Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft

Nr. 159

Spieltheoretische Verfahren der Kapitalallokation im Versicherungsunternehmen

von

Jochen Mandl

Mannheim 04/2004

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Die Bestimmung einer adäquaten Kapitalallokation als Grundlage und Voraussetzung einer risikoadjustierten Perfomancesteuerung[1] von Versicherungsunternehmen stellt nach wie vor eine zentrale Herausforderung für Versicherungswissenschaft und –praxis dar und wird demgemäß in der wissenschaftlichen Literatur intensiv diskutiert.[2]

Aktuell haben *Albrecht*/*Koryciorz* (2004) zu diesem Themenkomplex eine umfassende Behandlung aus risikotheoretischer Sicht vorgelegt, wobei insbesondere untersucht wird, inwieweit die einzelnen gängigen Allokationsprinzipien die Gütekriterien des sogenannten kohärenten Allokationsprinzips erfüllen, einer Konzeption, die in *Denault* (2001) entwickelt wurde.

Vor diesem Hintergrund und in Ergänzung der Untersuchung von *Albrecht/Koryciorz* (2004) sollen in der vorliegenden Arbeit spieltheoretische Ansätze zur Kapitalallokation untersucht werden. Spieltheoretische Ansätze werden insbesondere in der Literatur zur Kostenallokation[3] eingesetzt und werden von *Kinder* (1999) auf die Problematik der Kapitalallokation übertragen. Auch für den Versicherungsfall ist dies entsprechend möglich. Dies soll in dem vorliegenden Beitrag dargestellt werden, wobei auch hier der Erfüllung von Gütekriterien besondere Beachtung geschenkt wird.

---

[1] Vgl. generell *Albrecht, P.* (1998).

[2] Vgl. aktuell etwa *Gründl, H. / Schmeiser, H.* (2002,2003), *Graumann, M. / Baum, S.* (2002) sowie *Urban et al.* (2004).

[3] Vgl. etwa *Lemaire, J.* (1984), *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986) sowie *Young, H. P.* (1985).

2. Vorbemerkungen

2.1. Notation und Skalierungseigenschaft im Versicherungsfall

Ein Kapitalallokationsverfahren, welches das risikoadjustierte Kapital des Gesamtunternehmens (RAC) auf n Segmente von Versicherungsverträgen mit zugehörigen (zentrierten) Verlustvariablen[4] allokiert, lässt sich wie folgt formalisieren:

$$\phi : Z^n \to \Re^n,\ \phi(L_1,...,L_n) = \begin{pmatrix} \phi_1\,(L_1,...,L_n) \\ ... \\ ... \\ \phi_n\,(L_1,...,L_n) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Dabei stellt Z die Menge der Verlustvariablen dar. Die Größen ϕ_i , $i = 1,...,n$ können als Allokationsgewichte bzw. Allokationsfaktoren aufgefasst werden, in dem Sinne, dass sich das der i-ten Geschäftseinheit zugerechnete Risikokapital (RAC_i^*) als Produkt dieses Gewichts mit dem RAC ergibt ($RAC_i^* = \phi_i\ RAC$).[5] Damit eine *absolute* Kapitalallokation nach *Albrecht/Koryciorz* (2004) vorliegt, werden folgende Bedingungen an den Allokationsmechanismus gestellt:[6]

Vollständige Allokation:

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i = 1. \tag{2}$$

Nichtnegativität der Allokation:

$$\phi_i \geq 0 \quad \textit{für alle}\ i = 1, ..., n. \tag{3}$$

Darüber hinaus werden zunächst keine zusätzlichen Anforderungen gestellt.

---

[4] Vgl. *Albrecht, P. / Koryciorz, S.* (2004), Absatz 2.

[5] Vgl. *Albrecht, P. / Koryciorz, S.* (2004), Absatz 3.1.

[6] Vgl. *Albrecht, P. / Koryciorz, S.* (2004), Absatz 3.1 in Verbindung mit dem zugrunde gelegten Steuerungsansatz in *Albrecht, P.* (1998).

Obwohl für die weiteren Ausführungen von einem gegebenen Risikoexposure ausgegangen wird, erscheint eine Bemerkung zur Größenmessung der Segmente des versicherungstechnischen Bereichs angebracht. Beispielsweise könnte die Anzahl der Versicherungsverträge eines Kollektivs oder das Prämienvolumen als Maß der Segmentgröße dienen. Um nun die Besonderheit in Bezug auf den versicherungstechnischen Bereich hervorzuheben, wird zunächst die Größenanpassung (Skalierung) eines Portfolios aus *n* Finanztiteln betrachtet.

Sei LF_i der Periodenverlust des i-ten Finanztitels auf Marktwertbasis und x_i dessen absolute Anzahl, so ergibt sich der kollektive Periodenverlust *L* zu:[7]

$$L(n) = \sum_{i=1}^{n} x_i LF_i \ . \tag{4}$$

Verdoppelt man nun diese Position, was einer Verdoppelung der Anzahl jedes einzelnen Investments gleichkommt, ergibt sich der Gesamtverlust zu *2L* (sprich eine lineare Skalierung in der Portfoliogröße *n*).

Im Gegensatz dazu gilt dies im Allgemeinen im Versicherungsfall nicht. Betrachtet man das individuelle Modell, ergibt sich der Gesamtverlust eines Portfolios aus *n* Versicherungsverträgen wie folgt:[8]

$$L(n) = \sum_{i=1}^{n} X_i \ , \tag{5}$$

wobei die Periodenverluste der einzelnen Versicherungsverträge beispielsweise durch unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen X_i modelliert werden. In dieser Situation folgt allerdings aus einer Verdopplung der Kollektivgröße auf *2n nicht zwingend* die Verdopplung des Gesamtverlustes.

[7] Vgl. *Albrecht, P. / Koryciorz, S.* (2004), Absatz 2, sowie *Tasche, D.* (2000), S. 4.
[8] Vgl. *Maurer, R.* (2000), S. 158.

Aus diesem Grund gilt im Allgemeinen:[9]

$$L(2n) \neq 2L(n)\,. \qquad (6)$$

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass eine lineare Skalierung (der Gesamtverlustverteilung) im Versicherungsfall wenig sachgerecht ist. Diese Tatsache ist von Bedeutung, da in der Literatur Ansätze zu finden sind, die auf der Differentiation von Risikomaßen nach der Portfolio- bzw. Segmentgröße basieren.[10]

2.2. Spieltheoretische Modellierung

2.2.1. Grundlagen

Gegenstand der Spieltheorie ist die Analyse strategischer Entscheidungssituationen. Diese sind dadurch gekennzeichnet, dass

- das Ergebnis von den Aktionen mehrerer Teilnehmer abhängt,
- jeder Teilnehmer sich dieser Abhängigkeit bewusst ist,
- jeder Teilnehmer davon ausgeht, dass alle anderen sich ebenfalls dieser Abhängigkeit bewusst sind,
- jeder Teilnehmer bei seinen Entscheidungen die vorangegangenen Punkte berücksichtigt.[11]

Damit sind „Interessenskonflikte“ und „Koordinationsprobleme“ typische Eigenschaften strategischer Entscheidungssituationen.[12] Die Spieltheorie stellt nun eine Sammlung formaler Modelle zur Verfügung, mit deren Hilfe eine Analyse derartiger Situationen möglich ist.[13] Der Zusammenhang zwischen der Problematik der Kapitalallokation und spieltheoretischen Ansätzen besteht darin, die Kapitalallokation als ein Spiel im Sinne der Theorie aufzufassen.

---

[9] Eine Ausnahme bildet beispielsweise die lineare Skalierung der Versicherungssummen eines Lebensversicherungsportfolios aufgrund einer Inflationsanpassung.
[10] Vgl. *Denault, M.* (2001), S. 14 ff, *Tasche, D.* (2000), S. 4 ff.
[11] Vgl. *Holler, M. / Illing, G.* (2003), S. 1.
[12] Vgl. *Holler, M. / Illing, G.* (2003), S. 1.
[13] Vgl. *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1015.

Dabei muss das Spiel in Hinblick auf eine *absolute* Kapitalallokation als grundlegende Voraussetzung die Forderungen (2) und (3) gewährleisten.

