

# **Dynamik in Cobweb–Modellen mit rekursiver Erwartungsbildung**

**Inauguraldissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaften  
der Universität Mannheim

vorgelegt von

**Diplom–Mathematiker Anton Stiefenhofer**

**Mannheim**

**Januar 1999**

Referent: Prof. Volker Böhm, Ph.D.

Korreferent: Prof. Axel Börsch-Supan, Ph.D.

Dekan: Prof. Dr. Ulrich Schlieper

Tag der mündlichen Prüfung: 28.01.1999

## Vorwort

Traditionell existieren zwei kontroverse Sichtweisen über die Funktionsweise einer Marktwirtschaft. Die sogenannte *Klassische Schule* betont die Vorzüge freier Märkte und ihrer intrinsischen Stabilität, sowie die rationale Handlungsweise der Marktteilnehmer. Insbesondere werden dabei wirtschaftliche Wechsellagen mittels des Auftretens wiederkehrender exogener Störungen der fundamentalen Daten des ökonomischen Systems (Technologie, Ressourcen, usw.) begründet. Allerdings ist es schwierig, überzeugende Argumente für derartige exogene Zufallsprozesse makroökonomischer Schocks anzugeben.

Daher existiert eine andere Sichtweise, die häufig auch als *Keynesianische* Denkrichtung bezeichnet wird, welche davon ausgeht, daß Fluktuationen vor allem durch endogene ökonomische Mechanismen erklärt werden müssen. Vor allem die Rolle der Erwartungsbildung, also die Rückkopplung der Erwartungen bei sozioökonomischen Systemen, wird dabei als wesentliche Quelle verschiedener Instabilitäten hervorgehoben. Dabei haben gerade die neueren Entwicklungen auf dem Gebiet der nichtlinearen dynamischen Systeme, wie etwa die Entdeckung, daß bereits einfache nichtlineare Systeme deterministisches Chaos erzeugen können, dazu geführt, daß die Annahme rationaler Erwartungen mehr und mehr verworfen wird. Vielmehr wird unterstellt, daß Wirtschaftssubjekte nur beschränkt rational sind und ihre Vorhersagen anhand von vergangenen Beobachtungen mittels ökonometrischer Methoden treffen. So sind beispielsweise die Prognosen bzw. Erwartungen von Finanzmarktakteuren häufig linear rekursiven Prognosen, wie etwa der geometrisch gewichtete Durchschnitt endlich vieler vergangener Beobachtungen. Allerdings ist die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen der unterstellten Form der Erwartungsbildung und den dynamischen Eigenschaften eines ökonomischen Modells im allgemeinen sehr schwierig. Die vorliegende Arbeit befaßt sich daher mit den einfachsten ökonomischen Modellen mit Prognoserückkopplung, den Modellen vom Cobweb-Typ.

Modelle vom Cobweb-Typ zeichnen sich dadurch aus, daß die Realisation der Modellvariablen in der nächsten Periode ausschließlich von dem für die nächste Periode erwarteten Zustand der Modellvariablen bestimmt wird. Gerade diese Einfachheit der Modellstruktur macht die Faszination dieser Modelle aus und verleiht ihnen einen hohen Wert bei der Untersuchung des Einflusses verschiedener Formen von Erwartungsbildung auf die Marktdynamik.

Um den Zusammenhang zwischen den Glättungseigenschaften einer Progno-

seregel und dem dynamischen Verhalten eines Cobweb-Modells zu untersuchen, werden in dieser Arbeit vor allem Cobweb-Modelle mit geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregel betrachtet. Im Hinblick auf die lokalen dynamischen Eigenschaften dieser Modelle lassen sich dann eine Reihe von Aussagen analytisch erzielen. Dagegen werden Aussagen in Bezug auf das globale dynamische Verhalten hauptsächlich numerisch anhand zweier prototypischer Beispiele abgeleitet. Mit Hilfe verschiedener numerisch graphischer Methoden wird dabei zunächst ein Cobweb-Modell mit S-förmiger Angebotsfunktion und anschließend ein Cobweb-Modell mit zurückgebogener Angebotsfunktion untersucht.

Ich möchte an dieser Stelle allen danken, die zur Fertigstellung dieser Arbeit beigetragen haben. Insbesondere möchte ich meinem akademischen Lehrer Professor Volker Böhm für die zahlreichen Anregungen und Diskussionen und für die Bereitstellung von `MACRODYN` danken. Für die intensive Betreuung und die anregende Diskussion der Ergebnisse möchte ich mich vor allem bei Dr. Klaus Reiner Schenk-Hoppé bedanken.

Herrn Professor Börsch-Supan danke ich für die Übernahme des Korreferats und die intensive Durchsicht der Arbeit. Außerdem möchte ich mich bei allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Lehrstuhls von Professor Böhm für die kollegiale Zusammenarbeit bedanken.

Anton Stiefenhofer



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Modelle vom Cobweb-Typ und rekursive Erwartungen</b>	<b>21</b>
2.1	Das Cobweb-Modell . . . . .	23
2.1.1	Das Cobweb-Bildungsgesetz . . . . .	25
2.1.2	Rekursive und linear rekursive Prognoseregeln . . . . .	30
2.2	Die Literatur zu Cobweb-Modellen . . . . .	35
2.2.1	Linear adaptive Prognoseregeln . . . . .	36
2.2.2	Prognoseregeln mit endlichem Gedächtnis . . . . .	38
2.2.3	Finanzmarkt- und Makromodelle vom Cobweb-Typ . . . .	40
<b>3</b>	<b>Qualitative Analyse der Dynamik für Prognoseregeln mit endlichem Gedächtnis</b>	<b>47</b>
3.1	Stabilitätsanalyse . . . . .	49
3.1.1	Gedächtnislänge und Elastizität des Bildungsgesetzes . . . .	49
3.1.2	Vergleich von linear adaptiven Prognoseregeln und Prognosen mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt . . . . .	54
3.2	Bifurkationsanalyse . . . . .	58
3.2.1	Eigenwertanalyse für Prognosen mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt . . . . .	60
3.2.2	Gedächtnislänge und Bifurkationsverhalten . . . . .	63
3.3	Lyapunov Exponenten Analyse . . . . .	68
3.3.1	Definition und Eigenschaften . . . . .	69
3.3.2	Von der Gedächtnislänge abhängige obere Schranke . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Numerische Analyse des dynamischen Verhaltens für eine S-förmige Angebotsfunktion</b>	<b>81</b>
4.1	Eine Technologie mit S-förmiger Grenzkostenfunktion . . . . .	82

4.2	Prognose mittels ungewichtetem Durchschnitt . . . . .	88
4.2.1	Ein-Parameter Bifurkationsanalyse: Faktorpreisverhältnis, maximale Nachfrage . . . . .	89
4.2.2	Die Struktur der lokal stabilen koexistierenden Zyklen . . .	96
4.2.3	Schlußfolgerungen . . . . .	101
4.3	Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt . . . . .	101
4.3.1	Ein-Parameter Bifurkationsanalyse: Faktorpreisverhältnis und Gewichtungsfaktor . . . . .	102
4.3.2	Zwei-Parameter Bifurkationsanalyse: Faktorpreisverhältnis und Gewichtungsfaktor, Faktorpreisverhältnis und maxi- male Nachfrage . . . . .	115
4.3.3	Schlußfolgerungen . . . . .	121
<b>5</b>	<b>Numerische Analyse des dynamischen Verhaltens für eine zurück- gebogene Angebotsfunktion</b>	<b>123</b>
5.1	Risikoaversion und subjektives Preisrisiko . . . . .	125
5.2	Prognose mittels ungewichtetem Durchschnitt . . . . .	131
5.2.1	Ein-Parameter Bifurkationsanalyse: Risikoaversion und Streu- ungsfaktor . . . . .	131
5.2.2	Zwei-Parameter Bifurkationsanalyse: Streuungsfaktor und Risikoaversion, maximale Nachfrage und Risikoaversion . .	138
5.2.3	Schlußfolgerungen . . . . .	141
5.3	Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt . . . . .	142
5.3.1	Ein-Parameter Bifurkationsanalyse: Risikoaversion, Streu- ungsfaktor, Gewichtungsfaktor . . . . .	142
5.3.2	Zwei-Parameter Bifurkationsanalyse: Risikoaversion und Ge- wichtungsfaktor . . . . .	150
5.3.3	Schlußfolgerungen . . . . .	152
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Schlußbemerkung</b>	<b>155</b>
<b>A</b>	<b>Lineare Rekursivität und endliches Gedächtnis</b>	<b>161</b>
<b>B</b>	<b>Grundlagen der Bifurkationsanalyse</b>	<b>163</b>
B.1	Ein-Parameter Bifurkationsanalyse . . . . .	164
B.2	Zwei-Parameter Bifurkationsanalyse . . . . .	167

