

Fourier-Analyse

Rainer Picard

Der Begriff *Fourier-Analyse* bezieht sich ursprünglich auf die Möglichkeit, periodisch sich immer wiederholende Vorgänge durch „Überlagerung“, d.h. hier als „unendliche Summe“ von Vielfachen, von Sinus- und Cosinus-Funktionen mit (bei angenommener Periodenlänge von 1) ganzzahligen Vielfachen von 2π als Frequenzen darzustellen. In diesem Sinne wird also aufgelöst (d.h. analysiert), in welcher Stärke (Amplitude) verschiedene Schwingungsanteile (Frequenzen) an dem betrachteten Schwingungsvorgang beteiligt sind. In der Bezeichnung „Fourier-Analyse“ wird darüber hinaus die historische Rolle gewürdigt, die der französische Mathematiker Baron *Jean-Baptiste-Joseph Fourier* bei der Entwicklung von Methoden gespielt hat, die von der Möglichkeit, Funktionen durch Überlagerung, d.h. als unendliche Summe (trigonometrische Reihe) oder als Integral von gewichteten, elementaren, trigonometrischen Funktionen darzustellen, Gebrauch machen, sowie bei deren Anwendung auf Probleme der Physik. Das einflußreiche Werk in diesem Themenbereich (hier insbesondere sein Buch „*Theorie analytique de la chaleur*“ über die mathematische Untersuchung der Wärmeleitungsgleichung aus dem Jahr 1822) hat seine Vorläufer in frühen Untersuchungen der schwingenden Saite durch die Schweizer Mathematiker *Daniel Bernoulli* und *Leonhard Euler*. Die Formeln für die Entwicklung periodischer Funktionen als Reihe von trigonometrischen Funktionen wurden erstmals 1728 von Bernoulli publiziert.

Aus den anfänglichen Untersuchungen von Bernoulli, Euler und Fourier sind Anwendungsmöglichkeiten in vielen Bereichen – von der technischen Bildverarbeitung, dem Lösen von Differentialgleichungen, bis hin zu den Fragestellungen der Wahrnehmungspsychologie und Neurophysiologie – erwachsen. Weitreichende Fortentwicklungen haben sich in vielen Bereichen etabliert und neue Forschungsrichtungen initiiert. In dieser Übersicht sind wir daran interessiert, eine moderne Darstellung der grundlegenden Prinzipien der Fourier-Analyse zu geben. Darüber hinaus sollen Einsichten in einige Anwendungsbereiche angedeutet werden, die auf den mathematischen Konzepten der *Fourier-Analyse* beruhen. Dabei liegt der Akzent hier naheliegenderweise auf einem Ideenfundus, der in einigen Zweigen der Wahrnehmungspsychologie relevant ist. Zu diesen Bereichen zählt insbesondere die Untersuchung von Phänomenen auditiver und visueller Wahrnehmung.

1 Theoretische Grundlagen

Zur Entwicklung der theoretischen Grundlagen müssen wir etwas ausholen. Als Ausgangspunkt wählen wir die eingangs erwähnte Idee der Überlagerung von Sinus- bzw. Cosinus-Ausdrücken. Hierbei soll der Term $\sin(2\pi px)$ mit dem „Gewicht“ $f(x)$ auf-

treten (analog für $\cos(2\pi px)$), wobei $f(x)$ den Wert der Funktion f , die für beliebige reelle Zahlen definiert ist, an der Stelle x bezeichnet. Das Aufsummieren bei einer solchen kontinuierlichen Gewichtsverteilung wird durch das Integral geleistet:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\sin}f(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi px) f(x) dx, \\ \mathcal{F}_{\cos}f(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi px) f(x) dx.\end{aligned}\tag{1}$$

Diese Integralausdrücke (wir setzen voraus, daß die gewählte Gewichtsfunktion f die Existenz der beiden Integrale gewährleistet) beschreiben ihrerseits Funktionen der Variablen p . Der reellen Zahl p wird der Wert $(\mathcal{F}_{\sin} f)(p)$ bzw. $(\mathcal{F}_{\cos} f)(p)$ zugeordnet. Diese Zuordnungen werden als Fourier-Sinus- bzw. Fourier-Cosinus-Transformierte von f bezeichnet. Die Verwandlung einer Funktion f in eine neue Funktion nennt man auch Transformation. Dementsprechend spricht man auch von Fourier-Sinus- bzw. Fourier-Cosinus-Transformation, wenn der Übergang von einer Funktion f zu ihrer Fourier-Sinus- bzw. Fourier-Cosinus-Transformierten gemeint ist. Die Sinus-Funktion ist „ungerade“, d.h. $\sin(2\pi px) = -\sin(-2\pi px)$, und die Cosinus-Funktion ist „gerade“, d.h. $\cos(2\pi px) = \cos(-2\pi px)$. Also ist auch die Fourier-Sinus-Transformierte $\mathcal{F}_{\sin}f$ von f eine ungerade Funktion und die Fourier-Cosinus-Transformierte $\mathcal{F}_{\cos}f$ von f eine gerade Funktion. Diese beiden Transformationen haben darüber hinaus die bemerkenswerte Eigenschaft, daß man, wenn man sie zweimal hintereinander ausführt, natürlich wieder eine ungerade bzw. gerade Funktion erhält, deren Summe sich zu der ursprünglichen Funktion f zusammensetzt, genauer

$$f(x) = (\mathcal{F}_{\cos}(\mathcal{F}_{\cos} f))(x) + (\mathcal{F}_{\sin}(\mathcal{F}_{\sin} f))(x).\tag{2}$$

Daraus ersieht man, daß der gerade Teil f_g der Funktion f – gegeben durch $f_g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ – von der Fourier-Sinus-Transformation, der ungerade Anteil von f – gegeben durch $f_u(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ – von der Fourier-Cosinus-Transformation in Null überführt wird. Jede der beiden Transformationen verliert also im allgemeinen einen wichtigen Teil der Information, die in der Funktion f enthalten ist. Man benötigt also beide Transformationen, um eine beliebige Funktion verlustfrei aus den Transformaten wiederzugewinnen. Es gibt eine bequeme Möglichkeit, beide Anteile in einer Transformation zusammenzufassen. Hierzu verwendet man die imaginäre Einheit i mit der grundlegenden Eigenschaft $i^2 = -1$. Man definiert die Fourier-Transformation \mathcal{F} durch

$$\mathcal{F}f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi px) f(x) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi px) f(x) dx.\tag{3}$$

Die sogenannte Euler-Gleichung,

$$e^{2\pi ikx} = \cos(2\pi kx) + i \sin(2\pi kx),\tag{4}$$

erlaubt es, die Fourier-Transformation noch kompakter (wenn auch vielleicht weniger anschaulich) zu formulieren,

$$\mathcal{F}f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ipx} f(x) dx.\tag{5}$$

Die Transformation, die die Wirkung der Fourier-Transformation umkehrt und die ursprüngliche Funktion f aus ihrer Fourier-Transformierten wiederherstellt, ist die inverse Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}^* f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi px) f(x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi px) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i px} f(x) dx. \quad (6)$$

Man sieht, daß die Invers-Fourier-Transformierte im wesentlichen wieder eine Fourier-Transformierte ist, genauer:

$$(\mathcal{F}^* f)(p) = (\mathcal{F} f)(-p). \quad (7)$$

Man findet häufig auch die Notation \hat{f} für die Fourier-Transformierte $\mathcal{F} f$ von f und \check{f} für die inverse Fourier-Transformierte $\mathcal{F}^* f$.

