Über Twists in Siegelschen Modulformen zweiten Grades und ihre Spinorzetafunktion

Inauguraldissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaft
der Universität Mannheim

vorgelegt von

Alexander Rombach
aus Waldkirch

Mannheim, 2004

Dekan:	**Professor Dr. Jürgen Potthoff, Universität Mannheim**
Referent:	**Professor Dr. Siegfried Böcherer, Universität Mannheim**
Korreferent:	**Professor Dr. Rainer Schulze-Pillot, Universität des Saarlandes**

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Januar 2005

Einleitung

Bereits im 19. Jahrhundert erkannte man die arithmetische Bedeutung von Modulformen: die Fourierkoeffizienten zahlreicher elliptischer Modulformen sind zahlentheoretische Funktionen oder Linearkombinationen solcher Funktionen. So tritt zum Beispiel $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$ in der Fourierentwicklung der Eisensteinreihe $E_k(z) = \sum_{\substack{(c,d)\in\mathbb{Z}^2 \\ (c,d)\neq(0,0)}} (cz+d)^{-k}$, k gerade, $k > 2$, auf:

$$E_k(z) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n z} .$$

Nachdem B. RIEMANN Fortsetzbarkeit und Funktionalgleichung der Funktion $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$ mit Hilfe des klassischen Thetareihe $\vartheta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z}$ zeigen konnte, gelang es E. HECKE, indem er RIEMANNs Ideen verallgemeinerte, einen Zusammenhang zwischen Dirichletreihen mit Funktionalgleichung und Modulformen herzustellen.

Wächst die Folge komlexer Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ höchstens polynomial, so betrachtet man mit Konstanten $h > 0$, $k > 0$ und $C = \pm 1$ einerseits die Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n z}{h}}$, $z \in \mathbb{H}_1$, andererseits die Dirichletreihe $R(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ und $\Psi(s) = \left(\frac{2\pi}{h}\right)^{-s} \Gamma(s)\, R(s)$. Dann besteht zwischen $f(z)$ und $R(s)$ folgende Beziehung:

Theorem (E. HECKE, 1936)
Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(1) $\Psi(s) + \frac{a_0}{s} + \frac{C}{k-s}$ *ist ganz und begrenzt in jedem Vertikalsteifen.*
$\Psi(s)$ *genügt der Funktionalgleichung* $\Psi(k-s) = C\,\Psi(s)$.

(2) $f(-\frac{1}{z}) = C\left(\frac{z}{i}\right)^k f(z)$.

Demnach kann man eine Modulform $f \in [\, Sp_1(\mathbb{Z}), k]$ vollständig durch eine Dirichletreihe $R_f(s)$ charakterisieren. Wegen

$$\frac{1}{(2\pi)^s}\Gamma(s) R_f(s) = \int_0^{\infty} (f(it) - a_0)\, t^{s-1} dt \qquad \text{(E.1)}$$

erweist sich $R_f(s)$ als Mellintransformierte von $f(it)$.
Doch im allgemeinen hat $R_f(s)$ keine Produktentwicklung wie die Riemannsche Zetafunktion. Sind die Fourierkoeffizienten jedoch multiplikativ, d.h. $a_{mn} = a_m a_n$, m, n teilerfremd, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \prod_p \sum_{\delta=0}^{\infty} \frac{a(p^\delta)}{p^{\delta s}} ,$$

wobei p alle Primzahlen durchläuft.
Um Aussagen über die Multiplikativität der Koeffizienten zu erhalten, führte E. HECKE sogenannte Heckeoperatoren $T_k(m)$ ein. Er zeigte:

Ist $f \in [\ Sp_1(\mathbb{Z}), k\ ]$ *Eigenform aller Heckeoperatoren* $T_k(m)$*,*

$$f \mid T_k(m) = \lambda_f(m) f\ ,\ m = 1, 2, \ldots,$$

so genügen die Eigenwerte dem Multiplikativitätsgesetz

$$\lambda_f(m)\ \lambda_f(n) = \sum_{\substack{d \\ d \mid m,n}} \lambda_f \left(\frac{mn}{d^2} \right) d^{k-1}$$

und die Dirichletreihe der Eigenwerte $D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n)}{n^s}$ *hat ein Eulerprodukt der Form*

$$D_f(s) = \prod_p \left(1 - \frac{\lambda_f(p)}{p^s} + \frac{p^{k-1}}{p^{2s}} \right)^{-1} .$$

Ferner gilt

$$R_f(s) = a(1)\ D_f(s) \qquad \textit{beziehungsweise} \qquad a(n) = a(1)\ \lambda_f(n)\ , \tag{E.2}$$

d.h. die Fourierkoeffizienten einer Eigenform sind Vielfaches der multiplikativen Funktion $\lambda_f(n)$ *.*

Wenden wir HECKEs Theorem auf die Eigenform $f \in [\ Sp_1(\mathbb{Z}), k\ ]$ an, so ist f bereits vollständig bestimmt durch das Eulerprodukt. Aufgrund dieser Zusammenhänge nennt man

$$Z_f(s) = \prod_p \left(1 - \frac{\lambda_f(p)}{p^s} + \frac{p^{k-1}}{p^{2s}} \right)^{-1}$$

(Heckesche) Zetafunktion von f.

Erste Versuche, HECKEs Theorie auf Siegelsche Modulformen zu übertragen, blieben unbefriedigend: es war lange unklar, wie eine geeignete Verallgemeinerung der Dirichletreihe $R_f(s)$ aussehen sollte. Die naheliegende Definition über eine Mellintransformierte führt zu einer Dirichletreihe mit analytischer Fortsetzung, aber es besteht kein Zusammenhang mit Heckeoperatoren und Eulerprodukten.

Erst A. ANDRIANOV gelang es in zwei vielbeachteten Arbeiten, die Hecketheorie auf Siegelsche Modulformen vom Grad 2 bezüglich der vollen Modulgruppe zu übertragen, zunächst 1971 unter gewissen Annahmen [An1], später in allgemeingültiger Form [An2]. Er zeigte die meromorphe Fortsetzbarkeit der einer Modulform F zugeordneten Spinorzetafunktion $Z_F(s)$ und begründete deren Funktionalgleichung unter $s \to 2k - s - 2$.
Im Jahr 2001 erweiterte er seine Ergebnisse für Spitzenformen zu einer Kongruenzuntergruppe mit Dirichletcharakter, wiederum unter bestimmten Voraussetzungen [An4].

Da die vorliegende Arbeit sich stark an [An1] orientiert, seien zwei wesentliche Schritte dieses Artikels kurz skizziert.
Zum einen wurde das Analogon zu (E.2) entdeckt, nämlich der Zusammenhang zwischen einer durch Fourierkoeffizienten $a(mE_2)$, $m \in \mathbb{N}$, einer Heckeeigenform F erklärten Dirichletreihe $R(s, F)$ und der Dirichletreihe der Eigenwerte $D(s, F)$ ([An1], Theorem 2). Im Fall der Klassenzahl $h = 1$ besagt er:

$$a(E_2)\ \underbrace{\zeta(2s - 2k + 4)\ D(s, F)}_{Z_F(s)} = \zeta_{\mathcal{K}}(s - k + 2)\ R(s, F)\,. \tag{E.3}$$

Zum anderen wurde im bisher nicht zugänglichen Fall der Spitzenformen das Analogon für (E.1) begründet. Dies gelang durch einen Integrationsprozeß, bei dem F auf einen dreidimensionalen Teilraum $\mathcal{H}$ von $\mathbb{H}_2$ beschränkt wird, der sich als isomorph zum dreidimensionalen hyperbolischen Raum $\widetilde{\mathcal{H}}$ erweist. Durch Auswertung des Integrals

$$\frac{1}{(4\pi)^s}\,\Gamma(s)R(s, F) = \int_S \widetilde{F}(u)\ v^{s-1} du\ ,\ u \in \widetilde{\mathcal{H}}, \tag{E.4}$$

wird mit (E.3) sowohl die Fortsetzbarkeit als auch die Funktionalgleichung von $Z_F(s)$ gefolgert.

Im Fall elliptischer Modulformen gelang es A. WEIL [We], den Heckeschen Umkehrsatz auf Modulformen zur Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(N)$ zu erweitern, indem er neben der Dirichletreihe $R(s)$ für einen beliebigen Dirichletcharakter $\chi \; mod \; r$ auch ihre Twists $R(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) a_n}{n^s}$ betrachtete. Eine wichtige Rolle spielte dabei die Beobachtung, daß mit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ auch $f_\chi(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \chi(n) \; a_n e^{2\pi i n z}$ eine Modulform ist.

Überträgt man die WEILsche Vorgehensweise auf Siegelsche Modulformen vom Grad 2, so ist zunächst offen, wie die Twistung auszusehen hat. Eine Möglichkeit wäre, sie mit $\chi(\det T)$ vorzunehmen, wie es von I. MATSUDA [Ma1] ausgeführt wurde.

In der vorliegenden Arbeit wird ein anderer Ansatz verfolgt. Aufgabe war, eine Siegelsche Spitzenform F zu einer Kongruenzuntergruppe mit Dirichletcharakter mit $\chi(Spur\; T)$ zu twisten, herauszufinden, zu welcher Untergruppe von $Sp_2(\mathbb{Z})$ sich die getwistete Funktion F_χ transformiert, sowie die Fortsetzbarkeit der Spinorzetafunktion $Z_F(s,\chi)$ zu untersuchen und deren Funktionalgleichung herzuleiten.

Um dem Leser den Zugang zu erleichtern, sei der Aufbau der Arbeit kurz skizziert.
Nach einer Zusammenstellung grundlegender Dinge (Bezeichnungen, Sachverhalte aus der Theorie der Siegelschen Modulformen etc.) im ersten Kapitel wird im zweiten der Twist F_χ einer Modulform F definiert und das Haupttheorem vorgestellt. In Kapitel 3 sind Eigenschaften Gaußscher Summen verschiedenen Typs zusammengefaßt, auf die nachfolgend immer wieder Bezug genommen wird. Kapitel 4 enthält u.a. den Nachweis, daß mit F auch die verwandten Funktionen F_χ und F^* Modulformen mit Charakter sind. Insbesondere wird die Transformationsgruppe von F_χ bestimmt. Das Kernstück ist Kapitel 5. Darin geht es um die holomorphe Fortsetzbarkeit der F_χ zugeordneten Dirichletreihe $R(s, F_\chi)$ und deren Funktionalgleichung. Im folgenden Kapitel wird der Zusammenhang zwischen $R(s, F_\chi)$ und der Spinorzetafunktion $Z_F(s,\chi)$ aufgezeigt und aus dem Theorem von Kapitel 5 das Hauptresultat hergeleitet.
Verweise sind wie folgt zu interpretieren:
„5. Lemma 1.1“ bedeutet: Lemma 1.1 in Kapitel 5; „1.(3.1)“ hingegen: Verweis (3.1) in Kapitel 1.

Zu erwähnen sind noch Arbeiten, bei denen Twistungen auch in anderen Zusammenhängen vorgenommen wurden. So untersuchen B. HEIM [He] und S. BÖCHERER - B. HEIM [B-H] Twists der Spinorzetafunktion $Z_F(s)$ mit elliptischen Modulformen. W. KOHNEN [Ko] zeigt, daß man auch die Integraldarstellung von KOHNEN-SKORUPPA benutzen kann, um unter bestimmten Annahmen die getwistete Spinorzetafunktion zu untersuchen.

Zum Schluß ist hier der Ort, um auf die Entstehungsgeschichte dieser Seiten zurückzublicken. Sie entstand neben meiner beruflichen Tätigkeit als Studienrat an verschiedenen Gymnasien.
Besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr. Siegfried Böcherer. Zum einen für das, was ich von ihm lernen durfte, zum anderen hat er mir durch diese Arbeit ermöglicht, meine mathematischen Fähigkeiten weiterzuentwickeln und meine geistigen Kräfte an einem großen Gegenstand entfalten zu lassen. Die wohlwollende Begleitung und die unkonventionelle Art der Betreuung trugen sehr zum Gelingen bei.
Dank gilt auch meinen Eltern Hubert und Agnes Rombach. In vielen Ferienzeiten entstanden Teile der Arbeit bei ihnen, wo ich frei von Alltagsverpflichtungen mich auf Wesentliches konzentrieren konnte.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Nach einem Überblick über allgemeine Bezeichnungen erinnern wir an einige grundlegende Sachverhalte aus der Theorie der Siegelschen Modulformen, definieren den hyperbolischen Raum und stellen dessen im folgenden benötigten Eigenschaften zusammen. Anschließend geben wir eine Übersicht über Heckeoperatoren und die Spinorzetafunktion, soweit sie für diese Arbeit von Bedeutung sind. Um hier die Darstellung möglichst kurz zu halten, verzichten wir auf Beweise und verweisen auf das Lehrbuch von E. FREITAG [Fr] sowie auf die Artikel von A. ANDRIANOV [An1],[An2],[An4].

§1 Bezeichnungen

a.) Wie üblich stehe $\mathbb{N}$ für die natürlichen Zahlen, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ bezeichne den Ring der ganzen Zahlen, den Körper der rationalen, reellen oder komplexen Zahlen.
Für eine positive ganze Zahl r sei $\mathbb{Z}_r = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ der Restklassenring $mod\ r$.
Bis auf den Buchstaben s stehen kleine lateinische Schriftzeichen für ganzrationale Zahlen, kleine griechische in der Regel für komplexe. Das zu $\alpha \in \mathbb{C}$ komplex konjugierte Element bezeichnen wir mit $\overline{\alpha}$. Das zu $c \in \mathbb{Z}_r$ inverse Element wird, sofern es existiert, gelegentlich auch mit $\bar{c}$ bezeichnet.

b.) Abweichend von der Literatur schreiben wir für die komplexe Variable $s \in \mathbb{C}$, $s = \tau + i\lambda$, $\tau, \lambda \in \mathbb{R}$.

c.) Den ggT zweier ganzrationaler Zahlen a, b kürzen wir mit (a, b) ab.

d.) Steht R entweder für $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{Z}_r$, so wird mit $M_n(R)$ der Ring aller $n \times n$ - Matrizen mit Einträgen aus R bezeichnet.
Sind $A, B \in M_n(R)$, so bezeichne A^t die zu A transponierte Matrix,

$\sigma(A)$ die Spur von A und B^tAB stehe für $A[B]$. Für eine symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ schreiben wir $A \geq 0$ oder $A > 0$, falls A positiv-semidefinit oder positiv definit ist.
Mit $Gl_n(R)$ bezeichnen wir die allgemeine lineare Gruppe vom Grad n über R, $Gl_n^+(R)$ ist die Untergruppe von $Gl_n(R)$, deren Elemente positive Determinante haben, $Sl_n(R)$ ist die spezielle lineare Gruppe.
$Sym_n(R)$ stehe für die Menge der symmetrischen Matrizen über R.
Große lateinische Buchstaben stehen in der Regel für Matrizen aus $M_n(R)$, $R \neq \mathbb{C}$, der Buchstabe σ bezeichnet neben der Spur der Matrix A auch Matrizen aus $Gl_2(\mathbb{C})$.

e.) Ist E_n die n–reihige Einheitsmatrix, 0 die entsprechende Nullmatrix,

$$I = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix},$$

so heißt

$$Sp_n(R) = \{M \in Gl_{2n}(R) \ ; \ I[M] = I\}$$

symplektische Gruppe vom Grad n über R. Spaltet man M in die n–reihigen Teilmatrizen A_M, B_M, C_M, D_M auf,

$$M = \begin{pmatrix} A_M & B_M \\ C_M & D_M \end{pmatrix},$$

so ist die Gleichung $I[M] = I$ äquivalent zu den Bedingungen

$$A_M^t D_M - C_M^t D_M = E_n, \qquad A_M^t C_M = C_M^t A_M \quad \text{und} \quad B_M^t D_M = D_M^t B_M.$$

Sind keine Verwechslungen zu befürchten, so lassen wir den Index weg. Mit M ist natürlich auch M^t symplektisch, d.h.

$$AD^t - BC^t = E_n \ , \qquad AB^t = BA^t \quad \text{und} \quad CD^t = DC^t.$$

Die Inverse der symplektischen Matrix M ist

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{pmatrix}.$$

Für $q \in \mathbb{N}$ bezeichne $\Gamma^n(q)$ die Hauptkongruenzgruppe der Stufe q, das ist die Untergruppe

$$\Gamma^n(q) = \{M \in Sp_n(\mathbb{Z}) \ ; \ M \equiv E_{2n} \ mod \ q \ \}$$

von $Sp_n(\mathbb{Z})$. $\Gamma^n(q)$ ist Normalteiler mit endlichem Index in $Sp_n(\mathbb{Z})$. Untergruppen von $Sp_n(\mathbb{Z})$, die eine Hauptkongruenzgruppe der Stufe q umfassen, heißen Kongruenzgruppen. Für uns ist die Kongruenzgruppe

$$\Gamma_0^n(q) = \{M \in Sp_n(\mathbb{Z})\ ;\ C_M \equiv\ 0\ mod\ q\ \}$$

von Bedeutung. Auch hier gilt: $[Sp_n(\mathbb{Z})\ :\ \Gamma_0^n(q)\ ] < \infty$.

f.) Unter

$$\mathbb{H}_n = \{Z = X + iY \in M_n(\mathbb{C})\ ;\ Z = Z^t,\ Y > 0\}$$

verstehen wir die verallgemeinerte obere Halbebene.

g.) Schließlich versteht man für eine positive ganze Zahl r unter einem Dirichletcharakter $\chi\ mod\ r$ einen Homomorphismus

$$\chi : (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^* \longrightarrow \mathbb{C}^* ,$$

der sich wie aus der Zahlentheorie bekannt, zu einem Homomorphismus

$$\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

erweitern läßt. $\chi\ mod\ r$ heißt primitiv, falls es keinen Charakter $\chi_1\ mod\ r_1$ gibt, wobei r_1 Teiler von r ist, mit $\chi_1(c) = \chi(c)$ für $(c, r) = 1$.

§2 Siegelsche Modulformen mit Charakter

Bekanntlich operiert die symplektische Gruppe $Sp_n(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}_n$ vermöge

$$\begin{aligned} Sp_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{H}_n &\longrightarrow \mathbb{H}_n \\ (M, Z) &\longrightarrow M\langle Z\rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} . \end{aligned}$$

Für $M \in Sp_n(\mathbb{R})$, $Z \in \mathbb{H}_n$ bezeichne

$$j(M, Z) = \det(CZ + D)$$

den Automorphiefaktor von $Sp_n(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}_n$; für eine komplexwertige Funktion F auf $\mathbb{H}_n$, $M \in Sp_n(\mathbb{R})$ und $k \in \mathbb{Z}$ sei $F \underset{k}{|} M$ die durch

$$F \underset{k}{|} M(Z) = \det(CZ + D)^{-k} F(M\langle Z\rangle)$$

definierte Funktion.

Für $q \in \mathbb{N}$ heißt eine holomorphe Funktion

$$F : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$$

Siegelsche Modulform n-ten Grades vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ und Charakter ψ zur Gruppe $\Gamma_0^n(q)$, falls

(1) $F \underset{k}{|} M = \psi(\det D)\ F \quad$ für alle $M \in \Gamma_0^n(q)$,

(2) $F \underset{k}{|} N$ beschränkt ist für alle Matrizen $N \in Sp_n(\mathbb{Q})$ in Bereichen der Art $Y \geq Y_0 > 0$.

Im Falle $n > 1$ ergibt sich (2) schon aus der Holomorphie und aus (1). Den Vektorraum all dieser Modulformen bezeichnen wir mit $[\Gamma_0^n(q), k, \psi]$. Jede Modulform läßt sich in eine Fourierreihe

$$F(Z) = \sum_{T \in \mathfrak{N}_n} a(T) e^{2\pi i \sigma(TZ)}$$

entwickeln, wobei

$$\mathfrak{N}_n = \{T = (t_{ij}) \in M_n(\mathbb{Q})\ ;\ T^t = T \geq 0, t_{ii}, 2t_{ij} \in \mathbb{Z}\}$$

die Menge der symmetrischen halbganzen positiv-semidefiniten $n \times n$ - Matrizen ist. Sie konvergiert absolut in der oberen Halbebene und gleichmäßig für $Y \geq \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $\varepsilon > 0$.

Die Fourierkoeffizienten besitzen das Transformationsverhalten

$$a(U^t T U) = \psi(\det U)\ (\det U)^k\ a(T)\ , \quad U \in Gl_n(\mathbb{Z}).$$

Der Siegelsche Φ-Operator

$$\Phi : [\Gamma_0^n(q), k, \psi] \longrightarrow [\Gamma_0^{n-1}(q), k, \psi]$$

$$F \mid \Phi(Z_1) = \lim_{\lambda \to \infty} F \begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & i\lambda \end{pmatrix}\ , \quad Z_1 \in \mathbb{H}_{n-1}\ ,\ \lambda > 0,$$

ist ein Vektorraumhomomorphismus. Eine Modulform $F \in [\Gamma_0^n(q), k, \psi]$ heißt Spitzenform, wenn

$$(F \underset{k}{|} N) \mid \Phi = 0$$

für alle Matrizen $N \in Sp_n(\mathbb{Q})$ ist. Der Unterraum der Spitzenformen sei $[\Gamma_0^n(q), k, \psi]_0$. Die Fourierentwicklung dieser Spitzenformen vereinfacht sich zu

$$F(Z) = \sum_{T \in \mathfrak{N}_n^+} a(T) e^{2\pi i \sigma(TZ)} ,$$

wobei $\mathfrak{N}_n^+ = \{T \in \mathfrak{N}_n \ ; \ T > 0\}$ ist. Für jede dieser Spitzenformen existiert eine Konstante $C = C_F$ mit

$$|F(Z)| \leq C \ (\det \ Y)^{-k/2} \ , \quad |a(T)| \leq C \ (\det \ T)^{k/2} \ , \tag{2.1}$$

für alle $Z = X + iY \in \mathbb{H}_n$, $T \in \mathfrak{N}_n^+$.