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Ein einfaches Wachstumsmodell $\pi_{t+1} = f(\frac{\sigma}{s}\pi_t)$ nach Jarsulic. . . .	44
2.2	Die Aktiennachfrage der $\alpha$ -Investoren und $\beta$ -Investoren im Modell von Day & Huang. . . . .	46
3.1	Verschiedene Hopf- und Flip-Bifurkationskurven in $-\alpha$ und $w$ für $\tau = 2, \dots, 7$ . . . . .	67
4.1	Die Produktionsfunktion $q = PF(x_1, x_2)$ und einige ihrer Konturlinien. . . . .	84
4.2	Das Cobweb-Bildungsgesetz $D^{-1} \circ S_{\text{mon}}(p_{t,t+1}^e)$ für $a = 6, b = 1, \alpha = 4$ und $a = 7, b = 1, \alpha = 1$ . . . . .	86
4.3	Ein-Parameter Bifurkationsdiagramme in $\alpha \in (0, 10]$ für $\tau = 2, \dots, 7$ und $a = 6.0$ . . . . .	93
4.4	Ein-Parameter Bifurkationsdiagramme in $\alpha \in (0, 10]$ für $\tau = 2, \dots, 7$ und $a = 6.65$ . . . . .	94
4.5	Ein-Parameter Bifurkationsdiagramme in $a \in [5, 7]$ für $\tau = 1, \dots, 6$ . . . . .	95
4.6	Einzugsbereiche koexistierender Zyklen in $p_1 \in [0, 6]$ für $a = 6.0$ und $a = 6.65$ . . . . .	100
4.7	Ein-Parameter Bifurkationsdiagramme und Diagramme des max. Lyap. Exp. in $\alpha \in (0, 30]$ für $\tau = 2, \dots, 5$ mit $a = 6.65, w = 0.8$ . . . . .	106
4.8	Attraktoren im $(p_t, p_{t-1})$ -Raum für $\tau = 3$ und $\tau = 4$ mit $a = 6.65$ und $w = 0.8$ . . . . .	108
4.9	Ein-Parameter Bifurkationsdiagramme und Diagramme des max. Lyap. Exp. in $\alpha \in (0, 30]$ für $\tau = 2, \dots, 5$ mit $a = 6.65, w = 1.5$ . . . . .	110
4.10	Ein-Parameter Bifurkationsdiagramme und Diagramme des max. Lyap. Exp. in $w \in [0, 2]$ für $\tau = 2, \dots, 5$ mit $a = 6.65, \alpha = 10$ . . . . .	113

4.11	Vergleich des Bifurkationsverhaltens bei lin. adap. Prognose und bei Prognose mittels geo. gew. Durchschn. ( $\tau = 20$ ) für $\alpha \in (0, 30]$ bzw. $w \in [0, 2]$ , $a = 6.65$ . . . . .	114
4.12	Zyklogramme in $w \in [0, 2]$ und $\alpha \in (0, 10]$ für $\tau = 2, \dots, 7$ und $a = 6$ . . . . .	118
4.13	Zyklogramme in $w \in [0, 2]$ und $\alpha \in (0, 10]$ für $\tau = 2, \dots, 7$ und $a = 6.65$ . . . . .	119
4.14	Zyklogramme in $w \in [0, 2]$ und $a \in [5, 7]$ für $\tau = 2, \dots, 7$ und $\alpha = 10.0$ . . . . .	120
5.1	Zurückgebogenes Cobweb-Bildungsgesetz $D^{-1} \circ S_b$ mit $\sigma = 0.4$ , $a = 4.0$ , $c = 1.0$ , $b = 1.0$ und $\lambda = 0.29, 0.32$ . . . . .	129
5.2	Zurückgebogenes Cobweb-Bildungsgesetz $D^{-1} \circ S_b$ mit $\sigma = 0.55$ , $a = 4.0$ , $c = 1.0$ , $b = 1.0$ und $\lambda = 0.18, 0.2$ . . . . .	129
5.3	Zurückgebogenes Cobweb-Bildungsgesetz $D^{-1} \circ S_b$ mit $\lambda = 0.18$ , $a = 4.0$ , $c = 1.0$ , $b = 1.0$ und $\sigma = 0.55, 0.6$ . . . . .	130
5.4	Ein-Parameter Bifurkationsdiagramme in $\lambda \in [0.29, 0.32]$ mit unterschiedlichen Startwerten (SW) für $\tau = 1, 2, 3$ , $\sigma = 0.4$ und $a = 4$ . . . . .	136
5.5	Ein-Parameter Bifurkationsdiagramme und Diagramme des max. Lyap. Exp. in $\lambda \in [0.18, 0.2]$ für $\tau = 1, 2, 3, 4$ mit $\sigma = 0.55$ und $a = 4$ . . . . .	137
5.6	Zyklogramme in $(\lambda, \sigma) \in [0.18, 0.2] \times [0.55, 0.58]$ und in $(\lambda, a) \in [0.18, 0.2] \times [4, 4.2]$ für $\tau = 1, 2, 3$ . . . . .	140
5.7	Ein-Parameter Bifurkationsdiagramme und Diagramme des max. Lyap. Exp. in $w \in [0, 2]$ für $\tau = 1, \dots, 4$ mit $\lambda = 0.18$ , $\sigma = 0.55$ und $a = 4$ . . . . .	145
5.8	Attraktoren im $(p_t, p_{t-1})$ -Raum für $\tau = 2$ , $w = 1$ , $\sigma = 0.55$ , $a = 4$ und $\lambda = 0.18, 0.1825, 0.185, 0.1875$ , sowie für $w = 1.15$ , $\sigma = 0.55$ , $\lambda = 0.18$ und $\tau = 2, 3, 4, 5$ . . . . .	148
5.9	Vergleich des Bifurk.verh. bei lin. adap. Prognose und bei Prognose mittels geo. gew. Durch. ( $\tau = 10$ ) für $\lambda \in [0.18, 0.2]$ bzw. $w \in [0, 1]$ , $\sigma = 0.55$ , $a = 4$ . . . . .	149
5.10	Zyklogramme in $w \in [0, 2]$ und $\lambda \in [0.18, 0.2]$ für $\tau = 2, \dots, 7$ mit $a = 4$ und $\sigma = 0.55$ . . . . .	151

# Tabellenverzeichnis

3.1	Max. Lyapunov Exponent $\lambda_\rho^m$ und generisches dynamisches Verhalten auf dem Träger von $\rho$ . . . . .	73
4.1	Die Ordnung der koexistierenden Zyklen für $\tau = 1, \dots, 10$ bei einer maximalen Nachfrage von $a = 6$ und entsprechend großem Faktorpreisverhältnis. . . . .	96
4.2	Die Struktur der beiden koexistierenden Zyklen der Ordnung 5 für $a = 6$ . . . . .	97
4.3	Die Ordnung der koexistierenden Zyklen für $\tau = 1, \dots, 6$ bei einer maximalen Nachfrage von $a = 6.65$ und bei unterschiedlich großem Faktorpreisverhältnis $\alpha$ . . . . .	97



# Kapitel 1

## Einleitung

Das Auftreten wiederkehrender wirtschaftlicher Wechsellagen und die immer wieder zu beobachtenden Schwankungen von Preisen und Mengen auf Finanz- und Gütermärkten beschäftigen seit mehr als 100 Jahren das Denken vieler Ökonomen. In den verschiedenen Erklärungsansätzen für wirtschaftliche Wechsellagen spiegeln sich Dogmengeschichte, Forschungsmethoden und Paradigmen der ökonomischen Theorie und insbesondere der dynamischen Wirtschaftstheorie.

Unabhängig davon, ob Fluktuationen aggregierter ökonomischer Größen betrachtet werden oder ob eine Erklärung für Schwankungen innerhalb bestimmter Sektoren gesucht wird, gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Erklärungsansätze. Einerseits gibt es den Ansatz, der von zufälligen exogenen Einflüssen als Ursache ausgeht. Andererseits können ökonomische Schwankungen aber auch mit Hilfe der Einsichten und Methoden der Theorie der dynamischen Systeme auf deterministische Schwankungen zurückgeführt werden. Diese deterministischen Schwankungen werden dabei von Modellen erzeugt, die bestimmte endogene ökonomische Mechanismen nachbilden.<sup>1</sup>

Anfang der dreißiger Jahre gelang es zunächst Slutsky (1937) und später Frisch (1965) Konjunkturzyklen auf der Basis zufälliger exogener Störungen zu erklären. Durch die Aggregation von Zufallszahlen erzeugten sie Zeitreihen, die die charakteristischen Eigenschaften empirisch beobachteter Konjunkturzyklen aufweisen.<sup>2</sup> Seit den siebziger Jahren werden vor allem in den Beiträgen der *Neu-*

---

<sup>1</sup>Gabisch & Lorenz (1987) geben einen allgemeinen Überblick zur Kontroverse zwischen Erklärungsansätzen für wirtschaftliche Wechsellagen, die von exogenen Ursachen ausgehen, und Erklärungsansätzen, die von endogenen ökonomischen Mechanismen als Ursache ausgehen.