Die Fourier-Transformierte enthält die vollständige Information, die in dem Verlauf der Funktion f enthalten ist. Bei festem p gibt sie in gewissem Sinne den Anteil von f an, der mit der Frequenz $2\pi p$, also mit $\sin(2\pi px)$ bzw. $\cos(2\pi px)$, verbunden ist. Wegen dieser anschaulichen Bedeutung von $2\pi p$ als Frequenz nennt man den Argumentbereich der Fourier-Transformierten auch *Frequenzbereich* und legt sich häufig auf den Buchstaben „ p “ (im Unterschied zu „ x “ für das Argument der ursprünglichen Funktion) fest, um Elemente in ihm zu kennzeichnen. Die Fourier-Transformierte wird in der Anwendungsliteratur – wegen der Analogie zur Zerlegung des Lichts in seine Farbbestandteile – auch *Frequenzspektrum* (auch kurz: *Spektrum*) genannt. Das Frequenzspektrum ist also eine Funktion mit komplexen Werten, also Werten mit einem Realteil und einem Imaginärteil, und kann daher auch in der Form

$$\mathcal{F} f(p) = |\mathcal{F} f(p)| e^{i \text{argument}(\mathcal{F} f(p))} \quad (8)$$

geschrieben werden, wobei der Ausdruck *argument* ($\mathcal{F} f(p)$) den passenden Winkel zwischen $-\pi$ und $+\pi$ ($+\pi$ eingeschlossen) bezeichnet. Der in (8) auftretende Absolutbetrag des Frequenzspektrums wird *Amplitudenspektrum* (oder *Fourierspektrum*), die Funktion *argument* ($\mathcal{F} f(p)$) auch *Phasenspektrum* genannt. Das Quadrat des Amplitudenspektrums wird auch als *Leistungsdichtespektrum* oder *Potenzspektrum* (*power spectrum*) bezeichnet.

Als ein bemerkenswertes erstes Beispiel für eine konkrete Fourier-Transformierte betrachten wir die *Gaußsche Verteilungsfunktion* γ (*Normalverteilung*)

$$\gamma(x) = e^{-\pi x^2} \quad (9)$$

(vgl. Abbildung 2). Das bemerkenswerte an der Funktion γ ist, daß sie mit ihrem Frequenzspektrum übereinstimmt. Da γ eine gerade Funktion ist, stimmt hier auch die Fourier-Transformierte mit der Fourier-Cosinus-Transformierten überein,

$$\mathcal{F}(\gamma) = \gamma = \mathcal{F}_{\cos}(\gamma). \quad (10)$$

In Analogie zu dem für Vektoren benutzten Begriff nennt man zwei Funktionen f und g *orthogonal* oder senkrecht zueinander, wenn ihr *Skalarprodukt*, hier definiert durch das Integral

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* g(x) dx \quad (11)$$

(hierbei bezeichnet $*$ die komplexe Konjugation), gleich Null ist. Auch die „Längenmessung“ wird analog zur euklidischen Norm in der Vektorrechnung durch eine Norm, hier

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}, \quad (12)$$

definiert. In bezug auf diese Norm hat die Fourier-Transformation (sowie die inverse Fourier-Transformation) die folgende wichtige „Isometrie“-Eigenschaft:

$$\|f\| = \|\mathcal{F}f\| = \|\mathcal{F}^*f\|. \quad (13)$$

Diese Beziehung ist als *Parsevalsche Gleichung* bekannt. Diese mathematische Tatsache ist ein weiterer Ausdruck dafür, daß bei Verwendung der Fourier-Transformation keine Information verlorengeht, denn man liest ab, daß $\mathcal{F}f = 0$ nur dann gelten kann, wenn $f = 0$.

Die Fourier-Transformation macht auch Sinn zum Beispiel für Funktionen mit „Sprüngen“ wie etwa die folgende *charakteristische Funktion (Indikatorfunktion)* χ des Intervalls $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ zwischen } -\frac{1}{2} \text{ und } +\frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (14)$$

Ihr Frequenzspektrum ergibt sich als

$$(\mathcal{F}\chi)(p) = \frac{\sin(\pi p)}{\pi p}, \quad (15)$$

eine üblicherweise mit $\text{sinc}(p)$ abgekürzte Funktion (vgl. Abbildung 1).

Als eine für praktische Zwecke wichtige Eigenschaft der Fourier-Transformation notieren wir ihr Verhalten bezüglich Reskalierung des Arguments der zu transformierenden Funktion:

$$|a| \mathcal{F}f(ap) = \mathcal{F}g(p) \quad \text{wobei} \quad g(x) = f(x/a), \quad a \neq 0. \quad (16)$$

Das heißt insbesondere, wie man auch aus Abbildung 1 ersieht, daß je „schmäler“ die Funktion ist, desto „breiter“ ist ihre Fourier-Transformierte.

Die eigentliche Bedeutung der Fourier-Transformation liegt in einer sehr speziellen Eigenschaft, die darin besteht, daß sie – im wesentlichen – Differentiation in Multiplikation mit dem Argument verwandelt und dadurch zum Beispiel Gleichungen, die Ableitungen enthalten (d.h. *Differentialgleichungen*), in einfacher zu behandelnde Probleme übersetzt. Genauer: Bezeichnen wir die Ableitung einer Funktion f mit f' , so gilt

$$(\mathcal{F}f')(p) = 2\pi ip (\mathcal{F}f)(p). \quad (17)$$

Dies schreibt sich etwas gefälliger mit Einführung des *Differentialoperators* D durch

$$Df = \frac{1}{2\pi i} f' \quad (18)$$

als

$$(\mathcal{F}Df)(p) = p (\mathcal{F}f)(p). \quad (19)$$

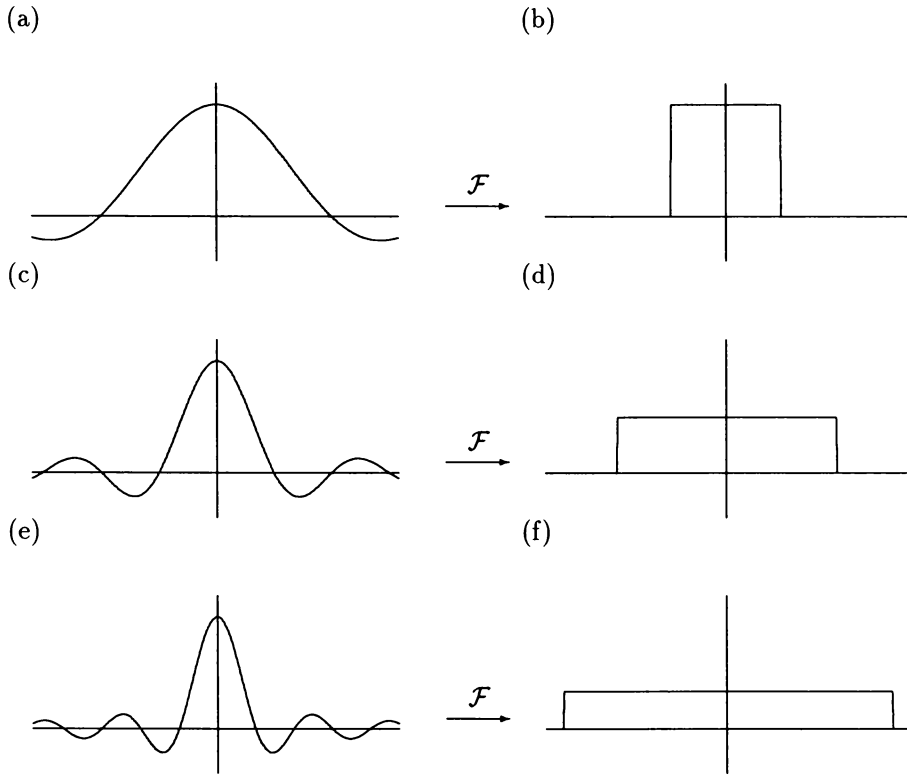


ABBILDUNG 1. Am Beispiel der sinc-Funktion und ihrer Fourier-Transformierten (der charakteristischen Funktion χ) wird der Einfluß einer Skalenänderung illustriert. Die Abbildung zeigt $\text{sinc}(x)$, $\text{sinc}(2x)$ und $\text{sinc}(3x)$ (Abbildung 1a, c, e) sowie ihre entsprechenden Fourier-Transformierten (Abbildung 1b, d, f).