Da es Akteuren innerhalb eines Unternehmens in der Regel möglich ist, miteinander zu kommunizieren und verbindliche Vereinbarungen zu treffen, weisen fast alle in diesem Kontext auftretenden Situationen, die sich mittels eines *n*-Personenspieles beschreiben lassen, einen im Sinne der Spieltheorie kooperativen Charakter auf.[14] Grundsätzlich unterscheiden sich kooperative von nicht-kooperativen Spielen gerade dadurch, dass die Teilnehmer kooperativer Spiele im Gegensatz zu denen nicht-kooperativer Spiele sowohl kommunizieren als auch verbindliche Vereinbarungen schließen können.[15] Dabei ist entscheidend, dass eine exogene Instanz existiert, die eine Verletzung einer Abmachung erkennen und gegebenenfalls sanktionieren kann.[16] Des Weiteren muss es der exogenen Instanz möglich sein, die Spieler zu zwingen, die Vereinbarungen einzuhalten. Da auch dies innerhalb eines Unternehmens durch beispielsweise das Zusammenwirken von Controlling und Unternehmensführung weitgehend gegeben ist, wird im Folgenden ausschließlich eine besondere Klasse von kooperativen Spielen, die sogenannten Koalitionsspiele sowie deren Lösungskonzepte betrachtet. Koalitionsspiele deshalb, weil hier nicht nur die einzelnen Spieler miteinander verbindliche Abmachungen bezüglich ihrer Strategie treffen können, sondern weil es bei Koalitionsspielen den Spielern möglich ist, sich zu Koalitionen zusammenzuschließen, sich innerhalb dieser abzustimmen und dann geschlossen mit einer gemeinsamen Strategie aufzutreten. Dabei gelten für die Spieler selbstverständlich die oben dargestellten Grundbedingungen (Kommunikation, Verbindlichkeit der Abmachungen und gegebenenfalls Sanktionen).[17]

Grundsätzlich können Spiele in verschiedenen Formen dargestellt werden.[18] Eine zentrale Möglichkeit bietet dabei die Beschreibung mittels der charakteristischen Funktion. Diese Form wird unter anderem in Situationen verwendet,[19] in denen ein Spiel durch die wachsende Anzahl von Spielern deutlich an Komplexität gewinnt.[20]

---

[14] Vgl. *Kinder, C.* (1999), S. 110.
[15] Vgl. *Holler, M. / Illing, G.* (2003), S. 6.
[16] Vgl. *Holler, M. / Illing, G.* (2003), S. 23 f.
[17] Vgl. *Holler, M. / Illing, G.* (2003), S. 267.
[18] Vgl. *Shubik, M.* (1985), S. 81.
[19] Die Verwendung der charakteristischen Funktion bei diesem konkreten Spiel ist durch den kooperativen Charakter innerhalb des Versicherungsunternehmens gerechtfertigt. Vgl. *Shubik, M.* (1985), S. 81 in Verbindung mit *Kinder, C.* (1999), S. 112 f.
[20] Vgl. *Kinder, C.* (1999), S. 113.

Damit ist eine Modellgrundlage in Form eines Spiels geschaffen, welches erlaubt, unterschiedliche Allokationsansätze vor dem Hintergrund ausgewählter Gütekriterien zu beurteilen. Zusammenfassend analysiert das im Folgenden dargestellte kooperative *RAC*-Allokationsspiel das strategische Verhalten von Spielern – die Segmente des versicherungstechnischen Bereichs – in Situationen, in denen sie sich, ihre individuellen Ziele verfolgend, zu einer Zusammenarbeit entschließen.[21] Die dabei auftretenden Probleme hinsichtlich der Art und Weise der *RAC*-Verrechnung bzw. der Verrechnung der Kooperationsersparnis – des Risikoausgleichs durch Kollektivierung[22] – sind Gegenstand der noch darzustellenden Lösungskonzepte.[23] Dabei werden als Folge der Fokussierung des versicherungstechnischen Bereichs endliche Spiele betrachtet, d.h. die einzelnen Versicherungssegmente werden als nicht teilbar angesehen.[24]

2.2.2. Koalitionsspiele in Form der charakteristischen Funktion

Die kooperative Spieltheorie fußt auf folgenden Elementen:[25]

Die Menge der teilnehmenden Spieler wird von einer endlichen Menge $N := \{1...,n\}$ dargestellt. Dabei wird jede mögliche Teilmenge von *N* als Koalition bezeichnet,[26] wobei die Gesamtheit aller Spieler die große Koalition darstellt. Damit ergeben sich 2^n mögliche Koalitionen.[27] Diese beinhalten ebenfalls die leere Menge $\varnothing$. Für den einzelnen Spieler bedeutet dies, dass er neben der grundsätzlichen Kooperationsentscheidung eine Selektionsentscheidung zu treffen hat, welcher Koalition er gegebenenfalls konkret beitreten möchte. Eine Funktion, die als charakteristische Funktion[28] bezeichnet wird, $v{:}2^N \rightarrow \Re$ weist jeder Koalition *S* einen Wert $v(S)$ zu.[29] Der Wert einer „leeren“ Koalition wird dabei auf Null gesetzt: $v(\varnothing) = 0$.[30] Diese Funktion wird im Weiteren durch ein kohärentes Risikomaß ρ konkretisiert.[31] Dabei ergibt

---

[21] Vgl. *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1015.
[22] Vgl. *Albrecht, P. / Korycìorz, S.* (2004), Absatz 2.
[23] Vgl. *Denault, M.* (2001), S. 6.
[24] Hinsichtlich der Differenzierung in teilbare und nicht-teilbare Spieler vgl. *Denault, M.* (2001).
[25] Obwohl im Folgenden an ausgewählten Stellen eine Konkretisierung hinsichtlich der RAC-Allokationsproblematik erfolgt, bleiben dennoch die spieltheoretischen Grund- und Lösungskonzepte erhalten. Vgl. *Kinder, C.* (1999), S. 109 ff. in Verbindung mit *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1016 ff.
[26] Vgl. *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1016.
[27] Vgl. *Opitz, O.* (1999), S. 93.
[28] Dabei bezeichnet 2^N die Menge aller möglichen Koalitionen. Vgl. *Tijs, S. H.* (1981), S. 123.
[29] Vgl. *Lemaire, J.* (1984), S. 68.
[30] Vgl. *Young, H.P.* (1998), S. 215.
[31] Dies steht im Einklang mit charakteristischen Funktionen von Kostenallokationsspielen, die ebenfalls einer Koalition ihre minimalen Kosten zuordnen. Vgl. *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1016 in Verbindung

sich das RAC einer Koalition S als $\rho(S)=\rho(\sum_{i\in S} L_i)$.[32] Aufgrund der Kohärenz ist diese charakteristische Funktion eine subadditive Mengenfunktion, die für 2^n Koalitionen definiert ist.[33] Aufgrund der speziellen Ausgestaltung der charakteristischen Funktion wird im Folgenden an einigen Stellen statt $\rho(N)$ die Bezeichnung *RAC* synonym verwendet. Als Annahme fließt ein, dass das betrachtete Spiel ein Spiel mit transferierbarem Nutzen ist.[34] Unter dieser Voraussetzung kann der Wert einer Koalition S, $\rho(S)$, beliebig unter deren Mitgliedern aufgeteilt werden.[35] Damit ist die Höhe des von der Koalition S benötigten *RAC* unabhängig von dessen Allokation auf die einzelnen Mitglieder von S.[36] Für die Nutzenfunktionen der Spieler bedeutet dies, dass sie linear in dem übertragenen Gut – dem *RAC* – sein müssen.[37] Grundsätzlich könnten zwar ebenfalls Spiele mit nicht-transferierbarem Nutzen betrachtet werden,[38] doch korrespondiert die Annahme linearer Nutzenfunktionen für Teilbereiche eines Unternehmens mit der Standardannahme für das Gesamtunternehmen, der Gewinnmaximierung.

Die Bedingung der Subadditivität für zwei disjunkte Koalitionen S und T,[39]

$$\rho(S+T)\leq \rho(S)+\rho(T) \text{ für alle } S,T\subset N \text{ mit } S\cap T=\varnothing\,, \qquad (7)$$

schafft letztlich die Anreize für eine Kooperation. Dies ist leicht einzusehen, da im Fall der Zusammenarbeit zweier Koalitionen ein *RAC* erreicht werden kann, das höchstens der Summe deren individueller *RAC*s bei Nicht-Kooperation entspricht.[40] Somit ist eine Definition der Kooperationsersparnis analog zur Definition des Diversifikationsmaßes[41] möglich. Aus der Subadditivitätseigenschaft des Risikomaßes folgt, dass die größte Koalitionsersparnis bei der Bildung der großen Koalition realisiert wird.[42] Allerdings muss in dieser Situation ein Weg gefunden werden, wie das *RAC* der großen Koalition unter den Spielern aufgeteilt wird. Ziel

mit *Artzner et al.* (1999), S. 208. Abweichend dem Vorgehen in *Albrecht, P. / Koryciorz, S.* (2004) wird somit gezielt lediglich eine Teilmenge der Risikomaße des Typus II betrachtet.