<sup>2</sup>Krelle (1959) verfeinerte die Methoden von Slutsky und konnte dadurch auch Wendepunkte und deren Abfolge im Konjunkturverlauf erklären.

en *Klassischen Markoökonomik* konjunkturelle Schwankungen mit Hilfe von stochastischen Gleichgewichtsmodellen untersucht, wobei im Rahmen dieser Modelle häufig unterstellt wird, daß die Wirtschaftssubjekte über *rationale Erwartungen* verfügen.<sup>3</sup> Häufig wird dabei der Standpunkt vertreten, daß die wesentlichen gesamtwirtschaftlichen Grundbeziehungen global stabil sind und keine dauerhaften konjunkturellen Entwicklungen zulassen. Nur durch exogene Einflüsse, wie etwa zufällig auftretende Produktivitätsschocks, veränderte Präferenzen der Wirtschaftssubjekte oder wiederkehrende politische Wahlen, kommt es zu Abweichungen vom Gleichgewicht und damit zu konjunkturellen Schwankungen (McCallum (1980) und Begg (1982)).

Während Erklärungsansätze, die von exogenen Ursachen ausgehen, vom empirischen Standpunkt aus gesehen durchaus von Interesse sind, muß im Rahmen ökonomischer Modellbildung die Frage gestellt werden, ob Erklärungen für Konjunkturen nur auf exogene Faktoren gestützt werden sollten. Erklärungen auf der Basis stochastischer Störungen, die keine endogenen ökonomischen Zusammenhänge berücksichtigen, sind aus theoretischer Sicht unbefriedigend. Darüber hinaus haben seit den achtziger Jahren verschiedene Ökonomen, auf der Basis von neueren Erkenntnissen aus dem Gebiet der nichtlinearen dynamischen Systeme, die Grundthese der Neuen Klassischen Markoökonomik, daß flexible Preise und rationale Erwartungen in einer von äußeren Einflüssen isolierten Wirtschaft ein zyklenfreies Wachstum gewährleisten, in Frage gestellt. Ihre Kritik führte schließlich zur Entwicklung der Theorie der *Endogenous Business Cycles*.<sup>4</sup> Die Ergebnisse dieser Theorie zeigen, daß schon vergleichsweise einfache Modifikationen an Standardmodellen der Neuen Klassischen Makroökonomik ausreichen, um zyklische und sogar irregulär schwankende Gleichgewichtslösungen zu erhalten. Diese

---

<sup>3</sup>Die Erwartungen von Wirtschaftssubjekten werden als rational bezeichnet, wenn die von ihnen prognostizierte Entwicklung der Modellvariablen mit der späteren Realisierung der Variablen bis auf unsystematische Fehler übereinstimmt. Im Zusammenhang mit deterministischen Modellen wird für rationale Erwartungen auch der Begriff *perfekte Voraussicht* verwendet.

<sup>4</sup>Im Rahmen der Theorie der *Endogenous Business Cycles* wird meistens eine explizite Modellierung des intertemporalen Optimierungskalküls der Wirtschaftssubjekte durchgeführt. So zeigen die Arbeiten von Deneckere & Pelikan (1986) und Benhabib & Nishimura (1985), daß ökonomische Modelle komplexe Gleichgewichtslösungen aufweisen können, obwohl sich die modellierten Wirtschaftssubjekte über einen unbeschränkten Zeitraum hinweg optimal verhalten. Benhabib & Day (1982) und Grandmont (1985) verwenden ein Modell mit überlappender Generationenstruktur um zu demonstrieren, daß trotz der Annahme von vollkommenem Wettbewerb und perfekter Voraussicht Konjunkturzyklen von beliebiger Ordnung auftreten können.

Erkenntnisse lösten verschiedene Kontroversen aus, wobei neben den Erklärungsansätzen, die Schwankungen von ökonomischen Größen auf exogene Ursachen zurückführen, auch die Hypothese der rationalen Erwartungen ins Zentrum der Kritik gerückt wurde (Sargent (1993)).

Erklärungsansätze, die endogene ökonomische Mechanismen für Schwankungen verantwortlich machen, wurden bereits in den dreißiger Jahren von Tinbergen (1930) und Schultz (1930) entwickelt. Beiden gelang es ein einfaches dynamisches Modell herzuleiten, mittels dessen das zyklische Verhalten von Preisen und Mengen auf bestimmten Agrarmärkten erklärt werden konnte. Kaldor (1934) bezeichnete dieses Modell später als *Cobweb-Modell*. Weitere frühe Beiträge, die als Ursache für Konjunkturzyklen die Rückkopplung des Volkseinkommens und anderer gesamtwirtschaftlicher Größen auf sich selbst sehen, gehen auf Kalecki (1935), Harrod (1936) und Samuelson (1939) zurück. Die Rückkopplung entsteht durch die Verbindung der beiden Keynesianischen Konzepte Konsum-Multiplikator und Investitions-Akzelerator und wird durch eine lineare Differenzgleichung zweiter Ordnung beschrieben. Allerdings haben lineare dynamische Systeme die Eigenschaft, daß permanente Schwingungen nur für singuläre Parameterkombinationen auftreten. Konjunkturzyklen können auf der Basis linearer Systeme nur dann generisch erklärt werden, wenn wiederkehrende exogene Schocks unterstellt werden. Erst die Arbeiten von Hicks (1950), Goodwin (1951) und Rose (1967) erbringen mit Hilfe nichtlinearer Differenzgleichungen den Nachweis, daß ökonomische Rückkopplungssysteme auch ohne exogene Einflüsse dauerhafte Konjunkturschwankungen erzeugen können.

Neben technologischen Anpassungsvorgängen und Verzögerungsprozessen auf Märkten kann sich eine Rückkopplung eines ökonomischen Prozesses allerdings auch aus folgendem Grund ergeben: Wirtschaftssubjekte besitzen nur ein unvollständiges Wissen über die zugrundeliegenden ökonomischen Mechanismen. Ihre Handlungen werden ganz wesentlich von ihren Prognosen über die zukünftige Entwicklung verschiedener ökonomischer Variablen bestimmt. Da die Handlungen der Wirtschaftssubjekte die aktuellen Realisierungen des Marktprozesses beeinflussen, entsteht eine sogenannte *Prognoserückkopplung*.<sup>5</sup> Darüber hinaus erstellen die Wirtschaftssubjekte ihre Prognosen aufgrund der in der Vergangenheit beobachteten Realisierungen der ökonomischen Variablen. Falls sie dabei ein

---

<sup>5</sup>Eine solche Prognoserückkopplung ist typisch für soziale Systeme, wohingegen bei biologischen oder physikalischen Systemen niemals eine Prognoserückkopplung auftritt.

Berechnungsverfahren mit einer endlichen Datenspeicherkapazität, also eine sogenannte *rekursive Prognoseregeln*, anwenden, dann ergibt die mathematische Beschreibung der Prognoserückkopplung ein dynamisches System mit einer endlich dimensional Verzögerungsstruktur.

Böhm & Wenzelburger (1997c) haben einen formalen Rahmen entwickelt, in welchem ökonomische Prozesse mit Prognoserückkopplung als dynamisches System beschrieben werden können. Der Einfluß der Prognosen und der Einfluß der vergangenen Realisierung von ökonomischen Variablen auf die zeitliche Entwicklung des ökonomischen Prozesses wird in diesem Rahmen durch eine stetige Abbildung, das sogenannte *ökonomische Bildungsgesetz*, festgelegt. Die Zusammensetzung von Prognoseregeln und ökonomischem Bildungsgesetz ergibt dann ein dynamisches ökonomisches System. Die Frage, in welcher Weise die zeitliche Entwicklung eines ökonomischen Prozesses verändert wird, falls Voraussetzungen über Präferenzen, Marktform, Erwartungsbildung, usw. variiert werden, entspricht aufgrund der konzeptionellen Trennung von Prognoseregeln und Bildungsgesetz somit der Frage, in welcher Weise die globale Dynamik eines ökonomischen Systems verändert wird, falls das ökonomische Bildungsgesetz oder die Prognoseregeln variiert werden.