Bemerkung
Verstehen wir unter den positiven symplektischen Ähnlichkeitsmatrizen die Gruppe

$$G^+Sp_n(\mathbb{R}) = \{M \in Gl_{2n}(\mathbb{R}) \ ; \ I[M] = \mu(M)I, \ \mu(M) > 0\},$$

so operiert auch diese Gruppe auf der oberen Halbebene durch

$$M\langle Z\rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \quad , \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G^+Sp_n(\mathbb{R}).$$

Die Peterssonsche Schreibweise $F \underset{k}{|} M$ verallgemeinert sich zu

$$F \underset{k}{|} M(Z) = (\det \ M)^{k/2} j(M, Z)^{-k} F(M\langle Z\rangle), \quad M \in G^+Sp_n(\mathbb{R}), \tag{2.2}$$

$$j(M, Z) = \det(CZ + D).$$

§3 Der hyperbolische Raum

Unter dem dreidimensionalen hyperbolischen Raum versteht man die Menge

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \{u = (z, v)\ ;\ z \in \mathbb{C},\ v > 0,\ z = x + iy\}. \tag{3.1}$$

Die Gruppe $Sl_2(\mathbb{C})$ operiert transitiv auf $\widetilde{\mathcal{H}}$ vermöge $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$:

$$(\sigma, u) \to \sigma(u) = \left(\frac{(\alpha z + \beta)(\bar{\gamma}\bar{z} + \bar{\delta}) + \alpha\bar{\gamma}v^2}{\Delta_\sigma(u)}, \frac{v}{\Delta_\sigma(u)} \right) \tag{3.2}$$

mit dem Automorphiefaktor $\Delta_\sigma(u) = |\gamma z + \delta|^2 + |\gamma|^2 v^2$.
Auch die Gruppe $Gl_2^+(\mathbb{C}) = \{\sigma \in Gl_2(\mathbb{C})\ ;\ \det \sigma > 0\}$ operiert auf $\widetilde{\mathcal{H}}$, sofern man die Operation wie folgt erweitert:

$$\sigma(u) = \left(\frac{(\alpha z + \beta)(\bar{\gamma}\bar{z} + \bar{\delta}) + \alpha\bar{\gamma}v^2}{\Delta_\sigma(u)}, \frac{v\ \det \sigma}{\Delta_\sigma(u)} \right). \tag{3.3}$$

Nach KUBOTA [Ku] ist für $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[i]$

$$D = \left\{ u \in \widetilde{\mathcal{H}}\ ;\ 0 \le x + y,\ x \le \frac{1}{2},\ y \le \frac{1}{2},\ 1 \le x^2 + y^2 + v^2 \right\} \tag{3.4}$$

ein Fundamentalbereich von $Sl_2(\mathcal{O})$ auf $\widetilde{\mathcal{H}}$ und

$$\frac{du}{v^3} = \frac{dx\,dy\,dv}{v^3}$$

invariantes Volumenelement von $Sl_2(\mathbb{C})$.

Ist

$$\mathcal{H} = \left\{ Z \in \mathbb{H}_2\ ;\ Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{pmatrix} + ivE_2 \right\} \subseteq \mathbb{H}_2 \tag{3.5}$$

und besteht die Untergruppe $\mathcal{G}$ von $Sp_2(\mathbb{R})$ aus allen Matrizen der Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & -b_2 \\ -a_2 & a_1 & -b_2 & -b_1 \\ c_1 & c_2 & d_1 & -d_2 \\ c_2 & -c_1 & d_2 & d_1 \end{pmatrix} \in Sp_2(\mathbb{R}),$$

so operiert $\mathcal{G}$ auf $\mathcal{H}$ transitiv durch

$$M\langle Z\rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}.$$

Von Bedeutung ist nun folgendes:

a) Die Gruppen $\mathcal{G}$ und $Sl_2(\mathbb{C})$ sind isomorph vermöge

$$\varphi(M) = \begin{pmatrix} a_1+ia_2 & b_1+ib_2 \\ c_1+ic_2 & d_1+id_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \sigma\,, \tag{3.6}$$

b) Die Abbildung

$$\begin{aligned} h : \mathcal{H} &\longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}} \\ Z &\longrightarrow u \end{aligned} \tag{3.7}$$

ist ein analytischer Isomorphismus,

c) die Abbildung h ist verträglich mit den Operationen von $\mathcal{G}$ auf $\mathcal{H}$ und $Sl_2(\mathbb{C})$ auf $\widetilde{\mathcal{H}}$, das bedeutet:

$$h(M\langle Z\rangle) = \varphi(M)(h(Z)).$$

Natürlich geht der Automorphiefaktor von $(\mathcal{G},\mathcal{H})$ in den des Paares $(Sl_2(\mathbb{C}),\widetilde{\mathcal{H}})$ über, d.h.

$$j(M,Z) = \Delta_{\varphi(M)}(h(Z)) = \Delta_\sigma(u).$$

Ist $F \in [Sp_2(\mathbb{Z}),k]$ eine Modulform, so verstehen wir unter $\widetilde{F}$ folgende Funktion auf dem hyperbolischen Raum $\widetilde{\mathcal{H}}$:

$$\widetilde{F}(u) = F(h^{-1}(u)) = F\left(\begin{pmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{pmatrix} + ivE_2\right). \tag{3.8}$$

Aufgrund der Isomorphie von $\mathcal{G}$ und $Sl_2(\mathbb{C})$ ist die Gruppe $\mathcal{G}\cap Sp_2(\mathbb{Z})$ isomorph zu $\Gamma = Sl_2(\mathcal{O})$. Daraus resultiert das Transformationsverhalten von $\widetilde{F}$, nämlich

$$\widetilde{F}(\sigma(u)) = \Delta_\sigma(u)^k \widetilde{F}(u)\,, \quad \sigma\in\Gamma.$$

Ist F Spitzenform, so erhält man aus $F(Z) = O(det\, Y^{-k/2})$:

$$\widetilde{F}(u) = O(v^{-k}), \quad u = (z, v) \in \widetilde{\mathcal{H}}\,.$$

Bemerkung
Verstehen wir unter der Untergruppe $\mathcal{G}_1$ von $G^+Sp_2(\mathbb{R})$ Matrizen der Form

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & -b_2 \\ -a_2 & a_1 & -b_2 & -b_1 \\ c_1 & c_2 & d_1 & -d_2 \\ c_2 & -c_1 & d_2 & d_1 \end{pmatrix} , \quad I[M] = \mu(M) I \ , \quad \mu(M) > 0,$$

so läßt sich der Isomorphismus $\varphi : \mathcal{G} \longrightarrow Sl_2(\mathbb{C})$ fortsetzen zu einem Isomorphismus der Gruppen $\mathcal{G}_1$ und $Gl_2^+(\mathbb{C})$, den wir ebenfalls mit φ bezeichnen. Wiederum gilt

$$h(M\langle Z\rangle) = \varphi(M)(h(Z)) \ , \quad M \in \mathcal{G}_1,\, Z \in \mathcal{H},$$

$$j(M, Z) = \Delta_{\varphi(M)}(h(Z)) = \Delta_\sigma(u)\,.$$

Ist $M \in \mathcal{G}_1$, so überträgt sich der Peterssonsche Strichoperator für Funktionen F auf $\mathbb{H}_2$ auf den hyperbolischen Raum $\widetilde{\mathcal{H}}$. Genauer: Für $\varphi(M) = \sigma$ gilt:

$$\widetilde{F \underset{k}{|} M}(u) = (\det\, \sigma)^k\ \Delta_\sigma(u)^{-k} \widetilde{F}(\sigma(u)). \tag{3.9}$$

§4 Heckeoperatoren und Spinorzetafunktion

Ist $K^n = \Gamma_0^n(q)$ und Σ^n die Halbgruppe $GSp_n^+(\mathbb{R}) \cap M_{2n}(\mathbb{Z})$, so sei $\mathfrak{H}^n = \mathfrak{H}(K^n, \Sigma^n)$ die dem Paar (K^n, Σ^n) zugeordnete Heckealgebra über $\mathbb{C}$. Sie besteht bekanntlich aus allen endlichen $\mathbb{C}$-Linearkombinationen von Doppelnebenklassen $K^n M K^n$, $M \in \Sigma^n$, deren jede sich als endliche Vereinigung disjunkter Linksnebenklassen Σ^n *mod* K^n schreiben läßt. Die Eigenschaften dieser

Links- und Doppelnebenklassen hängen wesentlich von den gemeinsamen Teilern des Ähnlichkeitsfaktors $\mu(M)$ und der Stufe q ab. Wir können uns aber auf zwei Sonderfälle beschränken und zwar auf Doppelnebenklassen $K^n M K^n$, deren Repräsentant M

a.) regulär ist, d.h. $M \in \Sigma^n,\ C_M \equiv 0\ mod\ q,$ mit $(\mu(M), q) = 1$,

b.) singulär ist, d.h. $M \in \Sigma^n,\ C_M \equiv 0\ mod\ q,$ mit $\mu(M) \mid q^\infty$.

Lassen wir im Fall $n = 2$ den Index weg, so entsprechen die regulären Heckeoperatoren $T_k(M)$ auf $F \in [\,\Gamma_0^2(q), k, \psi\,]$ den regulären Doppelnebenklassen KMK. Diese regulären Operatoren sind definiert durch

$$F \mid T_k(M) = \mu(M)^{k-3} \sum_{M_j \in K \backslash KMK} F \mid_{k,\psi} M_j \ ,$$

wobei M_j ein vollständiges Repräsentantensystem der verschiedenen Linksnebenklassen KM_j durchläuft, die in der Doppelnebenklasse KMK enthalten sind. Dabei sei für $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

$$F \mid_{k,\psi} M = \psi(\det A) F \underset{k}{\mid} M \ .$$

F heißt Eigenform des regulären Heckeoperators $T_k(M)$, falls

$$F \mid T_k(M) = \lambda_F(M) F \ .$$

Aufgrund der Erzeugung der Heckealgebra genügt es, Eigenformen zu betrachten, die den Doppelnebenklassen $T(p) = Kdiag(1,1,p,p)K$ und $T(p^2) = Kdiag(1,p,p^2,p)K$ entsprechen,

$$F \mid T_k(p) = \lambda_F(p) F \ , \quad F \mid T_k(p^2) = \lambda_F(p^2) F \ , \quad p \nmid q \ . \tag{4.1}$$

Die singulären Heckeoperatoren von $[\,\Gamma_0^2(q), k, \psi\,]$ entsprechen den Doppelnebenklassen $K_1 M K_1,\ \mu(M) \mid q^\infty,\ K_1 = \{N \in K;\ \det D_N \equiv 1\, mod\, q\},\ M \in \Sigma$. Auch in diesem Fall ist es ausreichend, nur Doppelnebenklassen der Form

$$\Pi(m) = K_1 \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & mE \end{pmatrix} K_1 \quad \text{und} \quad \Pi^*(m) = K_1 \begin{pmatrix} mE & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} K_1,\ m \mid q^\infty,$$

zuzulassen und wegen der Multiplizität beider Elemente sich auf Primteiler p von q zu beschränken. Der $\Pi(p)$ zugeordnete Frobeniusoperator ist definiert vermöge

$$F \mid \Pi_k(p) = \sum_{M_j \in K_1 \backslash K_1 \left(\begin{smallmatrix} E & 0 \\ 0 & pE \end{smallmatrix}\right) K_1} F \underset{k}{|} M_j \,, \quad p \mid q \,,$$

das zugehörige Dual

$$F \mid \Pi_k^*(p) = \sum_{N_j \in K_1 \backslash K_1 \left(\begin{smallmatrix} pE & 0 \\ 0 & E \end{smallmatrix}\right) K_1} F \underset{k}{|} N_j \,, \quad p \mid q \,.$$

F heißt Eigenform dieser Operatoren, falls

$$F \mid \Pi_k(p) = \rho_F(p) F \,, \quad F \mid \Pi_k^*(p) = \rho_F^*(p) F \,, \quad p \mid q \,. \tag{4.2}$$

Ist F Eigenform der regulären Operatoren $T_k(p), T_k(p^2)$ und von $\Pi_k(p)$, so ordnet man F die Spinorzetafunktion

$$Z_F(s) = \prod_{p \mid q} \left(1 - \frac{\rho_F(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \nmid q} Q_{p,F}^{-1}(p^{-s}) \tag{4.3}$$

zu mit

$$\begin{aligned} Q_{p,F}(X) = & 1 - \lambda_F(p) X + \{p \lambda_F(p^2) + \psi(p^2) p^{2k-5}(p^2+1)\} X^2 \\ & - \psi(p^2) p^{2k-3} \lambda_F(p) X^3 + \psi(p^4) p^{4k-6} X^4 \,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

2 Das Haupttheorem

Wie in der Einleitung bereits erwähnt, wird in dieser Arbeit mit der Spur getwistet. Daher vereinbaren wir:

Definition
Hat die Modulform $F \in [\,\Gamma_0^2(q), k, \psi\,]_0$ *die Fourierentwicklung*

$$F(Z) = \sum_{T \in \mathfrak{N}_2^+} a(T) e^{2\pi i \sigma(TZ)}, \quad Z \in \mathbb{H}_2,$$

und ist χ *ein Dirichletcharakter mod* r*, so ist der* **Twist** F_χ *erklärt vermöge*

$$F_\chi(Z) := \sum_{T \in \mathfrak{N}_2^+} \chi(\sigma(T))\; a(T) e^{2\pi i \sigma(TZ)}\ .$$

Sind für positive ganze teilerfremde Zahlen q und r die Dirichletcharaktere ψ *mod* q und χ *mod* r primitiv , so ist auch $\psi_1 = \psi\chi$ *mod* qr ein primitiver Charakter.
Versteht man für $\alpha \in \mathcal{O}$, $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[i]$, unter $Norm(\alpha)$ wie üblich die Norm von α, so kann ψ_1 durch $\psi_2 = \psi_1 \circ Norm$ zu einem Charakter *mod* $(qr\mathcal{O})$,

$$\begin{array}{rcl} \psi_2 : \mathcal{O} & \rightarrow & \mathbb{C}^* \\ \psi_2(\alpha) & = & \psi_1 \circ Norm(\alpha), \alpha \in \mathcal{O}, \end{array}$$

erweitert werden, der nicht primitiv sein muß.

Aus diesem Grund fordern wir:

$$* \left\{ \begin{array}{l} \psi \textit{ mod } q \text{ und } \chi \textit{ mod } r \text{ seien primitive Dirichletcharaktere der Art, daß} \\ \text{auch } \psi_1 \circ Norm,\ \psi_1 = \psi\chi \textit{ mod } qr \text{ ein primitiver Charakter } \textit{mod } (qr\mathcal{O}) \\ \text{ist.} \end{array} \right.$$

Haupttheorem

Für eine positive ganze Zahl q und einen primitiven Charakter ψ mod q sei $F \in [\,\Gamma_0^2(q), k, \psi\,]_0$ eine Siegelsche Spitzenform mit der Fourierentwicklung

$$F(Z) = \sum_{T \in \mathfrak{N}_2^+} a(T) e^{2\pi i \sigma(TZ)} \quad \text{und} \quad a(E_2) \neq 0\,.$$

Ferner sei für Primzahlen p mit $(p,q) = 1$ F Eigenform der regulären Heckeoperatoren $T_k(p)$, $T_k(p^2)$ (vgl. 1.(4.1)) und für Primzahlen p mit $p \mid q$ Eigenform der Operatoren $\Pi_k(p)$, $\Pi_k^*(p)$ (vgl. 1.(4.2)).

Ist für eine weitere positive ganze, ungerade, zu q teilerfremde Zahl r mit $qr > 1$, χ mod r ein primitiver Charakter, so daß das Paar (ψ, χ) die Bedingung $*$ erfüllt, so gilt:

(1) Die der getwisteten Funktion $F_\chi(Z)$ zugeordnete Spinorzetafunktion $Z_F(s,\chi)$, $s \in \mathbb{C}$, ist holomorph auf die ganze s- Ebene fortsetzbar.

(2) $Z_F(s,\chi)$ genügt der Funktionalgleichung

$$a(E_2)\Psi(s,F,\chi) = \frac{\psi(-1)\psi(r^2)\chi(q)}{r^{4s-4k+6}q^{3s-3k+4}}\ \frac{G(\psi\chi)S(\overline{\chi})}{g(\overline{\chi})}\ b(E_2)\ \Psi(2k-s-2,\ F \underset{k}{|} N_q,\ \overline{\chi}).$$

Dabei ist

$$\Psi(s,F,\chi) = \frac{1}{(2\pi)^{2s}}\ \Gamma(s)\ \Gamma(s-k+2)\ Z_F(s,\chi)\,,$$

$$b(E_2) \text{ Fourierkoeffizient von } F \underset{k}{|} N_q\,, \quad N_q = \begin{pmatrix} 0 & -E_2 \\ qE_2 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

$$g(\chi) = \sum_{c=0}^{r-1} \chi(c)\ e^{\frac{2\pi i c}{r}}, \qquad G(\psi\chi) = \sum_{a_1,a_2 \, mod\, qr} \psi_1(a_1^2 + a_2^2)\ e^{\frac{2\pi i}{qr} a_2},$$

$$S(\chi) = \sum_{H \in Sym_2^0(\mathbb{Z}_r)} \chi(\sigma(H^{-1}))\ e^{-\frac{2\pi i}{r}\sigma(H)} \quad \text{mit}$$

$$Sym_2^0(\mathbb{Z}_r) = \{H \in Sym_2(\mathbb{Z}_r)\ ;\ H \text{ invertierbar mod } r\}\,.$$

Bemerkung
Aus $a(E_2) \neq 0$ folgt $b(E_2) \neq 0$ und umgekehrt.
Ist $a(E_2) = 0$, so gilt die Identität trotzdem, denn $0 = 0$.

Corollar
Für $q = 1$ vereinfacht sich die Funktionalgleichung zu

$$\Psi(s, F, \chi) = \frac{g(\chi)^4}{r^{4s-4k+6}} \ \Psi(2k - s - 2,\ F,\ \overline{\chi}) \ .$$

3 Gaußsche Summen

Für einen primitiven Charakter χ *mod* r betrachten wir die Gaußsche Summe

$$g(\chi) = \sum_{c=0}^{r-1} \chi(c) e^{\frac{2\pi i c}{r}} \quad . \tag{1}$$

Wir benötigen von ihr folgende Eigenschaften.

Lemma 1
Ist χ ein primitiver Charakter mod r und $g(\chi)$ definiert wie oben, so gilt:

a.) $\sum_{c=0}^{r-1} \chi(c) e^{\frac{2\pi i c}{r} b} = \bar{\chi}(b)\ g(\chi)$ *für beliebiges* $b \in \mathbb{Z}$,

b.) $\mid g(\chi) \mid^2 = r$.

Beweis
Siehe G. SHIMURA ([Sh], S. 91).

Bemerkung
Wegen b.) ist $g(\chi) \neq 0$ und wir können durch $g(\chi)$ teilen.

Für uns ist eine allgemeinere Gaußsche Summe von Bedeutung. Ist

$$Sym_2^0(\mathbb{Z}_r) = \{H \in Sym_2(\mathbb{Z}_r)\ ;\ H \text{ invertierbar mod } r\}\ ,$$

so verstehen wir unter $S(\chi)$ die Gaußsche Summe

$$S(\chi) = \sum_{H \in Sym_2^0(\mathbb{Z}_r)} \chi(\sigma(H^{-1})) e^{-\frac{2\pi i}{r}\sigma(H)} \ . \tag{2}$$

Lemma 2
Ist χ ein primitiver Charakter mod r, q eine positive ganze Zahl mit $(q, r) = 1$ und $S(\chi)$ definiert wie oben, so gilt:

a.) $$\sum_{H \in Sym_2^0(\mathbb{Z}_r)} \chi(\sigma(H)) e^{\frac{2\pi i}{r}\sigma(m(qH)^{-1})} = \chi(mq^{-1}) S(\chi)$$

für beliebiges $m \in \mathbb{Z}$,

b.) $\mid S(\chi) \mid = \sqrt{r}^3$.

Beweis
a.) Zunächst sei $(m,r) = 1$. Da $(q,r) = 1$ ist, durchläuft mit H auch $H_1 = m(qH)^{-1}$ ein Restsystem von Matrizen aus $Sym_2^0(\mathbb{Z}_r)$. Also gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{H\in Sym_2^0(\mathbb{Z}_r)} \chi(\sigma(H)) e^{\frac{2\pi i}{r}\sigma(m(qH)^{-1})} &= \sum_{H_1\in Sym_2^0(\mathbb{Z}_r)} \chi(\sigma(mq^{-1}H_1^{-1})) e^{\frac{2\pi i}{r}\sigma(H_1)} \\ &= \chi(mq^{-1}) \sum_{H_1\in Sym_2^0(\mathbb{Z}_r)} \chi(\sigma(H_1^{-1})) e^{\frac{2\pi i}{r}\sigma(H_1)}.\end{aligned}$$

Für $(m,r) = d > 0$ ist $\chi(m) = 0$. Daher müssen wir zeigen, daß auch

$$\sum_{H\in Sym_2^0(\mathbb{Z}_r)} \chi(\sigma(H)) e^{\frac{2\pi i}{r}\sigma(m(qH)^{-1})}$$

null ist. Setzen wir $m_1 = \frac{m}{d}$, $r_1 = \frac{r}{d}$ und ist $H_1 \equiv H \ mod \ r_1$, so gilt:

$$\sigma(H^{-1}) = \sigma(H_1^{-1}) + r_1 g, \quad g \in \mathbb{Z}.$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\sum_{H\in Sym_2^0(\mathbb{Z}_r)} \chi(\sigma(H)) e^{\frac{2\pi i}{r}\sigma(m(qH)^{-1})} &= \sum_{H\in Sym_2^0(\mathbb{Z}_r)} \chi(\sigma(H)) e^{\frac{2\pi i}{r_1} m_1 q^{-1}\sigma(H^{-1})} \\ &= \sum_{H_1\in Sym_2^0(\mathbb{Z}_{r_1})} e^{\frac{2\pi i}{r_1} m_1 q^{-1}\sigma(H_1^{-1})} \sum_{\substack{H\in Sym_2^0(\mathbb{Z}_r) \\ H\equiv H_1 \ mod \ r_1}} \chi(\sigma(H)) \ .\end{aligned}$$

Das Verschwinden der inneren Summe überlegt man sich beispielsweise wie folgt. Aufgrund der Primitivität von χ existiert zum Teiler r_1 von r ein $b \in \mathbb{Z}$ mit $(b,r) = 1$, $b \equiv 1 \ mod \ r_1$ und $\chi(b) \neq 1$. Dies bedeutet:

$$(1-\chi(b)) \sum_{\substack{H\in Sym_2^0(\mathbb{Z}_r) \\ H\equiv H_1 \ mod \ r_1}} \chi(\sigma(H)) = \sum_{\substack{H\in Sym_2^0(\mathbb{Z}_r) \\ H\equiv H_1 \ mod \ r_1}} \chi(\sigma(H)) - \sum_{\substack{H\in Sym_2^0(\mathbb{Z}_r) \\ H\equiv H_1 \ mod \ r_1}} \chi(\sigma(b\,H)).$$

Durchläuft H ein Restsystem von Matrizen obiger Art, so muß auch bH das gleiche Restsystem durchlaufen. Mit $H \equiv H_1 \ mod \ r_1$ ist auch $bH \equiv H_1 \ mod \ r_1$ und wegen $\chi(b) \neq 1$ sind wir fertig.

b.) Dieser Nachweis erwies sich auf direktem Weg als äußerst schwierig. Wir verweisen auf den Anhang, wo über den Umweg der SAITO-KORUKAWA-Vermutung diese Lücke geschlossen werden konnte.