[32] Vgl. *Denault, M.* (2001), S. 9.

[33] Vgl. *Denault, M.* (2001), S. 9.

[34] Vgl. *Lemaire, J.* (1984), S. 68 , *Owen, G.* (1995), S. 212 f.

[35] Vgl. *Holler, M. / Illing, G.* (2003), S. 269.

[36] Das verwendete Modell geht, wie hier besonders gut deutlich wird, konform mit der Realität: Droht einem Versicherungsunternehmen der technische Ruin, ist das *gesamte* Unternehmen davon betroffen, nicht etwa nur einzelne Sparten des Unternehmens.

[37] Vgl. *Lemaire, J.* (1991), S. 21 in Verbindung mit *Holler, M. / Illing, G.* (2003), S. 269.

[38] Vgl. *Lemaire, J.* (1991), S. 30 ff.

[39] Vgl. *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1016 in Verbindung mit *Artzner et al.* (1999).

[40] Vgl. *Denault, M.* (2001), S. 6 und vgl. *Young, H. P.* (1998), S. 215.

[41] Vgl. *Albrecht, P. / Koryciorz, S.* (2004), Absatz 2.

[42] Vgl. *Denault, M.* (2001), S. 6 und vgl. *Young, H. P.* (1998), S. 215.

des Spiels, welches eindeutig durch die Funktion $\Gamma(N, \rho)$ beschrieben wird, ist deshalb, eine *faire*[43] Aufteilung des *RAC* zu finden. Dabei kann diese als ein Vektor[44] $\begin{pmatrix} \phi_1\,(L_1,...,L_n) \\ ... \\ ... \\ \phi_n\,(L_1,...,L_n) \end{pmatrix}$ bzw. $RAC^* \in \mathfrak{R}^n$ definiert werden, so dass gilt:

$$RAC\sum_{i=1}^{n}\phi_i = \sum_{i=1}^{n}RAC_i^* = \rho(N)\,. \qquad (8)$$

Diese Beziehung entspricht der Forderung, dass das kollektiv ermittelte *RAC* vollständig auf die einzelnen Segmente zu verrechnen ist (vollständige Allokation).

2.3. Axiomatische Lösungskonzepte

2.3.1. Abgrenzung

Zu Koalitionsspielen mit übertragbarem Nutzen existieren in der Literatur diverse Lösungskonzepte,[45] deren Ziel es ist, detaillierte Aussagen über mögliche Verhandlungslösungen zu treffen. Dabei lassen sich grundsätzlich zwei Vorgehensweisen unterscheiden: zum einen der axiomatische Ansatz, der in dieser Arbeit betrachtet wird,[46] und zum anderen die Modellierung eines konkreten Verhandlungsprozesses.[47]

Beim axiomatischen Ansatz wird ein System von wünschenswerten Eigenschaften aufgestellt, dem jede Verhandlungslösung genügen sollte. Damit besteht die Möglichkeit, spezifische Vorstellungen über Fairness und Gerechtigkeit in den Lösungsansatz zu integrieren.[48] Während im Rahmen einer *absoluten* Kapitalallokation die vollständige Verrechnung des *RAC* notwendig ist, erweisen sich andere, aus Sicht der Fairness als wünschenswert empfundene Eigenschaften, in gewissen Grenzen als willkürlich. Aus diesem Grund kann bei einem derar-

[43] Ein Lösungsansatz wird analog zum Vorgehen in *Albrecht, P. / Koryciorz, S.* (2004) als fair bzw. als gerecht bezeichnet, wenn dieser gewissen Anforderungen in Form eines Axiomensystems genügt.

[44] In der spieltheoretischen Literatur wird dieser Vektor Auszahlungsvektor genannt. Vgl. *Shubik, M.* (1985), S. 86.

[45] Vgl. *Shubik, M.* (1985), S. 84.

[46] Dieses Vorgehen ist analog zu *Young, H. P.* (1998).

[47] Vgl. *Holler, M. / Illing, G.* (2003), S. 25.

[48] Vgl. *Holler, M. / Illing, G.* (2003), S. 26.

tigen Vorgehen keine eindeutig beste Allokationsmethode bestimmt werden.[49] Charakteristisch für das axiomatische Vorgehen ist die Abstraktion von spezifischen Regeln des Spiels, was zur Folge hat, dass der konkrete Mechanismus, der zu einer Koalitionsbildung führt, nicht analysiert wird.[50] Dies geschieht mit dem Ziel, allgemeine Prinzipien herauszuarbeiten, die auf möglichst viele Situationen anwendbar sind.

Betrachtet man unterschiedliche axiomatische Lösungskonzepte wie beispielsweise den Kern oder den *Shapley*-Wert genauer, wird die grundsätzliche Gliederung der Lösungskonzepte in Mengen- und Wertansätze[51] verständlich.[52] Verringert der Kern die Menge der potenziellen *RAC*-Allokationen auf eine Teilmenge der ursprünglich möglichen Alternativen, garantiert der *Shapley*-Wert hingegen eine eindeutige Allokation, indem er stärkere[53] Anforderungen an die Lösung stellt.[54]

[49] Vgl. *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1015.
[50] Vgl. *Holler, M. / Illing, G.* (2003), S. 26.
[51] Ein Wert kann hierbei als eine Funktion aufgefasst werden, die jedes Spiel auf eine eindeutige Lösung bzw. Allokation abbildet:
$\pi : \Gamma(N,\rho) \rightarrow \begin{pmatrix} \pi_1(N,\rho) \\ ... \\ \pi_n(N,\rho) \end{pmatrix}$ $mit \sum_{i \in N} \pi_i(N,\rho) = \rho(N)$. Vgl. dazu *Denault, M.* (2001), S. 4.
[52] Vgl. *Holler, M. / Illing, G.* (2003), S. 276.
[53] Stärkere Anforderungen sind in diesem Kontext als zusätzliche Anforderungen zu verstehen.
[54] Vgl. *Holler, M. / Illing, G.* (2003), S. 26.

2.3.3. Wünschenswerte Eigenschaften eines Kapitalallokationsmechanismus

Trotz unterschiedlicher Auffassungen von Fairness lassen sich in der betrachteten Situation, in der durch Kooperation im Allgemeinen Ersparnisse erzielt werden, Forderungen an einen Allokationsmechanismus ableiten. Im Folgenden werden wünschenswerte Eigenschaften eines Kapitalallokationsmechanismus zusammengefasst, die anschließend als Bewertungsgrundlage der spieltheoretischen Ansätze dienen werden.

Aus Sicht der Spieltheorie sollte eine Kapitalallokationsmethode:[55]

I.) *effizient* sein. Eine Allokation wird als effizient bezeichnet, wenn das *RAC* vollständig auf die einzelnen Spieler verrechnet wird.

II.) *individuell rational* sein. Eine Allokation wird individuell rational genannt, wenn für jeden Spieler sein jeweils isoliert ermitteltes – Stand-Alone[56] – *RAC* die Obergrenze seiner Allokation bildet.

III.) *stabil* sein. Eine Allokation wird stabil genannt, wenn sie unter der Annahme eines kooperativen Spiels mit transferierbarem Nutzen die Eigenschaften I-II aufweist und darüber hinaus gruppenrational[57] ist.[58]

IV.) *symmetrisch* sein. Eine Allokation ist symmetrisch, wenn sie sich unabhängig von der Reihenfolge der Spieler innerhalb eines Lösungskonzeptes ergibt. Konkret hat somit der Index eines Spielers keinen Einfluss auf das ihm zugeordnete *RAC*.[59]

V.) die *Strohmanneigenschaft* aufweisen. Eine Allokation besitzt diese Eigenschaft, wenn in der Situation, in der ein Spieler bei keiner möglichen Koalition zu einer Ersparnis beiträgt, genau denjenigen Anteil am *RAC* verrechnet bekommt, den er bei einer Nicht-Kooperation, also alleine, tragen müsste.

---

[55] Vgl. *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1016.
[56] Vgl. *Albrecht, P. / Korycıorz, S.* (2004), Absatz 1.
[57] Vgl. dazu Abschnitt 3.1.
[58] Vgl. *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1016.
[59] Vgl. *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1016 in Verbindung mit *Lemaire, J.* (1991), S. 27.

Die Strohmanneigenschaft ist zwar eine sinnvolle spieltheoretische Eigenschaft, doch besitzt sie im Rahmen der (stochastischen) Modellierung des versicherungstechnischen Bereichs nur eingeschränkte Relevanz.[60]

An dieser Stelle scheint es angebracht, diese spieltheoretischen Anforderungen dem von *Albrecht/Koryciorz* (2004) verwendeten Axiomensystem für „kohärente Allokationsprinzipien“ gegenüberzustellen. Dabei lässt sich folgendes zusammenfassend festhalten:

- Aus der Definition des Kapitalallokationsmechanismus in 2.1., insbesondere aus (2) und (3), ergibt sich stets eine vollständige Allokation des *RAC*. Damit ist eine im Sinne der Spieltheorie effiziente Allokation gesichert.