Im Rahmen der Theorie des temporären Gleichgewichts werden zwar die Eigenschaften von ökonomischen Prozessen mit Prognoserückkopplung untersucht. Allerdings werden dabei die Rückkopplungsprozesse fast immer mittels eines impliziten Differenzgleichungssystems beschrieben (Fuchs & Laroque (1976), Grandmont (1985)). Die mathematischen Methoden zur Untersuchung der Dynamik von implizit definierten Differenzgleichungen erlauben im allgemeinen nur eine lokale Analyse in der Umgebung von stationären Lösungen.<sup>6</sup>

Um die globale Entwicklung eines ökonomischen Prozesses untersuchen zu können, muß die rekursive Struktur des Prozesses, also die sequentielle Abfolge von Aktionen und Realisierungen, explizit als ein dynamisches ökonomisches Sy-

---

<sup>6</sup>Das heißt, es kann nichts über Lösungen ausgesagt werden, die den lokal definierten Zustandsraum verlassen, wobei oftmals nicht klar ist, für welche Anfangswerte dies zutrifft. Die meisten Beiträge zur Theorie des temporären Gleichgewichts befassen sich deshalb mit der Analyse der lokalen Stabilitätseigenschaften von stationären Gleichgewichtslösungen. Insbesondere wird dabei argumentiert, daß nur die Stabilitätseigenschaften der stationären Zustände von Interesse sind, da im Falle von Instabilität systematische Prognosefehler vorliegen und die Wirtschaftssubjekte darauf hin ihre Prognoseregeln entsprechend abändern (Evans & Honkapohja (1995a)).

stem modelliert werden. Aufgrund des Verständnisses der globalen dynamischen Eigenschaften von ökonomischen Systemen lassen sich dann Erklärungen für konjunkturelle Schwankungen ableiten, ohne daß dabei auf exogene Ursachen zurückgegriffen werden muß. Hierdurch sind schließlich modellgestützte Vorhersagen von zukünftigen ökonomischen Entwicklungen möglich, die dann auch Veränderungen von Informations- und Transaktionsmöglichkeiten auf Märkten oder den Wechsel der wirtschaftspolitischen Rahmenbedingungen berücksichtigen können. Wird ein ökonomischer Prozeß durch ein nichtlineares dynamisches ökonomisches System beschreiben und liegen kleinste Meßfehler vor, dann ist eine Prognose der langfristige Entwicklung des ökonomischen Prozesses oftmals nicht möglich, obwohl die dem System zugrundeliegenden Gleichungen genauestens bekannt sind.<sup>7</sup> Aus diesem Grunde gehört es zur Aufgabe der dynamischen Wirtschaftstheorie Ursachen für prognostizierbar und nicht prognostizierbare ökonomische Entwicklungen zu ermitteln. Dabei ist zu berücksichtigen, daß nichtlineare dynamische Systeme sehr unterschiedliche Formen von komplexen dynamischen Verhalten aufweisen können. Beispielsweise kann der Fall eintreten, daß mehrere lokal stabile stationäre Zustände koexistieren, wobei der Einzugsbereiche der Anfangswerte fraktale Strukturen aufweist. Bei kleinsten Meß- oder Berechnungsfehlern ist dann für viele Anfangswerte eine langfristige Prognose des Systemverhaltens unmöglich.

Die vorliegende Arbeit untersucht das globale dynamische Verhalten von ökonomischen Systemen vom *Cobweb-Typ*, wobei die Annahme getroffen wird, daß die Wirtschaftssubjekte ihre Prognose mittels einer linear rekursiven<sup>8</sup> Prognoseregeln erstellen. Ökonomische Bildungsgesetze vom Cobweb-Typ zeichnen sich dadurch aus, daß der im nächsten Zeitpunkt realisierte Zustand ausschließlich von dem für den nächsten Zeitpunkt erwarteten Zustand abhängt. Bei allgemeiner definierten Bildungsgesetzen beeinflussen auch die vergangenen Realisierungen der Zustandsvariablen die Entwicklung des Systems. Daher ist die Analyse der Dynamik solcher Systeme noch um vieles schwieriger als die Analyse der Dynamik

---

<sup>7</sup>Eine solche Unmöglichkeit der langfristigen Prognose besteht gerade dann, wenn das nichtlineare System sensitiv von den Anfangswerten abhängt. Eine formale Definition von sensitiver Abhängigkeit von den Anfangswerten wird in Anhang B gegeben.

<sup>8</sup>Die dynamischen Eigenschaften von ökonomischen Systemen, unter der Annahme von nichtlinearen Prognoseregeln, werden beispielsweise von Brock & Hommes (1997) oder DeGrauwe, Dewachter & Embrechts (1993) untersucht. Diese Arbeiten beschäftigen sich mit der Frage, in welcher Weise heterogene Formen der Erwartungsbildung die Dynamik eines ökonomischen Systems beeinflussen.

eines Systems vom Cobweb-Typ. Trotz der einfachen Struktur von ökonomischen Systemen vom Cobweb-Typ, ist die systematische Untersuchung des Einflusses von linear rekursiven Prognoseregeln auf das dynamische Verhalten dieser Systeme grundlegend für spätere Untersuchungen, die sich mit der Dynamik bei allgemeinem Bildungsgesetz befassen. Darüber hinaus spielen ökonomische Systeme vom Cobweb-Typ in verschiedenen Gebieten der ökonomischen Theorie eine wichtige Rolle. Neben dem klassischen Cobweb-Modell zur Erklärung regelmäßig wiederkehrender Preis- und Mengenschwankungen auf Agrarmärkten (Ezekiel (1938)), werden auch in der Wachstumstheorie (Jarsulic (1993)) und der Finanzmarkttheorie (Day & Huang (1990), Brock & Hommes (1997)) Modelle vom Cobweb-Typ verwendet.

Eine Form der linear rekursiven Prognose, die im folgenden immer wieder im Mittelpunkt des Interesses stehen wird, ist der geometrisch gewichtete Durchschnitt vergangener Beobachtungen. Beispielsweise verwenden Finanzmarktakteure im Rahmen des tatsächlichen Börsengeschehens den geometrisch gewichteten Durchschnitt zur chart-technischen Analyse von vergangenen Beobachtungen<sup>9</sup> und zur Prognose von Börsenkursen. Daher gehören Prognosen mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt zu den Standardbeispielen für rekursive Formen der Erwartungsbildung. Bei einer Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt wird durch die Wahl eines geometrischen Gewichtungsfaktors und einer Gedächtnislänge festgelegt, wie stark weiter vergangene Beobachtungen die Prognose beeinflussen. Bei einem sehr kleinen Gewichtungsfaktor liegt die Prognose in der Nähe des zuletzt realisierten Wertes der Zustandsvariablen. Wird zur Vorhersage der zuletzt realisierte Wert der Zustandsvariablen verwendet, dann bezeichnet man das auch als *naive Erwartungen*. Bei einem sehr großen Gewichtungsfaktor entspricht die Prognose einer saisonalen Vorhersage. Eine Prognoseregeln, die als der geometrisch gewichtete Durchschnitt aller vergangenen Beobachtungen definiert ist, kann auch in Form einer linear adaptiven Prognoseregeln dargestellt werden. Linear adaptive Prognoseregeln wurden bereits von Nerlove (1958) eingeführt. Er bezeichnete diese Prognoseregeln als *adaptive Erwartungen*.<sup>10</sup>

---

<sup>9</sup>Geometrisch gewichtete Durchschnitte besitzen statistische Optimalitätseigenschaften (Muth (1960)), aufgrund derer sie im Rahmen der deskriptiven Analyse von empirischen Zeitreihen eine wichtige Rolle spielen.

<sup>10</sup>Hicks' Definition der Erwartungselastizität regte Cagan (1956) dazu an, das Konzept der zeitstetigen adaptiven Erwartungen einzuführen. Einige Jahre später interpretierte Nerlove

Verschiedene Arbeiten befaßten sich bereits mit der Frage, inwiefern Prognosen mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt das globale dynamische Verhalten eines nichtlinearen Cobweb-Modells beeinflussen. So werden Cobweb-Modelle mit naiven Erwartungen und nicht monotonem Bildungsgesetz von Artstein (1983), Jensen & Urban (1984) und Day (1994) betrachtet. Sie gehen von einem zurückgebogenen Bildungsgesetz des Cobweb-Modells aus und zeigen, daß für diese Modelle topologisches Chaos auftreten kann. Qualitative und numerische Untersuchungen der globalen Dynamik von Cobweb-Modellen, unter der Annahme von adaptiven Erwartungen, werden von Chiarella (1988), Hommes (1991), Hommes (1994) und Gallas & Nusse (1996) durchgeführt. Sie weisen unter anderem nach, daß bei S-förmigem Bildungsgesetz das Bifurkationsverhalten und das Auftreten von topologischem Chaos von den Adaptationseigenschaften der Prognoseregeln abhängt. Die dynamischen Eigenschaften von Cobweb-Modellen mit geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln werden von Hommes (1996), Hommes (1998) untersucht. Auch er betrachtet S-förmige Bildungsgesetze. Mit Hilfe von Bifurkationsdiagrammen und zwei-dimensionalen Projektionen von Attraktoren zeigte er, daß durch die Gedächtnislänge und durch den Gewichtungsfaktor der Prognoseregeln die Komplexität des dynamischen Verhaltens in charakteristischer Weise beeinflußt wird. Hommes & Sorger (1996) untersuchen Cobweb-Modelle mit verschiedenen Bildungsgesetzen und berechnen für die von diesen Modellen erzeugten Zeitreihen die Autokorrelationsfunktion. Sie zeigen, daß die statistischen Eigenschaften einiger der Zeitreihen schwachem weißem Rauschen<sup>11</sup> entsprechen und deshalb nicht mittels linearer statistischer Methoden von rein stochastisch erzeugten Zeitreihen unterschieden werden können.