Der Operator D ist, wie die Ableitung selbst, ein *linearer Operator* in dem Sinne, daß die Summe zweier Ableitungen gleich der Ableitung der Summe, und das Vielfache einer Ableitung gleich der Ableitung des Vielfachen ist. In selbigem Sinne ist auch die Fourier-Transformation \mathcal{F} ein linearer Operator

$$\mathcal{F}(f + g) = \mathcal{F}f + \mathcal{F}g, \quad \mathcal{F}(a f) = a (\mathcal{F}f) \quad (20)$$

für alle f , für die die Fourier-Transformation \mathcal{F} definiert ist, und alle (komplexen) Zahlen a . Allgemein können lineare Operatoren in zahlreichen Anwendungsfällen als einfache mathematische Modelle verwendet werden. Die Funktion, auf die der Operator angewendet wird, figuriert dabei als die Eingabe in ein System, dessen Verhalten durch den linearen Operator beschrieben wird, die Funktion, die man nach

Anwendung des linearen Operators erhält, repräsentiert die Reaktion des Systems auf die Eingabe. In diesem Rahmen besagen die Linearitätseigenschaften etwa folgendes: „Wird die Eingabe in ihrer Stärke vervielfacht, so erhöht sich die Ausgabe im selben Maße, und speist man die Summe zweier verschiedener „Inputs“ in das System ein, so ist die Reaktion die Summe der Reaktionen auf die einzelnen Eingaben“. Diese Struktureigenschaften liegen in vielen Fällen zumindest näherungsweise vor. Insbesondere liegen diese Eigenschaften in guter Näherung vor bei der auditiven und visuellen Wahrnehmung von Mustern moderater Signalstärke.

Die spezielle Beziehung (19) zeigt, daß der lineare Operator \mathcal{F} – wie man sagt – eine *Spektraldarstellung* für D ist. Die Existenz einer solchen Darstellung, die die Anwendung eines Operators in Multiplikation mit dem Argument verwandelt, beruht wesentlich auf der folgenden Symmetrie-Eigenschaft des Operators D bezüglich des Skalarprodukts:

$$(D\phi, \psi) = (\phi, D\psi), \quad (21)$$

für ϕ, ψ im Definitionsbereich von D , d.h. ϕ, ψ sind in geeignetem Sinne differenzierbar.

Eine Spektraldarstellung erlaubt insbesondere, als Erweiterung der offensichtlichen Folgerungen aus (19)

$$(\mathcal{F}D^2 f)(p) = p^2 (\mathcal{F}f)(p), (\mathcal{F}D^3 f)(p) = p^3 (\mathcal{F}f)(p), \text{ etc.}, \quad (22)$$

Funktionen von D zu erklären. Wie in der anwendungsorientierten Literatur weithin üblich, machen wir keine Aussagen über Definitionsbereiche solcher Beziehungen, um die Darstellung einfach zu halten und das Verständnis nicht zu erschweren. Es sollte jedoch bewußt sein, daß solche Erwägungen auch bei der praktischen Anwendung von entscheidender Bedeutung sein können. Unter Benutzung der inversen Fourier-Transformation \mathcal{F}^* schreibt sich der Zusammenhang zwischen Differentialoperator $P(D)$ als formalem Polynom in der Ableitung D und dem korrespondierenden Polynom $P(p)$ mit dem Argument p als

$$P(D) = \mathcal{F}^* P \mathcal{F}. \quad (23)$$

Für allgemeinere Funktionen F erklärt man nun $F(D)$ in Erweiterung dieser Beziehung durch

$$F(D) = \mathcal{F}^* F \mathcal{F}. \quad (24)$$

Bei einigen Verwendungen bezeichnet man die Funktion F auch als *Filter*, da sie zu einer Einflußnahme im Frequenzbereich führt, also je nach Konstruktion Frequenzen anheben oder unterdrücken kann. So unterdrückt die oben erwähnte charakteristische Funktion als Filter χ alle Frequenzbeiträge, die außerhalb des Intervalls $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ fallen. Spezielle Filter werden zum Beispiel zur nachträglichen Bildverbesserung (etwa von Satellitenbildern) verwendet. Durch Ausblenden bestimmter Ortsfrequenzbereiche kann man z.B. Bildrauschen verschwinden lassen. In allgemeinem Zusammenhang wird ein solches F auch gern als *Transferfunktion* bezeichnet.

Die Fourier-Transformation kodiert die, durch eine Funktion gegebene, Information so um, daß selbst relativ grobe Filter den für den Betrachter wesentlichen Bildgehalt nur wenig ändern, oft sogar die subjektive Bildqualität verbessern. Man

macht sich dies bei der Datenfernübertragung zunutze. Ein neueres Verfahren beruht darauf, daß man ein mit der Fourier-Transformation kodierte Signal sendet. Das Original kann durch Anwenden der inversen Fourier-Transformation, wozu man einen Rechner verwendet (*Fast Fourier Transform*), wiedergewonnen werden.

Es ist interessant festzustellen, daß alle auf die oben beschriebene Weise erhaltenen Operatoren linear sind und miteinander und mit jedem Operator, mit dem D vertauschbar ist, ihrerseits vertauschbar sind. Also

$$F(D) G(D) = G(D) F(D). \quad (25)$$

Und zum Beispiel

$$\tau_h F(D) = F(D) \tau_h, \quad (26)$$

wobei τ_h den *Translationsoperator*

$$(\tau_h f)(x) = f(x + h), \quad (27)$$

der das Argument von x um h verschiebt, bezeichnet. Man nennt solche linearen Operatoren *translationsinvariant*. Insbesondere ist also D translationsinvariant, d.h. die Ableitung einer Funktion, deren Argument verschoben wurde, ist gleich der Ableitung der Funktion ausgewertet mit der gleichen Verschiebung des Arguments. Vorgänge, die zusätzlich zu ihrer Linearität auch noch die Eigenschaft der Translationsinvarianz besitzen, können durch solche Operatoren dargestellt werden. Als Konsequenz können dann mathematische Schlüsse Vorhersagen über das Verhalten des Systems machen oder Reaktionsweisen des Systems erklären. Ein Beispiel hierfür ist das Abbildungsverhalten optischer Systeme. Sie verhalten sich in gewissen Grenzen linear (z.B. ein helleres Original ergibt ein helleres Abbild) und translationsinvariant (eine Verschiebung des Originals resultiert in einem entsprechend verschobenen Abbild). Die durch die Fourier-Transformation mögliche Beschreibung von translationsinvarianten, linearen Systemen erlaubt eine einfache formale Handhabung der sie darstellenden Operatoren im Sinne eines *Funktionenkalküls*. Wir können also mit solchen Operatoren – geschrieben als Funktionen von D – weitgehend rechnen, als ob es sich um gewöhnliche Funktionen einer reellen Variablen handeln würde.

