

**Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie,
Portfolio Management und Versicherungswirtschaft**

Nr. 170

**Einige Überlegungen
zur simultanen Modellierung
von Aktienindex und Zinsstruktur**

von
PETER ALBRECHT

Mannheim 08/2007

Einige Überlegungen zur simultanen Modellierung von Aktienindex und Zinsstruktur

Peter Albrecht

Teil I: Black/Scholes – Vasicek

1. Modellkonstruktion

Wir gehen im Weiteren analog zur Konstruktion der mehr-dimensionalen geometrischen Brownschen Bewegung in Albrecht/Maurer (2005, S. 182 ff.) vor. Es bezeichne zunächst

$$W(t) := \begin{pmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \end{pmatrix}$$

einen zweidimensionalen Standard-Wienerprozess, d.h. die Komponentenprozesse $W_1(t)$ und $W_2(t)$ sind stochastisch unabhängige eindimensionale Standard-Wienerprozesse.

Es bezeichne $\{R_t\}$ die Entwicklung der Zinsintensität und $\{S_t\}$ die Wertentwicklung des Aktienindex. Die gemeinsame Dynamik unter dem physischen (beobachtbaren) Wahrscheinlichkeitsmaß P werde spezifiziert durch die folgende zweidimensionale stochastische Differentialgleichung

$$(1) \quad \begin{pmatrix} dR_t \\ dS_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\mu_R - R_t) \\ \mu_S S_t \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_R & 0 \\ 0 & \sigma_S S_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} dW_t \\ = \mu_P dt + \Sigma_P dW_t$$

bzw. in „aufgelöster“ Form durch

$$(2) \quad dR_t = \alpha(\mu_R - R_t) dt + \sigma_R dW_1(t)$$

$$(3a) \quad dS_t = \mu_S S_t dt + \rho \sigma_S S_t dW_1(t) + \sqrt{1-\rho^2} \sigma_S S_t dW_2(t)$$

bzw.

$$(3b) \quad dS_t = \mu_S S_t dt + \sigma_S S_t d\tilde{W}_t ,$$

wobei

$$(4) \quad \tilde{W}(t) := \rho W_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W_2(t) .$$

Es gilt – vgl. hierzu analog Albrecht/Maurer (2005, S. 185):

$$(5) \quad \text{Corr}[W_1(t), \tilde{W}_1(t)] = \rho .$$

Aus (2) bzw. (3) wird ersichtlich, dass R_t einem Ornstein/Uhlenbeck-Prozess in der Variante des Vasicek-Zinstrukturmodells bzw. S_t einer geometrischen Brownschen Bewegung wie beim Black/Scholes-Modell folgt. Aufgrund der Konstruktion sind die beiden Prozesse nun aber korreliert.

Aus (3b) folgt mit $m_S := \mu_S - \sigma_S^2/2$ die äquivalente Darstellung – vgl. analog etwa Albrecht/Maurer (2005, S. 165) –

$$(6a) \quad \begin{aligned} d(\ln S_t) &= m_S dt + \sigma_S d\tilde{W}_t \\ &= m_S dt + \sigma_S \rho dW_1(t) + \sigma_S \sqrt{1 - \rho^2} dW_2(t) \end{aligned}$$

bzw. in expliziter Form

$$(6b) \quad \ln(S_t / S_0) = m_S t + \sigma_S \rho W_1(t) + \sigma_S \sqrt{1 - \rho^2} W_2(t) .$$

Aus (2) folgt nun die Integraldarstellung

$$(7) \quad R_t - r_0 = \int_0^t \alpha(\mu_R - R_s) ds + \sigma_R W_1(t)$$

und durch Auflösung nach $W_1(t)$ damit

$$(8) \quad W_1(t) = \frac{1}{\sigma_R} (R_t - r_0) - \alpha \frac{\mu_R}{\sigma_R} t + \frac{\alpha}{\sigma_R} \int_0^t R_s ds .$$

Einsetzen in (6b) ergibt

$$(9) \quad \begin{aligned} \ln(S_t / s_0) &= m_s t + \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_R} (R_t - r_0) - \alpha \rho \mu_R \frac{\sigma_S}{\sigma_R} t \\ &\quad + \alpha \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_R} \int_0^t R_s ds + \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_S W_2(t) \\ &= \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_R} (R_t - r_0) + \left[m_s - \alpha \rho \mu_R \frac{\sigma_S}{\sigma_R} \right] t \\ &\quad + \alpha \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_R} \int_0^t R_s ds + \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_S W_2(t) \end{aligned}$$

und damit eine explizite Charakterisierung des Zusammenhangs zwischen S_t und R_t . Man vgl. hierzu die entsprechende Ableitung in Briys/deVarenne (1996, S. 678).

