# Latent-Class-Analyse

Rolf Langeheine und Jürgen Rost

Die *Latent-Class-Analyse* (LCA) ist ein statistisches Verfahren zur Analyse kategorialer Daten. Die allgemeinste Charakterisierung dieses Verfahrens wäre, daß es die multivariaten Zusammenhänge zwischen (manifesten) kategorialen Variablen durch Berücksichtigung *latenter* kategorialer Variablen aufzuklären versucht. Das der LCA zugrundeliegende Modell stellt damit ein Pendant zu all jenen multivariaten statistischen Modellen für kontinuierliche Daten dar, bei denen ebenfalls latente Variablen benutzt werden, um die manifesten Interdependenzen zu „erklären" (z.B. Faktorenanalyse, Strukturgleichungsmodelle etc.; vgl. Schönemann & Borg sowie Rietz, Rudinger & Andres, in diesem Band). Da die latenten Variablen aber bei der LCA (wie die manifesten) kategorial sein sollen, spricht man von latenten Klassen.

Wir werden in diesem Beitrag das Grundmodell der LCA sowie dessen Varianten und Restriktionen vorstellen (Abschnitte 1 und 2), verschiedene Anwendungsbereiche der LCA ansprechen (Abschnitt 3), die Verbindungen der LCA zu anderen Modellklassen deutlich machen (Abschnitt 4) und schließlich auf statistische und praktische Probleme bei LCA-Anwendungen eingehen (Abschnitte 5 und 6).

## 1 Das Grundmodell der LCA

Das Ziel einer LCA besteht darin, die multivariaten Zusammenhänge zwischen mehreren kategorialen Variablen dadurch zu erklären, daß eine latente kategoriale Variable die Ausprägungen der manifesten Variablen bedingt. Hält man diese latente Variable konstant, betrachtet man also nur *eine* Ausprägung, d.h. eine latente Klasse, so sollen die Zusammenhänge zwischen den manifesten Variablen verschwinden. Mit anderen Worten, die latenten Klassen sind so definiert, daß *innerhalb* der Klassen Unabhängigkeit der beobachteten Variablen gilt. Ferner handelt es sich um ein *probabilistisches* Modell, d.h. es werden die Wahrscheinlichkeiten betrachtet, daß bei einer manifesten Variablen eine bestimmte Kategorie auftritt.

Bevor die Modellgleichung und weitere statistische Eigenschaften dieses Ansatzes diskutiert werden, soll zunächst ein einfaches Datenbeispiel die Grundzüge des Modells verdeutlichen. Es handelt sich um vier Items aus einem „*Arithmetic Reasoning Test*", der von $N = 776$ Personen bearbeitet wurde. Tabelle 1 gibt die Häufigkeiten der zugehörigen 4-dimensionalen Kontingenztabelle wieder, in der die Items mit A, B, C und D bezeichnet sind (1 = Item gelöst, 0 = Item nicht gelöst). Während Mislevy und Sheehan (1989) diese Daten mit einem zweiparametrigen logistischen IRT-Modell (also einem Modell mit kontinuierlicher latenter Variable, vgl. den Beitrag von Roskam über *Latent-Trait*-Modelle, in diesem Band) untersuchten, wollen wir hier die Hypothese prüfen, daß sich die Daten angemessen durch ein Zwei-Klassen-

https://doi.org/10.25521/HQM25

*Mastery-Learning*-Modell (vgl. Macready & Dayton, 1980) beschreiben lassen: Es gibt eine Klasse (die *nonmasters*), in der die Lösungswahrscheinlichkeiten für alle Items eher gering sind, und eine zweite Klasse mit hohen Lösungswahrscheinlichkeiten für alle Items (die *masters*). In Tabelle 2 sind die geschätzten Parameter für das Zwei-Klassen-Modell zu den Daten aus Tabelle 1 wiedergegeben. Nach diesem Modell finden wir knapp 70 % der Personen in Klasse 1, die erwartungsgemäß durch eher niedrige Lösungswahrscheinlichkeiten für alle Items gekennzeichnet ist, also die *nonmasters*. Ein deutlicheres Bild ergibt sich für die Klasse der *masters* (Klasse 2), in die der Rest von gut 30 % fällt.

TABELLE 1. **Beobachtete Häufigkeiten für 4 Items des *Arithmetic Reasoning Test* und erwartete Häufigkeiten unter einem Zwei-Klassen-*Mastery-Learning*-Modell.**

| | | | | Häufigkeit | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Items | | | | beobachtet | erwartet | | |
| *A* | *B* | *C* | *D* | | Klasse 1 | Klasse 2 | total |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 99 | 98.46 | .03 | 98.49 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 26 | 28.11 | .08 | 28.19 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 48 | 41.36 | .12 | 41.48 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 10 | 11.81 | .38 | 12.19 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 66 | 66.11 | .17 | 66.28 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 18 | 18.87 | .54 | 19.41 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 27 | 27.77 | .76 | 28.53 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 11 | 7.93 | 2.50 | 10.43 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 74 | 78.38 | 1.27 | 79.65 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 34 | 22.37 | 4.17 | 26.54 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 35 | 32.92 | 5.88 | 38.80 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 28 | 9.40 | 19.27 | 28.67 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 65 | 52.63 | 8.36 | 60.99 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 40 | 15.02 | 27.43 | 42.45 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 61 | 22.11 | 38.67 | 60.78 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 134 | 6.31 | 126.81 | 133.12 |

Schließlich bleibt die Frage, ob das Modell mit den Daten verträglich ist, die sich durch den Vergleich von beobachteten und unter einem Modell erwarteten Häufigkeiten mittels $\chi^2$-Statistiken beantworten läßt. Aus der Familie der *goodness-of-fit* *statistics* (vgl. Read & Cressie, 1988) nennen wir die beiden bekanntesten:

$$\textit{Pearson Chi-Quadrat} \quad \chi^2 = \sum_{s=1}^{S} \frac{(n_s - m_s)^2}{m_s} \quad , \tag{1}$$

$$\textit{log-likelihood ratio} \quad L^2 = 2\sum_{s=1}^{S} n_s \left(\log n_s - \log m_s\right) \quad , \tag{2}$$

wobei über die $S$ Zellen der Kontingenztabelle summiert wird und $n_s$ bzw. $m_s$ für die beobachtete bzw. erwartete Häufigkeit in Zelle $s$ stehen. Die erwarteten Häufigkeiten finden sich ebenfalls in Tabelle 1, und zwar getrennt für jede Klasse sowie total. Setzen wir die geschätzten Parameter (vgl. Tabelle 2) in Modellgleichung (3) (s.u.) ein, so ergibt sich z.B. für das Antwortmuster 1111: 776 (.695 · .443 · .402 · .296 · .222 + .305 · .981 · .868 · .822 · .766) = 776 (.00813 + .16353) = 133.21 (also bis auf Rundungsfehler der entsprechende Wert in Tabelle 1). Die Freiheitsgrade berechnen sich nach $df = S$ (Antwortmuster) $-1 - P$ (nichtredundante geschätzte Parameter), im vorliegenden Fall also $16 - 1 - 9$ (1 Klassenparameter und $2 \times 4$ bedingte Antwortwahrscheinlichkeiten) = 6. Mit $\chi^2 = 5.10$ und $L^2 = 4.94$ paßt das Modell exzellent, so daß die o.g. „*Mastery*-Hypothese" als mit den Daten verträglich gelten kann.

TABELLE 2. **Geschätzte Parameter für das Zwei-Klassen-Modell und die Daten aus Tabelle 1.**

| | | Bedingte Wahrscheinlichkeiten für eine korrekte Lösung (Kategorie 1) in Item | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Klasse | Klassengröße | A | B | C | D |
| 1 | .695 | .443 | .402 | .296 | .222 |
| 2 | .305 | .981 | .868 | .822 | .766 |

Anhand dieses einfachen Beispiels sollen die wesentlichen Annahmen und Eigenschaften der LCA deutlich gemacht werden, aus denen sich dann auch die Modellgleichung ergibt:

1. In der Population, aus der die Stichprobe gezogen wurde, gibt es insgesamt $T$ disjunkte und erschöpfende Klassen (hier $T = 2$), deren relative Größe durch einen Wahrscheinlichkeitsparameter geschätzt wird.