Zum Schluß betrachten wir für eine positive ganze Zahl l und einen primitiven Dirichletcharakter $\psi_1 \; mod \; l$ die Gaußsche Summe

$$G(\psi_1) = \sum_{a_1, a_2 \, mod \, l} \psi_1(a_1^2 + a_2^2) e^{\frac{2\pi i}{l} a_2} \,. \tag{3}$$

Um Eigenschaften dieser Summe zu begründen, erweist sich die auf E. HECKE zurückgehende Verallgemeinerung Gaußscher Summen des Restklassenringes $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^*$ auf „Idealrestklassen“ als günstig.

Dazu sei $\mathcal{K}$ ein algebraischer Zahlkörper und $\mathcal{O}$ der dazugehörige Ring der ganzen Zahlen. Für ein Ideal $\mathfrak{f}$ von $\mathcal{O}$ definiert man auf der multiplikativen Gruppe $(\mathcal{O}/\mathfrak{f})^*$ einen Charakter χ vermöge

$$\chi : (\mathcal{O}/\mathfrak{f})^* \longrightarrow \mathbb{C}^* \,.$$

Setzt man $\chi(\alpha) = 0$, falls α nicht prim zu $\mathfrak{f}$ ist, so erhält man eine ebenfalls mit χ bezeichnete Funktion

$$\chi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{C} \,,$$

die Charakter mod $\mathfrak{f}$ genannt wird. Ist $\mathfrak{g}$ ein Ideal, das $\mathfrak{f}$ teilt und χ_1 ein Charakter mod $\mathfrak{g}$, so definiert die Zusammensetzung

$$(\mathcal{O}/\mathfrak{f})^* \longrightarrow (\mathcal{O}/\mathfrak{g})^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

ebenfalls einen Charakter mod $\mathfrak{f}$. Ein Charakter χ mod $\mathfrak{f}$, der sich für einen echten Teiler $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{f}$ nicht durch solch eine Zerlegung darstellen läßt, heißt primitiv.

Schreiben wir $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}}$ für die Differente von $\mathcal{K}$, so sei $\gamma \in \mathcal{K}$ fest, aber so gewählt, daß $\gamma\mathfrak{d}\mathfrak{f}$ prim zu $\mathfrak{f}$ ist. Bezeichnet $N(\beta)$ beziehungsweise $Sp(\beta)$ die Norm beziehungsweise die Spur von $\beta \in \mathcal{K}$ und steht $N(\mathfrak{f})$ für die Norm des Ideals $\mathfrak{f}$, so gilt

Lemma

Für einen primitiven Charakter χ mod $\mathfrak{f}$ hat die Gaußsche Summe

$$T_\gamma(\chi,\alpha) = \sum_{c \;mod\; \mathfrak{f}} \chi(c) e^{2\pi i Sp(\alpha c \gamma)} \;, \quad \alpha \in \mathcal{O},$$

folgende Eigenschaften:

a.) $T_\gamma(\chi,\alpha\lambda) = \bar{\chi}(\lambda)\; T_\gamma(\chi,\alpha)$, $\lambda \in \mathcal{O}$,

b.) $\mid T_\gamma(\chi,\alpha) \mid = \sqrt{N(\mathfrak{f})}$, *falls α prim zu $\mathfrak{f}$.*

Beweis

Siehe S. LANG ([La], S. 288-289).

Nach diesen Vorarbeiten können wir für unsere Gaußsche Summe $G(\psi_1)$ folgendes formulieren.

Lemma 3

Ist l eine positive ganze Zahl und ψ_1 ein primitiver Charakter $mod\, l$ der Art, daß mit ψ_1 auch $\psi_1 \circ Norm$ primitiv ist, so gilt:

a.) $\sum\limits_{a_1,a_2\, mod\, l} \psi_1(a_1^2+a_2^2) e^{\frac{2\pi i}{l}(a_1 b_1 + a_2 b_2)} = \overline{\psi_1}(b_1^2+b_2^2) G(\psi_1)$,

b.) $\mid G(\psi_1) \mid = l$.

Beweis

a.) Wir benutzen obiges Lemma für den quadratischen Zahlkörper $\mathcal{K} = \mathbb{Q}(i)$ und $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[i]$. Für $\alpha = a_1 + ia_2$, $\beta = b_1 + ib_2$ ist $a_1^2 + a_2^2 = N(\alpha)$, $a_1 b_1 + a_2 b_2 = \frac{1}{2} Sp(\alpha\bar{\beta})$. Interpretieren wir die Summationsbedingung $a_1, a_2\, mod\, l$ als Summation über α *mod* $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f} = l\,\mathbb{Z}[i]$, so erhält man mit $\psi_2 = \psi_1 \circ Norm$:

$$\begin{aligned} \sum_{a_1,a_2\, mod\, l} \psi_1(a_1^2+a_2^2) e^{\frac{2\pi i}{l}(a_1 b_1 + a_2 b_2)} &= T_{\frac{1}{2l}}(\psi_2, \bar{\beta}\cdot 1) \\ &= \overline{\psi}_2(\bar{\beta}) T_{\frac{1}{2l}}(\psi_2, 1) \\ &= \overline{\psi}_1(b_1^2+b_2^2) G(\psi_1). \end{aligned}$$

b.) Wegen $N(\mathfrak{f}) = l^2$ ist $\mid G(\psi_1) \mid = l$.

4 Eigenschaften von F_χ und F^*

Es sei F eine Modulform mit Charakter ψ zur Gruppe $\Gamma_0^2(q)$. Wir zeigen zunächst: *Auch F_χ ist Modulform mit Charakter zu einer Kongruenzgruppe.* Das Transformationsverhalten und die Kongruenzgruppe beschreibt

Theorem 1
Es seien q, r positive ganze Zahlen, ψ beziehungsweise χ seien primitive Dirichletcharaktere mod q beziehungsweise mod r. Hat $F \in [\,\Gamma_0^2(q), k, \psi\,]$ die Fourierentwicklung

$$F(Z) = \sum_{T \in \mathfrak{N}_2} a(T) e^{2\pi i \sigma(TZ)} \ ,$$

so ist auch

$$F_\chi(Z) = \sum_{T \in \mathfrak{N}_2} \chi(\sigma(T)) a(T) e^{2\pi i \sigma(TZ)}$$

eine Modulform und es gilt:

$$F_\chi \in [\Gamma_0^2(r^2 q, r), k, \psi\chi] \ ,$$

wobei

$$\Gamma_0^2(r^2q, r) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_2(\mathbb{Z}); C \equiv 0 \ mod \ r^2 q, D \equiv \begin{pmatrix} d_1 & -d_2 \\ d_2 & d_1 \end{pmatrix} \ mod \ r \right\}.$$

Ist F Spitzenform, so ist auch F_χ Spitzenform.

Bemerkung
$F_\chi \in [\,\Gamma_0^2(r^2 q, r), k, \psi\chi\,]$ gilt für beliebige primitive Charaktere ψ *mod* q beziehungsweise χ *mod* r. Später werden wir fordern, daß ψ_1 mod l, $\psi_1 = \psi\chi$, $l = qr$, ein Charakter ist mit $\psi_1 \circ Norm$ primitiv.

Beweis
Die Schwierigkeit besteht darin herauszufinden, zu welcher Untergruppe von $Sp_2(\mathbb{Z})$ sich F_χ transformiert. Für

$$N_c = \begin{pmatrix} E_2 & \frac{c}{r}E_2 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \in Gl_4(\mathbb{R})$$

erhält man durch Umordnen (absolute Konvergenz der Fourierreihe) und mit 3. Lemma 1:

$$\begin{aligned}
\sum_{c \ mod \ r} \bar{\chi}(c) \ F \underset{k}{|} N_c(Z) &= \sum_{c \ mod \ r} \bar{\chi}(c) F(Z + \frac{c}{r}E_2) \\
&= \sum_{c \ mod \ r} \bar{\chi}(c) \sum_{T \in \mathfrak{N}_2} a(T) e^{2\pi i \sigma(TZ + \frac{c}{r}T)} \\
&= \sum_{T \in \mathfrak{N}_2} a(T) e^{2\pi i \sigma(TZ)} \sum_{c \ mod \ r} \bar{\chi}(c) e^{\frac{2\pi i c}{r}\sigma(T)} \\
&= g(\bar{\chi}) \sum_{T \in \mathfrak{N}_2} \chi(\sigma(T)) \ a(T) e^{2\pi i \sigma(TZ)} \\
&= g(\bar{\chi}) F_\chi(Z) \, . \qquad (1)
\end{aligned}$$

Zunächst ist offensichtlich, daß sich F auf der Hauptkongruenzgruppe $\Gamma^2(q)$ ohne Charakter transformiert, d.h.

$$F \underset{k}{|} M = F \qquad \text{für alle } M \in \Gamma^2(q) \, .$$

Benutzen wir G. SHIMURA ([Sh], S.55, Lemma 3.9) für

$$N'_c = rN_c = \begin{pmatrix} rE_2 & cE_2 \\ 0 & rE_2 \end{pmatrix},$$

so ist

$$N_c'^{-1} = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} rE_2 & -cE_2 \\ 0 & rE_2 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten

$$\Gamma^2(r^2 q) \leq N_c'^{-1} \Gamma^2(q) N'_c \cap N'_c \Gamma^2(q) N_c'^{-1}$$

beziehungsweise
$$N_c\Gamma^2(r^2q)N_c^{-1} \leq \Gamma^2(q)\ .$$
Die Übertragung von G. SHIMURAs Proposition 2.4 ([Sh], S. 30) auf $n=2$ liefert
$$F\underset{k}{|}N_c \in [\Gamma^2(r^2q),k]$$
beziehungsweise
$$F_\chi \in [\,\Gamma^2(r^2q),k\,]\ .$$
Daher reicht es, das Transformationsverhalten von F_χ für
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ q_1C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0^2(q_1), \quad q_1 = r^2q,$$
zu untersuchen.
Setzen wir $N = \begin{pmatrix} E_2 & \frac{V}{r} \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$ mit einer noch näher zu bestimmenden Matrix $V \in M_2(\mathbb{Z})$, so ist
$$M_1 = N_cMN^{-1} = \begin{pmatrix} A + \dfrac{cq_1}{r}C & B - \dfrac{cq_1}{r}CV + \dfrac{1}{r}(cD-AV) \\ q_1C & D - \dfrac{q_1}{r}CV \end{pmatrix} \in \Gamma_0^2(q_1)\ ,$$
falls $cD - AV \equiv 0 \bmod r$. Daher ist V nur *mod* r eindeutig festgelegt. Aufgrund der Symplektizität von M ist cD^tD eine mögliche Wahl für V. Berücksichtigen wir $N_cM = M_1N$ und $\psi(\det D_{M_1}) = \psi(\det D_M) = \psi(\det D)$, so erhält man
$$F\underset{k}{|}N_c\underset{k}{|}M(Z) = \psi(\det D)\ F(Z + \frac{c}{r}D^tD)$$
beziehungsweise aufgrund der absoluten Konvergenz der Fourierreihe und mit 3. Lemma 1:
$$\begin{aligned} F_\chi\underset{k}{|}M(Z) &= g(\bar\chi)^{-1}\sum_{c \ mod \ r}\bar\chi(c)F\underset{k}{|}N_cM(Z) \\ &= g(\bar\chi)^{-1}\psi(\det D)\sum_{T\in\mathfrak{N}_2}a(T)e^{2\pi i\sigma(TZ)}\sum_{c \ mod \ r}\bar\chi(c)e^{\frac{2\pi ic}{r}\sigma(TD^tD)} \\ &= \psi(\det D)\sum_{T\in\mathfrak{N}_2}\chi(\sigma(TD^tD))\ a(T)e^{2\pi i\sigma(TZ)}. \end{aligned}$$

Um von $\sigma(TD^tD)$ den Faktor $\sigma(T)$ abzuspalten, muß mit

$$T = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \in \mathfrak{N}_2^+, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$$

für $\sigma(TD^tD) = a(d_1^2 + d_3^2) + b(d_1d_2 + d_3d_4) + c(d_3^2 + d_4^2)$ gelten:

a) $d_1d_2 + d_3d_4 \equiv 0 \; mod \; r$,

b) $d_1^2 + d_3^2 \equiv d_2^2 + d_3^2 \; mod \; r$.

Wählt man $D \equiv \begin{pmatrix} d_1 & -d_2 \\ d_2 & d_1 \end{pmatrix} \; mod \; r$, so sind diese Bedingungen erfüllt und wir bekommen

$$\chi(\sigma(TD^tD)) = \chi(\sigma(T))\chi(\det D).$$

Also transformiert sich F_χ nicht zu $\Gamma_0^2(q_1)$, wohl aber zur Untergruppe

$$\Gamma_0^2(q_1, r) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_2(\mathbb{Z}); C \equiv 0 \; mod \; q_1, D \equiv \begin{pmatrix} d_1 & -d_2 \\ d_2 & d_1 \end{pmatrix} \; mod \; r, \;\; q_1 = r^2 q \right\}.$$

Die Gruppeneigenschaften von $\Gamma_0^2(q_1, r)$ sind leicht nachzuweisen. Für Spitzenformen verläuft die Begründung analog, wenn man berücksichtigt, daß sich die Holomorphie in den Spitzen von $\Gamma_0^2(q_1)$ aus der Holomorphie in den Spitzen von $\Gamma^2(q_1)$ ergibt. Damit ist Theorem 1 bewiesen.

Wir beschließen unsere Ausführungen mit einem weiteren Theorem, das Eigenschaften der aus F entstandenen Modulform F^* zusammenfaßt, die wir im nächsten und insbesondere im sechsten Kapitel benötigen. Wir übernehmen es ohne Beweis von A. ANDRIANOV ([An4], Theorem 2), entsprechend den hier verwendeten Bezeichnungen.

Theorem 2

Es sei $F \in [\,\Gamma_0^2(q), k, \psi\,]$ *und* $F^* = F \mathop{|}\limits_k N_q$, *mit* $N_q = \begin{pmatrix} 0 & -E_2 \\ qE_2 & 0 \end{pmatrix}$.

Dann gilt:

(1) F^* *liegt in* $[\,\Gamma_0^2(q), k, \overline{\psi}\,]$ *und hat daher eine Fourierentwicklung*

$$F^*(Z) = \sum_{T \in \mathfrak{N}_2} b(T) e^{2\pi i \sigma(TZ)}.$$

F^* *ist Spitzenform, sofern* F *Spitzenform ist.*

(2) Ist F Eigenform des regulären Heckeoperators $T_k(M)$ mit Gewicht k und Charakter ψ,

$$F \mid T_k(M) = \lambda_F(M)F \ ,$$

so ist F^* Eigenform von $T_k(M)$ mit Gewicht k und Charakter $\overline{\psi}$,

$$F^* \mid T_k(M) = \lambda_{F^*}(M)F^* \ , \ \textit{wobei}\ \lambda_{F^*}(M) = \overline{\psi}(\mu(M)^2)\ \lambda_F(M) \ .$$

(3) Ist F Eigenform des Frobeniusoperators $\Pi_k(p)$ beziehungsweise von $\Pi_k^*(p)$ für Primteiler p von q,

$$F \mid \Pi_k(p) = \rho_F(p)F \ \ \textit{beziehungsweise}\ F \mid \Pi_k^*(p) = \rho_F^*(p)F \ , \quad p \mid q,$$

so ist auch F^* Eigenform dieser Operatoren, wobei

$$F^* \mid \Pi_k^*(p) = \rho_F(p)F^* \ \ \textit{beziehungsweise}\ F^* \mid \Pi_k(p) = \rho_F^*(p)F^* \ , \quad p \mid q \ .$$

Ist F Eigenform beider Operatoren und Spitzenform, so sind die entsprechenden Eigenwerte konjugiert:

$$\rho_F^*(p) = \overline{\rho_F(p)} \ .$$

(4) Ist F für Primzahlen p mit $p \nmid q$ Eigenform der Operatoren $T_k(p)$, $T_k(p^2)$ und für Primteiler p von q der Operatoren $\Pi_k(p)$, $\Pi_k^*(p)$ und ist $Z_F(s)$ das Eulerprodukt von 1.(4.3), so ist auch F^* Eigenform dieser Operatoren und das entsprechende Eulerprodukt hat die Form

$$Z_{F^*}(s) = \prod_{p \mid q} \left(1 - \frac{\rho^*(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \nmid q} Q_{p,F}^{-1}\left(\frac{\overline{\psi}(p^2)}{p^s}\right) \ . \tag{2}$$

5 Die Dirichletreihe mit Funktionalgleichung

Nach den Vorarbeiten in den Kapiteln 3 und 4 wird jetzt über eine Mellintransformation F_χ eine Dirichletreihe zugeordnet, deren analytische Fortsetzbarkeit nebst Funktionalgleichung in den nachfolgenden Paragraphen begründet wird.

Gemäß 4. Theorem 1 folgt für $F \in [\,\Gamma_0^2(q), k, \psi\,]$:

$$F_\chi(Z) = \sum_{T \in \mathfrak{N}_2} \chi(\sigma(T)) a(T) e^{2\pi i \sigma(TZ)} \;\in\; [\Gamma_0^2(q_1, r), k, \psi\chi]\,,\; q_1 = r^2 q\,.$$

Für die Modulform F_χ betrachten wir die Dirichletreihe

$$R_T(s, F_\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(\sigma(mT)) a(mT)}{m^s}\,, \quad s \in \mathbb{C}\,.$$

Ist $T = E_2$, so sei $R(s, F_\chi) = R_{E_2}(s, F_\chi)$.

Theorem
Die Voraussetzungen an q und r sowie an die primitiven Dirichletcharaktere ψ mod q und χ mod r seien wie im Haupttheorem. Ferner sei F eine Siegelsche Spitzenform mit

$$F(Z) = \sum_{T \in \mathfrak{N}_2^+} a(T) e^{2\pi i \sigma(TZ)} \in [\,\Gamma_0^2(q), k, \psi\,]_0\,.$$

Ist

$$R(s, F_\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(\sigma(mE_2)) a(mE_2)}{m^s}\,, \quad s \in \mathbb{C},$$

die F_χ zugeordnete Dirichletreihe, so gilt für $q_1 = r^2 q$:

(1) Die für Re $s > k$ analytische Funktion $R(s, F_\chi)$ ist holomorph auf die ganze s-Ebene fortsetzbar.

(2) $R(s, F_\chi)$ genügt der Funktionalgleichung

$$\Psi_1(s, F_\chi) = \frac{\psi(-1)\psi(r^2)\chi(q)}{q_1^{2s-2k+3} q^{s-k+1}} \; \frac{G(\psi\chi) S(\overline{\chi})\; \chi(2)^2}{g(\overline{\chi})} \; \Psi_1(2k - s - 2,\, F^*_{\overline{\chi}})\,.$$

Dabei ist

$$\Psi_1(s,F_\chi) = \frac{1}{(2\pi)^{2s}}\,\Gamma(s)\,\Gamma(s-k+2)\;\zeta_{\mathcal{K}}(s-k+2,\psi_1,q_1)\;R(s,F_\chi)\;\;,$$

$$\zeta_{\mathcal{K}}(s,\psi_1,q_1) = \sum_{\substack{\varepsilon\in\mathcal{O}\\ (\varepsilon,q_1)=1}} \frac{\psi_1(|\varepsilon|^2)}{|\varepsilon|^{2s}}, \quad F^* = F\underset{k}{|}N_q, \quad N_q = \begin{pmatrix} 0 & -E_2 \\ qE_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Unter $g(\chi)$ und $S(\chi)$ seien die Gaußschen Summen (1) und (2) aus Kapitel 3 verstanden, $G(\psi\chi)$ ist die Gaußsche Summe 3.(3) für $\psi_1 = \psi\chi$.

Bemerkung
Um Schreibarbeit zu sparen, vereinbaren wir neben den bereits eingeführten Vereinfachungen folgende weitere Abkürzungen.

a.) $a_1(mE_2) = \chi(\sigma(mE_2))a(mE_2)$,

b.) $\psi_1 = \psi\chi \; mod \; l\;,\;\; l = qr$.
Aufgrund der Voraussetzungen an q und r ist $l > 1$. Sind $\psi \; mod \; q$ und $\chi \; mod \; r$ primitiv, so ist auch $\psi_1 \; mod \; l$ primitiv.