2. Darstellung unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß

Der Übergang zum risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß Q lässt sich wie folgt spezifizieren:

$$(10) \quad \begin{pmatrix} dR_t \\ dS_t \end{pmatrix} = \mu_Q dt + \Sigma_Q dW_t^* ,$$

dabei ist W_t^* ein zweidimensionaler Standard-Wienerprozess unter Q . Dabei gilt

$$(11a) \quad \Sigma_Q = \Sigma_P ,$$

d.h. die Diffusionsmatrix bleibt unverändert. Ferner gilt:

$$(11b) \quad \mu_Q = \begin{pmatrix} \alpha (\mu_R^Q - R_t) \\ R_t S_t \end{pmatrix} .$$

Dabei gilt $\mu_R^Q = \mu_R - q\sigma/\alpha$ in Analogie zum eindimensionalen Vasicek-Modell. Dass der Driftterm von S_t unter Q durch $R_t S_t$ gegeben ist, folgt (in heuristischer Weise) aus dem Grundprinzip – vgl. etwa Cairns (2004, S. 57) –, dass unter Q die Driftterme aller handelbaren Assets dem Produkt aus Spot Rate und Preis entsprechen müssen bzw. entsprechend die Driftterme in der Renditeversion der Zinsintensität.

In der Literatur ist es im Kontext einer Derivatebewertung dabei üblich, direkt die Q -Dynamik gemäß (10) zu spezifizieren, vgl. etwa Briys/de Varenne (1997, S. 676 f.), Jorgensen (2001, S. 23) und Ruß (1999, S. 151) sowie in einer auf die Bondpreise bezogenen Variante Cairns (2004, S. 126 f.) und Nielsen/Sandmann (1996, S. 68 ff.).

Aus (11a) wird des Weiteren deutlich, dass die Korrelation zwischen den Prozessen $\{R_t\}$ und $\{S_t\}$ vom Maßwechsel nicht beeinflusst wird.

Die Q -Dynamik (10) ist der relevante Ausgangspunkt für Zwecke einer arbitragefreien Bewertung. Sollen dabei nur Zerobonds bewertet werden bzw. werden nur Derivate betrachtet, die alleine von der Zinsstruktur abhängen, so sind die resultierenden Bewertungsformeln identisch wie beim reinen Vasicek-Modell. Im allgemeinen Fall gilt für die Bewertung eines in T fälligen Contingent Claims X_T die Bewertungsgleichung (Feynman Kac-Representation)

$$(12) \quad P_t(X_T) = E_Q^t \left[e^{-\int_t^T R(s) ds} X_T \right],$$

wobei E_Q^t dem bedingten Erwartungswert unter Q gegeben die zum Zeitpunkt t vorhandene Informationsmenge entspricht.

Unter Q lässt sich des Weiteren eine gegenüber (9) stark vereinfachte strukturelle Beziehung zwischen S_t und R_t ableiten.

Aus (10) folgt in Verbindung mit (11b) zunächst

$$(13a) \quad dS_t / S_t = R_t dt + \sigma_S [\rho dW_1^*(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2^*(t)]$$

bzw. in äquivalenter Form

$$(13b) \quad d \ln S_t = (R_t - \sigma_s^2 / 2) dt + \sigma_s [\rho dW_1^*(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2^*(t)]$$

und damit in expliziter Form

$$(13c) \quad \ln(S_t / s_0) = \int_0^t R(s) ds - \frac{1}{2} \sigma_s^2 t + \sigma_s \rho W_1^*(t) + \sigma_s \sqrt{1 - \rho^2} W_2^*(t) .$$

Auf der anderen Seite folgt aus (10) in Verbindung mit (11b) des Weiteren

$$(14a) \quad R_t = r_0 + \int_0^t \alpha (\mu_R^Q - R_s) ds + \sigma_R W_1^*(t)$$

bzw. hieraus

$$(14b) \quad \int_0^t R_s ds = \frac{r_0}{\alpha} + \mu_R^Q t + \frac{\sigma_R}{\alpha} W_1^*(t) - \frac{1}{\alpha} R_t .$$

Durch Einsetzen in (13c) folgt hieraus

$$(15) \quad \begin{aligned} \ln(S_t / s_0) = & -\frac{1}{\alpha} (R_t - r_0) + (\mu_R - \sigma_s^2 / 2) t \\ & + \sigma_s \left(\rho + \frac{1}{\alpha} \right) W_1^*(t) + \sigma_s \sqrt{1 - \rho^2} W_2^*(t) . \end{aligned}$$

Unter Q ergibt sich damit direkt ein inverser Zusammenhang zwischen S_t und R_t .