- Die Eigenschaften der individuellen und der Gruppenrationalität entsprechen den Anforderungen des *No Undercut*-Axioms und somit der Anforderung und A2.

- Die von *Albrecht/Koryciorz* (2004) verwendete Formalisierung des Symmetriegedankens stellt einen Spezialfall des spieltheoretischen Symmetriegedankens dar.[61]

- Ebenso bildet die risikotheoretische Forderung der risikolosen Allokation einen Spezialfall der Strohmanneigenschaft.[62]

Erfüllt somit ein gemäß 2.1. definierter Allokationsmechanismus die spieltheoretischen Anforderungen I.-V., so handelt es sich insbesondere um ein kohärentes Allokationsprinzip nach *Denault* (2001).

---

[60] Die Argumentation in *Kinder, C.* (1999), S. 221 ist analog übertragbar, wobei die Voraussetzungen im Versicherungskontext entweder perfekt positiv abhängige Segmentschäden sind, oder aber nicht-stochastische bzw. deterministische Segmentschäden existieren.
[61] Vgl. *Albrecht, P. / Koryciorz, S.* (2004), Absatz 4.
[62] Vgl. *Albrecht, P. / Koryciorz, S.* (2004), Absatz 4.

3. Allokationsansätze

3.1. Die Imputation

Als Lösung eines kooperativen *RAC*-Verteilungsspiels $\Gamma(N,\rho)$ sind grundsätzlich alle Allokationen $RAC^* = (RAC_1^*,...,RAC_n^*)$ von Interesse, die die folgenden beiden Eigenschaften aufweisen: [63]

- Individuelle Rationalität

  $$RAC_i^* \leq \rho(\{i\}),\ i=1,...,n \tag{9}$$

- Effizienz

  $$\sum_{i=1}^{n} RAC_i^* = \rho(N) = RAC. \tag{10}$$

Eine Allokation, die beide Bedingungen erfüllt, nennt man Imputation bzw. Zurechnung.[64] Dabei beschreibt die individuelle Rationalität, dass kein Spieler einem Verhandlungsergebnis zustimmen würde, das ihn schlechter stellt als in einer Situation, in der er mit keinem anderen kooperiert.[65] Somit ist eine obere Schranke festgelegt, die bei einer Allokation nicht durchbrochen werden darf. Bezogen auf das Versicherungsunternehmen wird somit keinem Segment mehr als sein *RAC* bei einer Stand-Alone-Betrachtung zugeordnet. Darüber hinaus fordert die Effizienz, dass das vollständige *RAC* der großen Koalition auf die *n* Spieler verteilt wird. Das RAC_i^* stellt denjenigen (absoluten) Anteil des *RAC* dar, den das Segment i innerhalb des Versicherungsunternehmens tragen muss. Um die Definition der Imputation zu veranschaulichen, wird ein Beispielunternehmen betrachtet,[66] wobei die einzelnen Segmente als Spieler interpretiert werden.[67]

---

[63] Somit erfolgt eine erste Einschränkung möglicher Allokationen. Vgl. *Lemaire, J.* (1984), S. 68.

[64] Vgl. *Lemaire, J.* (1984), S. 68.

[65] Vgl. *Kinder, C.* (1999), S. 114.

[66] Das verwendete Beispiel stellt die analoge Übertragung deterministischer Kosten auf den Fall stochastischer Größen im Versicherungsunternehmen dar. Vgl. dazu das Beispiel 4 in *Lemaire, J.* (1991), S. 24-26 und *Moulin, H.* (1988), S. 91 ff.

[67] Zur Generierung des Beispiels wurde das kohärente Risikomaß durch den Conditional Value-at-Risk zum Konfidenzniveau α konkretisiert und darüber hinaus der Vektor der (zentrierten) Segmentverluste als multivariat normalverteilt angenommen. Dabei wurde das 99% – Quantil der Standardnormalverteilung durch den Wert 2,33 approximiert. Zur formalen Darstellung vgl. *Albrecht, P.* / *Koryciorz, S.* (2004), Absatz 2.

Tabelle 1: Grunddaten

Versicherungssegmente	RAC α=0,01	A	B	C	ABC	Benötiges RAC
Erwarteter Schaden [in Mio. €]		**100**	**100**	**300**	**500**	**17.087**
Standardabweichung des Schadens [in Mio. €]		**2.000**	**3.000**	**5.000**	**6.403**	
Koalitionen bestehend aus:						
Spieler A	**5.337**					
Spieler B	**8.006**					
Spieler C	**13.343**					
Spieler A,B	**10.674**					
Spieler A,C	**14.370**					
Spieler B,C	**15.560**					
Spieler A,B,C	**17.087**					
Keinem Spieler	**0**					

Wie aus Tabelle 1 ersichtlich ist, existieren 2^3= 8 mögliche Koalitionen. Aus der Definition einer Imputation folgt, dass nachstehende (Un-)Gleichungen erfüllt sein müssen:

$$RAC_A^* + RAC_B^* + RAC_C^* = 17.087 \tag{11a}$$

$$RAC_A^* \leq 5.337 \tag{11b}$$

$$RAC_B^* \leq 8.006 \tag{11c}$$

$$RAC_C^* \leq 13.343. \tag{11d}$$

Betrachtet man exemplarisch die Allokation $(5.337;8.006;3.744)$ [68], besteht aus Sicht der Imputation für keinen der Spieler ein Einwand, an der großen Koalition teilzunehmen. Allerdings ist auffällig, dass lediglich der dritte Spieler davon profitiert. Da aber ebenso die Koalition bestehend aus Spieler A und Spieler B die Möglichkeit hat, eine Kooperationsersparnis, respektive Risikominderungseffekte, zu erzielen, liegt es für diese nahe, der großen Koalition nicht zuzustimmen.[69] Zwar ist die Allokation $(5.337;8.006;3.744)$ individuell rational und effizient, ist aber aus Sicht der Koalition bestehend aus Spieler A und B nicht wünschenswert.

[68] Diese Allokation ergibt sich wie folgt: *17.087-5.337-8.006=3.744*.
[69] Vgl. *Lemaire, J.* (1991), S. 25, *Shubik, M.* (1982), S. 150.

Um diesen Missstand zu beseitigen, muss das Konzept der Gruppenrationalität eingeführt werden.[70] Eine Allokation $RAC^* = (RAC_1^*, ..., RAC_n^*)$ ist gruppenrational, wenn gilt:[71]

$$\sum_{i \in K} RAC_i^* \leq \rho(K) \text{ für alle } K \subseteq N. \tag{12}$$

Das bedeutet konkret, dass es keine Koalition als Teilmenge von *N* geben darf, die für sich genommen den Anreiz hat, sich von der großen Koalition abzuspalten bzw. dieser nicht zuzustimmen. Erfüllt eine Imputation diese Anforderung, ist diese Allokation aus spieltheoretischer Sicht stabil und stellt somit eine effiziente und gemäß dieser Minimalanforderungen *faire* Lösung dar.

3.2. Ein Mengenansatz: Der Kern

Allgemein stellt der Kern eines Spiels, der mit *C(Γ)* bezeichnet wird, die Menge aller nicht dominierten Imputationen dar.[72] Eine Imputation $a = (a_1, ..., a_n)$ dominiert eine Imputation $b = (b_1, ..., b_n)$ hinsichtlich der Koalition *S* (strikt), wenn folgendes gilt:[73]

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in S} a_i \geq \rho(S) \\ &a_i < b_i \quad \text{für alle } i \in S. \end{aligned} \tag{13}$$

Die Intuition dabei ist, dass Spieler der Koalition *S* unter der Allokation *a* weniger zugeteilt bekommen und darüber hinaus diese Allokation auch aufgrund ihrer Verhandlungsstärke durchsetzen können.