§1 Integraldarstellung

Natürlich ist $R(s,F_\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_1(mE_2)}{m^s}$ wegen der Koeffizientenabschätzung 1.(2.1) für $Re\; s > k+1$ holomorph. Dies ergibt sich aus der absoluten Konvergenz der Reihe in dieser Halbebene.

Entscheidend für den Brückenschlag zwischen der Modulform F_χ und der Dirichletreihe $R(s,F_\chi)$ ist :

Integriert man die Fourierreihe von F_χ für $Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{pmatrix} + ivE_2 \in \mathbb{H}_2$ über die Menge $P = \left\{(x,y);\; |x| \le \frac{1}{2}, |y| \le \frac{1}{2}\right\}$ gliedweise, so leisten nur die Summanden einen Beitrag, deren Fourierkoeffizienten die Form $a(mE_2)$, $m\in\mathbb{N}$, besitzen.

Genauer gilt (vgl. A. ANDRIANOV, [An1], S. 89):

$$\int_P F_\chi\left(\left(\begin{array}{cc} x & -y \\ -y & -x \end{array}\right) + ivE_2\right) dxdy = \sum_{m=1}^{\infty} a_1(mE_2)e^{-4\pi mv} \,. \tag{1.1}$$

Mittels des Mellinintegrals

$$\int_0^\infty e^{-nv}v^{s-1}dv = \frac{1}{n^s}\Gamma(s), \quad Re\, s > 0, \quad n > 0\,,$$

erhält man nach Vertauschung von Summation und Integration für $Re\ s > k+1$:

$$\frac{1}{(4\pi)^s}\Gamma(s)\ \sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_1(mE_2)}{m^s} = \int_0^\infty \int_P F_\chi\left(\left(\begin{array}{cc} x & -y \\ -y & -x \end{array}\right) + ivE_2\right) v^{s-1}dxdydv\,. \tag{1.2}$$

Spaltet man das uneigentliche Integral an der Stelle $v = 1$ auf und berücksichtigt einerseits an der unteren kritischen Grenze $F_\chi(Z) = O(v^{-k}), Z \in \mathcal{H}$, andererseits an der oberen kritischen Grenze, daß F_χ für $v \to \infty$ exponentiell abklingt, so konvergiert das uneigentliche Integral absolut und in kompakten Teilmengen von $\{s \in \mathbb{C}\ ;\ Re\ s > k\ \}$ gleichmäßig. Mittels (1.2) besitzt die Dirichletreihe $R(s, F_\chi)$ eine analytische Fortsetzung nach $\{s \in \mathbb{C}\ ;\ Re\ s > k\ \}$.

Bemerkungen

(1) Die gliedweise Integration in (1.1) ist möglich, da die Fourierreihe gleichmäßig konvergiert.

(2) Die Vertauschbarkeit von Summation und Integration ist problemlos. Wegen $a_1(mE_2) = O(m^k)$ gilt mit $Re\ s = \tau$:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^\infty |a_1(mE_2)e^{-4\pi mv}v^{s-1}|dv < \frac{c}{(4\pi)^\tau}\ \zeta(\tau - k)\ \Gamma(\tau) < \infty\,.$$

Daher erlaubt B. LEVIs Satz von der monotonen Konvergenz die gewünschte Vertauschbarkeit.

Für die nachfolgenden Überlegungen erweist es sich als günstig, die Betrachtungen im hyperbolischen Raum $\widetilde{\mathcal{H}} = \{u = (z,v)\ ;\ z \in \mathbb{C}, v > 0, z = x + iy\}$ fortzuführen. Analog der Ausführungen dazu in Kapitel 1, Paragraph 3, läßt sich die in (1.2) auf $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{H}_2$ restringierte Modulform F_χ auf $\widetilde{\mathcal{H}}$ umschreiben:

$$\widetilde{F}_\chi(u) = F_\chi(h^{-1}(u)) = F_\chi\left(\begin{pmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{pmatrix} + ivE_2\right) .$$

Der Isomorphismus φ aus 1.(3.6) impliziert natürlich einen Isomorphismus der Untergruppen $\Gamma_0^2(q_1) = \Gamma_0^2(q_1, r) \cap \mathcal{G}$ und

$$\Gamma_0(q_1) = \left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{C})\ ;\ \gamma \equiv 0\ mod\ q_1\ ,\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{O}\right\} .$$

Ist für $M \in \Gamma_0^2(q_1)\quad \varphi(M) = \sigma \in \Gamma_0(q_1)$, so hat wegen $\psi_1(\det D_M) = \psi_1(\delta\bar{\delta})$ $\widetilde{F}_\chi$ das Transformationsverhalten

$$\widetilde{F}_\chi(\sigma(u)) = \psi_1(\delta\bar{\delta})\Delta_\sigma(u)^k \widetilde{F}_\chi(u)\ , \quad \sigma \in \Gamma_0(q_1),$$

und Identität (1.2) geht über in

$$\frac{1}{(4\pi)^s}\Gamma(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_1(mE_2)}{m^s} = \int\limits_S \widetilde{F}_\chi(u)v^{s-1}du\ , \quad Re\, s > k,$$

wobei $S = \{u = (z,v) \in \widetilde{\mathcal{H}}\ ;\ z \in P,\ v > 0\}$ Fundamentalbereich zu

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathcal{O})\right\}$$

ist. Um Invarianzeigenschaften von F_χ ins Spiel zu bringen, schreibt man das Integral auf einen Fundamentalbereich zur Transformationsgruppe von F_χ um. Dazu sei für $\Gamma_0 = \Gamma_0(q_1)/\pm E_2$

$$\Gamma_{0,\infty} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\quad \beta \in \mathcal{O}\right\}$$

die Gruppe der Parallelverschiebungen. Ist $\Gamma_0 = \bigcup\limits_i \Gamma_{0,\infty}\sigma_i$ eine disjunkte Zerlegung von Γ_0 in Linksnebenklassen, so ist für einen Fundamentalbereich $\mathcal{F}$ von Γ_0 $\ S' = \bigcup\limits_i \sigma_i\mathcal{F}$ Fundamentalbereich von $\Gamma_{0,\infty}$ auf $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Da der Wert des Integrals sich bei invariantem Volumenelement $v^{-3}du$ nicht ändert, wenn man von S zu S' übergeht, erhält man in der Konvergenzhalbebene:

$$\begin{aligned}
\int_S \widetilde{F}_\chi(u) v^{s-1} du &= \int_{S'} \widetilde{F}_\chi(u)\, v^{s+2}\, \frac{du}{v^3} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathcal{F}} \widetilde{F}_\chi(\sigma_i(u))\, v(\sigma_i(u))^{s+2}\, \frac{du}{v^3} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathcal{F}} \widetilde{F}_\chi(u) v^k\ \psi_1(\delta_{\sigma_i}\overline{\delta}_{\sigma_i}) \frac{v^{s-k+2}}{\Delta_{\sigma_i}(u)^{s-k+2}} \frac{du}{v^3}\ .
\end{aligned}$$

Versteht man unter

$$E^*(u,s,\psi_1) = \sum_{\sigma \in \Gamma_{0,\infty}\backslash\Gamma_0} \psi_1(\delta_\sigma \overline{\delta}_\sigma) \frac{v^s}{\Delta_\sigma(u)^s} \tag{1.3}$$

die für $Re\, s > 2$ absolut konvergierende Eisensteinreihe zur Gruppe $\Gamma_0(q_1)$, so erhält man nach Vertauschung von Summation und Integration

$$\int_S \widetilde{F}_\chi(u) v^{s-1} du = \int_{\mathcal{F}} \widetilde{F}_\chi(u) v^k E^*(u, s-k+2, \psi_1) \frac{du}{v^3}\ .$$

Wir fassen unsere Überlegungen zusammen im

Lemma 1.1
Es sei

$$F_\chi(Z) = \sum_{T \in \mathfrak{N}_2^+} \chi(\sigma(T))\ a(T) e^{2\pi i \sigma(TZ)} \in [\Gamma_0^2(q_1,r), k, \psi_1]_0$$

eine Spitzenform, $\widetilde{F}_\chi(u)$ *ihre Darstellung im hyperbolischen Raum* $\widetilde{\mathcal{H}}$*. Für* $Re\, s > k$ *gilt:*

$$\frac{1}{(4\pi)^s}\Gamma(s) R(s, F_\chi) = \int_{\mathcal{F}} \widetilde{F}_\chi(u)\, v^k E^*(u, s-k+2, \psi_1) \frac{du}{v^3}\ .$$

Dabei ist $\psi_1 = \psi\chi$ *ein Charakter mod* l, $l = qr$ *und* $\mathcal{F}$ *ein Fundamentalbereich der Gruppe* $\Gamma_0(q_1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathcal{O})\ ;\ \gamma \equiv 0\ mod\ q_1 \right\}$ *auf* $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Bemerkung

Der Fundamentalbereich $\mathcal{F}$ von $\Gamma_0(q_1)$ ist meßbar und insofern kann obige Vertauschung von Summation und Integration vorgenommen werden, falls

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathcal{F}} \left| \widetilde{F}_\chi(u) \frac{v^{s-1}}{\Delta_{\sigma_i}(u)^{s-k+2}} \right| \, du < \infty$$

ist. Dies kann man wie folgt einsehen.

Zunächst schreibt man das Integral auf den Fundamentalbereich D von $Sl_2(\mathcal{O})$ um (vgl. 1.(3.4)), indem man die Gruppe $Sl_2(\mathcal{O})$ in Linksnebenklassen mod $\Gamma_0(q_1)$ zerlegt. Ist $h = [Sl_2(\mathcal{O}) : \Gamma_0(q_1)] < \infty$ und $Sl_2(\mathcal{O}) = \bigcup_{j=1}^{h} \Gamma_0(q_1)\sigma_j$ eine disjunkte Zerlegung, so ist obige Ungleichung äquivalent zu

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{h} \int_{D} \left| \widetilde{F}_\chi(\sigma_j(u)) \frac{v(\sigma_j(u))^{s+2}}{\Delta_{\sigma_i}(\sigma_j(u))^{s-k+2}} \right| \, \frac{du}{v^3} < \infty \, .$$

Ist $M_j \in Sp_2(\mathbb{Z})$ Urbild von $\sigma_j \in Sl_2(\mathcal{O})$ unter der Abbildung φ (vgl. 1.(3.6)), so erhält man unter Berücksichtigung von 1.(3.2), 1.(3.9) mit $Re\ s = \tau$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{h} \int_{D} \left| \widetilde{F_\chi \underset{k}{|} M_j}(u) \right| \frac{v^{\tau-1}}{\Delta_{\sigma_i\sigma_j}(u)^{\tau-k+2}} \, du < \infty \, .$$

Der Nenner $\Delta_{\sigma_i\sigma_j}(u)$ läßt sich auf D nach unten abschätzen und vor das Integral ziehen. Die Summation über Matrizen σ_j bereitet ebenfalls keine Schwierigkeiten - die Beträge deren Elemente sind nach oben beschränkt. Letztlich ist $\Delta_{\sigma_i\sigma_j}(u) \geq S[g]$, $g \in \mathbb{Z}^4$, mit einer positiv definiten Matrix S. Da es zu dieser Matrix eine Konstante $\delta > 0$ gibt mit $S[g] \geq \delta E_4[g]$, reduziert sich unsere Betrachtung auf

$$\sum_{g \in \mathbb{Z}^4}{}' \frac{1}{E_4[g]^{\tau-k+2}} \sum_{j=1}^{h} \int_{D} \left| \widetilde{F_\chi \underset{k}{|} M_j}(u) \right| \, v^{\tau-1} \, du < \infty \, .$$

Einerseits ist $\sum'_{g\in\mathbb{Z}^4} \frac{1}{E_4[g]^{\tau-k+2}}$ für $\tau > k$ endlich, andererseits ist aufgrund der Eigenschaft von F_χ, Spitzenform zu sein, auch $\widetilde{F_\chi \underset{k}{|} M_j}$ exponentiell abklingend und daher $\sum_{j=1}^h \int\limits_D |\widetilde{F_\chi \underset{k}{|} M_j}(u)|\; v^{\tau-1}\; du$ ebenfalls beschränkt. Folglich kann man nach dem Satz von der monotonen Konvergenz die Vertauschbarkeit vornehmen.

§2 Eisenstein- und Thetareihen

Da die bisher bekannten Ergebnisse über analytische Fortsetzbarkeit und Funktionalgleichung der Eisensteinreihe nicht ausreichend sind, um sie auf Dirichletreihen unseres Typs zu übertragen, leiten wir eine Integraldarstellung dieser Reihe her, aus der sich die gewünschten Eigenschaften ergeben. Zunächst ist offensichtlich, daß mit $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ q_1\gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_{0,\infty}\backslash\Gamma_0$, auch $-\sigma$ Repräsentant der gleichen Linksnebenklasse von Γ_0 ist, denn es gilt:

$$\psi_1(\delta_\sigma\overline{\delta}_\sigma) = \psi_1(\delta_{-\sigma}\overline{\delta}_{-\sigma}) \text{ und } \Delta_\sigma(u) = \Delta_{-\sigma}(u)\,.$$

Außerdem ist der Gaußsche Ring $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[i]$ euklidisch und daher lassen sich für ein teilerfremdes Paar $(q_1\gamma, \delta)$ stets $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ finden mit $\alpha\delta - q_1\gamma\beta = 1$. Folglich können wir die Eisensteinreihe (1.3) schreiben als

$$E^*(u,s,\psi_1) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\gamma,\delta\in\mathcal{O}\\(q_1\gamma,\delta)=1}} \psi_1(\delta\overline{\delta}) \frac{v^s}{\Delta_{(q_1\gamma,\delta)}(u)^s} \quad , \quad Re\, s > 2.$$

Leicht verifiziert man das Transformationsverhalten dieser Reihe:

$$E^*(\sigma(u),s,\psi_1) = \overline{\psi_1}(\delta_\sigma\overline{\delta}_\sigma)E^*(u,s,\psi_1)\ , \quad \sigma \in \Gamma_0(q_1).$$

Um die Teilerfremdheit in der Summation zu beseitigen, überlegen wir uns: Ist $\varepsilon = (q_1\gamma, \delta)$ und sind ε und l nicht teilerfremd, so wäre $\psi_1(|\delta|^2) = 0$ und das Paar $(\gamma,\delta) \in \mathcal{O}\times\mathcal{O}$ würde keinen Beitrag in der Summation leisten. Daher reicht es aus, die $\varepsilon \in \mathcal{O}$ mit $(\varepsilon, l) = 1$ zu betrachten und wegen der dazu äquivalenten Bedingung $(\varepsilon, q_1) = 1$ erhält man

$$\Delta_{(q_1\gamma,\delta)}(u) = |q_1\gamma z + \delta|^2 + |q_1\gamma|^2 v^2 = |\varepsilon|^2\{|q_1\gamma' z + \delta'|^2 + q_1\gamma'|^2 v^2\} \ .$$

Dies bedeutet:

$$\zeta_{\mathcal{K}}(s,\psi_1,q_1)\ E^*(u,s,\psi_1) = E(u,s,\psi_1)\ ,$$

mit

$$E(u,s,\psi_1) = \sum_{\gamma,\delta\in\mathcal{O}}{}' \psi_1(\delta\bar{\delta})\frac{v^s}{\Delta_{(q_1\gamma,\delta)}(u)^s} \quad , \quad Re\, s > 2,$$

$$\zeta_{\mathcal{K}}(s,\psi_1,q_1) = \sum_{\substack{\varepsilon\in\mathcal{O} \\ (\varepsilon,q_1)=1}} \frac{\psi_1(|\varepsilon|^2)}{|\varepsilon|^{2s}}. \tag{2.1}$$

Dabei steht $'$ in der Summation für $(\gamma,\delta) \neq (0,0)$.

Bemerkung
Die Bedingung $(\varepsilon, q_1) = 1$ kann weggelassen werden, da Summanden mit $(\varepsilon, q_1) > 1$ keinen Beitrag leisten. Die Reihe $\sum_{\varepsilon\in\mathcal{O}}{}' \frac{\psi(|\varepsilon|^2)}{|\varepsilon|^{2s}}$ konvergiert absolut und gleichmäßig für $Re\ s > 1$ und stellt eine holomorphe Funktion dar, die analytisch auf die ganze s–Ebene fortgesetzt werden kann. Die Fortsetzbarkeit kann man zum Beispiel wie folgt einsehen.
Betrachten wir für $\varepsilon = e_1 + ie_2$, $e_1, e_2 \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{(\pi(e_1^2+e_2^2))^s}\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-\pi(e_1^2+e_2^2)t}\ t^{s-1}dt\ , \quad e_1^2+e_2^2 > 0, \quad Re\ s > 0\ ,$$

multiplizieren mit $\psi_1(e_1^2+e_2^2)$, summieren über alle Paare $(e_1,e_2)\in\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$, so erhält man nach zulässiger Vertauschung von Summation und Integration:

$$\frac{1}{\pi^s}\Gamma(s)\sum_{e_1,e_2\in Z}{}' \frac{\psi_1(e_1^2+e_2^2)}{(e_1^2+e_2^2)^s} = \int_0^\infty \sum_{e_1,e_2\in Z}{}' \psi_1(e_1^2+e_2^2) e^{-\pi(e_1^2+e_2^2)t}\ t^{s-1}dt\ , \quad Re\ s > 1.$$

Durch Aufspaltung des Integrals an der Stelle $t = 1$ und Betrachtung der entsprechenden Teilintegrale folgert man die Fortsetzbarkeit unter Berücksichtigung, daß die Summe der rechten Seite majorisiert wird durch $\vartheta(it)^2 - 1$

und mit der Abschätzung $|\vartheta(it) - 1| \le c\, \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{\pi}{2}t}$, c absolut. Dabei ist $\vartheta(z)$ die Standardthetareihe.

Um die Integraldarstellung der Eisensteinreihe zu gewinnen, definieren wir uns für $u \in \widetilde{\mathcal{H}}$ die Funktion

$$K(u, s, \psi_1) = \frac{1}{\pi^s}\, \Gamma(s)\, E(u, s, \psi_1), \quad Re\, s > 2, \tag{2.2}$$

und wenden die Mellintransformation

$$\frac{1}{n^s}\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-nt} t^{s-1} dt\ , \quad Re\, s > 0,\ n > 0,$$

für $n = \frac{\pi\ \Delta_{(q_1\gamma,\delta)}(u)}{v}$ an. Aus der Vertauschung von Summation und Integration folgt

$$K(u, s, \psi_1) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \theta(t, u, \psi_1) t^{s-1} dt\ , \quad Re\, s > 2, \tag{2.3}$$

mit der Thetareihe

$$\theta(t, u, \psi_1) = \sum_{\gamma,\delta\in\mathcal{O}}{}' \psi_1(\delta\bar{\delta}) \exp\left(-\frac{\pi t}{v}\Delta_{(q_1\gamma,\delta)}(u)\right)\ , \quad t > 0,\ u \in \widetilde{\mathcal{H}}\, .$$

Diese konvergiert normal in $\mathbb{R}^+ \times \widetilde{\mathcal{H}}$.

Bemerkung
Haben wir die Endlichkeit von

$$\sum_{\gamma,\delta\in\mathcal{O}}{}' \int_0^\infty \left|\psi_1(\delta\bar{\delta}) \exp\left(-\frac{\pi t}{v}\Delta_{(q_1\gamma,\delta)}(u)\right)\ t^{s-1}\right|\ dt$$

gezeigt, so dürfen wir nach dem Satz von der monotonen Konvergenz Summation und Integration vertauschen.
Wie beim Beweis von nachfolgender Proposition 2.1 dargelegt, gibt es eine

Matrix $S > 0$ mit $\Delta_{(q_1\gamma,\delta)}(u) = g^t S g,\ g \in \mathbb{Z}^4$. Zu dieser Matrix existiert eine Zahl $\varepsilon_1 > 0$ mit $S[g] \geq \varepsilon_1 E_4[g]$. Daher bleibt nachzuweisen ($Re\ s = \tau$, $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 \pi}{v}$):

$$\sum_{g\in\mathbb{Z}^4}{}' \int_0^\infty \exp(-\varepsilon\ E_4[g]t)\ t^{\tau-1}\ dt < \infty$$

beziehungsweise

$$\sum_{g\in\mathbb{Z}^4}{}' \frac{1}{(\varepsilon\ E_4[g])^\tau}\ \Gamma(\tau-1) < \infty\,.$$

Die Endlichkeit ergibt sich aber aus $\sum'_{g\in\mathbb{Z}^4} \frac{1}{(g_1^2+g_2^2+g_3^2+g_4^2)^\tau} < \infty$ für $\tau > 2$.

Einerseits erweist sich die Konvergenz des Integrals (2.3) an der unteren Grenze als recht schwierig, andererseits kann dieses Problem mit der Inversionsformel für $\theta(t,u,\psi_1)$ gelöst werden kann. Daher leiten wir diese zuerst her.

Proposition 2.1
Für $t > 0,\ u \in \widetilde{\mathcal{H}}$ genügt die Thetareihe

$$\theta(t,u,\psi_1) = \sum_{\gamma,\delta\in\mathcal{O}}{}' \psi_1(\delta\bar{\delta}) \exp\left(-\frac{\pi t}{v}\Delta_{(q_1\gamma,\delta)}(u)\right)$$

der Inversionsformel

$$\theta(t,u,\psi_1) = \frac{G(\psi_1)}{q_1^2 l^2 t^2} \quad \theta(\frac{1}{q_1^2 l t}, \tau_{q_1 r}(u), \overline{\psi}_1).$$

Dabei ist $l = qr > 1,\ \tau_{q_1 r} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q_1 r & 0 \end{pmatrix}$ und $G(\psi_1)$ die Gaußsche Summe von 3.(3).