Die vorliegende Arbeit erweitert diese Untersuchungen zum Einfluß der Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt auf die Dynamik von Systemen vom Cobweb-Typ in mehrerer Hinsicht. So wird das Bifurkationsverhalten der Systeme an den stationären Zuständen bei Änderung der Gedächtnislänge

---

(1958) diese adaptiven Erwartungen zeitdiskret, in dem er das Konzept des *erwarteten normalen* Preises entwickelte. Der erwartete normale Preis ist der von den ökonomischen Agenten erwartete Gleichgewichtspreis der nächsten Periode. Die Agenten berechnen den für die nächste Periode erwarteten normalen Preis aus dem für heute erwarteten normalen Preis, linear korrigiert um die Differenz zwischen dem heute realisierten Preis und dem für heute erwarteten normalen Preis.

<sup>11</sup>Eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit endlichem zweiten Moment nennt man starkes weißes Rauschen. Eine Folge von unkorrelierten Zufallsvariablen mit identischem ersten und zweiten Moment bezeichnet man als schwaches weißes Rauschen.

und bei Änderung des Gewichtungsfaktors untersucht, wobei nur die stetige Differenzierbarkeit der Systeme vorausgesetzt wird. Im Zusammenhang mit dieser Bifurkationsanalyse werden obere Schranken für die Spektralradien der Jacobi-Matrizen, und damit für die Lyapunov Exponenten des Systems, abgeleitet. Des Weiteren wird die Abhängigkeit dieser oberen Schranken von der Gedächtnislänge und dem Gewichtungsfaktor der Prognoseregeln untersucht. Darüber hinaus wird das dynamische Verhalten eines Cobweb-Modells mit S-förmigem Bildungsgesetz und das dynamische Verhalten eines Cobweb-Modells mit zurückgebogenem Bildungsgesetz analysiert und miteinander verglichen. Erst durch den Vergleich von dynamischen Eigenschaften bei unterschiedlichem Bildungsgesetz kann bestimmt werden, inwiefern der Einfluß der Gedächtnislänge und des Gewichtungsfaktors auf die Dynamik des Cobweb-Modells von den nichtlinearen Eigenschaften des Bildungsgesetzes abhängt. Monotone Bildungsgesetze, wie das im folgenden betrachtete S-förmige Bildungsgesetz, können dabei aufgrund von speziellen Annahmen an die Technologie hergeleitet werden. Bildungsgesetze von zurückgebogener Form ergeben sich, wenn man unterstellt, daß die Produzenten den Preis der nächsten Periode subjektiv als unsicher betrachten. Geht man außerdem davon aus, daß die Nutzenfunktion der Produzenten quadratisch ist, so weist die Angebotsfunktion bereits bei geringer Risikoaversion eine zurückgebogene Form auf.

In dieser Arbeit werden sowohl analytische, wie auch numerische Untersuchungen vorgenommen. So wird das lokale dynamische Verhalten in der Umgebung von stationären Zuständen analytisch, in Abhängigkeit der Elastizität des Bildungsgesetzes und der Gedächtnislänge bzw. dem Gewichtungsfaktor der Prognoseregeln, untersucht. Hierzu wird zunächst eine allgemeine Analyse der Eigenwerte der Jacobi-Matrizen von Cobweb-Modellen durchgeführt. Weitere Eigenschaften des globalen dynamischen Langzeitverhaltens, wie etwa sensitive Abhängigkeit von den Anfangswerten, können mit Hilfe des ergodentheoretischen Konzepts der Lyapunov Exponenten untersucht werden. Da sich obere Schranke für Lyapunov Exponenten aus den Spektralradien des Systems ableiten lassen, kann die Frage, ob und in welcher Weise ein Zusammenhang zwischen sensitiver Abhängigkeit von den Anfangswerten und der Gedächtnislänge bzw. dem Gewichtungsfaktor der Prognoseregeln besteht, zumindest teilweise analytisch beantwortet werden.

Da Cobweb-Modelle mit geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln, je nach Gedächtnislänge, eine unterschiedlich hohe Dimension aufweisen, läßt sich mittels analytischer Methoden nur wenig über das globale dynamische

Verhalten der Systeme aussagen. Weitere Einsichten, etwa im Hinblick darauf unter welchen Bedingungen an die nichtlinearen Eigenschaften des Bildungsgesetzes und an die Form der Prognoseregeln komplexes dynamisches Verhalten auftritt, können mit Hilfe des Softwarepakets `MACRODYN`<sup>12</sup> gewonnen werden. Durch die systematische Kombination von Bifurkationsdiagrammen, Diagrammen des maximalen Lyapunov Exponenten, Zyklogrammen<sup>13</sup> und Attraktoreinbettungen lassen sich die globalen Bifurkationseigenschaften des Cobweb-Modells mit S-förmigem Bildungsgesetz und des Cobweb-Modells mit zurückgebogenem Bildungsgesetz umfassend analysieren und miteinander vergleichen. Dadurch können dann unter anderem die Ergebnisse von Böhm & Wenzelburger (1995) zum Zusammenhang von Zyklenstruktur und Gedächtnislänge erweitert werden. Da sich bei der Untersuchung des Verhaltens von Lyapunov Exponenten mit Hilfe von oberen Schranken nur Aussagen über das Verhalten bei großer Gedächtnislänge ableiten lassen, werden die Lyapunov Exponenten des Cobweb-Modells mit S-förmigem Bildungsgesetz und des Cobweb-Modells mit zurückgebogenem Bildungsgesetz numerisch approximiert. Hierdurch wird auch ein Vergleich des Verhaltens der Lyapunov Exponenten bei kurzer Gedächtnislänge möglich.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut. In Kapitel 2 wird die formale Struktur von Cobweb-Modellen hergeleitet und es wird ein kurzer Überblick zur Entwicklung der Theorie des Cobweb-Modells gegeben. Außerdem werden eine Reihe von ökonomischen Bedingungen angegeben, unter denen das Verhalten eines ökonomischen Prozesses durch ein System vom Cobweb-Typ beschrieben werden kann. Die Systeme vom Cobweb-Typ werden in den von Böhm & Wenzelburger (1997c) entwickelten Rahmen eines dynamischen ökonomischen Systems eingebettet und für verschiedene rekursive Prognoseregeln wird die allgemeine Systemform hergeleitet. Anschließend werden die aus der Literatur bekannten Ergebnisse zum Einfluß von linear rekursiven Prognoseregeln, insbesondere aber von Prognosen mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt, auf die Dynamik von Systemen

---

<sup>12</sup>Das Softwarepaket `MACRODYN` ist Teil des Projekts „Dynamische Makroökonomik“ der Universität Bielefeld und wird von der Deutschen Forschungsgemeinschaft unter Kontrakt Bo 635/8-1 finanziert. Eine genaue Beschreibung des Leistungsumfangs und der Bedienung von `MACRODYN`, sowie eine Sammlung von Standardbeispielen, finden sich im Handbuch Böhm & Schenk-Hoppé (1998).

<sup>13</sup>Zyklogramme sind qualitative Zwei-Parameter Bifurkationsdiagramme. Eine ausführliche Beschreibung findet man in Kapitel 4.

vom Cobweb–Typ zusammengefaßt.

Das Kapitel 3 behandelt qualitative Aspekte der Dynamik von Systemen vom Cobweb–Typ. Im Rahmen einer analytischen Untersuchung werden Zusammenhänge zwischen der Gedächtnislänge und der Gewichtungsstruktur der Prognoseregeln und dem Bifurkationsverhalten der Systeme hergeleitet. Voraussetzung hierfür ist zunächst eine allgemeine Analyse der Eigenwerte von Cobweb–Modellen. Des Weiteren wird mit Hilfe von oberen Schranken für Lyapunov Exponenten eine qualitative Analyse des Zusammenhangs zwischen sensitiver Abhängigkeit von den Anfangswerten und der Gedächtnislänge der Prognoseregeln durchgeführt.

Das Kapitel 4 befaßt sich mit der numerischen Analyse eines Cobweb–Modells mit S–förmigem Bildungsgesetz. Die S–Form des Bildungsgesetzes ergibt sich aufgrund einer speziellen Produktionsfunktion. Da sich im Fall der Prognose mittels ungewichtetem Durchschnitt eine Vielzahl von speziellen dynamischen Phänomenen ergeben, werden die numerischen Resultate in einem gesonderten Abschnitt zusammengefaßt. Anschließend werden dann Ein– und Zwei–Parameter Bifurkationsanalysen des Cobweb–Modells für den allgemeineren Fall der Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt durchgeführt.