Aus der Definition der Dominanz folgt, dass, falls eine Allokation *x* im Kern enthalten ist, formal $x \in C(\Gamma)$, es für keine Koalition erstrebenswert bzw. durchsetzbar ist, eine andere Allokation als *x* herbeizuführen, selbst wenn diese ebenfalls ein Element des Kerns ist. Damit

[70] Vgl. *Lemaire, J.* (1991), S. 25.
[71] Vgl. *Lemaire, J.* (1984), S. 68.
[72] Vgl. *Lemaire, J.* (1991), S. 25.
[73] Vgl. *Holler, M. / Illing, G.* (2003), S. 275 f., *Lemaire, J.* (1991), S. 25.

erfüllen Allokationen, die im Kern des Spiels liegen, die Eigenschaften der individuellen Rationalität, der Effizienz und der Gruppenrationalität.[74]

Im Fall eines Koalitionsspiels mit transferierbarem Nutzen lässt sich der Kern mittels des Konzeptes der Gruppenrationalität definieren: [75]

$$C(\Gamma)=\left\{ RAC^{*}\in\Re^{n} \,\middle|\, \rho(K)-\sum\nolimits_{i\in K} RAC_i^{*}\geq 0 \;\; und\, RAC=\sum_{j=1}^{n} RAC_j^{*} \quad für\, alle\, K\, von\, N \right\}. \quad (14)$$

Es lässt sich festhalten, dass der Kern ein stabiles Lösungskonzept darstellt, da sowohl kein einzelner Spieler, als auch keine Gruppe von Spielern einen Anreiz hat, die große Koalition zu verlassen. Das Konzept des Kerns stellt somit größere Anforderungen an mögliche Allokationen als Imputationen. Die Definition des Kerns in (14) zeigt, dass die Gruppenrationalität die Eigenschaft der individuellen Rationalität beinhaltet.

Bezogen auf das obige Beispiel müssen nun folgende (Un-) Gleichungen erfüllt sein:[76]

$$RAC_A^{*}+RAC_B^{*}+RAC_C^{*}=17.087 \quad (15\text{ a})$$

$$RAC_A^{*}+RAC_B^{*}\leq 10.674 \quad (15\text{b})$$

$$RAC_A^{*}+RAC_C^{*}\leq 14.370 \quad (15\text{c})$$

$$RAC_B^{*}+RAC_C^{*}\leq 15.560 \quad (15\text{d})$$

$$RAC_A^{*}\leq 5.337 \quad (15\text{e})$$

$$RAC_B^{*}\leq 8.006 \quad (15\text{f})$$

$$RAC_C^{*}\leq 13.343. \quad (15\text{g})$$

Da wie angedeutet für die Koalition aus Spieler A und Spieler B bei der Allokation $(5.337;8.006;3.744)$ ein Anreiz besteht, nicht an der großen Koalition teilzunehmen, kann

[74] D.h. Elemente des Kerns führen zu einer vollständigen Kapitalallokation, die für kein Segment zu einer höheren Belastung als ihr Stand-Alone-RAC führt und darüber hinaus keine mögliche Teilmenge von Segmenten über ihr Stand-Alone-RAC hinaus belastet. Vgl. *Denault, M.* (1999), S. 8.
[75] Vgl. *Denault, M.* (2001), S. 7, *Tijs, S. H.* (1981), S. 124.
[76] Vgl. *Lemaire, J.* (1991), S. 26.

diese Allokation nicht im Kern liegen. Dies gründet auf der Tatsache, dass sich für beide Spieler zusammen, außerhalb der großen Koalition, höchstens ein *RAC* von 10.674 ergeben würde, ihnen aber innerhalb der großen Koalition 13.343[77] zugerechnet werden. Somit führt die Allokation $(5.337; 8.006; 3.744)$ zu keinem *fairen* Ergebnis. Kommt dennoch die große Koalition zustande, werden Spieler A und B benachteiligt.[78]

Obwohl der Kern auf den ersten Blick ein vielversprechendes Lösungskonzept darstellt, erweist sich dessen Anwendung allgemein als problematisch. Generell kann der Kern eines Spiels für beliebige charakteristische Funktionen eine leere Menge darstellen,[79] was instabile Allokationen impliziert. Allerdings erweist sich dies bei der Verwendung eines kohärenten Risikomaßes als nicht relevant, da gesichert ist, dass der Kern stets Elemente – Allokationen – enthält.[80] Damit ist allerdings eine weitere Schwierigkeit verbunden, da bei der Existenz eines nicht leeren Kerns dieser in der Regel unendlich viele mögliche Allokationen enthält.[81] In dieser Situation stellt sich die Frage, nach welchen Kriterien eine Allokation im Kern einer anderen, die ebenfalls im Kern liegt, vorgezogen werden sollte.[82] Aus diesem Grund müssen zusätzliche Kriterien gefunden werden, welche die Menge der möglichen Allokationen weiter reduzieren. Dabei erweist es sich als sinnvoll, die Vorstellung von Fairness, die implizit dem Kern zugrunde liegt, näher zu betrachten. Dazu wird die Bedingung der Gruppenrationalität etwas umgeformt.[83] Als Ergebnis erhält man den „Zusatzkostentest“: [84]

$$\sum_{i \in S} RAC_i^* \geq RAC - \rho(N - S) \ \text{für alle}\, S \subseteq N\,. \qquad (16)$$

Dieser kann analog zum inkrementellen Verfahren bei *Albrecht/Koryciorz* (2004) gesehen werden, wobei der Zusatzkostentest nicht nur einzelne Spieler, sondern Koalitionen von Spielern berücksichtigt.[85] Um diesen Test zu bestehen, muss die Koalition *S* mindestens das zu-

[77] Dieses Ergebnis ist zu erwarten, da die Koalition aus Spieler A und B die Summe ihrer Stand-Alone-RACs verrechnet bekommt. Dies unterstellt, dass bei dieser Koalition keinerlei Kooperationsersparnis entsteht. Würde dies den Tatsachen entsprechen, würde die Koalition aus Spieler A und B dieselben relevanten Charakteristika – hier die Standardabweichung – wie Spieler C aufweisen. Vgl. Tabelle 1.
[78] Am Rande sei auf darauf hingewiesen, dass dieser Mengenansatz nicht unproblematisch bezüglich der Dominanzrelationen ist. Vgl. *Holler, M. / Illing, G.* (2003), S. 280.
[79] Vgl. *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1016.
[80] Vgl. *Denault, M.* (2001), S. 9.
[81] Vgl. *Lemaire, J.* (1991), S. 26.
[82] Vgl. *Young, H. P.* (1985), S. 13.
[83] Unter der Bedingung der vollständigen Allokation des *RAC*. Vgl. *Young H. P.* (1998), S. 224.
[84] Vgl. *Holler, M. / Illing, G.* (2003), S. 284, *Young, H. P.* (1985), S. 8, *Young, H. P.* (1998), S. 223.
[85] Vgl. *Holler, M. / Illing, G.* (2003), S. 284.

sätzliche *RAC*, welches sie verursacht, tragen. Wäre dem nicht so, würden die Mitglieder der Koalition *N-S*, die Mitglieder der Koalition *S* subventionieren.[86] Aus diesem Grund würde die Koalition *N-S* eine Lösung ohne die Koalition *S* anstreben. Als Konsequenz wäre die große Koalition nicht stabil bzw. die Lösung im Fall einer großen Koalition nicht *fair*.

Erst unter der Voraussetzung, dass alle Koalitionen den Zusatzkostentest bestehen, steht der großen Koalition nichts entgegen.[87] Somit zeichnen sich Allokationen innerhalb des Kerns dadurch aus, dass keine Koalition eine andere mitfinanziert. Unzweifelhaft kann man diese Eigenschaft als gerecht bezeichnen. Da im Allgemeinen jeder Spieler zur Kooperationsersparnis beiträgt, liegt es darüber hinaus nahe, jeden Spieler an diesem Vorteil partizipieren zu lassen. Jedoch ist dies beim Konzept des Kerns nicht zwingend erfüllt. Zwar sichert eine Allokation im Kern, dass keine Koalition bzw. kein Spieler Nachteile durch eine große Koalition hat, aber es ist nicht gewährleistet, dass jeder Spieler an den Vorteilen partizipiert. Abschließend lässt sich sagen, dass bei Allokationen außerhalb des Kerns mindestens eine Koalition bzw. ein Spieler bei Kooperation mehr *RAC* tragen muss als im Fall der Nicht-Kooperation.

Im Folgenden werden zunächst fünf einfache Allokationsmechanismen vorgestellt, von denen keiner zu einer Allokation führt, die innerhalb des Kerns liegt. Jedoch können an diesen Beispielen die erläuterten Grundkonzepte besonders gut veranschaulicht werden.

---

[86] Vgl. *Holler, M. / Illing, G.* (2003), S. 284.
[87] Vgl. *Holler, M. / Illing, G.* (2003), S. 284.