Bemerkung
Bereits in dieser Transformationsformel treten im Gegensatz zur charakterfreien Variante keine Pole auf. Die „Polfreiheit“ bereits auf dieser Ebene ist letztlich auch der Grund für die holomorphe Fortsetzbarkeit der Spinorzetafunktion unserer Modulform im Vergleich zur nur meromorphen Fortsetzung im charakterfreien Fall.

Beweis
Schreiben wir für $\gamma = g_1 + ig_2,\ \delta = g_3 + ig_4,\ g_1, g_2, g_3, g_4 \in \mathbb{Z}$, so zeigt man für $u = (z, v) \in \widetilde{\mathcal{H}},\ z = x + iy \in \mathbb{C}$, durch eine kleine Nebenrechnung:

$$\Delta_{(q_1\gamma,\delta)}(u) = |q_1\gamma z + \delta|^2 + |q_1\gamma|^2 v^2 = g^t S g$$

mit einer Matrix

$$S = \begin{pmatrix} q_1^2|u|^2 & 0 & q_1x & q_1y \\ 0 & q_1^2|u|^2 & -q_1y & q_1x \\ q_1x & -q_1y & 1 & 0 \\ q_1y & q_1x & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix}$$

und

$$det\, S = q_1^4 v^4, \quad S^{-1} = \frac{1}{q_1^2 v^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -q_1x & -q_1y \\ 0 & 1 & q_1y & -q_1x \\ -q_1x & q_1y & q_1^2|u|^2 & 0 \\ -q_1y & -q_1x & 0 & q_1^2|u|^2 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Berücksichtigen wir die normale Konvergenz von Thetareihen und setzen für $z \in \mathbb{H}_1, a, b \in \mathbb{C}^4$,

$$\vartheta_{a,b}(S, z) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^4} \exp\left(\pi i \{S[g + \frac{1}{2}a]z + b^t g\}\right),$$

so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\theta(t,u,\psi_1) &= \sum_{g\in\mathbb{Z}^4} \psi_1(g_3^2+g_4^2)\exp\left(\pi i S[g]\frac{it}{v}\right)\\
&= \sum_{g\in\mathbb{Z}_l^4} \psi_1(g_3^2+g_4^2) \sum_{\substack{g_0\in\mathbb{Z}^4\\ g_0\equiv g \ mod \ l}} \exp\left(\pi i S[g_0]\frac{it}{v}\right)\\
&= \sum_{g\in\mathbb{Z}_l^4} \psi_1(g_3^2+g_4^2) \sum_{h\in\mathbb{Z}^4} \exp\left(\pi i S[g+hl]\frac{it}{v}\right)\\
&= \sum_{g\in\mathbb{Z}_l^4} \psi_1(g_3^2+g_4^2) \sum_{h\in\mathbb{Z}^4} \exp\left(\pi i S[h+\frac{g}{l}]\frac{itl^2}{v}\right)\\
&= \sum_{g\in\mathbb{Z}_l^4} \psi_1(g_3^2+g_4^2) \quad \vartheta_{2\frac{g}{l},0}\left(S,\frac{itl^2}{v}\right).
\end{aligned}$$

Bemerkung
Da laut unseren Voraussetzungen im Haupttheorem $l = qr > 1$ ist, können wir auf die Summationsbedingung $'$ verzichten, da der Charakter für $g = (0,0,0,0)^t$ den Summanden verschwinden läßt.

Mit der verallgemeinerten Thetatransformationsformel (vgl. E. FREITAG [Fr], S.22, Satz 0.13)

$$\vartheta_{a,b}(S^{-1},-z^{-1}) = e^{-\frac{1}{2}\pi i a^t b}\sqrt{det\, S}\ \left(\frac{z}{i}\right)^2 \ \vartheta_{b,-a}(S,z), \qquad z\in\mathbb{H}_1,$$

erhalten wir:

$$\theta(t,u,\psi_1) = \frac{1}{q_1^2 l^4\, t^2}\sum_{h\in\mathbb{Z}^4}\exp\left(\pi i S^{-1}[h]\left(-\frac{v}{itl^2}\right)\right)\sum_{g\in\mathbb{Z}_l^4}\psi_1(g_3^2+g_4^2)e^{\frac{2\pi i}{l}g^t h}.$$

Die Abhängigkeit der inneren Summe von $h\in\mathbb{Z}^4$ beseitigt man durch Zerlegung derselben in zwei Teilsummen und zum einen

$$\sum_{g_1,g_2\in\mathbb{Z}_l} e^{\frac{2\pi i}{l}(g_1h_1+g_2h_2)} = \begin{cases} l^2, & \text{falls } l|h_1 \text{ und } l|h_2\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

berücksichtigt, zum anderen für die zweite Teilsumme Lemma 3 aus Kapitel 3 anwendet, nämlich

$$\sum_{g_3,g_4\in\mathbb{Z}_l} \psi_1(g_3^2+g_4^2)e^{\frac{2\pi i}{l}(g_3h_3+g_4h_4)} = \overline{\psi}_1(h_3^2+h_4^2)G(\psi_1)\ .$$

Die Gaußsche Summe $G(\psi_1)$ kann jetzt vorgezogen werden und wir erhalten:

$$\theta(t,u,\psi_1) = \frac{G(\psi_1)}{q_1^2 l^2\, t^2} \sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^4\\ l|h_1,l|h_2}} \overline{\psi}_1(h_3^2+h_4^2)\ \exp\left(\pi i S^{-1}[h]\left(-\frac{v}{itl^2}\right)\right).$$

Ersetzen wir in der Summation h_1 beziehungsweise h_2 durch lh_1' beziehungsweise lh_2' und schreiben in der Matrix S^{-1} (vgl. (2.4)) lr für q_1, so gilt

$$S^{-1}[h] = \frac{1}{r^2v^2}S_1[h']$$

mit

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -rx & -ry \\ 0 & 1 & ry & rx \\ -rx & ry & |ru|^2 & 0 \\ -ry & rx & 0 & |ru|^2 \end{pmatrix}\ ,\quad h' = \begin{pmatrix} h_1' \\ h_2' \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}.$$

Zusammenfassend ergibt sich

$$\theta(t,u,\psi_1) = \frac{G(\psi_1)}{q_1^2 l^2 t^2} \sum_{h'\in\mathbb{Z}^4} \overline{\psi}_1(h_3^2+h_4^2)\ \exp\left(\frac{\pi i}{v}S_1[h']\left(-\frac{1}{itq_1^2}\right)\right).$$

Mit der „Methode des genauen Hinschauens“ läßt sich obige Summe schreiben als

$$\theta(\frac{1}{q_1^2 l\, t}, \tau_{q_1 r}(u), \overline{\psi}_1)\ ,$$

da $\tau_{q_1}(ru) = \tau_{q_1 r}(u)$ ist, und wir sind fertig.

Mit dieser Inversionsformel läßt sich nun die Fortsetzbarkeit und die Funktionalgleichung von $K(u, s, \psi_1)$ begründen.

Proposition 2.2
Die in der Halbebene $\operatorname{Re} s > 2$ *für* $u \in \widetilde{\mathcal{H}}$ *definierte Funktion*

$$K(u, s, \psi_1) = \frac{1}{\pi^s}\,\Gamma(s)\,E(u, s, \psi_1)$$

hat folgende Eigenschaften:

(1) Sie ist holomorph auf die ganze s–Ebene fortsetzbar.

(2) Sie genügt der Funktionalgleichung

$$K(u, s, \psi_1) = \frac{G(\psi_1)}{q_1^{2s-2} l^s} \quad K(\tau_{q_1 r}(u), 2-s, \overline{\psi}_1).$$

Beweis

(1) Im nachfolgenden Paragraphen wird die Fortsetzbarkeit in allgemeinerer Form bewiesen. Daher sei der Leser auf den dort angeführten Satz 3.1 verwiesen.

(2) Mit Proposition 2.1 erhält man

$$\begin{aligned} 2K(u, s, \psi_1) &= \int_0^\infty \theta(t, u, \psi_1) t^{s-1} dt \\ &= \frac{G(\psi_1)}{q_1^2 l^2} \int_0^\infty \theta(\frac{1}{q_1^2 lt}, \tau_{q_1 r}(u), \overline{\psi}_1) t^{s-3} dt\,. \end{aligned}$$

Die Substitution $\frac{1}{q_1^2 lt} \to t$, die die Rollen von 0 und ∞ vertauscht, führt zur gewünschten Behauptung und der Beweis ist erbracht.

§3 Holomorphe Fortsetzung

Um in diesem Abschnitt die holomorphe Fortsetzbarkeit der Dirichletreihe $R(s, F_\chi)$ zu zeigen, verwenden wir die nach Lemma 1.1 gültige Integraldarstellung

$$\frac{1}{(4\pi)^s}\Gamma(s)R(s,F_\chi) = \int\limits_{\mathcal{F}} \widetilde{F}_\chi(u)\ v^k E^*(u, s-k+2, \psi_1)\frac{du}{v^3}\ .$$

Dabei ist $Re\ s > k,\ u \in \widetilde{\mathcal{H}}$ und $\mathcal{F}$ Fundamentalbereich zu $\Gamma_0(q_1)$. Aus den im vorherigen Paragraphen definierten Funktionen (vgl. (2.1), (2.2)) und Zusammenhängen folgt, sofern

$$\Delta(s,\psi_1) = \frac{1}{\pi^s}\Gamma(s)\zeta_{\mathcal{K}}(s,\psi_1,q_1)$$

gesetzt und obige Gleichung mit $\Delta(s-k+2,\psi_1)$ multipliziert wird:

$$\Delta(s-k+2,\psi_1)\frac{1}{(4\pi)^s}\Gamma(s)R(s,F_\chi) = \int\limits_{\mathcal{F}} \widetilde{F}_\chi(u)\ v^k K(u,s-k+2,\psi_1)\frac{du}{v^3}\ . \tag{3.1}$$

Wir wären fertig, wenn die Existenz des Integrals für beliebiges $s \in \mathbb{C}$ nachgewiesen wäre. Doch einerseits ist der Fundamentalbereich $\mathcal{F}$ von $\Gamma_0(q_1)$ nicht konkret bekannt, andererseits müßte man Aussagen über die Fortsetzbarkeit von $K(u,s,\psi_1)$ kennen und dieser Nachweis steht noch aus (vgl. Beweis zu Proposition 5.2.2). Da aber nach T. KUBOTA [Ku] mit D ein Fundamentalbereich zur Obergruppe $Sl_2(\mathcal{O}) = \Gamma$ von $\Gamma_0(q_1)$ bekannt ist, nämlich

$$D = \left\{ u \in \widetilde{\mathcal{H}}\ ;\ 0 \le x+y, x \le \frac{1}{2}, y \le \frac{1}{2}, 1 \le x^2+y^2+v^2 \right\}, \tag{3.2}$$

können wir durch Zerlegung von Γ in Linksnebenklassen mod $\Gamma_0(q_1)$ unsere Konvergenzbetrachtungen auf D beziehen. Offensichtlich ist $h = [\Gamma : \Gamma_0(q_1)]$ endlich und wir erhalten

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{h} \Gamma_0(q_1)\sigma_j .$$

Dabei durchlaufe σ_j ein Vertretersystem aller Linksnebenklassen. Mit $\mathcal{F}$ ist auch $\mathcal{F}' = \bigcup_{j=1}^{h} \sigma_j D$ Fundamentalbereich und wir bekommen aufgrund des invarianten Volumenelements $v^{-3}du$ von $Sl_2(\mathbb{C})$:

$$\int\limits_{\mathcal{F}} \widetilde{F}_\chi(u) v^k K(u, s-k+2, \psi_1) \frac{du}{v^3} = \sum_{j=1}^{h} \int\limits_{D} \widetilde{F}_\chi(\sigma_j(u)) v(\sigma_j(u))^k K(\sigma_j(u), s-k+2, \psi_1) \frac{du}{v^3}. \tag{3.3}$$

Folglich reicht es aus, das Integral

$$I_\sigma(s-k+2) = \int\limits_{D} \widetilde{F}_\chi(\sigma(u))\, v(\sigma(u))^k K(\sigma(u), s-k+2, \psi_1) \frac{du}{v^3}, \qquad Re\, s > k, \tag{3.4}$$

für einen Repräsentanten $\sigma \in Sl_2(\mathcal{O})$ einer Linksnebenklasse auszuwerten.

Da in (3.4) $u \in D$ gewählt ist, in Proposition 2.2 die Fortsetzbarkeit von $K(u, s, \psi_1)$ aber für $u \in \widetilde{\mathcal{H}}$ angegeben wurde und dieser Nachweis noch aussteht, formulieren wir den nachfolgenden Satz allgemeiner als wir ihn hier benötigen.

Satz 3.1
Es sei $u \in \widetilde{\mathcal{H}}$, $\sigma \in Sl_2(\mathcal{O})$ und

$$K(\sigma(u), s, \psi_1) = \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty \theta(t, \sigma(u), \psi_1)\ t^{s-1} dt$$

sei die für Re $s > 2$ gültige Integraldarstellung der Eisensteinreihe. Dann gilt:
Das Integral der rechten Seite konvergiert absolut und gleichmäßig in kompakten Teilmengen der s-Ebene und stellt eine in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion dar. Die Funktion $K(\sigma(u), s, \psi_1)$ ist holomorph auf die ganze s-Ebene fortsetzbar.

Bemerkung
Für die Gültigkeit des Satzes muß $\sigma \in Sl_2(\mathcal{O})$ nicht dem vorgegebenen Repräsentantensystem angehören. Ist $\sigma = E_2$, so erhält man die holomorphe Fortsetzbarkeit von $K(u, s, \psi_1)$ für $u \in \widetilde{\mathcal{H}}$, wodurch die Lücke im Beweis von Proposition 2.2 geschlossen ist.

Der Beweis fußt auf zwei Lemmata. In Lemma 3.2 verallgemeinern wir die für beliebiges $u = (z, v) \in \widetilde{\mathcal{H}}$ gültige Ungleichung

$$\Delta_{(\gamma,\delta)}(u) \geq \frac{v^2}{|z|^2 + v^2 + 1}(|\gamma|^2 + |\delta|^2), \quad \gamma, \delta \in \mathcal{O} \tag{3.5}$$

(vgl. ANDRIANOV [An2], S. 106).
Versteht man unter $\sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon & \pi \\ \xi & \zeta \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathcal{O})$ den Repräsentanten unserer Linksnebenklasse, so existiert eine Konstante $c_1' \geq 1$ mit

$$0 \leq |\varepsilon|, |\pi|, |\xi|, |\zeta| \leq c_1'.$$

Wegen

$$\sigma(u) = \left(\frac{(\varepsilon z + \pi)(\bar{\xi}\bar{z} + \bar{\zeta}) + \varepsilon\bar{\xi}v^2}{\Delta_\sigma(u)}, \frac{v}{\Delta_\sigma(u)} \right), \quad \Delta_\sigma(u) = | \xi z + \zeta |^2 + |\xi|^2 v^2,$$

(vgl. 1.(3.2)) gilt

$$\begin{aligned} |(\varepsilon z + \pi)(\bar{\xi}\bar{z} + \bar{\zeta}) + \varepsilon\bar{\xi}v^2| \quad &\leq \quad c_1'^2 \, ((|z| + 1)^2 + v^2), \\ \Delta_\sigma(u) \quad &\leq \quad c_1'^2 \, ((|z| + 1)^2 + v^2). \end{aligned}$$

Lemma 3.2
Ist $\tau_{q_1 r} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q_1 r & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon & \pi \\ \xi & \zeta \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathcal{O})$*, so gilt für* $u = (z, v) \in \widetilde{H}$, $c_1 = 2(q_1 r c_1'^2)^2$:

$$a.) \quad \Delta_{(q_1\gamma,\delta)}(\tau_{q_1 r}(\sigma(u)) \geq \frac{v^2}{c_1((|z| + 1)^2 + v^2)^2 + v^2}(|\gamma|^2 + |\delta|^2),$$

$$b.) \quad \Delta_{(q_1\gamma,\delta)}(\sigma(u)) \geq \frac{v^2}{c_1((|z| + 1)^2 + v^2)^2 + v^2}(|\gamma|^2 + |\delta|^2).$$

Beweis
a.) Für beliebiges $u \in \widetilde{\mathcal{H}}$ und mit

$$\tau_{q_1 r}\sigma = \begin{pmatrix} -\xi & -\zeta \\ q_1 r\varepsilon & q_1 r\pi \end{pmatrix}$$

erhält man leicht (vgl. 1.(3.3)):

$$\tau_{q_1r}(\sigma(u)) = \left(-\frac{(\xi z+\zeta)(\bar\varepsilon\bar z+\bar\pi)+\xi\bar\varepsilon v^2}{q_1r(|\varepsilon z+\pi|^2+|\varepsilon|^2v^2)}, \frac{v}{q_1r(|\varepsilon z+\pi|^2+|\varepsilon|^2v^2)} \right). \quad (3.6)$$

Mit Ungleichung (3.5) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\Delta_{(q_1\gamma,\delta)}(\tau_{q_1r}(\sigma(u))) &\geq \frac{v(\tau_{q_1r}(\sigma(u)))^2\,(|\gamma|^2+|\delta|^2)}{|z\,(\tau_{q_1r}(\sigma(u)))|^2+v\,(\tau_{q_1r}(\sigma(u)))^2+1}\\
&= \frac{v^2\,(|\gamma|^2+|\delta|^2)}{|(\xi z+\zeta)(\bar\varepsilon\bar z+\bar\pi)+\xi\bar\varepsilon v^2|^2+v^2+(q_1r(|\varepsilon z+\pi|^2+|\varepsilon|^2v^2))^2}\\
&\geq \frac{v^2\,(|\gamma|^2+|\delta|^2)}{(c_1'^2\,((|z|+1)^2+v^2))^2+v^2+(q_1rc_1^2((|z|+1)^2+v^2)^2}\\
&= \frac{v^2\,(|\gamma|^2+|\delta|^2)}{c_1'^4\,((|z|+1)^2+v^2)^2\,(1+(q_1r)^2)+v^2}\\
&\geq \frac{v^2}{2(q_1r)^2c_1'^4\,((|z|+1)^2+v^2)^2+v^2}\,(|\gamma|^2+|\delta|^2)\\
&= \frac{v^2}{c_1((|z|+1)^2+v^2)^2+v^2}\,(|\gamma|^2+|\delta|^2)\,.
\end{aligned}$$

b.) Da diese Abschätzung analog verläuft, verzichten wir auf die Ausführung und sind fertig.

Um die Thetareihe abzuschätzen, benötigt man

Lemma 3.3
Sind $\tau_{q_1r} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q_1r & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon & \pi \\ \xi & \zeta \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathcal{O})$, *so gilt für* $u=(z,v)\in\widetilde{\mathcal{H}}$, $t \geq w = \frac{\sqrt{l}}{q_1 l}$ *mit einer absoluten Konstanten c:*

a.) $|\theta(t,\tau_{q_1r}(\sigma(u)),\overline{\psi}_1)| \leq c\;\; t^{-1/2}\left(\frac{1}{\alpha^{1/2}}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^{3/2}}+\frac{1}{\alpha^2}\right)\,e^{-\frac{\pi}{2}\alpha t}$,

$$\textit{wobei} \qquad \alpha = \begin{cases} |\varepsilon|^2\,\frac{v^3}{c_1((|z|+1)^2+v^2)^2+v^2}, & \textit{falls } \varepsilon\neq 0\\ |\pi|^2\,\frac{v}{c_1((|z|+1)^2+v^2)^2+v^2}, & \textit{falls } \varepsilon = 0 \end{cases},$$

b.) $|\theta(t,\sigma(u),\psi_1)| \le c\ t^{-1/2}\ \left(\frac{1}{\beta^{1/2}}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^{3/2}}+\frac{1}{\beta^2}\right)\ e^{-\frac{\pi}{2}\beta t}$,

$$\textit{wobei}\qquad \beta = \begin{cases} |\xi|^2\ \frac{v^3}{c_1((|z|+1)^2+v^2)^2+v^2}, & \textit{falls } \xi \neq 0 \\ |\zeta|^2\ \frac{v}{c_1((|z|+1)^2+v^2)^2+v^2}, & \textit{falls } \xi = 0 \end{cases}.$$

Beweis

Die Fälle $\varepsilon = \pi = 0$ und $\zeta = \xi = 0$ können nicht auftreten, weil $\sigma \in Sl_2(\mathcal{O})$ ist.

a.) Beschränken wir uns auf den Fall $\varepsilon \neq 0$ und berücksichtigen, daß in der Summation das Paar $(\gamma,\delta) = (0,0)$ nicht auftritt, so erhalten wir mit Lemma 3.2 und (3.6):

$$\begin{aligned} |\theta(t,\tau_{q_1r}(\sigma(u)),\overline{\psi}_1)| &\le \sum_{\gamma,\delta\in\mathcal{O}}{}' \exp\left(\frac{\pi t}{v(\tau_{q_1r}(\sigma(u)))}\Delta_{(q_1\gamma,\delta)}(\tau_{q_1r}(\sigma(u)))\right) \\ &\le \sum_{\gamma,\delta\in\mathcal{O}}{}' \exp\left(-\frac{\pi t}{v}q_1r(|\varepsilon z+\pi|^2+|\varepsilon|^2v^2)\ \frac{v^2\ (|\gamma|^2+|\delta|^2)}{c_1((|z|+1)^2+v^2)^2+v^2}\right) \\ &\le \sum_{\gamma,\delta\in\mathcal{O}} \exp\left(-\pi\alpha t\ (|\gamma|^2+|\delta|^2)\right) - 1 \\ &= \vartheta(i\alpha)^4 - 1\,. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\alpha = |\varepsilon|^2\frac{v^3}{c_1((|z|+1)^2+v^2)^2+v^2)} > 0$ und $\vartheta(z),\ z \in \mathbb{H}_1$, wiederum die Standardthetareihe.

Für $\varepsilon = 0$, ist $|\varepsilon z+\pi|^2+|\varepsilon|^2v^2 = |\pi|^2$ und $\alpha = |\pi|^2\frac{v}{c_1((|z|+1)^2+v^2)^2+v^2)}$.