3. Modellkalibrierung

Aus (2) und (3) ergibt sich, dass die Parameter α , μ_R und σ_R sowie der Marktpreis des Risikos q bzw. μ_S und σ_S wie bei separater Betrachtung des Vasicek-Modells bzw. der geomet-

rischen Brownschen Bewegung identifiziert werden können. Es verbleibt somit nur noch die Identifikation des Korrelationsparameters ρ . Hierzu gehen wir wie folgt vor.

Wir definieren

$$\begin{aligned}
 Z_{t-1,t}^S &:= \frac{\ln(S_t / s_{t-1}) - m_S}{\sigma_S} = \tilde{W}_t - \tilde{W}_{t-1} \\
 (16) \quad &= \rho[W_1(t) - W_1(t-1)] + \sqrt{1 - \rho^2} [W_2(t) - W_2(t-1)] \\
 &= \rho \int_{t-1}^t dW_1(s) + \sqrt{1 - \rho^2} \int_{t-1}^t dW_2(s).
 \end{aligned}$$

Auf der Basis von Albrecht/Maurer (2005, S. 168) definieren wir des Weiteren:

$$\begin{aligned}
 (17) \quad Z_{t-1,t}^R &:= \frac{1}{\sigma_R} [(R_t - \mu_R) - e^{-\alpha}(r_{t-1} - \mu_R)] \\
 &= \int_{t-1}^t e^{-\alpha(t-s)} dW_1(s).
 \end{aligned}$$

Dabei sind $\{Z_{t-1,t}^S\}$ bzw. $\{Z_{t-1,t}^R\}$ als Funktionen von Zuwächsen eines Wienerprozesses dabei jeweils stochastisch unabhängig.

Unter Ausnutzung der Unabhängigkeit von $W_1(t)$ und $W_2(t)$ folgt aus (16) und (17) nun

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(Z_{t-1,t}^S, Z_{t-1,t}^R) &= \text{Cov} \left[\rho \int_{t-1}^t dW_1(s), \int_{t-1}^t e^{-\alpha(t-s)} dW_1(s) \right] \\
 &= \rho \int_{t-1}^t e^{-\alpha(t-s)} ds,
 \end{aligned}$$

wobei wir hier die generelle Beziehung

$$\text{Cov} \left(\int_{t_1}^{t_2} h_1(s) dW(s), \int_{t_1}^{t_2} h_2(s) dW(s) \right) = \int_{t_1}^{t_2} h_1(s) h_2(s) ds$$

ausgenutzt haben, vgl. hierzu etwa Ruß (1999, S. 208).

Damit gilt insgesamt

$$(18) \quad \begin{aligned} \text{Cov}(Z_{t-1,t}^S, Z_{t-1,t}^R) &= \rho e^{-\alpha t} \int_{t-1}^t e^{\alpha s} ds \\ &= \frac{\rho}{\alpha} [1 - e^{-\alpha}]. \end{aligned}$$

Aufgrund von

$$(19) \quad \text{Var}(Z_{t-1,t}^R) = \frac{1 - e^{-2\alpha}}{\alpha},$$

vgl. hierzu etwa Albrecht/Maurer (2005, S. 168) und $\text{Var}(Z_{t-1,t}^S) = 1$ folgt hieraus des Weiteren:

$$(20) \quad \text{Cov}(Z_{t-1,t}^S, Z_{t-1,t}^R) = \rho \frac{\sqrt{2}(1 - e^{-\alpha})}{\sqrt{\alpha}(1 - e^{-2\alpha})}.$$

Zu einem analogen Resultat vgl. Ruß (1999, S. 154). Durch Auflösung von (20) nach ρ ergibt sich schließlich

$$(21) \quad \rho = \frac{\sqrt{\alpha}(1 - e^{-2\alpha})}{\sqrt{2}(1 - e^{-\alpha})} \text{Cov}(Z_{t-1,t}^S, Z_{t-1,t}^R).$$

Gemäß (16) bzw. (17) lässt sich der zweite Term von (21) etwa auf der Basis des Stichprobenkorrelationskoeffizienten (nach vorheriger Schätzung der anderen offenen Parameter) gewinnen und damit insgesamt eine Schätzung für ρ .