Das Kapitel 5 beinhaltet die numerische Analyse der dynamischen Eigenschaften eines Cobweb–Modells mit zurückgebogenem Bildungsgesetz. Die zurückgebogene Form des Bildungsgesetzes ergibt sich aufgrund der Voraussetzung, daß die ökonomischen Agenten Preise subjektiv als unsicher betrachten und sich entsprechend risikoavers verhalten. Um das dynamische Verhalten dieses Cobweb–Modells mit dem dynamischen Verhalten bei S–förmigem Bildungsgesetz einfacher vergleichen zu können, werden die numerischen Ergebnisse für den Fall der Prognose mittels ungewichtetem Durchschnitt und für den Fall der Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt in jeweils getrennten Abschnitten zusammengefaßt.

## Kapitel 2

# Modelle vom Cobweb–Typ und rekursive Erwartungen

Ökonomische Prozesse mit der Eigenschaft, daß die Realisierungen der ökonomischen Variablen in der nächsten Periode ausschließlich von den für die nächste Periode von den Wirtschaftssubjekten erwarteten Realisierungen der Variablen abhängen, lassen sich mittels Modellen vom Cobweb–Typ beschreiben. Ein Modell vom Cobweb–Typ setzt sich aus einer Prognoseregeln und einem speziellen Bildungsgesetz, dem sogenannten *Cobweb–Bildungsgesetz*, zusammen. Die Prognoseregeln leitet sich aus den Annahmen über die Form der Erwartungsbildung der Wirtschaftssubjekte ab. Das Bildungsgesetz beschreibt formal den Einfluß vergangener Realisierungen der ökonomischen Variablen und der Erwartungen der Wirtschaftssubjekte auf die zukünftigen Realisierungen der Variablen. Cobweb–Bildungsgesetze zeichnen sich dabei dadurch aus, daß die Realisierungen der ökonomischen Variablen in der nächsten Periode nur von den Erwartungen der Wirtschaftssubjekte für die nächste Periode abhängen.

Ökonomische Prozesse, deren Verhalten mit Hilfe von Modellen vom Cobweb–Typ untersucht werden kann, treten beispielsweise in einigen Sektoren der Agrarwirtschaft auf. Die Produktionsbedingungen in diesen Sektoren sind meistens dergestalt, daß die Produzenten ihre Produktionsentscheidung eine gewisse Zeitspanne vor der Verfügbarkeit des produzierten Gutes treffen müssen. Ist dann das Gut nicht lagerfähig und besteht für den Produzenten keine Möglichkeit zum Abschluß von Preissicherungsgeschäften, so hängt die Produktionsentscheidung nur von dem Preis ab, den der Produzent zum Zeitpunkt des Absatzes des Gutes erwartet. Im folgenden werden Modelle vom Cobweb–Typ, welche die zeitliche Ent-

wicklung der Preise von Gütern beschreiben, wobei eine Verzögerung zwischen der Produktionsentscheidung und der Verfügbarkeit des Gutes auftritt, als *Cobweb-Modelle* bezeichnet. Das dynamische Verhalten der Preise und Mengen solcher Güter wurde erstmals in den dreißiger Jahren von Schultz (1930) und Tinbergen (1930) mit Hilfe eines einfachen linearen Modells vom Cobweb-Typ beschrieben. Das Modell wurde dann von Ezekiel (1938), Nerlove (1958) und anderen weiterentwickelt. Aber auch neuere Beiträge zur Finanz- und Kapitalmarkttheorie verwenden Modelle vom Cobweb-Typ zur Erklärung bestimmter ökonomischer Prozesse (Jarsulic (1993), Day & Huang (1990)). In diesen Beiträgen wird insbesondere davon ausgegangen, daß die Wirtschaftssubjekte nur ein beschränktes Wissen über zugrundeliegende ökonomische Zusammenhänge besitzen. Die Wirtschaftssubjekte bilden ihre Erwartungen vielmehr mit Hilfe von ökonometrischen Methoden auf der Grundlage von vergangenen Beobachtungen (Sargent (1993)). Die meisten der Methoden, die Ökonometriker zur Prognose verwenden, sind rekursiv. Rekursiv bedeutet, daß der zur Berechnung der Prognose verwendete Algorithmus nur eine endliche Datenspeicherkapazität benötigt. Betrachtet man rekursive Formen der Erwartungsbildung im Zusammenhang mit Modellen vom Cobweb-Typ, dann entsprechen die Modelle jeweils autonomen dynamischen Systemen, wobei die jeweilige Verzögerungsstruktur des Systems von der Form der Erwartungsbildung abhängt.

Die Untersuchungen der vorliegenden Arbeiten befassen sich mit dem Einfluß verschiedener Formen der rekursiven Erwartungsbildung auf das dynamische Verhalten von Modellen des Cobweb-Typs. Im folgenden werden dabei die einfachsten Formen der rekursiven Erwartungsbildung untersucht. Das sind zum einen Prognoseregeln, die als geometrisch gewichtete Durchschnitt vergangener Beobachtungen definiert sind, und zum anderen linear adaptive Prognoseregeln, wie sie bereits von Nerlove (1958) betrachtet wurden. Bei einer Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt wird nur die Information aus endlich vielen Beobachtungen verwendet. Man spricht deshalb auch von einer Prognoseregeln mit endlichem Gedächtnis.

Im folgenden Abschnitt 2.1 wird das auf Tinbergen und Schultz zurückgehende Cobweb-Modell eingeführt und in den von Böhm & Wenzelburger (1997b) definierten allgemeinen Rahmen eines dynamischen ökonomischen Systems eingebettet. Da sich Cobweb-Modelle aus einem ökonomischen Bildungsgesetz und einer Prognoseregeln zusammensetzen, wird für den Fall linear adaptiver Prognoseregeln und für den Fall des geometrisch gewichteten Durchschnitts als Progno-

seregel die Systemform des Cobweb-Modells hergeleitet. Darüber hinaus werden zwei Modelle vom Cobweb-Typ, die in der Wachstums- und der Finanzmarkttheorie verwendet werden, vorgestellt. In Abschnitt 2.2 wird die Literatur zur Theorie der Cobweb-Modelle mit rekursiver Erwartungsbildung und die von den Modellen bekannten dynamischen Eigenschaften zusammengefaßt.

## 2.1 Das Cobweb-Modell

Die zeitliche Entwicklung der Preise und Mengen eines nicht lagerfähigen Gutes, zu dessen Produktion ein bestimmter Zeitraum benötigt wird, leitet sich häufig aus einem ökonomischen Prozeß mit Prognoserückkopplung ab. So wird beispielsweise zur Güterproduktion in einigen Sektoren der Landwirtschaft, der Forstwirtschaft und des Fischereigewerbes ein gewisser Zeitraum benötigt, so daß eine bestimmte Zeitspanne zwischen der Produktionsentscheidung und der Verfügbarkeit des Gutes vorliegt. Aus diesem Grunde leitet sich die Angebotsfunktion des Gutes aus der Produktionsentscheidung der Vorperiode ab. Oftmals kennen die Produzenten zum Zeitpunkt der Produktionsentscheidung noch nicht den zukünftigen Marktpreis und sie haben meistens auch keine Möglichkeit, Terminkontrakte oder andere Preissicherungsgeschäfte abzuschließen. Bei vollkommenem Wettbewerb hängt dann die Produktionsentscheidung von dem von den Produzenten für die nächste Periode erwarteten Preis ab. In der nächsten Periode stellt sich dann derjenige Preis als Gleichgewichtspreis ein, zu dem die gesamte angebotene Menge nachgefragt wird.<sup>1</sup>

Um die Entwicklung der Preise und Mengen im Zeitablauf analysieren zu können, haben Schultz (1930) und Tinbergen (1930) bereits in den dreißiger Jahren ein formales Modell entwickelt, das die Preise und Mengen des Gutes in jeder Periode aufgrund eines dynamischen Systems bestimmt. Sie gehen dabei von der Annahme aus, daß die Prognose der Produzenten für die nächste Periode der jeweils aktuelle Preis ist. Diese Form der Prognose wird auch als *naive Erwartungen* bezeichnet.

Einige Jahre später hat Kaldor (1934) dem Modell dann den Namen *Cobweb-Modell* gegeben. Zeichnet man nämlich den zeitlichen Verlauf der Preis- und

---

<sup>1</sup>Die empirischen Studien von Blandford (1983) und Anderson & Tyers (1992) zeigen, daß gerade in den Sektoren, in denen derartige Produktionsbedingungen vorliegen, zyklische und zeitweise sogar irreguläre Schwankungen der Güterpreise und -mengen auftreten.