Benutzen wir die für beliebiges $\alpha_1 > 0$ gültige Ungleichung

$$|\vartheta(i\alpha_1)-1| \le c_2\ \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\ e^{-\frac{\pi}{2}\alpha_1} \quad , \quad c_2 \text{ absolut},$$

so gilt:

$$\begin{aligned} |\theta(t,\tau_{q_1r}(\sigma(u)),\overline{\psi}_1)| &\le (1+\vartheta(i\alpha\ t)-1)^4-1 \\ &\le c_2\ c_3\ \left(\frac{1}{(\alpha t)^{1/2}}+\frac{1}{\alpha t}+\frac{1}{(\alpha t)^{3/2}}+\frac{1}{(\alpha t)^2}\right)\ e^{-\frac{\pi}{2}\alpha t}. \end{aligned}$$

Ist $t \geq w$, so existiert eine von t unabhängige Konstante c_4 mit

$$\frac{1}{(\alpha t)^{1/2}} + \frac{1}{\alpha t} + \frac{1}{(\alpha t)^{3/2}} + \frac{1}{(\alpha t)^2} \leq c_4 \; \frac{1}{t^{1/2}} \; \left(\frac{1}{\alpha^{1/2}} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^{3/2}} + \frac{1}{\alpha^2} \right) \; ,$$

wodurch sich die Behauptung ergibt.

b.) Auch hier verläuft der Nachweis analog zu a.) und daher verzichten wir darauf.

Beweis von Satz 3.1
Spalten wir in der Identität

$$2 \; K(\sigma(u), s, \psi_1) = \int\limits_0^\infty \theta(t, \sigma(u), \psi_1) \; t^{s-1} dt, \qquad u \in \widetilde{\mathcal{H}},$$

das beidseitig uneigentliche Integral an der Stelle $w = \frac{\sqrt{l}}{q_1 l} > 0$ auf, so folgt aus Proposition 2.1:

$$2K(\sigma(u), s, \psi_1) = \frac{G(\psi_1)}{q_1^2 l^2} \int\limits_0^w \theta(\frac{1}{q_1^2 l t}, \tau_{q_1 r}(\sigma(u)), \overline{\psi}_1) t^{s-3} dt + \int\limits_w^\infty \theta(t, \sigma(u), \psi_1) t^{s-1} dt.$$

Die Substitution $\frac{1}{q_1^2 l \, t} \to t$ führt auf

$$2 \; K(\sigma(u), s, \psi_1) = \frac{G(\psi_1)}{q_1^{2s-2} l^s} \quad I_1(s) + I_2(s) \tag{3.7}$$

mit

$$I_1(s) = \int\limits_w^\infty \theta(t, \tau_{q_1 r}(\sigma(u)), \overline{\psi}_1) t^{1-s} dt \quad \text{ und } \quad I_2(s) = \int\limits_w^\infty \theta(t, \sigma(u), \psi_1) t^{s-1} dt \; .$$

Benutzen wir für $I_1(s)$ Lemma 3.3 im Fall $\varepsilon \neq 0$, so gilt $(s = \tau + i\lambda)$:

$$\int\limits_w^\infty \left| \theta(t, \tau_{q_1 r}(\sigma(u)), \overline{\psi}_1) t^{1-s} \right| dt \leq c \; \left(\frac{1}{\alpha^{1/2}} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^{3/2}} + \frac{1}{\alpha^2} \right) \int\limits_w^\infty e^{-\frac{\pi}{2} \alpha t} t^{1/2 - \tau} dt \; .$$

Die Substitution $\frac{\pi}{2}\alpha t \to t$ ergibt:

$$\int\limits_{w}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}\alpha t} t^{1/2-\tau} dt = \left(\frac{2}{\pi\alpha}\right)^{3/2-\tau} \int\limits_{\pi\alpha w/2}^{\infty} e^{-t} t^{1/2-\tau} dt\,.$$

Variiert s in einem Kompaktum von $\mathbb{C}$, so ist $3/2-\tau$ durch ein von τ unabhängige Konstante c_5 beschränkt. Mit der Abschätzung $e^{-t}\, t^{c_5-1} \leq c_6\, e^{-t/2}$, c_6 unabhängig von t, erhält man:

$$\int\limits_{w}^{\infty} \left|\theta(t, \tau_{q_1 r}(\sigma(u)), \overline{\psi}_1) t^{1-s}\right| dt \leq C\ \left(\frac{1}{\alpha^{1/2}} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^{3/2}} + \frac{1}{\alpha^2}\right)\ e^{-\frac{\pi}{4}w\alpha}\ \alpha^{c_7}\,. \tag{3.8}$$

Also konvergiert das Integral in diesem Kompaktum absolut und gleichmäßig und $I_1(s)$ ist eine in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Der Fall $\varepsilon = 0$ liefert das gleiche Ergebnis. Die Holomorphie von $I_2(s)$ zeigt man analog. Durch analytische Fortsetzung erhält man die Holomorphie von $K(\sigma(u), s, \psi_1)$ und Satz 3.1 ist bewiesen.

Mit den bisherigen Überlegungen läßt sich nun die holomorphe Fortsetzbarkeit der Dirichletreihe $R(s, F_\chi)$ zeigen.
Der Integrand von

$$I_\sigma(s-k+2) = \int\limits_{D} \widetilde{F}_\chi(\sigma(u))\, v(\sigma(u))^k\ K(\sigma(u), s-k+2, \psi_1) \frac{du}{v^3} \tag{3.9}$$

ist natürlich holomorph. Der Matrix $\sigma \in Sl_2(\mathcal{O})$ entspricht aufgrund des Isomorphismus $\varphi : \mathcal{G} \longrightarrow Sl_2(\mathbb{C})$ eine Matrix $M \in \mathcal{G} \cap Sp_2(\mathbb{Z})$ (vgl. 1.(3.6)). Unter Berücksichtigung der Peterssonschen Schreibweise erhalten wir im hyperbolischen Raum $\widetilde{\mathcal{H}}$ (vgl. 1.(3.9))

$$\widetilde{F}_\chi(\sigma(u)) = \Delta_\sigma(u)^k \widetilde{F_\chi \underset{k}{|} M}(u)$$

und (3.9) geht über in

$$I_\sigma(s-k+2) = \int\limits_{D} \widetilde{F_\chi \underset{k}{|} M}(u) v^{k-3} K(\sigma(u), s-k+2, \psi_1) du.$$

Mit 3. Lemma 3.3, (3.7), (3.8) und dem entsprechenden Analogon von (3.8) für $I_2(s-k+2)$ gilt:

$$\begin{aligned} |K(\sigma(u), s-k+2, \psi_1)| \leq \frac{1}{2} \frac{l}{q_1^{2\tau-2k+2} l^{\tau-k+2}} \; C \; \alpha^{c_7} \; \times \\ \times \left(\frac{1}{\alpha^{1/2}} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^{3/2}} + \frac{1}{\alpha^2} \right) e^{-\frac{\pi}{4}\alpha w} \\ + \frac{1}{2} \; C' \; \beta^{c_7'} \left(\frac{1}{\beta^{1/2}} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^{3/2}} + \frac{1}{\beta^2} \right) e^{-\frac{\pi}{4}\beta w} \; . \end{aligned}$$

Nutzen wir nun die Gestalt des Fundamentalbereichs D aus (vgl. (3.2)), so erhalten wir unabhängig von $\varepsilon, \pi, \xi, \varsigma$ mit Konstanten c_8, c_9:

$$c_8 \; \frac{1}{v^3} \leq \alpha \leq c_9 \; v \quad \text{beziehungsweise} \quad c_8 \; \frac{1}{v^3} \leq \beta \leq c_9 \; v.$$

Mit Konstanten c_{10}, c_{11} bedeutet dies:

a.) $\frac{1}{\alpha^{1/2}} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^{3/2}} + \frac{1}{\alpha^2} \leq c_{10} \; v^6, \qquad e^{-\frac{\pi}{4}\alpha w} \leq e^{-c_{11} \; \frac{1}{v^3}},$

b.) $\frac{1}{\beta^{1/2}} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^{3/2}} + \frac{1}{\beta^2} \leq c_{10} \; v^6, \qquad e^{-\frac{\pi}{4}\beta w} \leq e^{-c_{11} \; \frac{1}{v^3}}.$

Variiert $s \in \mathbb{C}$ wiederum in einem Kompaktum, so wird $|K(\sigma(u), s-k+2, \psi_1)|$ majorisiert durch

$$c_{12} \; v^6 \; .$$

Mit F_χ ist natürlich auch $F_\chi \underset{k}{|} M$ Spitzenform und für $v \to \infty$ exponentiell abklingend. Daher konvergiert $I_\sigma(s-k+2)$ in der ganzen s-Ebene und stellt dort eine holomorphe Funktion dar. Vermöge (3.3) und (3.1) besitzt $R(s, F_\chi)$ eine holomorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$.

§4 Funktionalgleichung

Um den Zusammenhang zwischen $R(s, F_\chi)$ und $R(2k-s-2, F^*_{\overline{\chi}})$ herzuleiten, erinnern wir an die Identität (3.1):

$$\Delta(s-k+2,\psi_1)\frac{1}{(4\pi)^s}\Gamma(s)R(s,F_\chi) = \int\limits_{\mathcal{F}} \widetilde{F}_\chi(u)v^k K(u,s-k+2,\psi_1)\frac{du}{v^3}\ ,$$

wobei $\Delta(s,\psi_1) = \frac{1}{\pi^s}\ \Gamma(s)\ \zeta_{\mathcal{K}}(s,\psi_1,q_1)$, $\mathcal{F}$ Fundamentalbereich zu $\Gamma_0(q_1)$. Benutzen wir die Funktionalgleichung von $K(u,s,\psi_1)$ (vgl. Proposition 2.2), so wird obiges Integral zu

$$\frac{G(\psi_1)}{q_1^{2s-2k+2}l^{s-k+2}}\int\limits_{\mathcal{F}} \widetilde{F}_\chi(u)\ v^k K(\tau_{q_1r}(u),k-s,\overline{\psi}_1)\frac{du}{v^3}\ .$$

Berücksichtigen wir ferner die Definition von $K(u,s,\psi_1)$ (2.2), so wird obenstehende Gleichung zu

$$\Delta(s-k+2,\psi_1)\ \frac{\Gamma(s)}{(4\pi)^s}\ R(s,F_\chi) = \frac{G(\psi_1)}{q_1^{2s-2k+2}l^{s-k+2}}\ \Delta(k-s,\overline{\psi_1},)\times$$

$$\times\int\limits_{\mathcal{F}} \widetilde{F}_\chi(u)v^k E^*(\tau_{q_1r}(u),k-s,\overline{\psi}_1)\frac{du}{v^3}\ . \tag{4.1}$$

Daher sind wir fertig, wenn das „unfolding“ des Integrals

$$\int\limits_{\mathcal{F}} \widetilde{F}_\chi(u)v^k E^*(\tau_{q_1r}(u),k-s,\overline{\psi}_1)\frac{du}{v^3} \tag{4.2}$$

für $Re(k-s) >> 0$ durchgeführt ist.
Die nachfolgenden Überlegungen und Berechnungen verfolgen alle den Zweck, die aus Konvergenzgründen eingeführte Eisensteinreihe wieder zu beseitigen und die sich daraus ergebenden Summen zu vereinfachen. Ersteres erweist sich deswegen als schwierig, da im Integral (4.2) die Involution $\tau_{q_1r}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q_1r & 0\end{pmatrix}$ als Argument in der Eisensteinreihe auftritt, der Fundamentalbereich $\mathcal{F}$ sich aber auf die Gruppe $\Gamma_0(q_1)$ bezieht.

4.1 Auflösung der Eisensteinreihe

Es sei

$$\Gamma_0\left(q_1 r, \frac{1}{r}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{r} \\ q_1 r\gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{C}); \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{O} \right\} .$$

Im Integral (4.2) läßt sich das Argument $\tau_{q_1 r}(u)$ durch erneute Anwendung der Involution $\tau_{q_1 r}$ auf u zurückführen. Daher transformieren wir den Fundamentalbereich $\mathcal{F}$ von $\Gamma_0(q_1)$ mit $\tau_{q_1 r}^{-1}$. Für $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ q_1\gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q_1)$ ist wegen $\tau_{q_1 r}\sigma\tau_{q_1 r}^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\frac{\gamma}{r} \\ -q_1 r\beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\mathcal{F}_1 = \tau_{q_1 r}^{-1}(\mathcal{F})$ Fundamentalbereich von $\tau_{q_1 r}\Gamma_0(q_1)\tau_{q_1 r}^{-1} = \Gamma_0(q_1 r, \frac{1}{r})$. Berücksichtigen wir

a.)
$$\tau_{q_1 r}(u) = \left(\frac{-\bar{z}}{q_1 r|u|^2}, \frac{v}{q_1 r|u|^2} \right) \quad , \quad \Delta_{\tau_{q_1 r}}(u) = (q_1 r)^2 |u|^2 \, ,$$

b.) das Urbild der Matrix $\tau_{q_1 r} \in Gl_2^+(\mathbb{C})$ unter dem Isomorphismus $\varphi : \mathcal{G}_1 \to Gl_2^+(\mathbb{C})$ (vgl. 1.(3.6) und die nachfolgende Bemerkung), nämlich

$$\varphi^{-1}(\tau_{q_1 r}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{matrix} q_1 r & 0 \\ 0 & -q_1 r \end{matrix} & \mathbf{0} \end{array} \right) = N'_{q_1 r} \, ,$$

so gilt (vgl. 1.(3.9)):

$$\widetilde{F}_\chi(\tau_{q_1 r}(u)) = (q_1 r)^k |u|^{2k} \widetilde{F_\chi \underset{k}{|} N'_{q_1 r}}(u),$$

wobei sich $\widetilde{F_\chi \underset{k}{|} N'_{q_1 r}}$ zu $\Gamma_0(q_1 r, \frac{1}{r})$ transformiert. Wir erhalten unter Berücksichtigung des invarianten Volumenelements $v^{-3}du$:

$$\int\limits_{\mathcal{F}} \widetilde{F}_\chi(u) v^k E^*(\tau_{q_1 r}(u), k-s, \overline{\psi}_1)\frac{du}{v^3} = \int\limits_{\mathcal{F}_1} \widetilde{F}_\chi(\tau_{q_1 r}(u)) v(\tau_{q_1 r}(u))^k E^*(u, k-s, \overline{\psi}_1)\frac{du}{v^3}$$

$$= \int\limits_{\mathcal{F}_1} \widetilde{F_\chi \underset{k}{|} N'_{q_1 r}}(u)\; v^k\; E^*(u, k-s, \overline{\psi}_1)\frac{du}{v^3}\;. \tag{4.1.1}$$

Unsere Eisensteinreihe transformiert sich zu $\Gamma_0(q_1)$, $\mathcal{F}_1$ ist Fundamentalbereich bezüglich $\Gamma_0(q_1 r, \frac{1}{r})$. Unter diesen Bedingungen ist $E^*(u, k-s, \overline{\psi}_1)$ aber nicht aufzulösen. Jedoch:

Hätten wir eine Obergruppe von $\Gamma_0(q_1)$, zu der sich die Eisensteinreihe ebenso transformiert und die zugleich Obergruppe von $\Gamma_0(q_1 r, \frac{1}{r})$ ist, so könnte man das Integral auf einen Fundamentalbereich dieser Obergruppe beziehen.

Dazu übertragen wir zunächst die Peterssonsche Schreibweise auf Eisensteinreihen im hyperbolischen Raum, nämlich

$$E^*(u, s, \psi_1)\underset{k}{|}\sigma = (\det\, \sigma)^k \Delta_\sigma(u)^{-k} E^*(\sigma(u), s, \psi_1), \quad \sigma \in Gl_2^+(\mathbb{C})\;.$$

Wegen

$$E^*(\sigma(u), s, \psi_1) = \overline{\psi_1}(\delta_\sigma \bar{\delta}_\sigma) E^*(u, s, \psi_1), \quad \sigma \in \Gamma_0(q_1),$$

ist $E^*(u, s, \psi_1)$ automorph vom Gewicht 0 bzgl. $\Gamma_0(q_1)$. Definiert man sich die Reihe $E_1^*(u, s, \psi_1)$ durch

$$E_1^*(u, s, \psi_1) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\gamma, \delta \in \mathcal{O} \\ (qr\gamma, \delta) = 1}} \psi_1(\delta\bar{\delta}) \frac{v^s}{\Delta_{(qr\gamma, \delta)}(u)^s}\;,$$

so ist auch sie automorph vom Gewicht 0 bzgl. $\Gamma_0(qr) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ qr\gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathcal{O}) \right\}$.

Für $\sigma_r = \begin{pmatrix} \sqrt{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r}} \end{pmatrix}$, $\sigma_r(u) = ru$, ist dann $E_1^* \underset{0}{|} \sigma_r$ automorph bzgl.

$$\sigma_r^{-1} \Gamma_0(qr) \sigma_r = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{r} \\ r^2 q\gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathcal{O}) \right\} = \Gamma_0\left(q_1, \frac{1}{r}\right)$$

und weil
$$E^* = \frac{1}{r^s} E_1^* \underset{0}{|} \sigma_r$$
ist, transformiert sich unsere Eisensteinreihe auch zur Obergruppe $\Gamma_0(q_1, \frac{1}{r})$ von $\Gamma_0(q_1)$. Hieraus resultiert die gewünschte Situation:

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma_0(q_1, \frac{1}{r}) & \text{——} & \Gamma_0(qr) \\
\Big| & \diagdown & \Big| \\
\Gamma_0(q_1 r, \frac{1}{r}) & \text{——} & \Gamma_0(q_1)\,.
\end{array}$$

Zerlegen wir $\Gamma_0(q_1, \frac{1}{r})$ in Linksnebenklassen mod $\Gamma_0(q_1 r, \frac{1}{r})$, so ist offensichtlich
$$\left\{ \sigma_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_1\varepsilon & 1 \end{pmatrix} ;\ \varepsilon \ mod \ r\mathbb{Z}[i] \right\}$$
eine Linkstransversale mit
$$\varphi^{-1}(\sigma_\varepsilon) = \begin{pmatrix} E_2 & \mathbf{0} \\ q_1 \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_2 & -e_1 \end{pmatrix} & E_2 \end{pmatrix} = N'_\varepsilon \in \mathcal{G}_1\ ,\ \varepsilon = e_1 + ie_2\ .$$
Für einen Fundamentalbereich $\mathcal{F}_2$ von $\Gamma_0(q_1, \frac{1}{r})$ ist $\bigcup\limits_{\varepsilon \ mod \ r\mathbb{Z}[i]} \sigma_\varepsilon \mathcal{F}_2$ Fundamentalbereich von $\Gamma_0(q_1 r, \frac{1}{r})$. Wiederum aufgrund des invarianten Volumenelementes erhalten wir:

$$\int\limits_{\mathcal{F}_1} \widetilde{F_\chi \underset{k}{|} N'_{q_1 r}}(u) v^k E^*(u, k-s, \overline{\psi}_1) \frac{du}{v^3} = \sum_{\varepsilon \ mod \ r\mathbb{Z}[i]} \int\limits_{\mathcal{F}_2} \widetilde{F_\chi \underset{k}{|} N'_{q_1 r} N'_\varepsilon}(u) v^k E^*(u, k-s, \overline{\psi}_1) \frac{du}{v^3}\ .$$

Betrachtet man analog Paragraph 1 statt $\Gamma_0(q_1, \frac{1}{r})$ die Gruppe der Abbildungen $\Gamma'_0 = \Gamma_0(q_1, \frac{1}{r}) / \pm E_2$ und deren Untergruppe
$$\Gamma'_{0,\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta}{r} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ \beta \in \mathcal{O} \right\}\ ,$$

so besitzt für eine disjunkte Zerlegung $\Gamma_0' = \bigcup_i \Gamma_{0,\infty}' \sigma_i$ unsere Eisensteinreihe die Gestalt

$$E^*(u,s,\psi_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_1(\delta_{\sigma_i}\overline{\delta}_{\sigma_i}) \, \frac{v^s}{\Delta_{\sigma_i}(u)^s} \, .$$

Natürlich ist $\mathcal{F}_3 = \bigcup\limits_i \sigma_i \mathcal{F}_2$ ein Fundamentalbereich von $\Gamma_{0,\infty}'$ auf $\widetilde{\mathcal{H}}$. Unter Berücksichtigung des Transformationsverhaltens von $F_\chi \underset{k}{|} \widetilde{N_{q_1 r}' N_\varepsilon'}$ für Matrizen $\sigma \in \Gamma_0(q_1, \frac{1}{r})$,

$$F_\chi \underset{k}{|} \widetilde{N_{q_1 r}' N_\varepsilon'}(\sigma(u)) = \overline{\psi}_1(\delta_\sigma \overline{\delta}_\sigma)\Delta_\sigma(u)^k F_\chi \underset{k}{|} \widetilde{N_{q_1 r}' N_\varepsilon'}(u) \, ,$$

geht bei gliedweiser Integration die Eisensteinreihe im Fundamentalbereich $\mathcal{F}_3$ auf:

$$\int\limits_{\mathcal{F}_2} F_\chi \underset{k}{|} \widetilde{N_{q_1 r}' N_\varepsilon'}(u) v^k E^*(u, k-s, \overline{\psi}_1) \frac{du}{v^3} = \int\limits_{\mathcal{F}_3} F_\chi \underset{k}{|} \widetilde{N_{q_1 r}' N_\varepsilon'}(u) v^{2k-s} \frac{du}{v^3}$$

beziehungsweise

$$\int\limits_{\mathcal{F}_1} \widetilde{F_\chi \underset{k}{|} N_{q_1 r}'}(u) v^k E^*(u, k-s, \overline{\psi}_1) \frac{du}{v^3} = \int\limits_{\mathcal{F}_3} \sum_{\varepsilon \ mod \ r\mathbb{Z}[i]} F_\chi \underset{k}{|} \widetilde{N_{q_1 r}' N_\varepsilon'}(u) v^{2k-s} \frac{du}{v^3} \, . \tag{4.1.2}$$

Bemerkung
Die Vertauschung von Summation und Integration ist unproblematisch, da $\mathcal{F}_2$ meßbar und

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\mathcal{F}_2} \left| F_\chi \underset{k}{|} \widetilde{N_{q_1 r}' N_\varepsilon'}(u) v^k \psi_1(\delta_{\sigma_i}\overline{\delta}_{\sigma_i}) \frac{v^{k-s}}{\Delta_{\sigma_i}(u)^{k-s}} \right| \frac{du}{v^3}$$

endlich ist. Dies zeigt man analog der Bemerkung zu Lemma 1.1.