Eine alternative Art und Weise der Modellkalibrierung beruht nun auf der Beobachtung, dass zur Generierung von S_t und R_t durch stochastische Simulation nicht direkt auf die Korrelation zwischen $W_I(t)$ und $\tilde{W}(t)$ abgestellt werden muss.

Wir gehen dazu aus von der Repräsentation

$$(22a) \quad R_t - \mu_R = e^{-\alpha}(r_{t-1} - \mu_R) + \sigma_R \sqrt{(1 - e^{-2\alpha})/2\alpha} H_{t-1,t}^R$$

bzw. äquivalent

$$(22b) \quad H_{t-1,t}^R := \frac{1}{\sigma_R \sqrt{(1 - e^{-2\alpha})/2\alpha}} [(R_t - \mu_R) - e^{-\alpha}(r_{t-1} - \mu_R)] .$$

Da offenbar gilt $H_{t-1,t}^R = Z_{t-1,t}^R / \sigma(Z_{t-1,t}^R)$, sind die $H_{t-1,t}^R$ standardnormalverteilt sowie stochastisch unabhängig. Zur Generierung von R_t benötigt man aufgrund von (22a) nur Realisationen von $H_{t-1,t}^R$. Zur simultanen Generierung von (R_t, S_t) benötigt man entsprechend Realisationen von $(Z_{t-1,t}^S, H_{t-1,t}^R)$, d.h. einer bivariaten Standardnormalverteilung. Wir definieren

$$(23) \quad \rho^* := \text{Corr}(Z_{t-1,t}^S, H_{t-1,t}^R) .$$

Offenbar ist es ausreichend, anstelle von ρ nur ρ^* zu schätzen – etwa auf Basis des Stichprobenkorrelationskoeffizienten, um Realisationen von (R_t, S_t) zu generieren.

Nach unseren Vorüberlegungen besteht aufgrund von $\text{Corr}(aX, bY) = \text{Corr}(X, Y)$ der Zusammenhang

$$(24) \quad \begin{aligned} \rho^* &= \text{Corr}(Z_{t-1,t}^S, H_{t-1,t}^R) \\ &= \text{Corr}(Z_{t-1,t}^S, Z_{t-1,t}^R) = \rho \frac{\sqrt{2}(1 - e^{-\alpha})}{\sqrt{\alpha(1 - e^{-2\alpha})}} . \end{aligned}$$

Im Rahmen dieser Vorgehensweise unterbleibt somit die gesonderte Bestimmung von ρ auf der Basis von (21).

Eine weitere alternative Vorgehensweise zur Schätzung des Korrelationskoeffizienten besteht darin, die so genannten Innovationen, im vorliegenden Fall gegeben durch

$$(25) \quad I_{t|t-1}^S := \frac{\ln S_t - E[\ln S_t | \ln S_{t-1} = \ln s_{t-1}]}{\sigma[\ln S_t | \ln S_{t-1} = \ln s_{t-1}]}$$

bzw. durch

$$(26) \quad I_{t|t-1}^R := \frac{R_t - E(R_t | R_{t-1} = r_{t-1})}{\sigma(R_t | R_{t-1} = r_{t-1})},$$

zu betrachten.

Im vorliegenden Fall gilt, vgl. zu den benutzten Beziehungen etwa Albrecht/Maurer (2005, S. 163 ff.)

$$(27) \quad \ln S_t = \ln s_{t-1} + m_S + \sigma_S Z_{t-1,t}^S$$

und damit

$$(28a) \quad E[\ln S_t | \ln S_{t-1} = \ln s_{t-1}] = \ln s_{t-1} + m_S$$

sowie

$$(28b) \quad \sigma[\ln S_t | \ln S_{t-1} = \ln s_{t-1}] = \sigma_S,$$

d.h. es folgt $I_{t|t-1}^S := Z_{t-1,t}^S$ gemäß (16).