2. Die Klassen sind gekennzeichnet durch klassenspezifische Antwortwahrscheinlichkeiten in den manifesten Variablen. Innerhalb einer Klasse besteht Homogenität in den Antwortwahrscheinlichkeiten für alle zu einer Klasse gehörenden Mitglieder. Zwischen den Klassen besteht Heterogenität in dieser Hinsicht. Dies ist das wesentliche, zu optimierende Kriterium der LCA.

3. Die essentielle Annahme der LCA – lokale stochastische Unabhängigkeit – besagt, daß die Assoziationen zwischen den manifesten Variablen innerhalb jeder

Klasse verschwinden, da sie sich auf eine latente Variable ($X$) zurückführen lassen. Das Pfaddiagramm in Abbildung 1 verdeutlicht dies. In Analogie zu linearen Strukturgleichungsmodellen (vgl. Bentler, Wu & Houck sowie Rietz, Rudinger & Andres, in diesem Band) ist die latente Variable durch einen Kreis gekennzeichnet, und die manifesten Variablen sind mit Kästchen versehen.

4. Die Zusammenhänge zwischen latenten und manifesten Variablen werden als nichtdeterministisch angenommen. Damit fällt die LCA in die Klasse der probabilistischen Modelle.

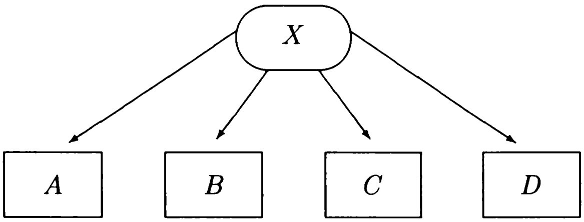


ABBILDUNG 1. **Pfaddiagramm für eine latente Variable und vier manifeste Indikatoren** $A, B, C$ **und** $D$.

In der Notation von Goodman (1974a, 1974b) lautet das allgemeine $T$-Klassen-Modell der LCA für vier manifeste Variablen:

$$m_{ijkl} = N \sum_{t=1}^{T} \pi_t^X \pi_{i\ t}^{AX} \pi_{j\ t}^{BX} \pi_{k\ t}^{CX} \pi_{l\ t}^{DX}. \tag{3}$$

Darin sind $m_{ijkl}$ die unter einem Modell erwarteten Häufigkeiten der Antwortmuster und die $\pi$'s die zu schätzenden Parameter. $\pi_t^X$ quantifiziert die Größe (den Anteil) der Klasse $t$. $\pi_{j\ t}^{AX}$ ist die Wahrscheinlichkeit für eine Antwort in Kategorie $j$ von Item $A$ in Klasse $t$ von $X$. $\pi_{j\ t}^{AX}$ bis $\pi_{l\ t}^{DX}$ sind also bedingte Wahrscheinlichkeiten (z.B. die Wahrscheinlichkeit, auf Item $A$ mit Kategorie $i$ zu reagieren, gegeben Zugehörigkeit zu Klasse $t$ von $X$).

Die Multiplikation dieser bedingten Wahrscheinlichkeiten *innerhalb* der latenten Klassen ist Ausdruck der Annahme lokaler stochastischer Unabhängigkeit (s.o.), und die Summation über die latenten Klassen mit Gewichtung durch die Klassengrößenparameter resultiert aus der Annahme disjunkter und erschöpfender Klassen (s.o.).

Für Goodmans Version der LCA gelten zusätzlich zwei Nebenbedingungen:

1. Da die zu schätzenden Parameter Wahrscheinlichkeiten sind, müssen sie im Intervall [0, 1] liegen. Dies läßt sich durch einen entsprechenden Algorithmus garantieren (wir gehen auf die Schätzproblematik nicht weiter ein, da der Leser dies in der angegebenen Literatur nachvollziehen kann).

2. Alle Sätze von Parametern müssen in der Summe 1 ergeben (z.B. $\sum_t \pi_t^X = \sum_i \pi_{i\ t}^{AX} = 1$).

Damit ist das Grundmodell der LCA beschrieben. Der große Anwendungsbereich der LCA ergibt sich aber erst durch die Möglichkeit, Parameter zu restringieren – sei es im Rahmen von Goodmans Version der LCA oder einer geeigneteren Formalisierung des Modells – oder auch durch Abschwächung der Modellannahmen. Beides soll im folgenden Abschnitt behandelt werden.

## 2 Varianten und Restriktionen der LCA

Wollte man bei dem oben dargestellten Beispiel zur „*Mastery-Learning*-Hypothese“ prüfen, ob drei latente Klassen den Daten angemessener sind, so würden sich Identifikationsprobleme ergeben, da das Modell zu viele freie Parameter enthält. Eine Möglichkeit, bei diesen Daten dennoch Drei-Klassen-Hypothesen zu testen, besteht darin, Parameter *gleichzusetzen* oder auf bestimmte Werte zu *fixieren*. So ließe sich z.B. die Hypothese prüfen, ob es eine dritte, reine Rate-Klasse gibt, indem man die bedingten Lösungswahrscheinlichkeiten der dritten Klasse a priori auf eine Rate-Wahrscheinlichkeit von 0.5 *fixiert*. Oder es ließe sich die Hypothese prüfen, ob sich die dritte Klasse nur durch die Nicht-Beherrschung des letzten Items von der „*Mastery*-Klasse“ unterscheidet, indem man die Lösungswahrscheinlichkeiten der ersten drei Items für diese beiden Klassen *gleichsetzt*. Diese beiden Arten von Parameterrestriktionen erlaubt die LCA in der Version von Goodman, und zwar bezüglich aller Parameterarten, also auch der Klassengrößenparameter. Solche Restriktionen sind der Schlüssel zu einer Vielzahl spezifischer Modelle mit einer a priori festgelegten Struktur (Beispiele finden sich in der angegebenen Literatur und in den beiden folgenden Abschnitten).

Während die LCA von Goodman also auf Wahrscheinlichkeiten arbeitet, formuliert Haberman (1974, 1979) das Problem als log-lineares Modell (vgl. Andersen, in diesem Band), das analog zu Modell (3) lautet:

$$\log m_{ijklt} = \lambda + \lambda_i^A + \lambda_j^B + \lambda_k^C + \lambda_l^D + \lambda_t^X + \lambda_{t\,i}^{XA} + \lambda_{t\,j}^{XB} + \lambda_{t\,k}^{XC} + \lambda_{t\,l}^{XD} \tag{4}$$

mit den üblichen Nebenbedingungen für alle indizierten $\lambda$'s (z.B. $\sum_t \lambda_t^X = 0$). $\lambda$ ist eine Konstante; die einfach indizierten $\lambda$'s stehen für die Randverteilungen der manifesten Variablen und der latenten Variablen $X$; und mit den doppelt indizierten $\lambda$'s wird der Effekt der latenten Variablen $X$ auf die vier Indikatoren erfaßt.

TABELLE 3. **Geschätzte $\lambda$-Parameter für das Zwei-Klassen-*Mastery-Learning*-Modell ohne Restriktionen.**

| Parameter | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $X$ | $XA$ | $XB$ | $XC$ | $XD$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Schätzwert | -.92 | -.37 | -.17 | .02 | 1.32 | 1.04 | .57 | .60 | .61 |

Beide Modellvarianten sind in Form von Gleichung (3) und (4) ineinander überführbar, sie stellen also lediglich äquivalente Parametrisierungen derselben Modellannahmen dar. Für das Zwei-Klassen-*Mastery-Learning*-Modell ergeben sich z.B. die in Tabelle 3 aufgelisteten $\lambda$-Parameterschätzungen. Man erkennt daran, daß die Effekte der latenten auf die manifesten Variablen wenigstens für die Items $B$, $C$ und

$D$ praktisch identisch sind. Auch bei dieser Modellversion lassen sich Parameter gleichsetzen, jedoch entspricht dies nicht unbedingt der Gleichsetzung von bedingten Wahrscheinlichkeiten in der LCA nach Goodman. So paßt etwa im vorliegenden Beispiel die Annahme gleicher Interaktionsparameter zwischen latenter Variable und den manifesten Variablen ($\lambda_{t\ i}^{XA} = \lambda_{t\ j}^{XB} = \lambda_{t\ k}^{XC} = \lambda_{t\ l}^{XD}$) sehr gut auf die Daten. Jedoch bedeutet dies nicht, daß die Lösungswahrscheinlichkeiten der vier Items in beiden Klassen konstant wären. Dazu müßte zusätzlich die Restriktion $\lambda_i^A = \lambda_j^B = \lambda_k^C = \lambda_l^D$ eingeführt werden.