4.2 Einige Vereinfachungen

Die Summe

$$\sum_{\varepsilon \ mod \ r\mathbb{Z}[i]} F_\chi \underset{k}{|} \widetilde{N'_{q_1 r} N'_\varepsilon}(u)$$

wird nun so vereinfacht, daß eine Fourierentwicklung möglich wird, mit deren Hilfe das Integral (4.1.2) wieder in eine Dirichletreihe zurückverwandelt werden kann.
In Kapitel 4 haben wir für $N_c = \begin{pmatrix} E_2 & \frac{c}{r}E_2 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$ die Identität

$$g(\bar\chi)\ \widetilde{F}_\chi(u) = \sum_{c \ mod \ r} \bar\chi(c)\ \widetilde{F \underset{k}{|} N_c}(u), \quad u \in \widetilde{H},$$

gewonnen (vgl. 4.(1)). Daher gilt:

$$\sum_{\varepsilon \ mod \ r} F_\chi \underset{k}{|} \widetilde{N'_{q_1 r} N'_\varepsilon}(u) = g(\bar\chi)^{-1} \sum_{\substack{\varepsilon \ mod \ r\mathbb{Z}[i] \\ c \ mod \ r}} \bar\chi(c) \widetilde{F \underset{k}{|} N_c^\varepsilon}(u) \tag{4.2.1}$$

mit

$$N_c^\varepsilon = N_c N'_{q_1 r} N'_\varepsilon = \left(\begin{array}{c|c} q_1 \begin{pmatrix} c - e_1 & -e_2 \\ e_2 & -e_1 - c \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \hline q_1 r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \mathbf{0} \end{array}\right).$$

Setzen wir $M_H = \begin{pmatrix} r^3 E_2 & 0 \\ -q_1 H & E_2 \end{pmatrix}$ mit $H = \begin{pmatrix} c - e_1 & -e_2 \\ -e_2 & c + e_1 \end{pmatrix} \in Sym_2(\mathbb{Z}_r)$, so bestätigt eine einfache Rechnung

$$N_c N'_{q_1 r} N'_\varepsilon = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}\ N_q M_H\ ,$$

wobei $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $N_q = \begin{pmatrix} 0 & -E_2 \\ qE_2 & 0 \end{pmatrix}$ die Involution von 4. Theorem 2 ist.

Faßt man die Summation über c mod r und ε mod $r\mathbb{Z}[i]$ als eine Summation über Matrizen $H \in Sym_2(\mathbb{Z}_r)$ auf und berücksichtigt

$$F\Big|_k \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} = \psi(-1)F,$$

so erhält man:

$$\sum_{\substack{\varepsilon \bmod r\mathbb{Z}[i] \\ c \bmod r}} \bar{\chi}(c)\widetilde{F\underset{k}{|}N_c^\varepsilon}(u) = \psi(-1)\chi(2) \sum_{H\in Sym_2(\mathbb{Z}_r)} \bar{\chi}(\sigma(H))\ \widetilde{F\underset{k}{|}N_q M_H}(u)\,. \quad (4.2.2)$$

Mit $\mathcal{F}_3$ ist offensichtlich auch

$$S_r = \{u = (z,v) \in \widetilde{H};\quad z \in P_r,\ 0 < v < \infty\}$$

Fundamentalbereich zu $\Gamma'_{0,\infty}$, wobei $P_r = \big\{(x,y)\ ;\ |x| \le \frac{1}{2r}, |y| \le \frac{1}{2r}\big\}$.

Schreiben wir $F^* = F\underset{k}{|}N_q$, so ist nach 4. Theorem 2 $F^* \in [\Gamma_0^2(q), k, \overline{\psi}]_0$, und wir erhalten:

$$\int_{\mathcal{F}_3} \sum_{H\in Sym_2(\mathbb{Z}_r)} \bar{\chi}(\sigma(H))\widetilde{F\underset{k}{|}N_q M_H}(u)v^{2k-s}\frac{du}{v^3} = \int_{S_r} \sum_{H\in Sym_2(\mathbb{Z}_r)} \bar{\chi}(\sigma(H))\widetilde{F^*\underset{k}{|}M_H}(u)v^{2k-s}\frac{du}{v^3} \quad (4.2.3)$$

Zusammenfassend können wir mit (4.1), (4.1.1)- (4.2.3) formulieren

Lemma 4.2.1
Sind die Bezeichnungen wie oben gewählt, so gilt

$$\Delta(s-k+2,\psi_1)\ \frac{1}{(4\pi)^s}\Gamma(s)\ R(s,F_\chi) =$$

$$\frac{G(\psi_1)\psi(-1)\chi(2)}{g(\bar{\chi})q_1^{2s-2k+2}l^{s-k+2}}\ \Delta(k-s,\overline{\psi}_1) \int_{S_r} \sum_{H\in Sym_2(\mathbb{Z}_r)} \bar{\chi}(\sigma(H))\ \widetilde{F^*\underset{k}{|}M_H}(u)\ v^{2k-s}\frac{du}{v^3}\ .$$

Dabei ist $F^* = F\underset{k}{|}N_q \in [\Gamma_0^2(q), k, \overline{\psi}]_0,\ M_H = \begin{pmatrix} r^3E_2 & 0 \\ -q_1H & E_2 \end{pmatrix}$ *und* S_r *Fundamentalbereich zu* $\Gamma'_{0,\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta}{r} \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \beta \in \mathcal{O} \right\}$.

4.3 Begründung der Funktionalgleichung

Aus dem Integral

$$\int\limits_{S_r} \sum_{H \in Sym_2(\mathbb{Z}_r)} \bar{\chi}(\sigma(H)) \widetilde{F^* \underset{k}{|} M_H}(u)\, v^{2k-s-3} du$$

wird jetzt die Funktionalgleichung hergeleitet. Aufgrund der Invarianz von F^* unter Matrizen aus $\Gamma_0^2(q)$ zerlegen wir M_H in zwei Faktoren $M \in \Gamma_0^2(q)$ und $N = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ und entwickeln $F^* \underset{k}{|} N$ in eine Fourierreihe, die wir gliedweise integrieren. Vermöge der Orthogonalitätsrelation der Exponentialfunktion leisten nur Matrizen $T \in \mathfrak{N}_2^+$ der Fourierentwicklung bei der Integration einen Beitrag, die eine spezielle Gestalt haben (vgl. Paragraph 1). Für diese Matrizen läßt sich die Summe über Matrizen $H \in Sym_2(\mathbb{Z}_r)$ zusammenfassen.

Die Faktorisierung von $M_H = \begin{pmatrix} r^3 E_2 & 0 \\ -q_1 H & E_2 \end{pmatrix}$ für teilerfremde Matrizenpaare $(rE_2, -qH)$ ist relativ einfach. Schreiben wir für diesen Fall $(rE_2, -qH) = 1$, so bedeute $(rE_2, -qH) > 1$ nicht teilerfremd. Um die Fourierentwicklung von F^* nicht auf den hyperbolischen Raum $\widetilde{\mathcal{H}}$ umschreiben zu müssen, führen wir nachfolgende Überlegungen im dazu isomorphen Raum

$$\mathcal{H} = \left\{ Z \in \mathbb{H}_2 \; ; \; Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{pmatrix} + ivE_2 \right\} \subseteq \mathbb{H}_2$$

durch (s. 1.(3.5)). Wir erhalten für $Z \in \mathcal{H}$:

$$\int\limits_{S_r} \sum_{H \in Sym_2(\mathbb{Z}_r)} \bar{\chi}(\sigma(H)) \; F^* \underset{k}{|} M_H(Z) v^{2k-s-3} dZ =$$

$$\int\limits_{S_r} \sum_{\substack{H \in Sym_2(\mathbb{Z}_r) \\ (rE_2, -qH) = 1}} \bar{\chi}(\sigma(H)) \; F^* \underset{k}{|} M_H(Z) v^{2k-s-3} dZ + \int\limits_{S_r} \sum_{\substack{H \in Sym_2(\mathbb{Z}_r) \\ (rE_2, -qH) > 1}} \bar{\chi}(\sigma(H)) \; F^* \underset{k}{|} M_H(Z) v^{2k-s-3} dZ.$$

Es wird sich herausstellen, daß unsere Funktionalgleichung bereits vollständig im Integral des teilerfremden Falles enthalten ist, während das zweite Integral verschwindet. Ersteres ist Inhalt von

Satz 4.3.1
Hat $F^* = F\underset{k}{|}N_q \in [\Gamma_0^2(q), k, \overline{\psi}\ ]_0$ *für* $Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{pmatrix} + ivE_2 \in \mathcal{H}$ *die Fourierentwicklung*

$$F^*(Z) = \sum_{T \in \mathfrak{N}_2^+} b(T) e^{2\pi i \sigma(TZ)}$$

und versteht man unter $M_H = \begin{pmatrix} r^3 E_2 & 0 \\ -q_1 H & E_2 \end{pmatrix}$ *sowie unter* $S(\chi)$ *die Gaußsche Summe 3.(2), so gilt:*

$$\int\limits_{S_r} \sum_{\substack{H \in Sym_2(\mathbb{Z}_r) \\ (rE_2, -qH)=1}} \bar{\chi}(\sigma(H))\ F^*\underset{k}{|}M_H(Z) v^{2k-s-3} dZ$$

$$= \frac{\chi(q)\psi(r^2)S(\overline{\chi})}{r^{k-s}} \frac{1}{(4\pi)^{2k-s-2}} \Gamma(2k-s-2) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}(m) b(mE_2)}{m^{2k-s-2}} \ .$$

Beweis
Wegen

$$M_H = \begin{pmatrix} rE_2 & 0 \\ -qH & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^2 E_2 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

genügt es, das primitive Paar $(rE_2, -qH)$ zu einer Matrix aus $\Gamma_0^2(q)$ zu ergänzen. Aufgrund der Teilerfremdheit existieren Matrizen $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ mit

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ qH & rE_2 \end{pmatrix} \in \Gamma_0^2(q) \ .$$

Die Symplektizität von M^{-1} impliziert $rA - qBH = E_2$. Wegen $(q, r) = 1$ ist det $A \equiv r^{-2}$ *mod* q beziehungsweise $-qBH \equiv E_2$ *mod* r und H liegt in der Menge

$$Sym_2^0(\mathbb{Z}_r) = \{H \in Sym_2(\mathbb{Z}_r)\ ;\ H \text{ invertierbar mod } r\} \ .$$

Mit

$$M_H = MN, \quad M = \begin{pmatrix} rE_2 & -B \\ -qH & A^t \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} r^2 E_2 & B \\ 0 & rE_2 \end{pmatrix}$$

und

$$F^*\underset{k}{|}M = \psi(r^2)F^*, \quad F^*\underset{k}{|}N(Z) = r^k\ F^*(rZ + \frac{1}{r}B)$$

erhalten wir:

$$\int\limits_{S_r} \sum_{\substack{H\in Sym_2(\mathbb{Z}_r)\\(rE_2,-qH)=1}} \bar{\chi}(\sigma(H))\ F^*\underset{k}{|}M_H(Z)v^{2k-s-3}dZ$$

$$= \psi(r^2)r^k \int\limits_{S_r} \sum_{\substack{H\in Sym_2^0(\mathbb{Z}_r)\\-qBH\equiv E_2\ mod\ r}} \bar{\chi}(\sigma(H))\ F^*\left(rZ + \frac{1}{r}B\right) v^{2k-s-3}dZ\ .$$

Entwickelt man F^* in eine Fourierreihe und berücksichtigt $B \equiv -(qH)^{-1}\ mod\, r$, $S_r = [0,\infty[\times P_r$, $Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{pmatrix} + ivE_2$, so wird dies zu:

$$\psi(r^2)r^k \int\limits_0^\infty \Bigg(\sum_{T\in\mathfrak{N}_2^+} b(T)e^{-2\pi r v\sigma(T)} \sum_{H\in Sym_2^0(\mathbb{Z}_r)} \bar{\chi}(\sigma(H))e^{-\frac{2\pi i}{r}\sigma(T(qH)^{-1})} \times$$

$$\times \int\limits_{P_r} e^{-2\pi r\sigma\left(T\left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{smallmatrix}\right)\right)}dxdy\Bigg)\ v^{2k-s-3}dv\ .$$

Die Umordnung der Summen beziehungsweise die Vertauschung von Summation und Integration ist wiederum unproblematisch, da die Fourierreihe absolut und gleichmäßig konvergiert.

Wegen

$$\int\limits_{P_r} e^{-2\pi r\sigma\left(T\left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{smallmatrix}\right)\right)}dxdy = \begin{cases} \frac{1}{r^2}, & \text{falls } T = mE_2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

leisten nur Matrizen T mit $T = mE_2$ einen Beitrag in der Summation.
Nach 3. Lemma 2 ist

$$\sum_{H\in Sym_2^0(\mathbb{Z}_r)} \bar{\chi}(\sigma(H))e^{-\frac{2\pi i}{r}\sigma(m(qH)^{-1})} = \bar{\chi}(m)\chi(q)S(\bar{\chi})$$

und unser Integral vereinfacht sich zu

$$\psi(r^2)r^{k-2}\chi(q)S(\bar{\chi})\int\limits_0^\infty \sum_{m=1}^\infty \bar{\chi}(m)b(mE_2)e^{-4\pi rmv}v^{2k-s-3}dv\,.$$

Mittels der bereits öfter benutzten Mellintransformation erhalten wir die gewünschte Darstellung und der Satz ist bewiesen.

Der nichtprimitive Fall ist Gegenstand von

Satz 4.3.2
Hat $F^* = F \underset{k}{|} N_q \in [\Gamma_0^2, k, \overline{\psi}\ ]_0$ *für* $Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{pmatrix} + ivE_2 \in \mathcal{H}$ *die Fourierentwicklung*

$$F^*(Z) = \sum_{T\in\mathfrak{N}_2^+} b(T)e^{2\pi i\sigma(TZ)}$$

und ist für $H \in Sym_2(\mathbb{Z}_r)$ $M_H = \begin{pmatrix} r^3E_2 & 0 \\ -q_1H & E_2 \end{pmatrix}$, *so gilt:*

$$\int\limits_{S_r} \sum_{\substack{H\in Sym_2(\mathbb{Z}_r)\\ (rE_2,-qH)>1}} \bar{\chi}(\sigma(H))\ F^*\underset{k}{|}M_H(Z)v^{2k-s-3}dZ = 0\,.$$

Beweis
Zunächst fällt auf, daß es wegen

$$M_H = \begin{pmatrix} rE_2 & 0 \\ -qH & E_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r^2E_2 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_r = P_r \times [0,\infty[$$

ausreicht, das Verschwinden von

$$\int\limits_{P_r} \sum_{\substack{H\in Sym_2(\mathbb{Z}_r)\\ (rE_2,-qH)>1}} \bar{\chi}(\sigma(H))F^*\Bigg|_k \begin{pmatrix} rE_2 & 0 \\ -qH & E_2 \end{pmatrix}(Z)\ dxdy \qquad (4.3.1)$$

nachzuweisen.

Die Schwierigkeit besteht aber darin, auch im nichtteilerfremden Fall die Matrix $\begin{pmatrix} rE_2 & 0 \\ -qH & E_2 \end{pmatrix}$ als Produkt zweier Matrizen $M \in \Gamma_0^2(q)$ und $N = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ darzustellen. Doch die folgende Überlegung erlaubt es, die Summe von (4.3.1) so umzuformen, daß eine Faktorisierung möglich wird.
Aufgrund des Charakters $\chi \ mod \ r$ leisten Matrizen $H \in Sym_2(\mathbb{Z}_r)$, deren Komponenten durch dieselben Primfaktoren von r teilbar sind, keinen Beitrag in obiger Summe. Um diese Matrizen auszuschließen, setzen wir

$$Sym_2^*(\mathbb{Z}_r) = \left\{ H \in Sym_2(\mathbb{Z}_r);\ (rE_2, qH) > 1, \begin{array}{l} \text{nicht alle Einträge von } H \text{ sind} \\ \text{durch den gleichen Primfaktor} \\ \text{teilbar.} \end{array} \right\}.$$

Da die prime Restklassengruppe $\mathbb{Z}_r^*$ vermöge

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_r^* \times Sym_2^*(\mathbb{Z}_r) & \longrightarrow & Sym_2^*(\mathbb{Z}_r) \\ (c, H) & \longrightarrow & cH \end{array}$$

fixpunktfrei auf $Sym_2^*(\mathbb{Z}_r)$ operiert, läßt sich jede Bahn als disjunkte Vereinigung von Elementen aus $\mathbb{Z}_r^*$ schreiben. Mit $Sym_2^*(\mathbb{Z}_r) = \dot{\bigcup\limits_{H \in \mathcal{L}}} \dot{\bigcup\limits_{c \in \mathbb{Z}_r^*}} cH$, $\mathcal{L}$ Vertretersystem der Bahnen, erhalten wir:

$$\int\limits_{P_r} \sum_{H \in Sym_2^*(\mathbb{Z}_r)} \bar{\chi}(\sigma(H))\, F^* \Big|_k \begin{pmatrix} rE_2 & 0 \\ -qH & E_2 \end{pmatrix}(Z)\, dxdy = \int\limits_{P_r} \sum_{H \in \mathcal{L}} \bar{\chi}(\sigma(H)) \sum_{c \in \mathbb{Z}_r^*} \bar{\chi}(c) F^* |_k M_H^c(Z)\, dxdy$$

mit $M_H^c = \begin{pmatrix} rE_2 & 0 \\ -qcH & E_2 \end{pmatrix}$. Diese Vorgehensweise gestattet es, statt der Matrix M_H die Matrix M_H^c als Produkt zweier Matrizen $M_c \in \Gamma_0^2(q)$ und N darzustellen.

Zuerst habe $H = H_0 \in Sym_2^*(\mathbb{Z}_r)$ Diagonalform:

$$H_0 = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}, \quad (h_1, h_2) = 1\,.$$

Für $r_1 = (h_1, r),\ r_2 = (h_2, r)$ ist $(r_1, r_2) = 1$. Eine einfache Rechnung zeigt

$$\begin{pmatrix} rE_2 \\ -qcH_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ -qcH_1 \end{pmatrix} R\,,$$

mit $P=\begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}$, $s_1 = \frac{r}{r_1}, s_2 = \frac{r}{r_2}$, $H_1 = \begin{pmatrix} h_1' & 0 \\ 0 & h_2' \end{pmatrix}$, $h_1' = \frac{h_1}{r_1}$, $h_2' = \frac{h_2}{r_2}$, $R=\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$.

Wegen $(q,r) = 1$, $(c,r) = 1$ ist das Paar $(P, -qcH_1)$ primitiv und zu einer Matrix aus $\Gamma_0^2(q)$ ergänzbar. Folglich existieren $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ mit

$$\begin{pmatrix} A & B \\ qcH_1 & P \end{pmatrix} \in \Gamma_0^2(q)$$

und die Symplektizitätsbedingungen erlauben

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix} \tag{4.3.2}$$

zu wählen, wobei über a_1, a_4, b_1, b_4 noch geeignet verfügt werden kann. Dies bedeutet

$$AP - qcH_1B = E_2 \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \begin{matrix} a_1s_1 - qch_1'b_1 = 1 \\ a_4s_2 - qch_2'b_4 = 1 \end{matrix}$$

und wir erhalten

$$\begin{pmatrix} A & B \\ qcH_1 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} rE_2 & 0 \\ -qcH_0 & E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & B \\ 0 & P \end{pmatrix} . \tag{4.3.3}$$

Nun sei H beliebig. Bekanntlich gibt es zu $H^* \in Sym_2(\mathbb{Z}_r)$ ein $U \in Gl_2(\mathbb{Z}_r)$ mit

$$U^tH^*U = \begin{pmatrix} h_1^* & 0 \\ 0 & h_2^* \end{pmatrix} , \quad h_1^*, h_2^* \in \mathbb{Z}_r .$$

Die Diagonalisierbarkeit von $H \in Sym_2^*(\mathbb{Z}_r)$ impliziert die Teilerfremdheit der Einträge der Matrix $\begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}$ und daher läßt sich H schreiben als

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} \Big[V\Big] = H_0[V] , \quad V \in Gl_2(\mathbb{Z}_r) .$$

Für $r_1 = (h_1, r)$, $r_2 = (h_2, r)$ ist wiederum $(r_1, r_2) = 1$.