Ferner gilt, vgl. zu den benutzten Beziehungen etwa Albrecht/Maurer (2005, S. 167 ff.), im vorliegenden Fall

$$(29) \quad \begin{aligned} R_t &= e^{-\alpha} r_{t-1} + \mu(1 - e^{-\alpha}) + \sigma Z_{t-1,t}^R \\ &= e^{-\alpha} r_{t-1} + \mu(1 - e^{-\alpha}) + \sigma \sqrt{(1 - e^{-2\alpha})/2\alpha} \varepsilon_{t-1,t}^R, \end{aligned}$$

wobei die $\varepsilon_{t-1,t}^R$ standardnormalverteilt und unabhängig sind.

Weiter gilt:

$$(30a) \quad E(R_t | R_{t-1} = r_{t-1}) = \mu + (r_{t-1} - \mu) e^{-\alpha}$$

$$(30b) \quad \text{Var}(R_t | R_{t-1} = r_{t-1}) = \sigma^2 (1 - e^{-2\alpha}) / 2\alpha .$$

Hieraus folgt insgesamt $I_{t|t-1}^R = \varepsilon_{t-1,t}^R$. Damit gilt nun des Weiteren aufgrund von

$\text{Corr}(aX, bY) = \text{Corr}(X, Y)$ sowie (20)

$$(31) \quad \begin{aligned} \text{Corr}(I_{t|t-1}^S, I_{t|t-1}^R) &= \text{Corr}(Z_{t-1,t}^S, \varepsilon_{t-1,t}^R) \\ &= \text{Corr}(Z_{t-1,t}^S, Z_{t-1,t}^R) \\ &= \rho \frac{\sqrt{2}(1 - e^{-\alpha})}{\sqrt{\alpha}(1 - e^{-2\alpha})} = \rho^* . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich wiederum

$$(32) \quad \rho = \frac{\sqrt{\alpha}(1 - e^{-2\alpha})}{\sqrt{2}(1 - e^{-\alpha})} \text{Corr}(I_{t|t-1}^S, I_{t|t-1}^R) ,$$

d.h. auf der Basis eines Stichprobenkorrelationskoeffizienten für Beobachtungen der Innovationen kann eine Schätzung des Korrelationskoeffizienten der Wienerterme $W_1(t)$ und $\tilde{W}(t)$ abgeleitet werden.

Hierzu alternativ kann wiederum unmittelbar mit einer direkten Schätzung von

$$\rho^* = \text{Corr}(I_{t|t-1}^S, I_{t|t-1}^R) \text{ gearbeitet werden, da gemäß (24) auch gilt } \rho^* = \text{Corr}(Z_{t-1,t}^S, H_{t-1,1}^R) .$$

4. Ausblick: Verallgemeinerte Modellbildung

In der Literatur werden Verallgemeinerungen des Basismodells (1) betrachtet, bei denen der Driftparameter μ_S weiter aufgespalten wird, etwa in der Form

$$(33a) \quad \mu_S = \mu_S(R_t) = R_t + \pi_S,$$

vgl. hierzu etwa Brennan/Xia (2001, S. 200), Djehiche/Hörfelt (2005, S. 385) sowie Sørensen (1999, S. 515) oder in der Form

$$(33b) \quad \mu_S = \mu_S(R_t) = R_t + \pi_S \sigma_S,$$

vgl. hierzu etwa Brennan/Xia (2002) sowie Wachter(2002) oder aber auch in der Form

$$(33c) \quad \mu_S = \mu_S(R_t) = R_t + \pi_t,$$

vgl. hierzu etwa Munk/Sørensen/Nygaard Vinther (2003, S. 5).

In diesen Varianten wird somit mit einer expliziten (konstanten oder zeitvariablen) Risiko-prämie (bzw. Risikoprämie pro Einheit Risiko) auf die Zinsintensität gearbeitet, um die Drift des Aktienindex zu modellieren. Eine weitergehende Verfolgung dieser Modellerweiterungen sprengt aber aufgrund der hieraus resultierenden deutlich höheren Komplexität den Rahmen der vorliegenden Ausarbeitung.

Literatur

Albrecht, P, R. Maurer (2005): Investment- und Risikomanagement, 2. Aufl., Stuttgart.

Brennan, M.J., Y. Xia (2001): Stochastic Interest Rates and the Bond-Stock Mix, European Finance Review 4, 197 – 210.