Der Unterschied beider Modellvarianten liegt also nicht in den Modellvorhersagen des Grundmodells, sondern ergibt sich erst, wenn man den Parametern Restriktionen auferlegt, die in beiden Varianten unterschiedliche Annahmen ausdrücken. Ein weiterer Unterschied liegt darin, daß Habermans Formalisierung als log-lineares Modell mit einer latenten Variablen allgemeiner ist und etwa die Einführung von Interaktionsparametern zwischen manifesten Variablen, z.B. $\lambda_{i\ j}^{AB}$, oder Interaktionsparametern höherer Ordnung, z.B. $\lambda_{t\ i\ j}^{XAB}$, zuläßt. Anwendungsbeispiele hierfür finden sich z.B. bei Hagenaars (1988, 1990) und Kelderman und Macready (1990). Insofern ist das Modell der LCA ein Spezialfall des allgemeinen log-linearen Modells mit latenter Variablen, nämlich derjenige, bei dem es außer den einfachen Interaktionen zwischen latenter und manifesten Variablen keine weiteren Interaktionen gibt.

Eine dritte Art der Parametrisierung der LCA verwenden Formann (1984, 1989) und – für spezielle Anwendungen – auch Rost (1988a, 1990a). Sie basiert auf einer logistischen Transformation der Wahrscheinlichkeitsparameter im Sinne von Modell (3), die dazu dient, spezielle Modelle durch eine additive Zerlegung des Exponenten zu spezifizieren:

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{T} \frac{\exp(\beta_t)}{\sum_s \exp(\beta_s)} \prod_{i=1}^{k} \frac{\exp(\alpha_{ixt})}{\sum_y \exp(\alpha_{iyt})}, \tag{5}$$

wobei hier eine andere Art der Notation verwendet wird. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_k)$ bezeichnet den Vektor der Ausprägungen von $k$ manifesten Variablen, also z.B. das Antwortmuster von $k$ Items, oder die Beobachtung in einer bestimmten Zelle der Kontingenztabelle. $\beta_t$ ist der transformierte Klassengrößenparameter und $\alpha_{ixt}$ ein logistischer „Leichtigkeitsparameter", der angibt, wie leicht bei Variable $i$ in Klasse $t$ die Kategorie $x$ auftritt, wobei $x \in \{0, 1, \ldots, m\}$.

Wiederum handelt es sich bei dieser Variante der LCA um eine Reparametrisierung des Grundmodells, die äquivalent zu (3) oder (4) ist. Unterschiede ergeben sich ebenfalls erst durch die mit dieser Formalisierung ermöglichten Restriktionen. So führt Formann (1984, 1989) die $\alpha$-Parameter auf Basisparameter $\eta_r$ zurück, die mit a priori festzulegenden Gewichten $q_{ixtr}$ in Form von Linearkombinationen miteinander verknüpft sind:

$$\alpha_{ixt} = \sum_{r=1}^{R} q_{ixtr}\eta_r + c_{ixt}. \tag{6}$$

Die so entstehende Modellstruktur ist sehr variabel, und die Vielfalt der mit ihr spezifizierbaren Modelle wird von Formann (1989, 1992) eindrucksvoll demonstriert (eine analoge additive Zerlegung wird von Formann auch für die $\beta$-Parameter vorgenommen, worauf hier jedoch nicht eingegangen wird).

Speziell für Anwendungen auf mehrkategorielle, ordinale Daten basiert das Programm LACORD von Rost (1990a) auf einer additiven Zerlegung der $\alpha_{ixt}$ in klassenspezifische Leichtigkeiten der Variablen $i$, $\mu_{it}$, und Parameter $\delta_{ixt}$, die die Schwellenabstände zwischen den Kategorien $x$ abbilden:

$$\alpha_{ixt} = x \cdot \mu_{it} + \sum_{s=1}^{x} \delta_{ist} \qquad \text{mit} \sum_{s=1}^{m} \delta_{ist} = 0 \qquad \text{und } x > 0, \tag{7}$$

wobei $m$ die Anzahl der Kategorien minus 1, also die Schwellenanzahl ist. Der Parameter für Kategorie $x = 0$ ist daher $\alpha_{i0t} = 0$.

Wiederum ergeben sich spezielle Modelle erst durch Restriktionen der $\delta$-Parameter (s. folgenden Abschnitt, vgl. Rost, 1988b; Giegler & Rost, 1993).

## 3 Anwendungsbereiche spezieller LCA-Modelle

Es werden in diesem Abschnitt vier sehr unterschiedliche Anwendungsbereiche beschrieben, die sich durch spezielle Modifikationen des Grundmodells der LCA ergeben, nämlich die Verwendung für die Analyse von Testdaten, für Längsschnittdaten, für Gruppenvergleiche und für ordinale Daten. Damit ist die Vielfalt der Anwendungsmöglichkeiten bei weitem noch nicht umfassend beschrieben, jedoch vielleicht recht eindrücklich illustriert.

### *3.1 LCA-Modelle als testtheoretische Modelle*

Es gibt viele Anwendungsmöglichkeiten der LCA zur Skalierung von Personen anhand dichotomer Items, von denen im folgenden auf Ansätze zur „Probabilisierung" der Guttman-Skala, auf Modelle mit geordneten latenten Klassen, auf die Darstellung des Rasch-Modells als LCA-Modell und auf das gemeinsame Obermodell von LCA und Rasch-Modell, das sogenannte Mischverteilungs-Rasch-Modell, eingegangen werden soll.

Bei einer perfekten Guttman-Skala (Guttman, 1950) gibt es z.B. bei vier Items nur fünf zulässige Antwortmuster, nämlich (0000), (0001), (0011), (0111) und (1111), wenn man die Items nach absteigender Schwierigkeit ordnet. Jedes andere beobachtete Antwortmuster bedeutet eine Modellabweichung (vgl. den Beitrag über *Latent-Trait*-Modelle von Roskam, in diesem Band). Für die Daten in Tabelle 1 beträgt der Anteil unzulässiger Muster immerhin 44%. Formal entspricht das Modell der Skalogrammanalyse bei $k$ Items einem $(k + 1)$-Klassen-Modell der LCA, wobei alle bedingten Wahrscheinlichkeiten entsprechend dem jeder Klasse zugeordneten zulässigen Antwortmuster auf 0 oder 1 fixiert sind. Die Frage ist allerdings, was man mit den unzulässigen Mustern macht. Solange man die Skalogrammanalyse als deterministisches Modell verwendet, genügt ein einziger Fall mit einem unzulässigen Muster, um das Modell zu falsifizieren. Um dieses strenge Modell realistischen Daten eher anpassen zu können, gibt es verschiedene Ansätze, es in ein probabilistisches Modell umzuwandeln. Goodman (1975) hat vorgeschlagen, es um eine weitere, $(k + 2)$te latente Klasse zu erweitern, in der die bedingten Wahrscheinlichkeiten völlig unrestringiert sind. In dieser Klasse sammeln sich dann alle „unskalierbaren" Personen.