Aus (4.3.3) erhalten wir

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ qcH_1 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V^{-t} \end{pmatrix}}_{M_c^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & V^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} rE_2 & 0 \\ -qcH_0 & E_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V^{-t} \end{pmatrix}}_{M_H^c}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} R & B \\ 0 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V^{-t} \end{pmatrix}}_{N} . \tag{4.3.4}$$

Daher haben unsere gesuchten Matrizen M_c^{-1} und N die Gestalt

$$M_c^{-1} = \begin{pmatrix} AV & BV^{-t} \\ qcH_1V & PV^{-t} \end{pmatrix} \in \Gamma_0^2(q) \text{ mit } AP - qcH_1B = E_2,\ N = \begin{pmatrix} RV & BV^{-t} \\ 0 & PV^{-t} \end{pmatrix}$$

und (4.3.4) ist äquivalent zu

$$M_H^c = M_cN, \quad M_c = \begin{pmatrix} V^{-1}P & -V^{-1}B \\ -qcV^tH_1 & V^tA \end{pmatrix} .$$

Berücksichtigt man

a) $F^*\underset{k}{|}M_c = \overline{\psi}(\det V)\ \psi(s_1s_2)F^*\ , \qquad AP - qcH_1B = E_2\ ,$

b) $F^*\underset{k}{|}N(Z) = \left(\frac{r_1r_2}{r}\right)^k (\det V)^k\ F^*(\frac{1}{r}RVZV^tR + \frac{1}{r}BR)\,,$

so erhalten wir mit der Fourierentwicklung von F^* nach Umordnen:

$$\sum_{c\in\mathbb{Z}_r^*} \bar{\chi}(c)F^*\underset{k}{|}M_H^c(Z) = \left(\frac{r_1r_2}{r}\right)^k (\det V)^k\ \overline{\psi}(\det V)\psi(s_1s_2) \sum_{T\in\mathfrak{N}_2^+} b(T)e^{2\pi i\sigma(\frac{1}{r}T[RV]Z)} \times$$

$$\times \sum_{\substack{c\in\mathbb{Z}_r^* \\ AP-qcH_1B=E_2}} \bar{\chi}(c)e^{\frac{2\pi i}{r}\sigma(TBR)} \quad . \tag{4.3.5}$$

Dabei hängen die Matrizen A, P, H_1, B nur von der fest gewählten Matrix $H \in \mathcal{L}$ ab. Könnten wir das Verschwinden der inneren Summe nachweisen, so wären wir fertig.

Für $T = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \in \mathfrak{N}_2^+$ ergibt sich aus $TBR = \begin{pmatrix} ab_1r_1 & * \\ * & cb_4r_2 \end{pmatrix}$

$$\sigma(TBR) = r_1ab_1 + r_2cb_4 \, .$$

Wie bereits beim Beweis des vorherigen Satzes benutzt, leisten bei gliedweiser Integration über P_r nur Matrizen T der Fourierentwicklung einen Beitrag in der Summe, die eine spezielle Gestalt haben. Im vorliegenden Fall ist es aber nicht $T = mE_2$, sondern T muß der Bedingung

$$\frac{1}{r}T[RV] = mE_2$$

genügen. Für $V^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbb{Z}_r)$ ist dies äquivalent mit

$$\begin{pmatrix} r_1^2a & * \\ * & r_2^2c \end{pmatrix} = rm \begin{pmatrix} v_1^2 + v_3^2 & * \\ * & v_2^2 + v_4^2 \end{pmatrix} \, .$$

Berücksichtigen wir diese besondere Gestalt von T in der inneren Summe und schreiben statt $AP - qcH_1B = E_2$ die dazu gleichwertige Bedingung

$$a_1s_1 - qch_1'b_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_4s_2 - qch_2'b_4 = 1 \, ,$$

so wird nach gliedweiser Integration über P_r die innere Summe von (4.3.5) zu

$$\sum_{\substack{c\in\mathbb{Z}_r^* \\ a_1s_1-qch_1'b_1=1 \\ a_4s_2-qch_2'b_4=1}} \bar{\chi}(c)e^{2\pi im\left(\frac{b_1}{r_1}(v_1^2+v_3^2)+\frac{b_4}{r_2}(v_2^2+v_4^2)\right)} \, .$$

Den Nachweis über das Verschwinden dieser Gaußschen Summe führen wir mit

Lemma 4.3.3
Für $s_1 = \frac{r}{r_1}$, $s_2 = \frac{r}{r_2}$, $t_1 = v_1^2+v_3^2$, $t_2 = v_2^2+v_4^2$ gilt mit obigen Bezeichnungen:

$$\sum_{\substack{c\in\mathbb{Z}_r^* \\ a_1s_1-qch_1'b_1=1 \\ a_4s_2-qch_2'b_4=1}} \bar{\chi}(c)e^{2\pi im\left(\frac{b_1}{r_1}t_1+\frac{b_4}{r_2}t_2\right)} = 0 \, .$$

Beweis
1. Fall: $(s_1, s_2) > 1$.

Aufgrund (4.3.2) können wir $a_1 = r_1 a_1', a_4 = r_2 a_4'$ wählen. Berücksichtigen wir ferner die Teilerfremdheit von q, c, h_1', h_2' bzgl. r, so erhält man:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{c\in\mathbb{Z}_r^*\\ a_1s_1-qch_1'b_1=1\\ a_4s_2-qch_2'b_4=1}} \bar{\chi}(c)e^{2\pi im\left(\frac{b_1}{r_1}t_1+\frac{b_4}{r_2}t_2\right)} &= \sum_{\substack{c\in\mathbb{Z}_r^*\\ -qch_1'b_1\equiv 1 \mod r\\ -qch_2'b_4\equiv 1 \mod r}} \bar{\chi}(c)e^{\frac{2\pi im}{r}(t_1s_1b_1+t_2s_2b_4)}\\ &= \sum_{c\in\mathbb{Z}_r^*} \bar{\chi}(c)e^{-\frac{2\pi i\bar{c}}{r}m\bar{q}(t_1s_1\bar{h_1'}+t_2s_2\bar{h_2'})}\\ &= \chi(-m\bar{q}(t_1s_1\bar{h_1'}+t_2s_2\bar{h_2'}))\sum_{c\in\mathbb{Z}_r^*}\bar{\chi}(c)e^{-\frac{2\pi i}{r}\bar{c}}\ .\end{aligned}$$

Da s_1 und s_2 nicht teilerfremd sind, ist $(t_1s_1\bar{h_1'}+t_2s_2\bar{h_2'}, r) > 1$ und das Produkt null.

2. Fall: $(s_1, s_2) = 1$.

Da $s_1 = \frac{r}{r_1}, s_2 = \frac{r}{r_2}, (r_1, r_2) = 1$ ist, gilt:
s_1 besteht aus den Primfaktoren von r, die bei s_2 nicht auftreten.
Für s_2 gilt der analoge Sachverhalt. Daher ist $s_1 s_2 = r$ beziehungsweise $r_1 r_2 = r$.
Dies bedeutet $s_1 = r_2$ und $s_2 = r_1$ und die Summationsbedingungen werden zu $a_1 r_2 - qch_1'b_1 = 1$ und $a_4 r_1 - qch_2'b_4 = 1$.
Wiederum kann über die Einträge von $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$ geeignet verfügt werden und mit $b_1 = r_1 b_1', b_4 = r_2 b_4'$ erhält man:

$$\sum_{\substack{c\in\mathbb{Z}_r^* \\ a_1r_2-qch_1'r_1b_1'=1 \\ a_4r_1-qch_2'r_2b_4'=1}} \bar{\chi}(c)e^{2\pi i m(b_1't_1+b_4't_2)} = \sum_{\substack{c\in\mathbb{Z}_r^* \\ -qch_1'r_1b_1'\equiv 1 \ mod \ r_2 \\ -qch_2'r_2b_4'\equiv 1 \ mod \ r_1}} \bar{\chi}(c)e^{2\pi i m(b_1't_1+b_4't_2)}$$

$$= \sum_{c\in\mathbb{Z}_r^*} \bar{\chi}(c)e^{-2\pi i m\bar{q}\bar{c}(\bar{r_1}\bar{h_1'}t_1+\bar{r_2}\bar{h_2}'t_2)}$$

$$= \sum_{c\in\mathbb{Z}_r^*} \bar{\chi}(c)\ .$$

Die letzte Summe ist null aufgrund der Primitivität von χ *mod* r. Mit dem Beweis des Lemmas ist auch Satz 4.3.2 bewiesen.

Es ist nun leicht, aus den Ergebnissen der Abschnitte 4.1 bis 4.3 die Funktionalgleichung der Dirichletreihe herzuleiten.

Erweitern wir die rechte Seite der Identität von Satz 4.3.1 mit $\bar{\chi}(2)$ (dies geht, weil r ungerade ist), so wird die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}(m)b(mE_2)}{m^{2k-s-2}}$ zu $R(2k-s-2, F_{\bar{\chi}}^*)$. Zusammen mit Lemma 4.2.1 sowie mit Satz 4.3.2 ergibt sich die gewünschte Funktionalgleichung, sofern man die Vereinfachungen $\psi_1 = \psi\chi$ und $l = qr$ rückgängig macht.

6 Die Spinorzetafunktion

Nach dem umfangreichen Beweis des Theorems von Kapitel 5 läßt sich nun unser Haupttheorem herleiten. Dazu müssen wir nur die Dirichletreihen $R(s, F_\chi)$ und $R(2k-s-2, F^*_{\overline{\chi}})$ durch die entsprechenden Zetafunktionen ausdrücken.

Zunächst überlegen wir uns folgendes allgemeine Prinzip:
Gilt in einer Konvergenzhalbebene für Dirichletreihen $D_1(s),\ D_2(s),\ D_3(s)$, $s \in \mathbb{C}$, die Identität

$$D_1(s) = D_2(s)\ D_3(s)\ ,$$

so gilt natürlich auch für die mit einem Charakter χ mod r formal getwisteten Reihen

$$D_1(s,\chi) = D_2(s,\chi)\ D_3(s,\chi)$$

in einer Konvergenzhalbebene.

Überträgt man diesen Sachverhalt auf den nach A. ANDRIANOV [An4] gültigen Zusammenhang zwischen der Spinorzetafunktion $Z_F(s)$ der Modulform $F \in [\,\Gamma_0^2(q), k, \psi\,]_0$, $a(E_2) \neq 0$ und der Dirichletreihe $R(s,F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(mE_2)}{m^s}$, nämlich

$$a(E_2)\ Z_F(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{O} \\ \mathfrak{A} \nmid q}} \frac{\psi(N(\mathfrak{A}))}{N(\mathfrak{A})^{s-k+2}}\ R(s,F)\ ,$$

so erhält man nach dem Twisten mit unserem primitiven Charakter χ *mod* r, $(q,r) = 1$:

$$a(E_2)\ Z_F(s,\chi) = \sum_{\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{O}} \frac{\psi\chi(N(\mathfrak{A}))}{N(\mathfrak{A})^{s-k+2}}\ R(s,F,\chi) \tag{1}$$

mit

$$Z_F(s,\chi) = \prod_{p|q} \left(1 - \frac{\rho(p)\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p\nmid q} Q_{p,F}^{-1}\left(\frac{\chi(p)}{p^s}\right)\ .$$

Wegen $\chi(2)\ R(s,F,\chi) = R(s,F_\chi)$ wird (1) nach Multiplikation mit $\chi(2)$ zu

$$a(E_2)\ Z_F(s,\chi) = \overline{\chi}(2) \sum_{\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{O}} \frac{\psi\chi(N(\mathfrak{A}))}{N(\mathfrak{A})^{s-k+2}}\ R(s,F_\chi)\ . \tag{2}$$

Aus (2) folgert man leicht die holomorphe Fortsetzbarkeit der Spinorzetafunktion $Z_F(s,\chi)$ mit dem Theorem von Kapitel 5.
Da andererseits $F \in [\,\Gamma_0^2(q), k, \psi\,]_0$ im Haupttheorem als Eigenform sowohl der regulären Heckeoperatoren $T_k(p),\ T_k(p^2)$ als auch der Operatoren $\Pi_k(p)$, $\Pi_k^*(p)$ vorausgesetzt war, ist nach 4. Theorem 2 auch F^* Eigenform dieser Operatoren mit der Spinorzetafunktion $Z_{F^*}(s)$ (vgl. 4.(2)). Wenden wir daher (2) statt für F auf die Eigenform F^* an mit $2k-s-2$ und $\overline{\chi}$ statt s und χ, so gilt:

$$b(E_2)\, Z_{F^*}(2k-s-2,\overline{\chi}) = \chi(2)\, \zeta_{\mathcal{K}}(k-s,\overline{\psi_1},q_1)\, R(2k-s-2,F^*_{\overline{\chi}}).$$

Folglich erhält man aus der Funktionalgleichung der Dirichletreihe die Funktionalgleichung der Spinorzetafunktion. Damit ist das Haupttheorem vollständig bewiesen.

Um das Corollar einzusehen, müssen wir für $q=1$

$$\frac{G(\psi\chi)S(\overline{\chi})}{g(\overline{\chi})} = g(\chi)^4$$

zeigen. Dies erwies sich als recht schwierig und gelang erst über den Umweg der SAITO-KORUKAWA-Liftung. Diesbezüglich verweisen wir den Leser auf den Anhang.

Anhang

Da es mir nicht gelungen ist, die Gaußsummen $G(\chi)$ und $S(\chi)$ des Haupttheorems elementar in die Gaußsumme $g(\chi)$ überzuführen, beschließen wir unsere Betrachtungen mit einem Exkurs über eine Anwendung der SAITO-KORUKAWA-Liftung.
Versteht man unter $[Sp_2(\mathbb{Z}), k]_0^*$ den Vektorraum der Spitzenformen der Maasschen Spezialschar, das sind Siegelsche Modulformen vom Grad 2 und Gewicht k, deren Fourierkoeffizienten spezielle Eigenschaften besitzen, so besagt sie (vgl. M. EICHLER - D. ZAGIER [E-Z]):

Zu einer normalisierten Heckeeigenform $f_1 \in [Sp_1(\mathbb{Z}), 2k-2]_0$ existiert eine Heckeeigenform $F_1 \in [Sp_2(\mathbb{Z}), k]_0^*$ und umgekehrt. Zwischen beiden Funktionen gilt:

$$Z_{F_1}(s) = R_{f_1}(s)\, \zeta(s-k+1)\, \zeta(s-k+2)\,.$$

Twisten wir diese Gleichung formal mit dem primitiven Charakter χ *mod* r, so geht diese über in

$$Z_{F_1}(s,\chi) = R_{f_1}(s,\chi)\, \zeta(s-k+1,\chi)\, \zeta(s-k+2,\chi)\,. \tag{A.1}$$

Da jede Dirichletreihe der rechten Seite von (A.1) eine Funktionalgleichung besitzt, kann man daraus eine Funktionalgleichung für $Z_{F_1}(s,\chi)$ erwarten.

Dazu sei zunächst χ *mod* r gerade. Schreiben wir für $\zeta(s,\chi)$ wie üblich $L(s,\chi)$, so hat diese L-Reihe die Funktionalgleichung (vgl. D. ZAGIER [Za])

$$\left(\frac{r}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s,\chi) = \frac{g(\chi)}{\sqrt{r}} \left(\frac{r}{\pi}\right)^{\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) L(1-s,\overline{\chi})\,. \tag{A.2}$$

G. SHIMURA [Sh] entnimmt man für $f_1 \in [Sp_1(\mathbb{Z}), k]_0$:

$$\left(\frac{r}{2\pi}\right)^{s} \Gamma(s)\, R_{f_1}(s,\chi) = i^k\, \frac{g(\chi)^2}{r} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{k-s} \Gamma(k-s)\, R_{f_1}(k-s,\overline{\chi})\,. \tag{A.3}$$

Löst man Gleichungen (A.2) und (A.3) nach $L(s,\chi)$ und $R_{f_1}(s,\chi)$ auf, setzt dies mit den entsprechenden Argumenten und dem Gewicht $2k-2$ in (A.1) ein, so geht, nachdem man die inversen Γ-Faktoren auf die linke Seite gebracht hat, (A.1) über in

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\ \Gamma\left(\frac{s-k+1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{s-k+2}{2}\right)\ Z_{F_1}(s,\chi) = \\ \frac{i^{2k-2}g(\chi)^4}{2^{2k-2-2s}r^2}\ \left(\frac{r}{\pi}\right)^{4k-4s-4}\Gamma(2k-s-2)\ \Gamma\left(\frac{k-s-1}{2}\right)\times \\ \times\,\Gamma\left(\frac{k-s}{2}\right)\underbrace{R_{f_1}(2k-s-2,\overline{\chi})\ L(k-s,\overline{\chi})\ L(k-s-1,\overline{\chi})}_{Z_{F_1}(2k-2-2,\overline{\chi})}\ .\end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Legendrerelation $2^s\ \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = 2\sqrt{\pi}\ \Gamma(s)$ wird dies zu

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\ \Gamma(s-k+1)\ Z_{F_1}(s,\chi) = \frac{i^{2k-2}g(\chi)^4}{2^{4k-4-4s}r^2}\left(\frac{r}{\pi}\right)^{4k-4s-4}\times \\ \times\,\Gamma(2k-s-2)\ \Gamma(k-s-1)\ Z_{F_1}(2k-2-2,\overline{\chi}).\end{aligned}$$

Um die Funktionalgleichung der Γ-Funktion, $\Gamma(s+1) = s\ \Gamma(s)$, beidseitig anzuwenden, multipliziert man die Gleichung mit $s-k+1$. Sie vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\ \Gamma(s-k+2)\ Z_{F_1}(s,\chi) = \frac{i^{2k}g(\chi)^4}{2^{4k-4-4s}r^2}\ \left(\frac{r}{\pi}\right)^{4k-4s-4}\times \\ \times\,\Gamma(2k-s-2)\ \Gamma(k-s)\ Z_{F_1}(2k-2-2,\overline{\chi}).\end{aligned}$$

Multiplizieren wir diese Identität mit $\pi^{-(s-k+2)}\ (4\pi)^{-s}$ und berücksichtigen $k \equiv 0\ mod\ 2$, so erhält man nach Zusammenfassen der π-Faktoren:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi^{s-k+2}}\ \Gamma(s-k+2)\frac{1}{(4\pi)^s}\ \Gamma(s)Z_{F_1}(s,\chi) = \frac{g(\chi)^4}{r^{4s-4k+6}}\times \\ \times\,\frac{1}{\pi^{k-s}}\ \Gamma(k-s)\frac{1}{(4\pi)^{2k-s-2}}\ \Gamma(2k-s-2)Z_{F_1}(2k-s-2,\overline{\chi}).\end{aligned} \tag{A.4}$$

Der Fall des ungeraden Charakters verläuft analog und führt auf die gleiche Identität.

Andererseits hindert uns salopp gesprochen nichts daran, im Fall $q = 1$ unser Haupttheorem auf $F_1 \in [Sp_2(\mathbb{Z}), k]_0^*$ anzuwenden, da die Gaußsummen unabhängig von der Wahl der Modulform sind. Dies bedeutet:

$$\Psi(s, F_1, \chi) = \frac{G(\chi)S(\overline{\chi})}{r^{4s-4k+6}} \; \Psi(2k - s - 2,\ F_1,\ \overline{\chi})\,. \tag{A.5}$$

Aufgrund der Äquivalenz von (A.4) und (A.5) können wir formulieren

Satz
Für die im Haupttheorem angebenen Gaußsummen gilt im Fall $q = 1$:

$$\frac{G(\psi\chi)S(\overline{\chi})}{g(\overline{\chi})} = g(\chi)^4\,.$$

Bemerkung
Mit Hilfe von Lemma 1 und Lemma 3 aus Kapitel 3 erhält man

$$|\,S(\chi)\,| = \sqrt{r}^3$$

und die noch offene Lücke im Beweis von 3. Lemma 2 ist somit geschlossen.

Literatur

[An1] Andrianov, A.N., *Dirichlet series with Euler product in the theory of Siegel modular forms of genus 2,* Proc. Steklov Inst. Math. 112, 70-93, 1971.

[An2] Andrianov, A.N., *Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2,* Russian Math. Surveys 29, 45-116, 1974.

[An3] Andrianov, A.N.,*Quadratic Forms and Hecke Operators,* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 286, Springer Verlag, 1987.

[An4] Andrianov, A.N., *On functional equations satisfied by Spinor Euler products for Siegel modular forms of genus 2 with characters,* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 71, 123-142, 2001.

[B-H] Böcherer, S., Heim, B., *L-Functions on* $GSp_2 \times Gl_2$ *of mixed weights,* Mathematische Zeitschrift 235, 11-51, 2000.

[Bor] Borewicz, S.I., Safarevic, I.R., *Zahlentheorie,* Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart 1966.

[E-Z] Eichler, M., Zagier D., *The theory of Jacobi forms,* Progress in Mathematics vol. 55, Birkhäuser Verlag 1985.

[Fr] Freitag, E., *Siegelsche Modulfunktionen,* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 254, Springer Verlag, 1983.

[Ge] Gelbart, S., *An elementary introduction to the Langlands program,* Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, Vol. 10, Number 2, April 1984.

[He] Hecke, E., *Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung, I und II,* Math. Ann. 114, 1-28 und 316-351, 1937.

[He] Heim, B., *Pullbacks von Eisensteinreihen, Hecke-Jacobi Theorie und automorphe L-Funktionen,* Dissertation der Universität Mannheim, 1996.

[Ko] Kohnen, W., *On charakteristic Twists of certain Dirichlet Series,* Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University, Ser. A, Vol. 47, No. 1,, 103-117, 1993.

[Ku] Kubota, T., *Über diskontinuierliche Gruppen Picardschen Typs und zugehörige Eisensteinreihen,* Nagoya Math. J. 32, 259-271, 1968.

[La] Lang, S., *Elliptic Functions*, Addison-Wesley 1973.

[Ma1] Matsuda, I., *Dirichlet Series Corresponding to Siegel Modular Forms of Degree 2, Level N,* Sci. Papers Coll. Gen. Ed., Univ. Tolyo 28, 21-49, 1978.

[Ma2] Matsuda, I., *On Meromorphy of Dirichlet Series Corresponding to Siegel Cusp Forms of Degree 2 with respect to* $\Gamma_0(N)$, Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli Vol. 34, No. 1, 1985.

[Neu] Neukirch, J., *Algebraische Zahlentheorie,* Springer Verlag 1992.

[Og] Ogg, A., *Modular forms and Dirichlet series,* Benjamin, New-York 1969.

[Se] Serre, J.-P., *A course in Arithmetic,* Springer Verlag 1973.

[Sh] Shimura, G., *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions,* Iwanami Shoten Publishers and Princeton University Press 1971.

[We] Weil, A., *Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen,* Math. Ann. 168, 149-156, 1967.

[Za] Zagier, D.B., *Zetafunktionen und quadratische Zahlkörper,* Springer Verlag 1981.