Die Fourier-Transformation kann auch auf Objekte ausgedehnt werden, die keine Funktionen im eigentlichen Sinne sind (verallgemeinerte Funktionen, hier sog. *temperierte Distributionen* S^*). Die Definition solcher Distributionen genannten Objekte geht von der Beobachtung aus, daß eine integrierbare Funktion f eindeutig dadurch festgelegt ist, daß man die Zahlenwerte (f, ϕ) kennt, die das Skalarprodukt mit allen Funktionen ϕ einer „kleinen“ Klasse S von Funktionen annimmt. Hierzu verwendet man beliebig oft differenzierbare Funktionen, die schnell gegen Null gehen, wenn das Argument groß wird (sog. *Testfunktionen*). Der nächste Schritt besteht darin, allgemeinere Objekte durch Vorgabe von Zahlenwerten zu definieren, für die das Skalarprodukt im eigentlichen keinen Sinn macht.

Ein wichtiges Beispiel ist die *Dirac-Distribution* δ , die durch die Beziehung

$$(\delta, \phi) = \phi(0), \quad \text{für alle } \phi \text{ in } S, \quad (28)$$

festgelegt ist. Diese kann laut Definition als ein Objekt verstanden werden, welches eine Stichprobe im Nullpunkt von jeder beliebigen Funktion in S liefert, auf die sie

in der beschriebenen Weise angewendet wird. Sie ist keine Funktion im eigentlichen Sinne mehr, kann aber als Modell für einen punktuellen Impuls der Stärke 1 verwendet werden (je nach Kontext „Lichtblitz“, „Lichtpunkt“, „Knall“, „Punktladung“, „Massenpunkt“ etc.). Die Dirac-Distribution δ kann auch als Grenzwert einer Folge von reskalierten Gaußschen Funktionen

$$\gamma_n(x) = n \gamma(nx) \quad (29)$$

in dem Sinne verstanden werden, daß die Zahlenfolge (γ_n, ϕ) für jede stetige und beschränkte Funktion ϕ gegen $(\delta, \phi) = \phi(0)$ konvergiert, wenn n gegen unendlich geht. Die γ_n bilden eine Folge von „Glockenkurven“ (Abbildung 2), die immer schmaler und dafür immer höher werden, wobei

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_n(x) dx = 1. \quad (30)$$

Die durch das Integral $\int_{-\infty}^t \gamma_n(x) dx$ definierte Funktion von t approximiert die charakteristische Funktion $\chi_{[0, \infty[}$ des Intervalls $[0, \infty[$ aller nicht-negativen reellen Zahlen. Daher kann man δ auch als Ableitung von $\chi_{[0, \infty[}$ betrachten, also als verallgemeinerte Ableitung einer Funktion, die eigentlich in Null nicht differenzierbar ist.

Für (δ, ϕ) findet man häufig auch die suggestive Notation

$$(\delta, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \phi(x) dx, \quad (31)$$

die aber mit Vorsicht zu verwenden ist, da δ eben keine Funktion im eigentlichen Sinne ist. Wir werden, mit dieser Warnung im Gedächtnis, wegen der bequemen Notationsweise doch gelegentlich die Bezeichnung $\delta(x)$ und entsprechende Varianten verwenden. Als Eigenschaft der Diracschen δ Distribution notieren wir, daß Multiplikation von δ mit einer stetigen Funktion f gleichbedeutend ist mit der Multiplikation von δ mit dem Wert $f(0)$,

$$f \cdot \delta = f(0) \delta. \quad (32)$$

Auch hierin zeigt sich wieder die Stichprobenwirkung der δ Distribution. Zur Stichprobenentnahme an einer anderen Stelle als bei Null benutzt man die δ Distribution mit einem um y verschobenen Argument

$$f(x) \delta(x - y) = f(y) \delta(x - y) \quad (33)$$

(vgl. Abbildung 2; die δ -Distribution ist dort – wie üblich – symbolisch durch einen Pfeil der Länge 1 repräsentiert). Impulse anderer Stärke werden mit ihrer entsprechenden Länge eingetragen (vgl. Abbildung 3). Will man an äquidistanten Punkten (etwa bei allen ganzzahligen Werten des Arguments) Stichproben nehmen, so wird man auf die „Kamm“-Distribution III („sampling function“) geführt,

$$\text{III}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n), \quad (34)$$

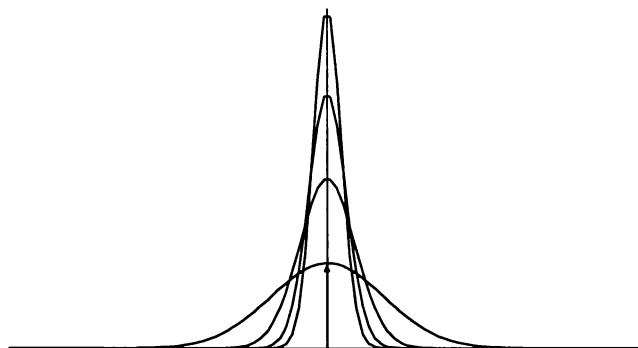


ABBILDUNG 2. Skaleneränderung der Gaußschen γ führt zu einer Folge, welche die Dirac- δ -Distribution approximiert (durch den Pfeil der Länge 1 dargestellt).

und man hat

$$f(x) \text{III}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \delta(x - n). \quad (35)$$

In Abbildung 3 ist die Wirkung von III bildlich dargestellt.

Eine weitere Distribution, nämlich $e^{2\pi ipx}$, welche zwar noch eine Funktion im üblichen Sinne, aber nicht mehr im üblichen Sinne integrierbar ist, haben wir bereits zu Beginn kennengelernt. Mit ihr kann man die Fourier-Transformation auch schreiben als

$$\mathcal{F}f(p) = (e^{2\pi ipx}, f). \quad (36)$$

Entsprechend gilt für die inverse Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}^*f(x) = (e^{-2\pi ipx}, f). \quad (37)$$

Die Fourier-Transformation läßt sich auch für solche temperierten Distributionen, also Elemente in S^* , erklären. Insbesondere hat man zum Beispiel

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}\delta = 1, \mathcal{F}1 = \delta, \\ \mathcal{F}e^{-2\pi ihx} = \tau_h\delta = \delta(\cdot + h), \\ \mathcal{F}\tau_y\delta = \mathcal{F}(\delta(\cdot + y)) = e^{2\pi iyp} \\ \mathcal{F}\text{III} = \text{III} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Die Tatsache, daß die Fourier-Transformierte von $e^{2\pi ihx}$ eine verschobene Diracsche Distribution ist, wird in der Praxis dazu benutzt, periodische – etwa akustische – Signale zu isolieren, die in nicht-periodischem „Rauschen“ verborgen sind. Nach Fourier-Transformation des Signals sind die periodischen Anteile, die dem Blick ursprünglich entzogen waren, nun deutlich an den im Amplitudenspektrum hervortretenden „peaks“ zu erkennen. Ihre Position gibt Auskunft über die Frequenz des verborgenen periodischen Vorgangs.

In (38) tritt die Kamm-Distribution III (russisch „Sha“) mit einer Besonderheit hervor, die uns schon bei der Gaußschen Verteilungsfunktion γ aufgefallen war, daß sie nämlich ebenfalls mit ihrem Frequenzspektrum übereinstimmt. Diese bemerkenswerte Eigenschaft führt zu zwei wesentlichen Ergebnissen: der Fourierreihe (als Spezialfall der Fouriertransformation) sowie dem sogenannten Shannonschen Stichprobensatz (vgl. dazu Abschnitt 2.1).