Eine solche Trennung in Skalierbare und Unskalierbare (m.a.W., das Problem wird durch Annahme von Populationsheterogenität gelöst) wird bei *Latent-Distance*-Modellen nicht vorgenommen. Vielmehr wird bei diesen Modellen, die bereits von Lazarsfeld (1950) beschrieben werden, der Anteil unzulässiger Antwortmuster durch Einführung von Rate- und Irrtumswahrscheinlichkeiten (generell: durch Einführung von Meßfehlern) *innerhalb* der Guttman-Klassen aufgefangen. D.h., jedes Item ist durch zwei Fehlerraten gekennzeichnet: die eine spezifiziert die Wahrscheinlichkeit einer korrekten bei Erwartung einer inkorrekten Antwort (Ratewahrscheinlichkeit), die andere spezifiziert die Wahrscheinlichkeit einer inkorrekten bei Erwartung einer korrekten Antwort (Irrtum). Derartige, auch als *Response-Error*-Modelle bezeichnete Verallgemeinerungen der Guttman-Skala sind durchweg als restringierte LCA-Modelle darstellbar (und anwendbar) und werden im Detail von Clogg und Sawyer (1981), Dayton und Macready (1980), Formann (1984), Langeheine (1988), McCutcheon (1987), Rost (1988a) und Schwartz (1986) behandelt. Gemeinsames Merkmal solcher Skalierungsmodelle ist, daß die *latenten* Klassen, in denen jeweils Personen mit gleichem (erwarteten) Antwortmuster zusammengefaßt sind, *geordnet* sind. D.h., alle Personen einer höheren Klasse haben mindestens dieselben Lösungswahrscheinlichkeiten bezüglich aller Items wie die Personen aller darunter liegenden Klassen. Insofern handelt es sich bei diesen Modellen auch um *Latent-Trait*-Modelle, wobei die latente Dimension lediglich auf Ordinalskalenniveau gemessen wird.

Eine konsequente Fortführung dieses Gedankens führt zu dem Versuch, *nur* die Geordnetheit der latenten Klassen im Modell der LCA zu implementieren, *ohne* weitere Konstanzannahmen bezüglich der Lösungswahrscheinlichkeiten. Dies ist jedoch nicht mehr mit Gleichheitsrestriktionen zwischen Modellparametern zu bewerkstelligen, sondern erfordert sogenannte *inequality constraints.* Entsprechende Modelle werden von Croon (1990) diskutiert. Die Äquivalenz des allgemeinen LCA-Modells mit geordneten Klassen und gleicher Ordnung der Itemlösungswahrscheinlichkeiten in allen Klassen zum nicht-metrischen *Latent-Trait*-Modell der *Mokken-Analyse* (Mokken, 1971) ist bei Croon (1991) dargestellt.

Während bei diesen Ansätzen die latenten Klassen lediglich entlang einer latenten Dimension *angeordnet* sind, ohne daß ihre genaue Lage, und somit ihre Distanzen, parametrisiert werden, haben bereits Lazarsfeld und Henry (1968) Überlegungen angestellt, die latenten Klassen und die Items auf dem Kontinuum zu lokalisieren. Ein solches Modell mit *lokalisierten Klassen* hat Formann (1984) abgeleitet, indem er die Exponenten der linear-logistischen LCA (vgl. Gleichungen (5) und (6)) für dichotome Daten derart restringierte, daß ein additives Zusammenwirken einer Itemleichtigkeit $\sigma_i$ und einer „Fähigkeitsausprägung“ der Klasse $\Theta_t$ abgebildet war:

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{T} \pi_t \prod_{i=1}^{k} \frac{\exp x_i\,(\Theta_t + \sigma_i)}{1 + \exp\,(\Theta_t + \sigma_i)}. \tag{8}$$

Die Ähnlichkeit mit dem dichotomen *Rasch-Modell* ist nicht zufällig: Tatsächlich ist dieses restringierte LCA-Modell für eine bestimmte Klassenanzahl (nämlich so viele Klassen, wie es unterschiedliche Testscores gibt) äquivalent zum Rasch-Modell. Seine Itemparameterschätzungen entsprechen dem *Unconditional-Maximum-Likelihood*-Schätzer für die Itemparameter des Rasch-Modells. Clogg (1988) gibt eine andere Methode der Restringierung der LCA an, um auch *Conditional-Maximum-*

*Likelihood*-Schätzer für die Itemparameter des Rasch-Modells zu erhalten. Hierbei sind die latenten Klassen ebenfalls gemeinsam mit den Items auf einer Dimension lokalisiert, und es lassen sich sogar Schätzer der Fähigkeitsausprägungen von Personen ableiten, die alle oder keines der Items gelöst haben (s. Lindsay, Clogg & Grego, 1991; Formann, 1989). Diese Arbeiten zeigen, daß das Rasch-Modell ein spezielles LCA-Modell ist und belegen einmal mehr dessen Allgemeinheit.

Eine ganz andere Art der Integration von LCA und Rasch-Modell stellt das *Mischverteilungs-Rasch-Modell* (MRM) dar (vgl. Rost & Erdfelder, in diesem Band). Hier werden die latenten Klassen nicht dazu benutzt, verschiedene Fähigkeitsausprägungen abzubilden, sondern das Rasch-Modell soll jeweils *innerhalb* einer latenten Klasse gelten, aber mit *unterschiedlichen* Itemparametern in jeder Klasse:

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{T} \pi_t \prod_{i=1}^{k} \frac{\exp x_i\,(\Theta_{vt} + \sigma_{it})}{1 + (\exp(\Theta_{vt} + \sigma_{it}))}, \qquad (9)$$

wobei $\Theta_{vt}$ die Fähigkeitsausprägung von Person $v$ in Klasse $t$ bezeichnet. Dieses von Rost (1990b) entwickelte Modell reduziert sich auf das normale Rasch-Modell im Fall von nur einer Klasse ($T = 1$) und auf die normale LCA im Fall einer fehlenden Variation von Fähigkeiten innerhalb der Klassen ($\Theta_{vt} = 0$ für alle $v$ und $t$). Es stellt also das gemeinsame Obermodell von LCA und Rasch-Modell dar. Kelderman und Macready (1990) stellen dieses und ähnliche Modelle im Rahmen des log-linearen Ansatzes der LCA (vgl. Gleichung (4)) dar, und Mislevy und Verhelst (1990) diskutieren ein ähnliches Modell mit Verteilungsannahmen bezüglich der latenten Variablen.

Die Anwendungsmöglichkeiten des MRM reichen von der Identifizierung Rasch-skalierbarer Teilpopulationen (Rost & Georg, 1991) über die Messung von Fähigkeiten, wenn die Personen unterschiedliche Lösungsstrategien verwenden (Mislevy & Verhelst, 1990; Rost & von Davier, 1993) bis zu der Möglichkeit einer sehr effizienten Modellgeltungskontrolle für das Rasch-Modell (Rost, 1990b).

## *3.2 Latent-Class-Modelle mit Markoff-Restriktionen*

Wenn zwischen den manifesten Variablen massive Assoziationen bestehen, so kann dies dazu führen, daß aufgrund der strengen LCA-Annahme der lokalen stochastischen Unabhängigkeit keine befriedigende Modellanpassung erreicht wird. Verschiedene Autoren (Espeland & Handelman, 1989; Formann, 1984, Harper, 1972; Langeheine, 1984) haben deshalb Modelle vorgeschlagen, die das Axiom abschwächen, indem partielle lokale stochastische Abhängigkeit zugelassen wird. Einen anderen Weg beschreitet Hagenaars (1988, 1990), indem er (in Analogie zu Strukturgleichungsmodellen) ein Modell um direkte Effekte zwischen Indikatoren erweitert.

Starke Assoziationen zwischen Indikatoren ergeben sich insbesondere dann, wenn nicht $k$ Indikatoren, sondern nur einer, dieser aber $k$-mal wiederholt über die Zeit gemessen wird. Das Hauptinteresse solcher *Panel*-Studien gilt Fragen der Veränderung und Stabilität. Solche diskreten *Panel*-Daten werden zunächst häufig mit einem einfachen Markoff-Ketten-Modell (vgl. z.B. Langeheine & van de Pol, 1990a) untersucht, das sich für z.B. $T = 4$ Zeitpunkte auch als *Latent-Class-Modell* (allerdings nur für eine Klasse und mit Abhängigkeiten zwischen Zeitpunkten) schreiben läßt

$$m_{ijkl} = N\ \delta_i^1\ \tau_{j|i}^{2\ 1}\ \tau_{k|j}^{3\ 2}\ \tau_{l|k}^{4\ 3}, \qquad (10)$$

worin die $\delta$'s unkonditionale Wahrscheinlichkeiten für den Zeitpunkt $t = 1$ und die $\tau$'s bedingte oder Übergangswahrscheinlichkeiten von Zeitpunkt $t$ nach $t + 1$ sind. Solange nicht die klassische Eigenschaft der Markoff-Kette gefordert wird (konstante Übergangswahrscheinlichkeiten, also $\tau_{j|i}^{2\ 1} = \tau_{j|i}^{3\ 2} = \tau_{j|i}^{4\ 3} = \tau_{j|i}$), ist Modell (10) identisch mit dem log-linearen Modell

$$\log m_{ijkl} = \lambda + \lambda_i^1 + \lambda_j^2 + \lambda_k^3 + \lambda_l^4 + \lambda_{ij}^{1\ 2} + \lambda_{jk}^{2\ 3} + \lambda_{kl}^{3\ 4}. \tag{11}$$