Mengenvariablen in ein Preis–Mengen–Diagramm ein, dann gleicht das Diagramm einem Spinnennetz (engl. *cobweb*). Ezekiel (1938) hat die dem Cobweb–Modell zugrundeliegenden Ideen folgendermaßen zusammengefaßt:

“Cobweb models describe the adjustment of supply and demand in markets ... where production is completely determined by the producers’ response to price, under conditions of pure competition (where the producer bases plans for future production on the assumption present prices will continue, and that his own production plans will not effect the market); where the time needed for production requires at least one full period before production can be changed, once the plans are made; and where the price is set by the supply available.”  
M. Ezekiel (1938)

Die linearen Cobweb–Modelle wurden wegen der leicht erkennbaren Systematik der Prognosefehler kritisiert. Außerdem verschwinden die permanenten Schwankungen bei der kleinsten Änderung der Parameter, wobei das Cobweb–Modell entweder gegen seinen stationären Zustand konvergiert oder divergiert. Die Literatur hat sich aus diesen Gründen über einen längeren Zeitraum hinweg nur wenig mit dem Cobweb–Modell beschäftigt. Arbeiten zur Erklärung von Preis– und Mengenschwankungen auf Gütermärkten, wie etwa die von Newberry & Stiglitz (1981) oder Massel (1970), gingen vielmehr von der Idee aus, daß allokativen Schwankungen auf Märkten durch zufällige exogene Störungen verursacht werden. Sie zeigen, daß wirtschaftspolitischer Handlungsbedarf zur Preisstabilisierung erst dann gegeben ist, wenn unvollständige Marktstrukturen vorliegen.<sup>2</sup> Diese Modelle haben die Eigenschaft, daß sie Schwankungen nur durch die zusätzliche Voraussetzung von exogenen Faktoren erklären können.<sup>3</sup> Neuere Untersuchungen von Jensen & Urban (1984), Chiarella (1988) und Hommes (1991), Hommes (1994) zeigen, daß Cobweb–Modelle mit nichtlinearer Nachfrage– oder Angebotsfunktion auch für verschiedene offene Teilmengen des Parameterraums komplexe

---

<sup>2</sup>Handelsbeschränkungen können beispielsweise dazu führen, daß ein Gesamtmarkt aus einer Vielzahl von voneinander unabhängigen Märkten zusammengesetzt ist. Im Rahmen einer Gesamtmarktanalyse muß die räumliche Verteilung der einzelnen Märkte mitberücksichtigt werden. Durch eine Vereinigung der verschiedenen Teilmärkte zu einem homogenen Gesamtmarkt mit vollkommener Konkurrenz kann somit die Volatilität der aggregierten Preise und Mengen verringert werden.

<sup>3</sup>Darüberhinaus haben empirische Studien, wie etwa die von Anderson & Tyers (1992) gezeigt, daß durch die Marktgröße die Schwankungen kaum beeinflußt werden.

Preis- und Mengenschwankungen erzeugen. Sind die erzeugten Schwankungen sogar chaotisch, dann ist für Wirtschaftssubjekte nicht unmittelbar ersichtlich, ob die Schwankungen auf systematischen Prognosefehlern beruhen oder nicht. Aussagen über derartige strukturelle Phänomene, wie etwa der Zusammenhang zwischen der Prognoserückkopplung und einem chaotischen Verhalten des ökonomischen Prozesses, sind erst dann möglich, wenn man über die Betrachtung von stationären Gleichgewichtslösungen hinausgeht und die rekursive Struktur des Marktmechanismus als ein dynamisches System modelliert.

Der folgende Abschnitt 2.1.1 beinhaltet die auf Schultz, Tinbergen und Ezeziel zurückgehende formale Herleitung des Cobweb-Modells. Dieses Modell kann in den von Böhm & Wenzelburger (1997b) entwickelten Rahmen eines dynamischen ökonomischen Systems eingebettet werden. Zwei wichtige Formen der Erwartungsbildung, die häufig im Zusammenhang mit Cobweb-Modellen betrachtet werden, sind lineare Prognoseregeln mit endlichem Gedächtnis und linear adaptive Prognoseregeln.

Da im Rahmen der folgenden Untersuchungen häufig unterstellt wird, daß Wirtschaftssubjekte ihre Prognose aufgrund einer dieser Prognoseregeln ableiten, wird in Abschnitt 2.1.2 die dynamische Systemform des Cobweb-Modells für lineare Prognoseregeln mit endlichem Gedächtnis und für linear adaptive Prognoseregeln hergeleitet. Darüber hinaus wird der Zusammenhang zwischen der Form der Prognoseregeln und der Verzögerungsstruktur des Cobweb-Modells betrachtet. Um die Rolle, die Modelle vom Cobweb-Typ auch in anderen Bereichen der dynamischen Wirtschaftstheorie spielen, zu verdeutlichen, wird in Abschnitt 2.2.3 ein neueres Modell der Finanzmarkttheorie und ein neueres Modell der Wachstumstheorie vorgestellt, die beide vom Cobweb-Typ sind. Alle dynamischen Eigenschaften, die von diesen Modellen in der Literatur bekannt sind, können aus den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit abgeleitet werden.

### 2.1.1 Das Cobweb-Bildungsgesetz

Bereits in den dreißiger Jahren erkannten Schultz (1930), Tinbergen (1930) und Ezeziel Ezeziel (1938), daß es bei der Güterproduktion in bestimmten Wirtschaftssektoren – aufgrund der mangelnden Lagerfähigkeit der Güter und der Unvollständigkeit des Finanzmarktsystems – zu einem ökonomischen Prozeß kommt, der durch die in jeder Periode gemachten Prognosen der Produzenten beeinflusst wird. Zur formalen Beschreibung dieses ökonomischen Prozesses haben sie ein Mo-

dell, das sogenannte *Cobweb-Modell* entwickelt, welches die zeitliche Entwicklung der Preise und Mengen dieser Güter durch ein dynamisches System beschreibt. Tinbergen und Schultz zeigen, daß der markträumende Preis der nächsten Periode nur von der in der aktuellen Periode gemachten Preisprognose der Produzenten abhängt. Dieser funktionale Zusammenhang wird im weiteren Verlauf auch als das Cobweb-Bildungsgesetz bezeichnet. Des Weiteren gehen Tinbergen und Schultz von der Annahme aus, daß die Prognose der Produzenten für den markträumenden Preis der nächsten Periode der jeweils aktuelle markträumende Preis ist. Derartige Prognosen nennt man auch *naive Erwartungen*.

Im folgenden wird eine formale Herleitung des Cobweb-Bildungsgesetzes gegeben. Allerdings werden die Voraussetzungen von Tinbergen (1930) bzw. Schultz (1930) dahingehend erweitert, daß auch nichtlineare Angebots- und Nachfragefunktionen zugelassen sind. Die Bezeichnungen und Voraussetzungen sind wie folgt:

Betrachtet sei ein nicht lagerfähiges Gut, das auf einem Markt bei vollkommenem Wettbewerb gehandelt wird. Zur Produktion des Gutes werde eine Periode benötigt. Jeder Produzent muß deshalb seine Entscheidung in bezug auf die zu produzierende Menge eine Periode vor dem Absatz des Gutes treffen. Da außerdem angenommen wird, daß es keine Möglichkeit zum Abschluß von Preisversicherungsgeschäften gibt, hängt die Produktionsentscheidung des Produzenten in der Periode  $t$ , und damit das Angebot  $q_{t+1}^S$  in Periode  $t+1$ , von dem für die nächste Periode erwarteten Preis  $p_{t,t+1}^e$  ab. Die aggregierte Angebotsfunktion

$$S : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad q_{t+1}^S = S(p_{t,t+1}^e)$$

ist deshalb eine Funktion des erwarteten Preises  $p_{t,t+1}^e$ . Des Weiteren sei  $S$  als stetig differenzierbar mit  $S(0) = 0$  vorausgesetzt. Im Gegensatz zu Tinbergen (1930) und Schultz (1930) ist auch eine nicht monotone Angebotsfunktion  $S$  zugelassen.

Die aggregierte Nachfrage  $q_t^D$  nach dem Gut in der Periode  $t \in \mathbb{N}$  sei eine Funktion

$$D : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad q_t^D = D(p_t)$$

des Preises  $p_t$  der jeweiligen Periode. Dabei sei  $D(0) = \infty$  zugelassen und die Funktion  $D(p)$  sei stetig auf  $\mathbb{R}_+$  mit  $\lim_{p \rightarrow \infty} D(p) = 0$ . Darüberhinaus sei  $D$  auf der Menge  $\{p > 0 \mid D(p) > 0\}$  stetig differenzierbar mit Ableitung  $D' < 0$ .