Mit der Erweiterung auf Elemente in S^* erhält man im Sinne von (24) eine erstaunlich große Klasse von Operatoren, die für weitreichende Anwendungen genutzt werden können. In diesem allgemeinen Rahmen stellt sich zum Beispiel heraus, daß ein Operator, der als Funktion $F(D)$ im obigen Sinne erklärt ist, als *Faltung* mit der Invers-Fourier-Transformierten verstanden werden kann:

$$F(D)f(x) = \check{F} * f = \int_{-\infty}^{\infty} \check{F}(x-y) f(y) dy \quad (39)$$

oder mit G anstelle von \check{F}

$$\hat{G}(D)f(x) = G * f = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y) f(y) dy. \quad (40)$$

Hierbei ergibt das zweite Gleichheitszeichen die Schreibung als Faltungsintegral für den Fall, daß die auftretenden Integrale definiert sind. Die Beziehung (40) kann auch in der folgenden Weise (als der sog. Faltungssatz) umgeschrieben werden:

$$\mathcal{F}(G * f) = \hat{G} \cdot \hat{f}. \quad (41)$$

Somit korrespondiert also eine Faltung (also auch ein Faltungsintegral) mit einem Produkt der Fourier-Transformierten der beteiligten Distributionen bzw. Funktionen.

Die für die Faltung durch die Fourier-Transformation herbeigeführte Vereinfachung (d.h. (41)) gilt in ähnlicher Weise auch für die folgende „Verwandte“ der Faltung:

$$(f ** g)(x) = (\tau_x f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)^* g(y) dy. \quad (42)$$

Definition (42) wird benutzt, um die (komplexe) *Korrelationsfunktion* $\kappa(f, g)$ zwischen zwei Funktionen f, g zu erklären. Man setzt

$$\kappa(f, g) = f ** g. \quad (43)$$

Hierbei wird gewöhnlich vorausgesetzt, daß f, g normiert sind, d.h. $\|f\| = \|g\| = 1$. Die Korrelationsfunktion gibt Auskunft über die Vergleichbarkeit des Verlaufs von f und g an verschiedenen Stellen des Definitionsbereichs. Ihre Eigenschaften sind für statistische Betrachtungen wichtig. Sie ist in Analogie zum statistischen Korrelationsbegriff für diskrete Daten gebildet. Dort kommt das euklidische Skalarprodukt anstelle des Skalarprodukts aus (11) zum Einsatz. Als Folgerung von (41) sieht man:

$$\mathcal{F}\kappa(f, g) = \mathcal{F}f^* \cdot \mathcal{F}g. \quad (44)$$

Der Ausdruck $\kappa(f, f)$ wird als (komplexe) *Autokorrelationsfunktion* bezeichnet (vgl. Krauth, in diesem Band). Die entsprechenden reellen Korrelationsfunktionen erhält

man durch Einschränkung auf reellwertige Verteilungen. Ein durch eine Faltung beschreibbares, also translationsinvariantes (lineares) System ist durch seine Reaktion auf den Einheitsimpuls δ (*Impuls-Reaktion*) eindeutig festgelegt. In der Tat gilt:

$$F(D)\delta = \tilde{F}. \quad (45)$$

Dies kann verbal durch die Aussage „Das Frequenzspektrum der Impuls-Reaktion eines translationsinvarianten linearen Systems ist seine Transferfunktion“ ausgedrückt werden. Stellen wir uns ein als translationsinvariant und linear bekanntes System als eine „schwarze Kiste“ vor, die wir untersuchen wollen, ohne in sie hineinschauen zu können, so brauchen wir nur die Impuls-Reaktion zu beobachten, und schon kennen wir die Transferfunktion $F = \mathcal{F}(F(D)\delta)$, durch die das System und damit jede mögliche Reaktion beschrieben wird (*System-Analyse*). Dies macht man sich bei experimentellen Untersuchungen in der Psychophysik und Neurophysiologie zunutze.

Die vorgestellten Konzepte lassen sich auch auf mehrere Dimensionen übertragen. So ist etwa die zweidimensionale Fourier-Transformation durch

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(p_1, p_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= (e^{2\pi i(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2)}, f) \end{aligned} \quad (46)$$

gegeben, wobei das hier in analoger Weise wie in (11) verwendete Skalarprodukt durch das Doppelintegral

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)^* g(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (47)$$

erklärt ist. Führen wir die übliche Vektornotation ein, indem wir $x = (x_1, x_2)$, $p = (p_1, p_2)$ und

$$x \cdot p = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2, \quad x^2 = x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 \quad (48)$$

setzen, so schreibt sich dies suggestiv in einer Form, die sich kaum von der eindimensionalen Darstellung unterscheidet. In der Tat bleiben die oben aufgelisteten Eigenschaften weitestgehend mit nur geringfügigen Modifikationen erhalten, so daß wir uns, jedenfalls im Rahmen dieser Übersichtsdarstellung, auf die entwickelten Konzepte ohne separate Diskussion des zwei- (oder höher-) dimensional Falles beziehen können. So behält zum Beispiel die Gaußsche Verteilungsfunktion γ ihre bemerkenswerte Eigenschaft, mit ihrem Frequenzspektrum übereinzustimmen. \mathcal{F} ist wieder eine normerhaltende Transformation. Die Reskalierungsbeziehung etwa muß jedoch geringfügig modifiziert werden.

2 Einige Anwendungsbeispiele

Das Interesse an der Fourier-Transformation erklärt sich einerseits aus der Vielfalt der formalen Anwendungsmöglichkeiten und ihrer leichten numerischen Approximierbarkeit (*Fast Fourier Transform*, vgl. Brigham, 1974), wie auch andererseits aus der Tatsache, daß die Fourier-Transformation nicht nur ein mathematisches Hilfsmittel, sondern auch eine angemessene Beschreibung physikalischer und neuraler

Vorgänge ist. So bewerkstelligt etwa eine ideale Konvex-Linse bei Bestrahlung eines Dias, welches sich in der einen Brennebene befindet, mit zur optischen Achse parallelem, kohärentem Licht in der anderen Brennebene eine *optische Transformation* des Originals, die mathematisch in guter Näherung durch die Fourier-Transformation beschrieben werden kann. Hierbei ist zu beachten, daß die Betrachtung komplexwertiger Funktionen aus mathematischer Bequemlichkeit eingeführt wird. Die sinnliche Realität kennt nur reelle Größen, wie das Amplitudenspektrum, das Leistungsdichtespektrum oder etwa den Realteil der Fouriertransformierten.

Dementsprechend ist für das menschliche Auge als Fourier-Bild eine Helligkeitsverteilung sichtbar, die sich als proportional zum Quadrat des Absolutbetrages der Fourier-Transformierten (*Leistungsdichtespektrum*) erweist. Da die Fourier-Transformation Drehsymmetrien erhält, ergeben sich bereits aus einfachen rotationssymmetrischen Lochblenden attraktive Leistungsdichtespektren. Mit auf optischem Wege erzeugten Approximationen der Fourier-Transformation sind durch die Begrenztheit des optischen Systems (Linsengröße etc.) keine sehr großen Ortsfrequenzen darstellbar. Nur in einer begrenzten Umgebung der Linsenmitte wird ein gut erkennbares Muster wiedergegeben. Wegen der nicht-verschwindenden Ausdehnung der Löcher ist außerdem noch ein Ringmuster überlagert. Eine faszinierende Beispielsammlung optischer Transformationen findet man in Harburn, Taylor und Welberry (1975).

Bei einer bestimmten hochauflösenden *Holographie*-Methode wird von der Möglichkeit Gebrauch gemacht, unter Benutzung von kohärentem Licht durch Überlagerung mit Referenzwellen den Realteil der Fourier-Transformation eines Originals photographisch aufzunehmen. Ein Bild des Originals kann durch erneute Anwendung der Fourier-Transformation, also etwa durch die eben besprochene optische Anordnung aus konvexer Linse und Parallel-Licht, wiedergewonnen werden.

Als weitere Beispiele seien angeführt, daß ein Prisma eine Fourier-Analyse des einfallenden Lichtes (als einem Wellenpaket) nach Frequenz und Amplitude durchführt und daß ein mit Parallel-Licht bestrahltes Objekt in großer Entfernung ein *Streumuster* erzeugt, welches sich als Fourier-Transformierte der Oberflächenabstrahlung herausstellt. Entsprechendes gilt für aktiv abstrahlende Vorrichtungen (*Antennen*).