Die Modellierung zeitkonstanter Übergangswahrscheinlichkeiten ist ein weiteres Beispiel dafür, daß eine Modellvariante nicht ohne weiteres in die andere übertragbar ist. Die einfach mögliche Gleichsetzung von $\tau$'s in Gleichung (10) ist etwas anderes als die Gleichsetzung von $\lambda$-Interaktionsparametern in Gleichung (11). Eine wesentliche Annahme dieses einfachen Modells besteht darin, daß die Dynamik über die Zeit als homogen für alle Personen angenommen wird. Unbeobachtete Populationsheterogenität kann somit einer von mehreren Gründen sein, daß das Modell kaum je mit Daten verträglich ist. Dem kann man begegnen, indem Modell (10) auf ein Modell mit $S$ Ketten erweitert wird

$$m_{ijkl} = N \sum_{s=1}^{S} \pi_s\ \delta_{i|s}^1\ \tau_{j|is}^{2\ 1}\ \tau_{k|js}^{3\ 2}\ \tau_{l|ks}^{4\ 3}, \tag{12}$$

worin die $\pi$'s den relativen Anteil der $S$ Ketten angeben, von denen jede einer eigenen Dynamik mit kettenspezifischen $\delta$'s und $\tau$'s folgt. Streicht man die konditionalen Indizes $i$, $j$ und $k$ in Gleichung (12), so resultiert

$$m_{ijkl} = N \sum_{s=1}^{S} \pi_s\ \delta_{i|s}^1\ \delta_{j|s}^2\ \delta_{k|s}^3\ \delta_{l|s}^4\ , \tag{13}$$

also genau das *Latent-Class*-Modell (3). Das gemischte Markoff-Ketten-Modell (12) erweitert also das Modell (3) um partielle lokale stochastische Abhängigkeiten zwischen zwei aufeinander folgenden Zeitpunkten (oder benachbarten Items, generell: Indikatoren). Andersherum kann man auch sagen: Das *Latent-Class*-Modell ist ein Spezialfall des gemischten Markoff-Modells.

Ein zweiter Grund für die Nichtangemessenheit des einfachen Markoff-Modells kann darin liegen, daß es Meßfehlerfreiheit der Daten annimmt. Diesem Einwand wird das latente Markoff-Modell von Wiggins (1955) gerecht,

$$m_{ijkl} = N \sum_{a=1}^{A} \sum_{b=1}^{B} \sum_{c=1}^{C} \sum_{d=1}^{D} \delta_a^1\ \rho_{i|a}^1\ \tau_{b|a}^{2\ 1}\ \rho_{j|b}^2\ \tau_{c|b}^{3\ 2}\ \rho_{k|c}^3\ \tau_{d|c}^{4\ 3}\ \rho_{l|d}^4, \tag{14}$$

in dem jede manifeste Variable als fehlerbehafteter Indikator für eine latente Variable angesehen und über ein Meßmodell (die $\rho$'s) mit letzterer verbunden wird. Folglich geben die $\delta$'s jetzt die latente Verteilung zum Zeitpunkt $t = 1$ mit $a = 1, ..., A$ Kategorien und die $\tau$'s latente Übergangswahrscheinlichkeiten wieder, die beide um Meßfehler bereinigt wurden.

Das klassische LCA-Modell (3) erweist sich ebenfalls als Spezialfall des latenten Markoff-Modells. Restriktion von Modell (14) zu einem Modell ohne latente Veränderung durch Gleichsetzung aller Matrizen von Übergangswahrscheinlichkeiten mit der

Einheitsmatrix gibt

$$m_{ijkl} = N \sum_{a=1}^{A} \delta_a \; \rho^1_{i|a} \; \rho^2_{j|a} \; \rho^3_{k|a} \; \rho^4_{l|a}. \tag{15}$$

Im Gegensatz zu Modell (13) legt die Notation in Modell (15) deutlicher eine Meßfehlerinterpretation des klassischen LCA-Modells nahe, mit lediglich einer latenten Verteilung ($\delta_a$), die an vier Zeitpunkten (oder durch vier Indikatoren) gemessen wird.

Details und Erweiterungen finden sich in Langeheine und van de Pol (1990a, 1990b, 1992, 1994) und van de Pol und Langeheine (1989, 1990). Eine dieser Erweiterungen ist die auf multiple Indikatoren, die es erlaubt, je Zeitpunkt Skalierungsmodelle wie in Abschnitt 3.1 zu definieren, die besonders zur Prüfung von Stufentheorien der Entwicklung geeignet erscheinen (Langeheine, 1991).

## *3.3 Mehrgruppen-LCA*

Sei es, daß eine Theorie es nahelegt, Daten von mehreren Gruppen zu erheben, die durch eine zusätzliche diskrete Variable (z.B. Geschlecht, sozioökonomischer Status, Versuchs- vs. Kontrollgruppe) definiert sind, oder daß solche Daten auch ohne gezielte Hypothesen vorliegen, in jedem Fall kann es ratsam sein, anstelle der über diese Gruppen zusammengefaßten Daten eine simultane Analyse für alle Gruppen durchzuführen. Das Modell (3) wurde von Clogg und Goodman (1984, 1985, 1986) entsprechend erweitert, das Modell (4) von Haberman (1979). Formann (1984) stellt Mehrgruppenvergleiche mittels linear-logistischer LCA (Gleichungen (5) und (6)) vor, und die simultane Analyse mehrerer Gruppen mit Markoff-Modellen wird in van de Pol und Langeheine (1990) und Langeheine und van de Pol (1994) behandelt.

Ein Beispiel, welches demonstriert, wie die Zusammenfassung von Subgruppen Heterogenität verschleiern kann, findet sich in Langeheine und Rost (1993).

## *3.4 Latent-Class-Modelle für geordnete kategoriale Indikatoren*

Bei unrestringierten LCA-Modellen wird für jede Kategorie der manifesten Variablen in jeder Klasse ein Parameter geschätzt, wobei die einzige Restriktion darin besteht, daß sich die Kategorienwahrscheinlichkeiten einer Variablen zu 1 addieren müssen. Sind die Kategorien einer Variablen geordnet, wie z.B. bei mehrstufigen Ratingskalen, so lassen sich sparsamere Modelle, sogenannte Schwellenwertmodelle, formulieren, die der Ordnung der Kategorien Rechnung tragen. Rost (1988a, 1988b) beschreibt eine Familie solcher Modelle, die sich daraus ergibt, daß der Exponent der linear-logistischen LCA (vgl. Gleichung (5)) in unterschiedlich restriktiver Weise zerlegt wird (vgl. Gleichung (7)). Gemeinsam ist diesen Modellen, daß sie jeweils Parameter $\mu_{it}$ haben, die die „Leichtigkeit" der Variablen $i$ in Klasse $t$ parametrisieren, und daß sie sich aus unterschiedlich restriktiven Annahmen über die *Schwellendistanzen* ableiten lassen (vgl. Rost & Georg, 1991; Giegler & Rost, 1993). Nimmt man z.B. an, daß die Distanzen der Schwellen zwischen den Kategorien einer Variablen klassen*unabhängig* sind, so läßt sich das formalisieren durch:

$$\alpha_{ixt} = x\ \mu_{it} + \sum_{s=1}^{X} \delta_{is}, \tag{16}$$

wobei $\alpha_{ixt}$ der Exponent in Gleichung (5) ist und $\delta_{is}$ die „Leichtigkeit“ der Schwelle zwischen Kategorie $s-1$ und $s$ bei Variable $i$ bezeichnet. Dadurch, daß bei diesem Modell die Leichtigkeit einer Schwelle als Charakteristikum der Variablen (und nicht der Klasse) angesehen wird, werden sehr viele Parameter eingespart, ohne irgendwelche restriktiven Annahmen über die Ordinalskalen der manifesten Variablen zu treffen. Mit dem Programm LACORD von Rost (1990a) können acht verschiedene Modellvarianten an Datensätze angepaßt werden, wobei das allgemeinste von diesen der normalen LCA in der linear-logistischen Version von Gleichung (5) und (7) entspricht. Die Anwendungen dieser Modelle beziehen sich bisher hauptsächlich auf die Analyse von Fragebogenitems mit mehrstufigen Antwortformaten (Rost, 1988c, 1990c; Giegler & Rost, 1990, 1993), aber auch z.B. auf inhaltsanalytische Auswertungen (Tarnai & Rost, 1991).