3.3. Wertansätze

3.3.1. Die Gleichverteilung des *RAC*

Dieser Allokationsmechanismus beschreibt die einfachste Aufteilungsregel des *RAC*:[88]

$$RAC_i^* = \frac{1}{n}\rho(N), \;\; i = 1,...,n. \qquad (17)$$

Dabei wird jedem Spieler das *RAC* zu gleichen Teilen zugerechnet. Ein derartiges Vorgehen ist zwar effizient, da das vollständige Kapital verrechnet wird, weist aber darüber hinaus lediglich die Eigenschaft der Symmetrie auf.[89] Dieser Ansatz erfüllt die Strohmanneigenschaft nicht, da jeder Spieler von einer entstandenen Kooperationsersparnis profitiert. Grundsätzlich ist dies nicht wünschenswert. Wie allerdings bereits ausgeführt, besitzt diese Eigenschaft im Fall der Betrachtung des versicherungstechnischen Bereichs keine Relevanz. Da keinerlei spezifische Merkmale einzelner Spieler erfasst werden, ist es nicht verwunderlich, dass neben den genannten Schwächen die individuelle Rationalität nicht gegeben ist.[90]

3.3.2. Die Gleichverteilung der Kooperationsersparnis

Im Gegensatz zum vorherigen Ansatz wird das *RAC* nicht auf die einzelnen Spieler gleichverteilt, sondern jedem Spieler wird sein Stand-Alone ermitteltes *RAC* abzüglich der gleichverteilten Kooperationsersparnis aus der Bildung der großen Koalition zugerechnet.[91]

$$RAC_i^* = \rho(\{i\}) - \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n}\rho(\{j\}) - \rho(N)\right], \;\; i, = 1,...,n. \qquad (18)$$

Da in diesem Ansatz die jeweiligen Stand-Alone-RACs die Obergrenze der RAC_i^* darstellen, ist eine derart ermittelte Allokation individuell rational. Es ist kritikwürdig, dass die Kooperationsersparnis jedem Spieler in gleichem Maße zugute kommt. Ansonsten erfüllt der Ansatz wie der vorherige die Eigenschaften der Effizienz und Symmetrie.

[88] Vgl. *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1017.
[89] Vgl. *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1017.
[90] Vgl. *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1017.
[91] Vgl. *Lemaire, J.* (1984), S. 65.

3.3.3. Die proportionale Verteilung der Kooperationsersparnis

Dieser Ansatz kann als eine Verbesserung zur Gleichverteilung der Kooperationsersparnis angesehen werden, da jedem Spieler die Kooperationsersparnis anteilig zugerechnet wird. Dabei ergibt sich der Anteil des Spielers i aus dem Verhältnis seines Stand-Alone ermittelten RAC_i und der Summe aller derart ermittelter RAC_is. Damit wird aus Sicht der *RAC* Verursachung eine Art Fairness beschrieben, wobei allerdings Abhängigkeiten zwischen den Segmenten nicht berücksichtigt werden.[92]

$$RAC_i^* = \rho(\{i\}) - \frac{\rho(\{i\})}{\sum_{j=1}^{n} \rho(\{j\})} \left[\sum_{k=1}^{n} \rho(\{k\}) - \rho(N) \right], \; i = 1,...,n \qquad (19)$$

$$= \frac{\rho(\{i\})}{\sum_{j=1}^{n} \rho(\{j\})} \rho(N), \; i = 1,...,n.$$

Die spieltheoretischen Eigenschaften I, II und IV bleiben wie im vorangegangenen Ansatz erhalten.[93]

[92] Vgl. *Denault, M.* (1999), S. 13.
[93] Vgl. *Koryciorz* (2004), S. 203.

3.3.4. Die Gleichverteilung der nicht inkrementellen Kosten

Bei diesem Ansatz erweist sich eine inkrementelle Betrachtung des *RAC* von Bedeutung. Zunächst wird dazu eine Funktion *,ic*, wie folgt definiert:[94]

$$ic(\{i\}) = \rho(N) - \rho(N - \{i\}). \tag{20}$$

Damit ergeben sich die Zurechnungsfaktoren aus:[95]

$$RAC_i^* = ic(\{i\}) + \frac{1}{n}\left[\rho(N) - \sum_{j=1}^{n} ic(\{j\})\right],\ i = 1,\ldots,n. \tag{21}$$

Da, wie in *Albrecht/Koryciorz* (2004) beschrieben, die Summe der inkrementellen *RAC*s geringer ist als das *RAC*, würde bei ausschließlicher Verteilung der inkrementellen *RAC*s eine Kostenlücke entstehen. Deshalb wird bei diesem Ansatz das unverrechnete *RAC*[96] den einzelnen Spielern zu gleichen Anteilen zugeordnet.[97] Die Orientierung an dem inkrementellen *RAC* eines jeden Spielers sichert zumindest, dass die übrigen Spieler *N-{i}* diesen nicht subventionieren. Allerdings ist darauf hinzuweisen, dass dieses Vorgehen nicht gleich dem in Kapitel 3.2. vorgestellten Zusatzkostentest ist, da hier nur einzelne Spieler und keine Koalitionen betrachtet werden. Darüber hinaus ist die individuelle Rationalität nicht mehr gesichert, da die Obergrenze der RAC_i^* nicht mehr das Stand-Alone-RAC darstellt, sondern lediglich eine untere Grenze durch das inkrementelle *RAC* festgelegt wird.[98] Betrachtet man die Ermittlung der RAC_i^* näher, wird deutlich, dass dieser Ansatz der erste ist, der die Abhängigkeitsstruktur der Versicherungssegmente implizit berücksichtigt.[99] Auch dieses Verfahren ist effizient und symmetrisch.[100]

---

[94] Vgl. *Lemaire, J.* (1984), S. 65.
[95] Vgl. *Kinder, C.* (1999), S. 179.
[96] $\rho(N) - \sum_{j=1}^{n} ic(\{j\})$, im Weiteren als Kostenlücke bezeichnet.
[97] Vgl. *Kinder, C.* (1999), S. 179.
[98] Vgl. *Kinder, C.* (1999), S. 180.
[99] Dies geschieht, indem jedem RAC_i^* das inkrementelle RAC des Spielers i als Ausgangspunkt dient.
[100] Vgl. *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1019.

3.3.5. Die proportionale Verteilung der nicht inkrementellen Kosten

Dieser Ansatz unterscheidet sich vom vorangegangen lediglich in der Berechnung der Gewichtungsfaktoren für die Allokation der nicht inkrementellen Kosten.

$$RAC_i^* = ic(\{i\}) + \frac{ic(\{i\})}{\sum_{j=1}^{n} ic(\{j\})} \left[\rho(N) - \sum_{k=1}^{n} ic(\{k\}) \right], \; i = 1,...,n.^{101} \qquad (22)$$

$$= \frac{ic(\{i\})}{\sum_{j=1}^{n} ic(\{j\})} \rho(N), \; i = 1,...,n.$$

In dieser Situation ergeben sich die jeweiligen Gewichtungsfaktoren aus dem Verhältnis des inkrementellen *RAC* eines Segments zu der Summe aller inkrementellen *RAC*s. Damit fließen, im Gegensatz zum vorherigen Ansatz, bei der Berechnung der Verteilungsgewichte Informationen über die jeweiligen Spieler mit ein. Wie der vorangegangene Ansatz erweist sich dieses Verfahren ebenfalls als effizient und symmetrisch.[102]

Alle vier vorgestellten Allokationsverfahren haben gemein, dass sie nicht stabil sind.[103] Kommt eine große Koalition dennoch zustande, wird mindestens eine Koalition bzw. mindestens ein Spieler im Vergleich zur Nicht-Kooperation schlechter gestellt. Es ist leicht einzusehen, dass alle vier Methoden im Allgemeinen nicht stabil sein können, da Koalitionen mit mehr als einem Spieler und weniger als *n-1* Spielern bei der Berechnung nicht berücksichtigt werden.[104] Damit kann keiner dieser Ansätze als kohärent bezeichnet werden.

---

[101] Vgl. *Lemaire, J.* (1984), S. 66.
[102] Vgl. *Koryciorz* (2004), S. 227.
[103] Vgl. *Lemaire, J.* (1984), S. 66.
[104] Vgl. *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1019.