Als mehr rechentechnische Anwendungen der Fourier-Transformation seien hier die *Computer-Tomographie*, bei der Dichteverteilungen in Körperquerschnitten mit Hilfe der Radontransformation, die sich aus einer zwei- und einer eindimensionalen Fourier-Transformation zusammensetzt, ermittelt werden, sowie *Bildaufbereitungsverfahren*, wie etwa die Rasterbeseitigung unter Verwendung von Filtern im oben eingeführten Sinne, erwähnt.

Es sollen nun abschließend einige dieser Anwendungsbeispiele zur Illustration des im vorigen Abschnitt ausgeführten etwas eingehender diskutiert werden.

2.1 Rekonstruktion aus Stichproben

Eine wichtige Anwendung der Fourier-Transformation bezieht sich auf die Rekonstruktion einer stetigen Funktion, die nur an isolierten Punkten bekannt ist (*sampling*). Ein Beispiel ist etwa die Bildwiedergabe auf der Netzhaut (*Retina*). Da die Retina aus einzelnen durch inhibitorische Bereiche gegeneinander abgegrenzten *Photorezeptoren* besteht, wird das Bild auf der Netzhaut in der Tat nur in isolierten

Punkten abgetastet. Das Auflösungsvermögen der Netzhaut kann in guter Annäherung mit fourieranalytischen Methoden studiert werden. Hier betrachten wir zur Vereinfachung nur den Fall einer „eindimensionalen Retina“. Zur Modellierung des Sachverhalts verwenden wir wieder die Distribution III (vgl. Abbildung 3).

Seien die Werte der Funktion f an allen (der Einfachheit halber) ganzzahligen Stellen – diese sind als Positionen der Photorezeptoren anzusehen – bekannt. Somit kennen wir die „Stichprobe“ $f \cdot \text{III} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \delta(\cdot - n)$, sowie deren Invers-Fourier-Transformierte

$$\mathcal{F}^*(f \cdot \text{III})(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{2\pi i n p}. \quad (49)$$

Ist \check{f} außerhalb des Intervalls $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ gleich Null (man sagt dann, f habe eine beschränkte (Frequenz-) *Bandbreite* – hier ist sie kleiner oder gleich 1), so sieht man, daß $\mathcal{F}^*(f \cdot \text{III}) = \check{f} * \text{III}$ aus einer periodischen Wiederholung von \check{f} (mit Periode 1) besteht. Insbesondere gilt also $\check{f} = \chi(\check{f} * \text{III})$. Die Relation (49) ist somit eine Fourier-Reihenentwicklung für die periodische Fortsetzung $\check{f} * \text{III}$ von \check{f} . Es gilt somit

$$\check{f}(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \chi(p) e^{2\pi i n p}. \quad (50)$$

Die Anwendung der Fourier-Transformation auf die letztere Gleichung führt zu

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) (\mathcal{F}\chi) * \delta(\cdot - n) \quad (51)$$

oder unter Verwendung von (15)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \text{sinc} * \delta(\cdot - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \text{sinc}(\cdot - n). \quad (52)$$

Dies zeigt also die gewünschte Rekonstruktion einer Funktion (der Bandbreite 1) aus den ganzzahligen Stichproben (Shannonscher Stichprobensatz). Die zuletzt gegebene Formulierung gibt offenbar eine *Interpolation* der Funktionswerte von f an ganzzahligen Stellen des Argumentbereichs. Somit kann also die Aussage des Shannonschen Stichprobensatzes auch wie folgt formuliert werden: Hat f eine Bandbreite kleiner oder gleich 1, so stimmt sie mit ihrer (durch (52) definierten) Interpolierenden überein. Solche Bildinformationen können also (z.B. auch durch den Wahrnehmungsapparat) ohne Verluste und Verzerrungen vollständig rekonstruiert werden.

Im Sinne des oben eingeführten Begriffs des Filters spricht man bei der Verwendung der charakteristischen Funktion χ bei der Rekonstruktion von f von einem *Tiefpaß-Filter*, da offenbar, wie immer \check{f} im allgemeinen beschaffen sei (also z.B. nicht bandbeschränkt), aus dem gesamten Frequenzbereich nur Werte zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ (also „tiefen“ Frequenzen) zur Verwendung gelangen. Ist \check{f} nicht bandbeschränkt, so kommt es zu einer mehr oder weniger fehlerhaften Rekonstruktion (*aliasing*) (vgl. hierzu Yellott, 1982, 1990).

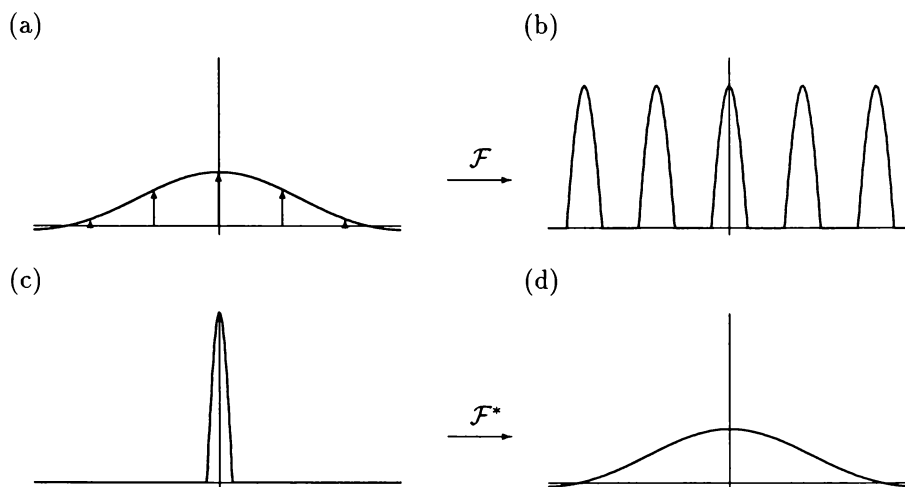


ABBILDUNG 3. Wirkung der Multiplikation der Stichproben-Distribution III mit einer Funktion f (Abbildung 3a); Rekonstruktion von f (Abbildung 3d) aus diesem Produkt. Abbildung 3b zeigt dessen Fourier-Transformation. Durch „Ausschneiden“ mit der charakteristischen Funktion χ (Abbildung 3c) und Anwenden der inversen Fouriertransformation erhält man die ursprüngliche Funktion wieder.

2.2 Holographie

Ein von George W. Stroke (1969) entwickeltes Holographie-Verfahren, welches Abbildungen mit hoher Auflösung erlaubt, steht in engstem Zusammenhang mit der Fourier-Transformation. Da wir hier weniger an der technischen Seite der Holographie interessiert sind, fassen wir die Herstellung eines Hologrammes in einfachen Worten wie folgt zusammen: Durch Bestrahlen mit parallelem, kohärentem Licht, zu dessen Erzeugung in der Praxis ein Laser Verwendung findet, wird in einiger Entfernung auf einer Photoplatte ein Streumuster (also nach obiger Bemerkung die Fourier-Transformation der durch eine Funktion f beschriebenen Objektabstrahlung) erzeugt, welches sich aus der Überlagerung von Kugelwellen ergibt, die durch das Laserlicht in jedem Punkt des Objekts ausgelöst werden (sog. *Huygenssches Prinzip*). Diesem wird eine Referenzkugelwelle mit gleicher Frequenz, die ungehindert auf dieselbe Photoplatte trifft, überlagert. Dadurch entsteht auf der Photoplatte ein Helligkeitsmuster (proportional zum Quadrat des Absolutbetrages der Summe aus beiden Beiträgen), welches in guter Näherung qualitativ von der Form

$$h = 1 - \operatorname{Re}(\mathcal{F}f) \quad (53)$$

ist (alle physikalischen Konstanten sind der Einfachheit halber gleich Eins gesetzt). Hierin ist

$$\operatorname{Re}(\mathcal{F}f) = \frac{1}{2}(\mathcal{F}f + \mathcal{F}^*f^*) \quad (54)$$

der Realteil der (hier eigentlich 3-dimensionalen) Fourier-Transformierten von f .