Ein anderer Vorteil dieser Art von Restriktionen für ordinale Daten liegt darin, daß sie völlig parallel konstruiert sind zu den entsprechenden mehrkategoriellen, ordinalen Rasch-Modellen (Andrich, 1978, 1982; Masters, 1982), die ebenfalls auf einer Parametrisierung der Schwellendistanzen beruhen. Hieraus folgt z.B., daß sich die ordinalen Rasch-Modelle als restringierte LACORD-Modelle „mit lokalisierten Klassen“ (s.o.) darstellen lassen.

Das Mischverteilungs-Rasch-Modell (s.o.) wurde ebenfalls für ordinale Daten verallgemeinert, so daß die Annahme quantitativer Unterschiede zwischen den Individuen einer Klasse auch bei ordinalen Daten angewendet werden kann (Rost, 1991a).

## 4 Verbindungen der LCA zu anderen Modellklassen

Die LCA gehört zur Klasse der finiten Mischverteilungsmodelle (vgl. Rost & Erdfelder, in diesem Band), in denen angenommen wird, daß sich die unter einem Modell erwarteten Häufigkeiten aus einer Mischung der erwarteten Häufigkeiten mehrerer Klassen ergeben (vgl. Tabelle 1: $m_{\text{total}} = m_{\text{Klasse 1}} + m_{\text{Klasse 2}}$ ). In der Regel wird angenommen, daß die Subtabellen durch dasselbe Modell, aber mit klassenspezifischen Parameterwerten generiert werden. Dies ist jedoch nicht zwingend. Ein gemischtes Markoff-Modell mit zwei Ketten läßt sich z.B. so restringieren, daß für eine Kette die Markoff-Eigenschaft, also lokale stochastische Abhängigkeit, für die zweite Kette jedoch lokale stochastische Unabhängigkeit gefordert wird.

Wesentliches Ziel der LCA ist die Zuordnung von Personen zu homogenen Gruppen. Insofern bestehen Analogien zur *Clusteranalyse* von Personen (vgl. Meiser & Humburg, in diesem Band). Die Abbildungen 1 und 2 zeigen, daß man mit der LCA ebenfalls Variablen clustern kann. Ein wesentlicher Vorteil der LCA dabei ist, daß man nicht zunächst den Umweg über Bildung einer Assoziationsmatrix gehen muß.

Die Abbildungen 1 und 2 zeigen ebenfalls Parallelen zur *Faktorenanalyse* auf. Abbildung 1 entspricht einem Ein-Faktor-Modell, während es in Abbildung 2 zwei korrelierte Faktoren gibt (vgl. Clogg, 1988, zur Beziehung zwischen einer LCA mit

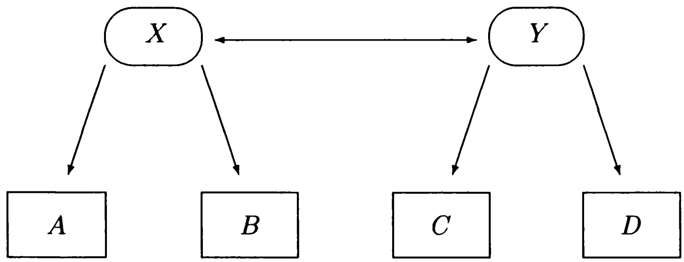


ABBILDUNG 2. Pfaddiagramm für zwei latente Variablen $X$ und $Y$, die durch je zwei manifeste Indikatoren gemessen werden.

zwei Klassen und dem Modell mehrerer gemeinsamer Faktoren). Faktormodelle sind Spezialfälle von *linearen Strukturgleichungsmodellen.* Wie dort läßt sich auch bei der LCA zwischen einem Meßmodell (Beziehungen zwischen latenten und manifesten Variablen) und einem Strukturmodell (Beziehungen zwischen latenten Variablen) unterscheiden. Beispiele (u.a. für Kausalmodelle mit kategorialen latenten Variablen) finden sich insbesondere bei Hagenaars (1990).

Der Abschnitt 3.1 zu geordnet kategorialen latenten Variablen hat gezeigt, daß verschiedene *Skalierungsmodelle* Spezialfälle der LCA sind. Rost (1988a) diskutiert daher die Brauchbarkeit von LCA Modellen unter dem Gesichtspunkt einer qualitativen vs. quantitativen *Testtheorie.*

Wie in Abschnitt 2 gezeigt wurde, läßt sich die LCA auch in die Theorie der *log-linearen Modelle* einbetten. Diese Parametrisierung wie auch die von Goodman (und anderen Autoren) erlaubt zudem simultane Mehrgruppenanalysen. Dadurch bieten sich Analogien zu *varianzanalytischen* Problemstellungen. Die Mehrgruppen-LCA kann man auch als MANOVA für kategoriale Daten ansehen, wobei die latenten Verteilungen die Funktion der Gruppenzentroide in der MANOVA einnehmen.

Es mag etwas erstaunen, daß LCA-Modelle auch bei Vorliegen lediglich einer manifesten Variablen zur Anwendung kommen können. Auch hierfür gibt es Beispiele, wie die sogenannte latente *Zeit-Budget-Analyse* (de Leeuw, van der Heijden & Verboon, 1990; van der Heijden, Mooijaart & de Leeuw, 1990).

## 5 Statistische Probleme

Die Schätzung der Parameter (allgemein dazu: Klauer, in diesem Band) erfolgt bei der LCA durch eine iterative Prozedur. Je nach Konstellation der Startwerte kann diese Prozedur bei einem lokalen Maximum hängenbleiben anstatt das globale Maximum zu erreichen (gesucht wird die maximale Übereinstimmung von unter einem Modell erwarteten und beobachteten Häufigkeiten). Gegen diese Falle kann man sich absichern, indem man ein Modell mit mehreren (vielen) Sätzen von Startwerten rechnet. In LACORD und PANMARK (van de Pol, Langeheine & de Jong, 1991) kann man solche Sätze von Startwerten durch Zufallszahlen generieren lassen. Die Schätzprozedur durchläuft dann zwei (LACORD) oder drei (PANMARK) Phasen, wobei in der letzten Phase das „beste" Modell aus den vorangegangenen Phasen durchiteriert wird. Diese Prozedur garantiert allerdings noch nicht eine eindeutige Lösung. Wenn verschiedene Startwertsätze zu verschiedenen Lösungen in den Parametern bei identischem (minimalem) $\chi^2$-Wert führen, so ist ein Modell nicht identifizierbar. „Nicht identifizierbar" bedeutet, daß die Modellparameter durch die Wahrscheinlichkeiten der Zellen der empirischen Kontingenztafel nicht eindeutig festgelegt sind. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für (lokale) Identifikation eines Modells ist, daß die Varianz-Kovarianzmatrix der Parameterschätzungen vollen Rang hat. Diese Varianz-Kovarianzmatrix liefert zugleich die Standardfehler der Parameterschätzungen. Sie bieten eine wesentliche Information, weil große Standardfehler auf die Schwachstellen eines Modells hinweisen.

Ein zur Zeit nicht zufriedenstellend gelöstes Problem stellt sich insbesondere für große Tabellen, bei denen in der Regel viele Zellen nur kleine Häufigkeiten enthalten oder gar nicht besetzt sind (*sparse data*). Die Folge ist, daß es viele Zellen mit kleinen erwarteten Häufigkeiten gibt. Zur Beurteilung der $\chi^2$-Statistiken ist die $\chi^2$-Verteilung dann nicht angemessen. Dies ist ein Problem, an dem die Statistiker arbeiten (vgl. z.B. Read & Cressie, 1988), unseres Wissens allerdings noch nicht für den speziellen Fall der LCA. Solange kann man sich nur mit mehr oder weniger attraktiven und aufwendigen Lösungen begnügen: Zusammenfassung von Zellen bis zu einem kritischen Wert, Simulation, Verwendung von deskriptiven Indizes wie BIC (vgl. Rost & Erdfelder, in diesem Band) etc.