3.3.6. Der *Shapley*-Wert

Nach der Vorstellung einfacher Lösungsansätze soll nun mit dem *Shapley*-Wert ein in der Literatur oft zitierter Vertreter der Wertansätze vorgestellt werden.[105] Dieser basiert auf inkrementellen Betrachtungen des *RAC*, wobei das von jedem Spieler zusätzlich verursachte *RAC* von Interesse ist.[106] Man kann sich dies wie folgt vorstellen: Ein Spieler beginnt und bildet die Ausgangskoalition. Die übrigen treten nacheinander der schon bestehenden Koalition bei, bis sich die große Koalition gebildet hat.[107] Im Fall von drei Spielern kann Spieler i beginnen, als zweiter oder letzter der schon bestehenden Koalition beitreten. Insgesamt existieren in diesem Beispiel sechs Möglichkeiten, die große Koalition zu bilden.[108] Dabei hängt das zusätzliche *RAC* eines Spielers davon ab, in welcher Reihenfolge die große Koalition gebildet wurde. Während dem beginnenden Spieler sein Stand-Alone-RAC zugeordnet wird, profitiert jeder folgende Spieler vom Ausgleichseffekt zwischen ihm und der schon bestehenden Koalition.[109] Bis zu diesem Punkt existieren sechs mögliche Allokationen, die von der Reihenfolge der Spieler abhängen und somit keine symmetrischen Lösungen darstellen. In der Grundform des *Shapley*-Wertes geht man nun davon aus, dass jede Reihenfolge der Spieler gleich wahrscheinlich ist. Da *n!* Permutationen[110] von *N* existieren, ist die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Reihenfolge $\frac{1}{n!}$.[111] Eine Allokation gemäß dem *Shapley*-Wert ist nun folgendermaßen definiert:[112]

$$RAC_i^* = \left(\frac{1}{n!}\right) \sum_{i \in K;\, K \subset N} (k-1)!(n-k)!\left[\rho(K) - \rho(K - \{i\})\right], \quad i = 1,\ldots,n. \qquad (23)$$

Dabei bezeichnet *k* die Anzahl der Spieler in der Koalition *K* und *n* entsprechend die Anzahl der Spieler in der großen Koalition. Das Produkt *(k-1)!(n-k)!* spiegelt die Anzahl der Möglichkeiten für einen Spieler i wider, als Letzter der Koalition *K* beizutreten.[113] Die *(k-1)* anderen Spieler von *K* and die *(n-k)* Spieler der Koalition *N-K* können beliebig vertauscht werden,

---

[105] Vgl. *Mango* (1998), S. 174 ff, *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1017, *Kinder, C.* (1999), S. 119 ff.
[106] Vgl. *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1017.
[107] Vgl. *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1017.
[108] Vgl. *Opitz, O.* (1999), S. 104 f.
[109] Konkret wird der vollständige Ausgleichseffekt dem zusätzlichen Spieler zugerechnet. Vgl. *Lemaire, J.* (1984), S. 70.
[110] Vgl. *Opitz, O.* (1999), S. 105.
[111] Vgl. *Krengel, U.* (1998), S. 5.
[112] Vgl. *Holler, M. / Illing, G.* (2003), S. 304 f.
[113] Vgl. *Lemaire, J.* (1991), S. 29.

ohne die Position des Spielers i zu verändern. $\frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}$ stellt die Wahrscheinlichkeit dafür dar, dass ein beliebiger Spieler i an einer bestimmten Stelle, hier der letzten, innerhalb der Koalition *K* steht. Damit entspricht der *Shapley*-Wert der mathematischen Erwartung der möglichen zusätzlichen *RAC*-Werte des Spielers i, wenn alle Permutationen –mögliche Reihenfolgen der Spieler – gleichwahrscheinlich sind.[114]

Shapley konnte zeigen, dass seine Allokation als einzige folgende Axiome erfüllt:[115]

- Symmetrie
- Strohmanneigenschaft
- Additivität.[116]

Problematisch ist, dass bei der Konkretisierung der charakteristischen Funktion durch ein kohärentes Risikomaß nicht gezeigt werden kann, dass der *Shapley*-Wert ein Element des Kerns ist.[117] Damit kann ebenfalls nicht gezeigt werden, dass dieses Lösungskonzept zu einer stabilen bzw. *fairen* Lösung führt bzw. einen kohärenten Allokationsmechanismus darstellt.

Tabelle 2: *Shapley*-Wert

Versicherungssegmente		**A**	**B**	**C**	**ABC**
Erwarteter Schaden [in Mio. €]		**100**	**100**	**300**	**500**
Standardabweichung des Schadens [in Mio. €]		**2.000**	**3.000**	**5.000**	**6.403**
∅ **RAC als erster Spieler** [in Mio. €]		**5.337**	**8.006**	**13.343**	
∅ **RAC als zweiter Spieler** [in Mio. €]		**1.848**	**3.777**	**8.294**	
∅ **RAC als letzter Spieler** [in Mio. €]		**1.527**	**2.716**	**6.413**	
***Shapley* Value □=0,01** [in Mio. €]		**2.904**	**4.833**	**9.350**	**17.087**
Absteigend sortiert:		**3.**	**2.**	**1.**	
Korrelationen	**A zu**	**1**	**0,25**	**0**	
	B zu	**0,25**	**1**	**0**	
	C zu	**0**	**0**	**1**	

[114] Vgl. *Lemaire, J.* (1991), S. 29.
[115] Vgl. *Lemaire, J.* (1991), S. 27.
[116] Wird im Weiteren nicht definiert, da für die Aufgabenstellung der RAC-Allokation nicht notwendig.
[117] Vgl. *Denault, M.* (2001), S. 10.

3.3.7. Der Nucleolus

Die Basis dieses Wertansatzes bildet die „Einstellung“ einer Koalition *K* gegenüber einer bestimmten Allokation bzw. Imputation RAC^*,[118] quantifiziert mit Hilfe einer Überschussfunktion. Diese wird wie folgt definiert:[119]

$$e(RAC^*, K) = \rho(K) - \sum_{i \in K} RAC_i. \qquad (24)$$

Diese Funktion kann als ein Maß dafür angesehen werden, wie viel mehr bzw. weniger *RAC* eine Koalition *K* durch eine bestimmte Allokation RAC^* tragen müsste. Als Vergleichsmaßstab dient dabei das Stand-Alone-RAC dieser Koalition – $\rho(K)$ –.[120] Betrachtet man die Definition des Kerns, wird deutlich, dass eine Imputation, die innerhalb des Kerns liegt, einen Überschuss größer oder gleich null aufweist. Selbst wenn eine Allokation aus Sicht der Koalition *K* akzeptabel ist, $e(RAC^*, K) > 0$, besteht weiterhin der Anreiz für *K*, sich den höchst möglichen Überschuss zu sichern.[121] Der Nucleolus stellt nun diejenige Imputation dar, die den minimalen Überschuss aller Koalitionen bezüglich dieser Imputation maximiert.[122] Das heißt, der Nucleolus minimiert die Unzufriedenheit der unglücklichsten Koalition.[123] Durch dieses Verständnis von Fairness wird die Menge der möglichen Allokationen auf eine einzige begrenzt.[124] Darüber hinaus ist der Nucleolus individuell rational, effizient, stabil,[125] symmetrisch und besitzt die Strohmanneigenschaft.[126] Damit ist ein spieltheoretischer Allokationsansatz gefunden, der die Eigenschaften eines kohärenten Allokationsprinzips erfüllt. Vergleicht man allerdings die sich ergebende Allokation[127] mit denen eines weiteren kohärenten Allokationsprinzips, dem Conditional Value-at-Risk Prinzip, so ergeben sich signifikante Unterschiede (vgl. Tabelle 3).

---

[118] Vgl. *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1018.
[119] Vgl. *Lemaire, J.* (1984), S. 70.
[120] Vgl. *Shubik, M.* (1986), S, 86.
[121] Vgl. *Lemaire, J.* (1984), S. 70.
[122] Vgl. *Lemaire, J.* (1984), S. 70.
[123] Vgl. *Shubik, M.* (1985), S. 86, *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1018.
[124] Vgl. *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1018.
[125] Die Stabilität ist nicht per se gesichert. Allgemein gilt lediglich, dass der Nucleolus stets ein Element des Kerns ist, wenn dieser nicht leer ist. Vgl. *Holler, M. / Illing, G.* (2003), S. 290, *Schmeidler, D.* (1969), S. 1164. Da allerdings der Kern im betrachteten Spiel unter Verwendung eines kohärenten Risikomaßes stets Elemente enthält, folgt die Stabilität des Nucleolus.
[126] Vgl. *Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H.* (1986), S. 1018, *Holler, M. / Illing, G.* (2003), S. 290.
[127] Gewarnt sei vor einer unkritischen Übertragung der Vorgehensweise in *Lemaire, J.* (1984), S. 70. Zu einer ausführlichen Berechnung des Nucleolus vgl. *Owen, G.* (1995), S. 332.

Der Nucleolus erfüllt alle geforderten Eigenschaften eines Allokationsmechanismus und gewährleistet zudem eine hohe Stabilität[128] der großen Koalition. Dies ist zwar aus Sicht der kooperativen Spieltheorie wünschenswert, verliert jedoch vor dem Hintergrund des betriebswirtschaftlichen Anwendungsfalls an Bedeutung. Da es sich bei einem Unternehmen bereits um eine bestehende beständige Einheit handelt, ist die Stabilität keine notwendige anzustrebende Eigenschaft.