Aus h kann man nun das Original durch Anwendung der Fourier-Transformation – also etwa, indem man das Überlagerungsmuster von einer Brennebene einer konvexen Linse in die andere abbildet – wiedergewinnen. In der Tat ist

$$\mathcal{F}h(x) = \mathcal{F}(1 - \operatorname{Re}(\mathcal{F}f))(x) = \delta(x) + \frac{1}{2}f(-x) + \frac{1}{2}f(x)^*. \quad (55)$$

Sorgt man dafür, daß das Original f genügend weit vom Zentrum entfernt ist, so erhält man gemäß (55) ein doppeltes (punktsymmetrisches) Abbild des ursprünglichen Objekts (inklusive der für die Raumwahrnehmung entscheidenden Phaseninformation) sowie einen erleuchteten „Punkt“ (in Wirklichkeit ein Fleck) im Nullpunkt. Die durch die Holographie ermöglichte extrem verdichtete (2-dimensionale) Speicherung von (3-dimensionalen) Informationen, die dazu noch durch die Fourier-Transformation so verschlüsselt sind, daß sie sehr fehlerstabil konserviert sind, erinnert in mancher Hinsicht an die Gedächtnisleistung des Gehirns. In der Tat wurde in der Gedächtnisforschung durch Pribram, Nuwer und Baron (1974) eine auf den Prinzipien der Holographie beruhende neurale Kodierung von Gedächtnisinhalten postuliert, die der großen Kapazität, der verteilten, assoziativen Speicherung und der Parallelverarbeitung von Gedächtnisinhalten Rechnung tragen soll.

2.3 Abbildungsverhältnisse im Auge

Optische Abbildungssysteme wie etwa das menschliche Auge liefern aufgrund gegebener Einschränkungen der Linsenoberfläche zusätzliche Einflüsse auf das Netzhautbild, die nicht durch eine elementare Anwendung von geometrischer Strahlenoptik erklärt werden können. Der Abbildung eines Objekts auf der Netzhaut sind solche Einflüsse in einer Weise überlagert, die als eine Filterwirkung beschrieben werden kann. Beschreibe f etwa die Objektstrahlung, so ist durch die charakteristische Funktion ξ der Pupillenöffnung ein Filter $\xi(D)$ gegeben. Als eindimensionale Entsprechung haben wir wie oben die Funktion χ betrachtet, deren Filterwirkung einer Faltung mit der sinc-Funktion entspricht. Mit anderen Worten: Ein Punkt wird nicht in einen Punkt, sondern in eine sinc-Funktion abgebildet. Das zweidimensionale Analogon mit der charakteristischen Funktion einer Kreisscheibe führt dazu, daß in diesem Modell des Auges jeder Punkt des Originals in ein nach außen hin schnell abnehmendes Ringmuster – Extrema werden als hell, die Umgebung der Nullstellen als dunkel wahrgenommen – mit einem zentralen Lichtfleck abgebildet wird (*Airy'sche Scheibe*, vgl. Abbildung 4).

Eine genauere Untersuchung der Impulsreaktion des Auges legt eine hutartige Form nahe (*sombrero function*), die in Abbildung 5 dargestellt ist. Die durch die Impulsreaktionsfunktion gegebene „Verschmierung“ eines Urbildpunktes trägt mit zu einem niedrigeren Auflösungsvermögen des Auges bei der optischen Wahrnehmung bei. Hinzu kommt natürlich auch noch die nichtkontinuierliche Bildverarbeitung auf der Netzhaut, deren Probleme wir im Beispiel 2.1 angesprochen haben.

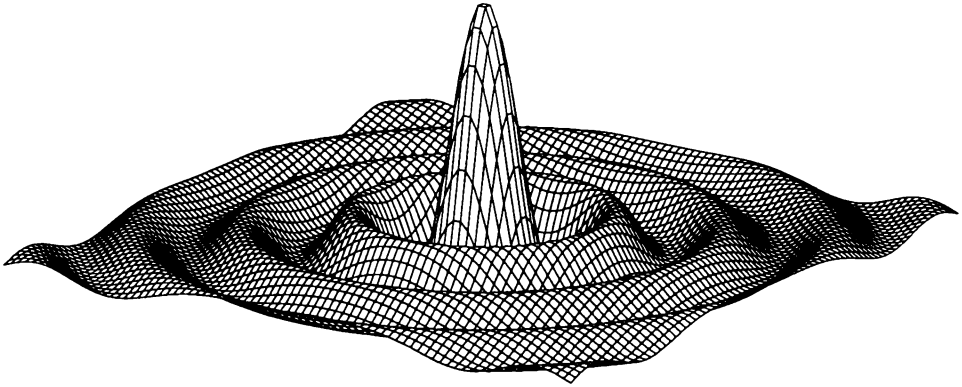


ABBILDUNG 4. Amplitudenspektrum der Blendenfunktion χ . Die Erhebungen werden als helle Ringe im Streumuster wahrgenommen (Airysche Scheibe).

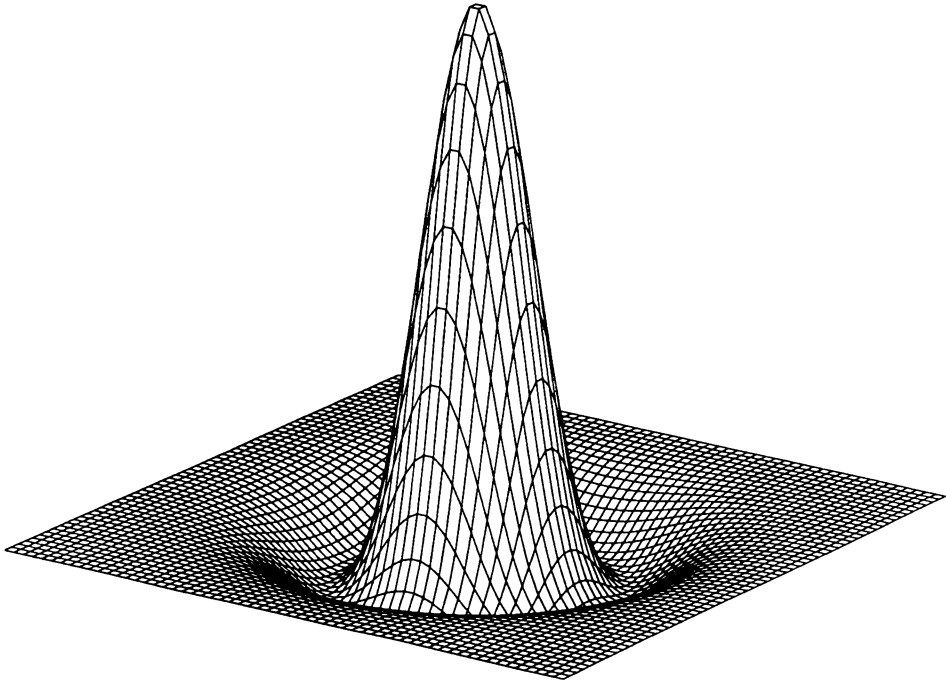


ABBILDUNG 5. Typischer Verlauf der Impulsreaktion des Auges.