Brennan, M.J., Y. Xia (2002): Dynamic Asset Allocation under Inflation, Journal of Finance 57, 1201 – 1238.

Briys, E., F. de Varenne (1997): On the Risk of Insurance Liabilities: Debunking Some Common Pitfalls, Journal of Risk and Insurance 64, 673 – 694.

Cairns, A.J.G. (2004): Interest Rate Models, Princeton, Oxford.

Djehiche, B., P. Hörfelt (2005): Standard Approaches to Asset & Liability Risk, Scandinavian Actuarial Journal, 377 – 400.

- Jørgensen, P.L. (2001): Life Insurance Contracts with Embedded Options, *Journal of Risk Finance*, Fall 2001, 19 – 30.
- Munk, C., C. Sørensen, T. Nygaard Vynther (2003): Dynamic Asset Allocation under Mean Reverting Returns, Stochastic Interest Rates and Inflation Uncertainty, Working Paper, Copenhagen Business School.
- Nielsen, J.A., K. Sandmann (1996): Uniqueness of the Fair Premium for Equity-Linked Life Insurance Contracts, *Geneva Papers of Risk and Insurance Theory* 21, 65 – 102.
- Ruß, J. (1999): Die Aktienindexgebundene Lebensversicherung mit garantierter Mindestverzinsung in Deutschland, IFA Ulm.
- Sørensen, C. (1999): Dynamic Asset Allocation and Fixed Income Management, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 34, 513 – 531.
- Wachter, J.A. (2002): Portfolio and Consumption Decisions under Mean-Reverting Returns: An Exact Solution for Complete Markets, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 37, 63 – 91.

Teil II: Cox/Ingersoll/Ross

1. Modellkonstruktion

Wir knüpfen an die Bezeichnungen und die Vorgehensweise von Teil I. Die gemeinsame Dynamik der Wertentwicklung des Aktienindex $\{S_t\}$ und der Zinsintensität $\{R_t\}$ sei spezifiziert durch

$$(1a) \quad dR_t = \alpha(\mu_R - R_t) dt + \sigma_R \sqrt{R_t} dW_1(t)$$

und

$$(1b) \quad dS_t = \mu_S S_t dt + \sigma_S S_t d\tilde{W}(t) ,$$

dabei ist $d\tilde{W}(t) := \rho W_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W_2(t)$ und $W_1(t)$ bzw. $W_2(t)$ sind unabhängige Standard-Wienerprozesse. Damit sind $\tilde{W}(t)$ und $W_1(t)$ korrelierte Standard-Wienerprozesse mit $Corr[W_1(t), \tilde{W}(t)] = \rho$.

Äquivalent zur Darstellung (1b) ist mit $m_s := \mu_s - \sigma_s^2/2$

$$(2a) \quad d(\ln S_t) = m_s dt + \sigma_s d\tilde{W}_t$$

bzw. in expliziter Form

$$(2b) \quad \begin{aligned} \ln(S_t / s_0) &= m_s t + \sigma_s \tilde{W}(t) \\ &= m_s t + \rho \sigma_s W_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_s W_2(t). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt somit $\{R_t\}$ einem Quadratwurzelprozess in der Variante des Cox/Ingersoll/Ross (CIR)-Zinsstrukturmodells und $\{S_t\}$ einer geometrischen Brownschen Bewegung wie beim Black/Scholes-Modell. Aufgrund der Konstruktion sind beide Prozesse korreliert.

In der Literatur wird ein solche Modell betrachtet von Wengert (2000, S. 133) sowie aktuell von de Felice/Moriconi (2005).

2. Darstellung unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß

Wie in Teil I bleibt die Diffusionsmatrix des Systems I unverändert. Für den Diffusionsterm gilt zunächst

$$(3a) \quad \mu_Q = \alpha_R (\mu_R^* - r_t).$$

Wie beim eindimensionalen CIR-Modell wird dabei standardmäßig vorausgesetzt, dass der Marktpreis des Risikos die Form $q(t, r) = q\sqrt{r}$ besitzt. Es gilt dann $\alpha_Q = \alpha + q\sigma$ sowie $\mu_Q^* = \alpha \mu / (\alpha + q\sigma)$.

Abweichend von der üblichen Vorgehensweise unterstellen de Felice/Moriconi (2005) einen Marktpreis des Risikos in der Form $q(t, r) = \pi\sqrt{r}/\sigma$ und erhalten entsprechend modifizierte Ausdrücke.