Tabelle 3: *Der Nucleolus vs. CVAR-Prinzip*

Versicherungssegmente	**RAC α=0,01**	**A**	**B**	**C**	**ABC**	**Benötiges RAC**
Erwarteter Schaden [Mio. €]		**100**	**100**	**300**	**500**	**17.087**
Standardabweichung des Schadens [Mio. €]		**2.000**	**3.000**	**5.000**	**6.403**	
Allokationsprinzip	**Nucleolus**	**CVAR-Prinzip**	**Differenz**			
Koalitionen bestehend aus:						
Spieler A	**3.432**	**2.292**	**1.140**			
Spieler B	**5.361**	**4.376**	**986**			
Spieler C	**8.294**	**10.419**	**-2.125**			
Spieler A,B	**8.793**	**6.668**	**2.125**			
Spieler A,C	**11.725**	**12.711**	**-985**			
Spieler B,C	**13.655**	**14.795**	**-1.140**			
Spieler A,B,C	**17.087**	**17.087**	**0**			

[128] Konkret wird das (Einwands-)Potenzial der Spieler durch diese Allokation minimiert. Vgl. *Holler, M. / Illing, G.* (2003), S. 300.

4. Schlussbetrachtungen

Aufgrund ihrer zentralen Stellung im Rahmen der Unternehmenssteuerung sind Ansätze und Methoden der Kapitalallokation seit geraumer Zeit Gegenstand der versicherungswissenschaftlichen Diskussion.

Die vorliegende Ausarbeitung untersucht tradierte Ansätze der kooperativen Spieltheorie hinsichtlich ihrer Übertragbarkeit auf die Problematik der Kapitalallokation. Als Bewertungsgrundlage dient die Axiomatik von *Denault* (2001). Obwohl zunächst keiner der in der spieltheoretischen Literatur zur Kostenallokation betrachteten Verfahren diesen Kriterien gerecht wird, führt die weitere Untersuchung doch noch zu einem positiven Ergebnis.

Als Fazit kann man festhalten, dass das von *Schmeidler* (1969) entwickelte Lösungskonzept, der Nucleolus, alle von *Denault* (2001) geforderten Eigenschaften aufweist und somit ein kohärentes Allokationsprinzip darstellt. Vor dem Hintergrund der betriebswirtschaftlichen Aufgabenstellung der risikogerechten Kapitalzuordnung stellt der Nucleolus allerdings zunächst nicht viel mehr als einen formalen Modellansatz dar, dessen Werthaltigkeit sich im Rahmen der Unternehmenssteuerung und speziell bei der risikoadjustierten Performancesteuerung erst noch erweisen muss.

Literaturverzeichnis

Albrecht, P. (1998): Risikoadjustierte Performancesteuerung in der Schadenversicherung, in: *Oehler, A.* (Hrsg.), Credit Risk und Value-at-Risk-Alternativen: Herausforderungen für das Risk-Management, Stuttgart, S. 229-257.

Albrecht, P. / Koryciorz, S. (2003): Bestimmung des Conditional Value-at-Risk (CVAR) bei Normal- bzw. Lognormalverteilung, in: *Mannheimer Manuskripte zur Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft,* Nr. 142.

Albrecht, P. / Koryciorz, S. (2004): Methoden der risikobasierten Kapitalallokation im Versicherungs- und Finanzwesen, erscheint in: Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft (ZVersWiss), Band 93, Heft 2.

Artzner, P. / Delbaen, F. / Eber, J.-M. / Heath, D. (1999): Coherent Measures of Risk, in: Mathematical Finance, Vol. 9, No. 3, S. 203-228.

Dittrich, J. / Klüppelberg, C. / Stölting, R. / Urban, M. (2004): Allocation of Risk Capital to Insurance Portfolios, in: Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik, Band XXVI, Heft 3, S. 389-406.

Denault, M. (1999): Coherent Allocation of Risk Capital, Arbeitspapier, Risk-Lab, Swiss Federal Institute of Technology, Zürich.

Denault, M. (2001): Coherent Allocation of Risk Capital, in: Journal of Risk, Vol. 4, No. 1, S. 1-34.

Graumann, M. / Baum, S. (2003): Methoden zur Allokation von Sicherheitskapital – Darstellung und Beurteilung aus Sicht der Unternehmensleitung, in: Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft (ZVersWiss), Band 92, Heft 3, S. 421-457.

Gründl, H. / Schmeiser, H. (2002): Marktwertorientierte Unternehmens- und Geschäftsbereichssteuerung in Finanzdienstleistungsunternehmen, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft (ZfB), 72. Jg., Heft 8, S. 797-822.

Gründl, H. / Schmeiser, H. (2003): Capital Allocation for Insurance Companies – What Good is it?, Arbeitspapier, Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Bank-, Börsen- und Versicherungswesen, Dr. Wolfgang Schieren-Lehrstuhl für Versicherungs- und Risikomanagement, Berlin,
URL: http://www.wiwi.hu-berlin.de/vers/ [Stand: 01.06.2004].

Holler, M. J. / Illing, G. (2003): Einführung in die Spieltheorie, 5. Aufl., Berlin u.a.

Kinder, C. (1999): Interne Leistungsverrechnung in Industriebetrieben und Banken, Köln, (zugl. Diss. Univ. Augsburg 1999).

Krengel, U. (1998): Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Wiesbaden.

Koryciorz, S. (2004): Sicherheitskapitalbestimmung und -allokation in der Schadenversicherung – Eine risikotheoretische Analyse auf der Basis des Value-at-Risk und des Conditional Value-at-Risk, Karlsruhe, (zugl. Diss. Univ. Mannheim 2003).

Lemaire, J. (1984): An Application of Game Theory: Cost Allocation, in: ASTIN Bulletin, Vol. 14, No. 1, S. 61-81.

Lemaire, J. (1991): Cooperative Game Theory and its Insurance Applications, in: ASTIN Bulletin, Vol. 21, No. 1, S. 17-40.

Mango, D. F. (1998): An Application Of Game Theory: Property Catastrophe Risk Load, in: Proceedings of The Casualty Actuarial Society, Vol. 85, No. 162, S. 157-181.

Moulin, H. (1988): Axioms of Cooperative Decision Making, Cambridge.

Maurer, R. (2000): Integrierte Erfolgssteuerung in der Schadenversicherung auf Basis von Risiko-Wert-Modellen, Karlsruhe, (zugl. Habil.-Schr. Univ. Mannheim 2000).

Opitz, O. (1999): Mathematik, 7. Aufl., München/Wien.

Owen, G. (1995): Game Theory, 3. Aufl., New York.

Schmeidler, D. (1969): The Nucleolus of a Characteristic Function Game, in: SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 17, No. 6, S. 1163-1170.

Shubik, M. (1982): Game Theory in the Social Science: Concepts and Solutions, Cambridge, Massachusetts.

Shubik, M. (1985): The Cooperative Form, the Value and the Allocation of Joint Costs and Benefits, in: *Young, H. P.* (Hrsg.), Cost Allocation: Methods, Principles, Applications, Amsterdam, S. 79-94.

Tasche, D. (2000): Risk contributions and performance measurement, Arbeitspapier, Technische Universität München, Zentrum Mathematik (SCA), URL: http://www-m4.mathematik.tu-muenchen.de/m4/pers/tasche/riskcon.pdf [Stand: 01.06.2003].

Tijs, S. H. (1981): Bounds for the Core and the τ-Value, in: *Moeschlin, O., Pallaschke, D.* (Hrsg.), Game Theory and Mathematical Economics, Proceedings of the Seminar on Game Theory and Mathematical Economics, Bonn/Hagen, 7-10 October, 1980, Amsterdam, New York und Oxford, S. 123-132.

Tijs, S. H. / Driessen, T. S. H. (1986): Game Theory and Cost Allocation Problems, in: Management Science, Vol. 32, No. 8, S. 1017-1028.

Urban, M. / Dittrich, J. / Klüppelberg, C. / Stölting, R. (2004) : Allocation of Risk capital to Insurance Portfolios, Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik, band XXVI, Heft 3, Mai 2004, 389 – 406.

Young, H. P. (1985): Methods and Principles of Cost Allocation, in: *Young, H. P.* (Hrsg.), Cost Allocation: Methods, Principles, Applications, Amsterdam, S. 3-31.

Young, H. P. (1998): Cost allocation, demand revelation, and core implementation, in: Mathematical Social Sciences, Vol. 36, Issue 3, S. 213-228.