2.4 Bildwahrnehmung und Fourier-Transformation

In Beispiel 2.3 haben wir die Eigenschaften des Auges als optisches System betrachtet, welches in der Tat für viele Zwecke als angenähert linear und translationsinvariant angenommen werden kann (vgl. jedoch Cornsweet & Yellott, 1985, Yellott,

1989). Aber auch bei der Untersuchung des gesamten Systems hat die Interpretation optischer Wahrnehmung im Rahmen der Fourier-Analyse zumindest paradigmatische Bedeutung für ihr Verständnis. Experimente mit einfachen periodischen Mustern (Anordnungen mit sinusartig verteilten hell-dunkel Streifenmuster) haben gezeigt, daß die Wahrnehmbarkeit der Überlagerung solcher Muster mit verschiedenen Ortsfrequenzen trotz der dabei auftretenden höheren Amplituden nicht etwa höher, sondern angenähert gleich groß zur Wahrnehmbarkeit der einzelnen Muster ist. Die Wahrnehmungsschwelle entspricht der des am leichtesten zu erkennenden Musters. Dies indiziert, daß das visuelle System genügend verschiedene Ortsfrequenzen separat verarbeitet. Würden alle Ortsfrequenzen getrennt, so könnte man in der Tat sagen, daß das visuelle System eine Fourier-Analyse nach Ortsfrequenz und Amplitude (das ist hier der Kontrast) durchführt. Dies ist jedoch nicht der Fall. Vielmehr verfügt das visuelle System über eine Reihe von Filtern. Die Ortsfrequenzen werden nicht insgesamt (*Einkanal-Modell*) verarbeitet, sondern durch die Filter – analog zu dem, was beim Hörvorgang mit den Zeitfrequenzen der wahrgenommenen akustischen Schwingungen geschieht – in Teilbereiche (*Kanäle*) aufgespalten (siehe Graham, 1980; Julesz, 1980; Graham, 1981, *Mehrkanal-Modell*). Eine genauere Untersuchung zeigt, daß dies nur eine erste Näherung ist. Zusätzlich treten nicht-lineare Effekte (*probability summation*) auf. Nichtsdestoweniger kann durch dieses einfache Modell etwa die Wahrnehmung von Kanten dadurch erklärt werden, daß die höheren Ortsfrequenzen in der Fourier-Transformierten bei einer Kante höhere Amplituden haben als bei einem sanften Übergang. Als Beispiel betrachte man den durch $f(x, y) = \chi(x)$ beschriebenen hellen Streifen auf dunklem Grund sowie den Streifen $g(x, y) = \gamma(x)$ mit glattem Kontrastübergang (die „Gesamthelligkeit“ beider Konfigurationen ist gleich, nämlich 1; vgl. (30)). Ein Vergleich von Abbildung 1 mit dem Verlauf der Gauß-Funktion (Abbildung 2) zeigt, daß die Fourier-Transformierte von χ wesentlich höhere Amplituden in hohen Frequenzbereichen aufweist als die Gauß-Funktion. Im Rahmen des Mehrkanal-Modells bedeutet dies, daß die höheren Frequenzkanäle bei der charakteristischen Funktion χ – also bei der Kante – stärkere Reize registrieren (vgl. Graham, 1980).

3 Weiterführende Literatur

Die Lehrbuchliteratur zur Fourier-Analyse ist ausgesprochen weitläufig und vielfältig. Als vergleichsweise zugängliche Darstellungen sollen hier vier ältere Texte erwähnt werden: Lighthill (1966), Bracewell (1965), Goodman (1968) und Gas-kill (1978). Um ein Gefühl für die oft komplex anmutende Wirkung der Fourier-Transformation zu bekommen, empfiehlt sich das Buch von Harburn et al. (1975). Den für die Anwendungen wichtigen systemtheoretischen Aspekt der Fourier-Analyse stellt der Übersichtsartikel von Norman (1981) heraus. Schöne Übersichtsartikel, die auch den weniger mathematisch geneigten Leser ansprechen können, sind die Beiträge von Georgeson (1979) und Weisstein (1980). Die Bedeutung der Fourier-Analyse für die visuelle Wahrnehmung wird herausgestellt bei Graham (1981) und Cornsweet, Wandell und Yellott (1984). Eine Übersicht entsprechender empirischer Befunde und eine Kritik des Ortsfrequenzfilter-Ansatzes findet sich bei Uttal (1981, S. 693ff).

Literaturverzeichnis

- Bracewell, R. N. (1965). *The Fourier transform and its application*. New York: McGraw-Hill.
- Brigham, E. O. (1974). *The fast Fourier transform*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- Cornsweet, T. N., Wandell, B., Yellott, J. I. (1984). The beginnings of visual perception: The retinal image and its initial encoding. In I. Darian-Smith (Ed.), *Handbook of physiology, Sec. 1. The nervous system. Vol. 3: Sensory processes* (pp. 257–316). Bethesda: American Physiological Society.
- Cornsweet, T. N. & Yellott, J. I. (1985). Intensity-dependent spatial summation. *Journal of the Optical Society, A2*, 1769–1786.
- Gaskill, J. D. (1978). *Linear systems, Fourier transforms and optics*. New York: Wiley.
- Georgeson, M. (1979). Spatial Fourier analysis and human vision. In N.S. Sutherland (Ed.), *Tutorial essays in psychology. Vol. 2* (pp. 39–88). Hillsdale: Erlbaum.
- Goodman, J. W. (1968). *Introduction to Fourier optics*. New York: McGraw-Hill.
- Graham, N. (1980). Spatial-frequency channels in human visions: Detecting edges without edge detectors. In C. S. Harris (Ed.), *Visual coding and adaptability* (pp. 215–262). Hillsdale: Erlbaum.
- Graham, N. (1981). The visual system does a crude Fourier analysis of patterns. *SIAM-AMS Proceedings, 13*, 1–16.
- Harburn, G., Taylor, C. A. & Welberry, T. R. (1975). *Atlas of optical transforms*. London: Bell & Sons.
- Julesz, B. (1980). Spatial-frequency channels in one-, two-, and three-dimensional visions: Variations on an auditory theme by Bekesy. In C. S. Harris (Ed.), *Visual coding and adaptability* (pp. 263–316). Hillsdale: Erlbaum.
- Lighthill, M. J. (1966). *Einführung in die Theorie der Fourier-Analyse und der verallgemeinerten Funktionen*. Mannheim: Bibliographisches Institut.
- Norman, F. M. (1981). Lectures on linear systems theory. *Journal of Mathematical Psychology, 23*, 1–89.
- Pribram, K., Nuwer, M. & Baron, R. (1974). The holographic hypothesis of memory structure in brain function and perception. In D. H. Krantz, R. C. Atkinson, R. D. Luce & P. Suppes (Eds.), *Contemporary developments in mathematical psychology, Vol. II* (pp. 416–457). San Francisco: Freeman.
- Stroke, G. W. (1969). *An introduction to coherent optics and holography*. New York: Academic Press.
- Uttal, W. R. (1981). *A taxonomy of visual processes*. Hillsdale: Erlbaum.
- Weisstein, N. (1980). The joy of Fourier analysis. In C. S. Harris (Ed.), *Visual coding and adaptability* (pp. 365–380). Hillsdale: Erlbaum.
- Yellott, J. I. (1982). Spectral analysis of spatial sampling by photoreceptors: Topological disorder prevents aliasing. *Vision Research, 22*, 1205–1210.
- Yellott, J. I. (1989). Constant volume operators and lateral inhibition. *Journal of Mathematical Psychology, 33*, 1–35.
- Yellott, J. I. (1990). The photoreceptor mosaic as an image sampling device. In National Research Council (Ed.), *Advances in perception. Proceedings of a symposium on frontiers of visual science. National Research Council* (pp. 117–134). Washington: National Academy Press.