Für den Diffusionsterm gilt des Weiteren

$$(3b) \quad \mu_Q^S = R_t S_t,$$

wobei wie in Teil I dem Prinzip gefolgt wird, dass unter Q die Diffsterme aller behandelbaren Assets dem Produkt aus Zinsintensität und Preis entsprechen müssen. Vgl. hierzu entsprechend das Resultat von de Felice/Moriconi (2005, S. 97).

Die Q -Dynamik ist der relevante Ausgangspunkt für Zwecke einer arbitragefreien Bewertung. Sollen dabei nur Zerobonds bewertet werden bzw. werden nur Derivate betrachtet, die alleine von der Zinsstruktur abhängen, so sind die resultierenden Bewertungsformeln identisch wie beim reinen CIR-Modell. Im allgemeinen Fall gilt für die Bewertung eines in T fälligen Contingent Claims X_T die Bewertungsgleichung (Feynman Kac-Representation)

$$(4) \quad P_t(X_T) = E_Q^t \left[e^{-\int_t^T R(s) ds} X_T \right],$$

wobei E_Q^t dem bedingten Erwartungswert unter Q gegeben die zum Zeitpunkt t vorhandene Informationsmenge entspricht.

3. Modellkalibrierung

Die Parameter α , μ_R und σ_S sowie der Marktpreis des Risikos q bzw. die Parameter μ_S und σ_S können wie bei separater Betrachtung des CIR-Modells bzw. der geometrischen Brownschen Bewegung identifiziert werden. Es verbleibt somit nur noch die Identifikation des Korrelationsparameters ρ . Wengert (2000, S. 136) formuliert hierzu: „Die Schätzung der Kovarianz bzw. der Korrelation einzelner Wertpapiere zueinander beim mehrdimensionalen Ansatz ist schwierig. Hierbei kann beispielsweise auf Schätzungen von Banken zurückgegriffen werden.“ Und de Felice/Moriconi (2005, S. 100) führen aus: „For the correlation coefficient η we adopt figures derived by classical econometrics studies on the Italian market (a slightly

negative value is usually assumed); however for typical values of the other parameters the value of η seems to have a weak influence on the valuation procedure.“

Aufgrund der Tatsache, dass die stochastische Differentialgleichung (1a) keine explizite Lösungsdarstellung in Termen von $\{R_t\}$ besitzt, erweist sich die Bestimmung von ρ in der Tat als schwierig. Eine *approximative* Lösung kann auf der Basis der für die Simulation des CIR-Prozesses üblicherweise verwendeten Euler-Approximation erfolgen

$$(5a) \quad R_t = r_{t-1} + \alpha(\mu_R - r_{t-1}) + \sigma_R \sqrt{r_{t-1}} Z_{t-1,t}^R ,$$

wobei $Z_t^R \sim N(0,1)$ und stochastisch unabhängig sind. Hieraus ergibt sich durch Auflösen nach $Z_{t-1,t}^R$

$$(5b) \quad Z_{t-1,t}^R = \frac{(R_t - r_{t-1}) - \alpha(\mu_R - r_{t-1})}{\sigma_R \sqrt{r_{t-1}}} .$$

Wie in Teil I definieren wir des Weiteren

$$(6) \quad Z_{t-1,t}^S = \frac{\ln(S_t / s_{t-1}) - m_S}{\sigma_S} .$$

Zum Zweck einer simulativen Generierung von $\{R_t, S_t\}$ bedarf es daher nur der Kenntnis von

$$(7) \quad \rho^* := \text{Corr}(Z_{t-1,t}^R, Z_{t-1,t}^S) .$$

Eine Identifikation von ρ^* kann dabei auf der Grundlage des Stichprobenkorrelationskoeffizienten erfolgen. Für eine analoge Vorgehensweise in einem erweiterten Modellkontext vgl. Fischer/Roehrl (2005, S. 16).

Literatur

De Felice, M., F. Moriconi (2005): Market Based Tools for Managing the Life Insurance Company, ASTIN Bulletin 35, 79 – 111.

Fischer, T., A. Roehrl (2005): Optimization of Performance Measures Based on Expected Shortfall, Working Paper, Heriot-Watt University, Department of Actuarial Mathematics and Stochastics.

Wengert, H. (2000): Gesamtunternehmensbezogenes Risikomanagement bei Lebensversicherungsunternehmen, IFA Ulm.