## 6 Software

Inzwischen gibt es eine Reihe von Computerprogrammen zur LCA auf der Basis der Parametrisierung von Goodman, die sich im wesentlichen hinsichtlich der gelieferten Menge von Information unterscheiden. Zweifellos ist Cloggs (1977) MLLSA das weltweit bekannteste Programm. Inzwischen ist es PANMARK in vieler Hinsicht unterlegen. PANMARK wurde ursprünglich konzipiert für die Analyse von *Panel*-Daten mit Markoff-Modellen. Da sich das klassische LCA-Modell aber als Spezialfall von Markoff-Modellen erwiesen hat, wurde das Programm um eine Option erweitert, mit der sich alle Modelle anpassen lassen, die auch mit MLLSA behandelt werden können. Mit PANMARK lassen sich somit Modelle mit oder ohne Annahme lokaler stochastischer Unabhängigkeit testen, und es können beide Annahmen in einem Modell kombiniert werden.

Für die log-lineare LCA gab es zunächst Habermans (1979) LAT, das allerdings relativ häufig abstürzt, ohne auf eine Lösung zu konvergieren. Der Grund ist, daß die durch den Benutzer einzugebenden Startwerte für die Parameter dann zu stark von den endgültigen Schätzwerten differieren. DNEWTON (Haberman, 1988) ist gegenüber LAT sicher eine Verbesserung in dieser Hinsicht – aber dennoch ebenfalls nicht „*foolproof*". Der große Vorteil dieser beiden Programme besteht darin, daß der Benutzer das Modell in Form einer Designmatrix spezifizieren muß. Das erlaubt enorme Flexibilität in der Auswahl denkbarer Modelle. Diese schöne Seite der Medaille hat allerdings eine weniger schöne Kehrseite. Je nach Problem kann die Erstellung einer Designmatrix sehr aufwendig werden (Anzahl Antwortmuster $\times$ Anzahl Klassen $\times$ Anzahl Parameter und evtl. $\times$ Anzahl Gruppen).

Formann hat zwar ein umfassendes Programm zur linear-logistischen LCA entwickelt (s. Abschnitt 2), bietet es aber derzeit nicht einer breiteren Anwenderöffentlichkeit zur Benutzung an.

Das Programm LACORD (*LA*tent *C*lass analysis for *ORD*inal variables, Rost, 1990a) zeichnet sich durch eine benutzerfreundliche Oberfläche und leichte Anwendbarkeit auf größere Datensätze bis zu 30 dichotomen oder 11 sieben-kategoriellen Items aus. Das Programm ist sowohl für die mehrkategorielle LCA ohne Restriktionen oder mit Gleichheitsrestriktionen und Fixierungen der Wahrscheinlichkeitsparameter der Goodman-Variante (s.o. Modell (3)) geeignet, als auch – hierfür wurde es speziell entwickelt – für die Analyse ordinaler Variablen.

Das Programm MIRA (*MI*xed *RA*sch model, Rost, 1991b) verwendet dieselbe Oberfläche wie LACORD und schätzt die Parameter des dichotomen Mischverteilungs-Rasch-Modells sowie mehrerer polytomer, ordinaler Mischverteilungs-Rasch-Modelle.

## 7 Weiterführende Literatur

Ungeachtet der mit den älteren Methoden der Parameterschätzung verbundenen Probleme gilt das Buch von Lazarsfeld und Henry (1968) immer noch als Klassiker, zumal darin viele Ideen vorausgedacht wurden, die später eine wesentliche Rolle spielten. Die vielleicht einfachste Einführung gibt McCutcheon (1987). Formann (1984) bietet nicht nur eine Einführung in verschiedene Versionen der LCA, sondern auch eine ausführliche Übersicht über spezifische Modellvarianten anhand von Anwendungen auf konkrete Problemstellungen. Eine kompakte Einführung in die LCA und log-lineare Modelle mit latenten Variablen findet sich ebenfalls in der Monographie von Hagenaars (1990), die im Kern die Analyse kategorialer longitudinaler Daten zum Thema hat. Brauchbare, eher kurzgehaltene Darstellungen der Kernpunkte der LCA lassen sich auch in Arbeiten finden, in denen eher eine Übersicht angestrebt wird (z.B. Bergan, 1983; Clogg 1981; Langeheine, 1988), oder in manchen Zeitschriftenartikeln (insbesondere Goodman, 1974a). Schließlich nennen wir das Buch von Rost (1988a), in dessen Zentrum zwar die Erweiterung der LCA auf ordinale manifeste Variablen steht, in dem aber die klassische LCA ebenfalls ausführlich behandelt wird, insbesondere unter testtheoretischen Aspekten.

## Literaturverzeichnis

Andrich, D. (1978). Application of a psychometric rating model to ordered categories which are scored with successive integers. *Applied Psychological Measurement*, *2*, 581–594.

Andrich, D. (1982). An extension of the Rasch model for ratings providing both locating and dispersion parameters. *Psychometrika*, *47*, 105–113.

Bergan, J.R. (1983). Latent-class models in educational research. In E. W. Gordon (Ed.), *Review of research in education 10* (pp. 305–360). Washington: American Educational Research Association.

Clogg, C. C. (1977). *Unrestricted and restricted maximum likelihood latent structure analysis: A manual for users.* (Working Paper *1977–09*). University Park: Population Issues Research Center.

Clogg, C. C. (1981). New developments in latent structure analysis. In D. J. Jackson & E. F. Borgatta (Eds.), *Factor analysis and measurement in sociological research* (pp. 214–280). London: Sage.

Clogg, C. C. (1988). Latent class models for measuring. In R. Langeheine & J. Rost (Eds.), *Latent trait and latent class models* (pp. 173–205). New York: Plenum.

Clogg, C. C. & Goodman, L. A. (1984). Latent structure analysis of a set of multidimensional contingency tables. *Journal of the American Statistical Association, 79*, 762–771.

Clogg, C. C. & Goodman, L. A. (1985). Simultaneous latent structure analysis in several groups. In N. B. Tuma (Ed.), *Sociological methodology 1985* (pp. 81–110). San Francisco: Jossey-Bass.

Clogg, C. C. & Goodman, L. A. (1986). On scaling models applied to data from several groups. *Psychometrika, 51*, 123–135.

Clogg, C. C. & Sawyer, D. O. (1981). A comparison of alternative models for analyzing the scalability of response patterns. In S. Leinhardt (Ed.), *Sociological methodology 1981* (pp. 240–280). San Francisco: Jossey-Bass.

Croon, M. (1990). Latent class analysis with ordered latent classes. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 43*, 171–192.

Croon, M. (1991). Investigating Mokken scalability of dichotomous items by means of ordinal latent class analysis. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 44*, 315–331.

Dayton, C. M. & Macready, G. B. (1980). A scaling model with response errors and intrinsically unscalable respondents. *Psychometrika, 45*, 343–356.

Espeland, M. A. & Handelman, S. L. (1989). Using latent class models to characterize and assess relative error in discrete measurements. *Biometrics, 45*, 587–599.

Formann, A. K. (1984). *Die Latent-Class-Analyse.* Weinheim: Beltz.

Formann, A. K. (1989). Constrained latent class models: Some further applications. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 42*, 37–54.

Formann, A. K. (1992). Linear logistic latent class analysis for polytomous data. *Journal of the American Statistical Association, 87*, 476–486.

Giegler, H. & Rost, J. (1990). Ordinale manifeste Variablen – Nominale latente Variablen: Latent Class Analyse für ordinale Daten. In F. Faulbaum, R. Haux & K.-H. Jöckel (Hrsg.), *SoftStat '89, Fortschritte der Statistik-Software 2* (S. 461–470). Stuttgart: Fischer.

Giegler, H. & Rost, J. (1993). Typenbildung und Responsesets beim Gießen-Test: Clusteranalyse vs. Analyse latenter Klassen. *Zeitschrift für Differentielle und Diagnostische Psychologie, 14*, 137–152.

Goodman, L. A. (1974a). The analysis of systems of qualitative variables when some of the variables are unobservable. Part I – A modified latent structure approach. *American Journal of Sociology, 79*, 1179–1259.

