

Diamond, D.W. (1984): Financial Intermediation and Delegated Monitoring, Review of Economic Studies 51, 393 - 414.

Dionne, G. (2013, ed.): Handbook of Insurance, 2nd ed., New York u.a.

Föllmer, H., A. Schied (2011): Stochastic Finance, 3. Aufl., Berlin, New York.

Gatzert, N., H. Schmeiser (2012): The merits of pooling claims revisited, Journal of Risk Finance 13(3), 184 - 198.

Gollier, C. (2013): The Economics of Optimal Insurance Design, in: Dionne, G. (ed.): Handbook of Insurance, 2nd ed., New York u.a., 107 - 122.

Hammarlid, O. (2005): When to accept a sequence of gambles, Journal of Mathematical Economics 41, 974 - 982.

Klenke, A. (2006): Wahrscheinlichkeitstheorie, Berlin, Heidelberg.

Levy, H. (1992): Stochastic Dominance and Expected Utility: Survey and Analysis, Management Science 38, 555 – 593.

Lippman, S.A. and J.W. Mamer (1988): When many wrongs make a right, Probability in the Engineering and Informational Sciences 2, 115-127.

Ross, S.A. (1999): Samuelson´s Fallacy of Large Numbers Revisited, Journal of Financial and Quantitative Analysis 34, 323-339.

Rothschild, M., J.E. Stiglitz (1970): Increasing Risk: I. A Definition, Journal of Economic Theory 2, 225-243.

Schlesinger, H. (2013): The Theory of Insurance Demand, in: Dionne, G. (ed.): Handbook of Insurance, 2nd ed., New York u.a., 167 - 184.

Schneeweiß, H. (1967): Entscheidungskriterien bei Risiko, Berlin u.a.

Wang, S. S., V. R. Young, H. H. Panjer (1997): Axiomatic characterizations of insurance prices, Insurance: Mathematics and Economics 21, 173 - 183.