Goodman, L. A. (1974b). Exploratory latent structure analysis using both identifiable and unidentifiable models. *Biometrika, 61*, 215–231.

Goodman, L. A. (1975). A new approach for scaling response patterns: An application of the quasi-independence concept. *Journal of the American Statistical Association, 70*, 755–768.

Guttman, L. (1950). The basis for scalogram analysis. In S. A. Stouffer, L. Guttman, E. A. Suchman, P. F. Lazarsfeld, S. A. Star & J. A. Clausen, *Measurement and prediction* (= Studies in social psychology in World War II, Vol. IV, pp. 60–90). Princeton: Princeton University Press.

Haberman, S. J. (1974). Log-linear models for frequency tables derived by indirect observation: Maximum likelihood equations. *Annals of Statistics, 2*, 94–924.

Haberman, S. J. (1979). *Analysis of qualitative data. Vol. 2: New developments.* New York: Academic Press.

Haberman, S. J. (1988). A stabilized Newton-Raphson algorithm for log-linear models for frequency tables derived by indirect observation. In C. C. Clogg (Ed.), *Sociological methodology 1988* (pp. 193–211). Washington: American Sociological Association.

Hagenaars, J. A. (1988). Latent structure models with direct effects between indicators. *Sociological Methods & Research, 16*, 379–405.

Hagenaars, J. A. (1990). *Categorical longitudinal data: Log-linear panel, trend, and cohort analysis.* Newbury Park: Sage.

Harper, D. (1972). Local dependence latent structure models. *Psychometrika, 37*, 53–59.

van der Heijden, P. G. M., Mooijaart, A. & de Leeuw, J. (1990). *Constrained latent budget analysis.* Research Report MS-90-1. Faculty of Social Sciences. Utrecht University.

Kelderman, H. & Macready, G. B. (1990). The use of loglinear models for assessing differential item functioning across manifest and latent examinee groups. *Journal of Educational Measurement, 27*, 307–327.

Langeheine, R. (1984). Neuere Entwicklungen in der Analyse latenter Klassen und latenter Strukturen. *Zeitschrift für Sozialpsychologie, 15*, 199–210.

Langeheine, R. (1988). New developments in latent class theory. In R. Langeheine & J. Rost (Eds.), *Latent trait and latent class models* (pp. 77–108). New York: Plenum.

Langeheine, R. (1991). Latente Markov-Modelle zur Evaluation von Stufentheorien der Entwicklung. *Empirische Pädagogik, 5*, 169–189.

Langeheine, R. & Rost, J. (1993). Latent Class Analyse. *Psychologische Beiträge, 35*, 177–198.

Langeheine, R. & van de Pol, F. (1990a). Veränderungsmessung bei kategorialen Daten. *Zeitschrift für Sozialpsychologie, 21*, 88–100.

Langeheine, R. & van de Pol, F. (1990b). A unifying framework for Markov modeling in discrete space and discrete time. *Sociological Methods & Research, 18*, 416–441.

Langeheine, R. & van de Pol, F. (1992). Recent developments in discrete space and discrete time Markov modeling. In F. Faulbaum (Ed.), *SoftStat '91. Advances in Statistical Software 3* (pp. 119–125). Stuttgart: Fischer.

Langeheine, R. & van de Pol, F. (1994). Discrete-time mixed Markov latent class models. In A. Dale & R. Davies (Eds.), *Analyzing social and political change: A casebook of methods* (pp. 167–197). Newbury Park: Sage.

Lazarsfeld, P. F. (1950). The logical and mathematical foundation of latent structure analysis. In S. A. Stouffer, L. Guttman, E. A. Suchman, P. F. Lazarsfeld, S. A. Star & J. A. Clausen, *Measurement and prediction* (= Studies in social psychology in World War II, Vol. IV, pp. 362–412). Princeton: Princeton University Press.

Lazarsfeld, P. F. & Henry, N. W. (1968). *Latent structure analysis.* Boston: Houghton-Mifflin.

de Leeuw, J., van der Heijden, P. G. M. & Verboon, P. (1990). A latent time-budget model. *Statistica Neerlandica, 44*, 1–22.

Lindsay, B., Clogg, C. C. & Grego, J. (1991). Semiparametric estimation in the Rasch model and related exponential response models, including a simple latent class model for item analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 86, 96–107.

Macready, G. B. & Dayton, C. M. (1980). The nature and use of state mastery learning models. *Applied Psychological Measurement, 4*, 493–516.

Masters, G. N. (1982). A Rasch model for partial credit scoring. *Psychometrika, 47*, 149–174.

McCutcheon, A. L. (1987). *Latent class analysis.* Newbury Park: Sage.

Mislevy, R. J. & Sheehan, K. M. (1989). Information matrices in latent-variable models. *Journal of Educational Statistics, 14*, 335–350.

Mislevy, R. J. & Verhelst, N. (1990). Modeling item responses when different subjects employ different solution strategies. *Psychometrika, 55*, 195–215.

Mokken, R. J. (1971). *A theory and procedure of scale analysis.* The Hague: Mouton.

van de Pol, F. & Langeheine, R. (1989). Mixed Markov models, mover-stayer models, and the EM algorithm with an application to labor market data from the Netherlands socioeconomic panel. In R. Coppi & S. Bolasco (Eds.), *Multiway data analysis* (pp. 485–495). Amsterdam: North-Holland.

van de Pol, F. & Langeheine, R. (1990): Mixed Markov latent class models. In C. C. Clogg (Ed.), *Sociological methodology 1990* (pp. 213–247). Oxford: Blackwell.

van de Pol, F., Langeheine, R. & de Jong, W. (1991). *PANMARK user manual. PANel analysis using MARKov chains.* Voorburg: Central Bureau of Statistics.

Read, T. R. C. & Cressie, N. A. C. (1988). *Goodness-of-fit statistics for discrete multivariate data.* New York: Springer.

Rost, J. (1988a). *Quantitative und qualitative probabilistische Testtheorie.* Bern: Huber.

Rost, J. (1988b). Test theory with qualitative and quantitative latent variables. In R. Langeheine & J. Rost (Eds.), *Latent trait and latent class models* (pp. 147–171). New York: Plenum.

Rost, J. (1988c). Rating scale analysis with latent class models. *Psychometrika, 53*, 327–348.

Rost, J. (1990a). *LACORD – Latent class analysis for ordinal variables. A Fortran Program.* Kiel: IPN.

Rost, J. (1990b). Rasch models in latent classes: An integration of two approaches to item analysis. *Applied Psychological Measurement, 14*, 271–282.

Rost, J. (1990c). Einstellungsmessung in der Tradition von Thurstones Skalierungsverfahren. *Empirische Pädagogik, 4*, 83–92.

Rost, J. (1991a). A logistic mixture distribution model for polychotomous item responses. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 44*, 75–92.

Rost, J. (1991b). *MIRA-Mischverteilungs-Raschmodell (ein PC-Programm).* Kiel: IPN.

Rost, J. & Georg, W. (1991). Alternative Skalierungsmöglichkeiten zur klassischen Testtheorie am Beispiel der Skala „Jugendzentrismus“. *Zentral-Archiv-Information, 28*, 52–74.

Rost, J. & von Davier, M. (1993). Measuring different traits in different populations with the same items. In R. Steyer, K. F. Wender & K. F. Widaman (Eds.), *Psychometric methodology. Proceedings of the 7th European Meeting of the Psychometric Society in Trier* (pp. 446–450). Stuttgart: Fischer.

Schwartz, J. E. (1986). A general reliability model for categorical data applied to Guttman scales and current-status data. In N. B. Tuma (Ed.), *Sociological methodology 1986* (pp. 79–119). Washington: American Sociological Association.

Tarnai, C. & Rost, J. (1991). Die Auswertung inhaltsanalytischer Kategorien mit latent-class Modellen. *Zentral-Archiv-Information, 28*, 75–87.

Wiggins, L. M. (1955). *Mathematical models for the analysis of multi-wave panels.* Phil. Diss., Columbia University.

## Autorenhinweis

Dies ist eine überarbeitete Version der in den Psychologischen Beiträgen (1993, 35, 177–198) erschienenen Arbeit von Rolf Langeheine und Jürgen Rost.