Falls ein Reservationspreis  $\hat{p} > 0$  mit  $D(\hat{p}) = 0$  existiert, so muß  $D(p) = 0$  für alle  $p > \hat{p}$  sein. In diesem Fall gelte für die inverse Nachfragefunktion  $D^{-1}$ , daß  $D^{-1}(0) := \hat{p}$  ist.

Da in der Periode  $t + 1$  das Angebot  $q_{t+1}^S$  fest vorgegeben ist, ist der markträumende Preis  $p_{t+1}$  derjenige Preis, zu dem das gesamte Angebot nachgefragt wird, also der die Gleichgewichtsbedingung

$$D(p_{t+1}) = S(p_{t,t+1}^e), \quad p_{t+1}, p_{t,t+1}^e \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

erfüllt. Damit der markträumende Preis  $p_{t+1}$  eindeutig durch die Gleichgewichtsbedingung bestimmt ist, muß die inverse Nachfragefunktion  $D^{-1}$  auf der Menge  $S(\mathbb{R}_+)$  definiert sein. Im folgenden sei deshalb

$$\sup_{p \geq 0} S(p) \leq D(0)$$

vorausgesetzt. Damit ist die  $D^{-1} \circ S$  eine Funktion auf  $\mathbb{R}_+$  und der Einfluß des erwarteten Preises  $p_{t,t+1}^e$  auf den markträumenden Preis  $p_{t+1}$  wird durch die Gleichung

$$p_{t+1} = D^{-1} \circ S(p_{t,t+1}^e), \quad p_{t+1}, p_{t,t+1}^e \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

beschrieben. Diese Beziehung nennt man das *Bildungsgesetz* des Cobweb-Modells oder auch *Cobweb-Bildungsgesetz*. Um die zeitliche Entwicklung der Preise herleiten zu können, muß jetzt noch die Art und Weise bestimmt werden, in der die Produzenten ihre Prognosen erstellen.

Im folgenden wird häufig unterstellt, daß die Produzenten keine perfekte Voraussicht haben. Geht man beispielsweise davon aus, daß die Produzenten weder die Nachfrage- noch die Angebotsfunktion des Marktes kennen, dann bleibt ihnen nur die Möglichkeit, eine Preisprognose aufgrund der in der Vergangenheit beobachteten Preise zu treffen. Hierbei berechnen die Produzenten ihre Preisprognose mit Hilfe eines ökonometrischen Prognoseverfahrens. Viele ökonometrische Prognoseverfahren, die von Börsenspekulanten im Rahmen der technischen Analyse von Börsenkurs-Zeitreihen verwendet werden, können als stetige Funktion in  $\tau \in \mathbb{N}$  vergangenen Beobachtungen dargestellt werden. Die Preisprognose der Produzenten ergibt sich somit aufgrund einer Prognoseregeln

$$\psi : \mathbb{R}_+^\tau \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad p_{t,t+1}^e = \psi(p_t, p_{t-1}, \dots, p_{t-\tau+1}),$$

die stetig von den endlich vielen vergangenen Beobachtungen  $p_t, p_{t-1}, \dots, p_{t-\tau+1}$  abhängt. Tinbergen und Schultz gehen bei ihren Betrachtungen davon aus, daß

die Produzenten naive Erwartungen haben. Naive Erwartungen entsprechen einer Prognoseregeln der Form  $\psi(p_t) = p_t$ .

Gemäß dem Cobweb-Bildungsgesetz (2.1) hängt der Preis  $p_{t+1}$  des Gutes ausschließlich von der Prognose  $p_{t,t+1}^e$  der Produzenten ab. Die Prognose ist jeweils eine Funktion  $\psi$  der vergangenen Preise  $p_t, p_{t-1}, \dots, p_{t-\tau+1}$ . Damit kommt es zu einer sogenannten *Prognoserückkopplung*, wobei die zeitliche Entwicklung der Preise und Mengen durch die Differenzgleichung

$$p_{t+1} = D^{-1} \circ S(\psi(p_t, p_{t-1}, \dots, p_{t-\tau+1})), \quad t \geq \tau \quad (2.2)$$

bestimmt ist. Die Differenzgleichung hat die Ordnung  $\tau$  und ihre Verzögerungsstruktur wird allein durch die Prognoseregeln  $\psi$  bestimmt. Das Cobweb-Bildungsgesetz zusammen mit der Prognoseregeln  $\psi$  bezeichnet man als *Cobweb-Modell*. Cobweb-Modelle beschreiben die einfachsten Formen der Prognoserückkopplung, welche bei ökonomischen Prozessen vorliegen können.

Im allgemeinen hängt die zeitliche Entwicklung eines ökonomischen Prozesses nicht nur von den Prognosen der Wirtschaftssubjekte ab. Häufig wirken auch vergangene Realisierungen der ökonomischen Variablen auf das zukünftige Verhalten des ökonomischen Prozesses ein. Formal kann die zeitliche Entwicklung eines ökonomischen Prozesses, der sowohl von den Prognosen der Wirtschaftssubjekte wie auch von den vergangenen Realisierungen der ökonomischen Variablen beeinflusst wird, mit Hilfe des von Böhm & Wenzelburger (1997b) entwickelten Modellrahmens für dynamische ökonomische Systeme beschrieben werden. Dieser Modellrahmen ist wie folgt definiert:

Es sei  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  der Raum der endogenen Variablen der Ökonomie. Zu jedem Zeitpunkt  $t \in \mathbb{N}$  kann der Vektor aus endogenen Variablen  $x_t \in \mathcal{X}$  aufgeteilt werden in

$$x_t = (x'_t, y_t) \in \mathcal{X}' \times \mathcal{Y} = \mathcal{X},$$

wobei der Vektor  $y_t \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^q$  aus denjenigen Variablen besteht, für welche die Wirtschaftssubjekte Erwartungen bezüglich der kommenden Periode bilden, und  $x'_t \in \mathcal{X}' \subset \mathbb{R}^p$  der Vektor der restlichen Variablen ist. Insbesondere gilt  $n = p + q$ .

Das *ökonomische Bildungsgesetz* sei durch die stetige Abbildung

$$F : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}, \quad x_{t+1} = F(x_t, y_{t,t+1}^e), \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

beschrieben, wobei  $y_{t,t+1}^e \in \mathcal{Y}$  der zum Zeitpunkt  $t$  für  $y_{t+1}$  prognostizierte Wert sei. Da die stetige Funktion  $F$  in die beiden stetigen Funktionen  $\tilde{F} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}'$

und  $f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$  zerlegt werden kann, läßt sich das ökonomische Bildungsgesetz (2.3) auch in der Form

$$\begin{cases} x'_{t+1} &= \bar{F}(x_t, y_{t,t+1}^e) \\ y_{t+1} &= f(x_t, y_{t,t+1}^e) \end{cases}$$

darstellen. Leiten Wirtschaftssubjekte ihre Prognose  $y_{t,t+1}^e$  aus der stetigen Prognoseregeln

$$\psi : \mathcal{X}^\tau \rightarrow \mathcal{Y}, \quad y_{t,t+1}^e = \psi(x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-\tau+1}) \quad (2.4)$$

ab, wobei  $\psi$  auch als *Prognoseregeln mit endlichem Gedächtnis der Länge  $\tau \in \mathbb{N}$*  bezeichnet wird, dann kommt es zu einer Prognoserückkopplung. Die zeitliche Entwicklung des ökonomischen Prozesses wird dann durch das *dynamische ökonomische System*

$$x_{t+1} = F(x_t, \psi(x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-\tau+1})), \quad t \geq \tau \quad (2.5)$$

beschrieben.

Das Cobweb-Modell (2.2) kann folgendermaßen in den Modellrahmen eines dynamischen ökonomischen Systems eingebettet werden: Es sei  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}_+$  gesetzt und die Zustandsvariable sei  $y_t = p_t$ . Definiert man  $f = D^{-1} \circ S$ , dann hat das Bildungsgesetz die Form  $y_{t+1} = f(y_{t,t+1}^e)$ . Zusammen mit der Prognoseregeln  $\psi$  ergibt sich dann die Differenzgleichung

$$y_{t+1} = f(\psi(y_t, \dots, y_{t-\tau+1})), \quad t \geq \tau.$$

Allgemein bezeichnet man ein dynamisches ökonomisches System mit Zustandsvariablen  $y_t \in \mathcal{Y}^k$ , stetigem Bildungsgesetz

$$f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad y_{t+1} = f(y_{t,t+1}^e), \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

und Prognoseregeln  $\psi : \mathcal{Y}^\tau \rightarrow \mathcal{Y}$  als *Modell vom Cobweb-Typ* oder auch als *ökonomisches System vom Cobweb-Typ*. Da die Zustandsvariablen der nächsten Periode nur von den Prognosevariablen abhängen, stellt ein ökonomisches System vom Cobweb-Typ eine Art Randfall eines allgemeinen dynamischen ökonomischen Systems (2.5) dar. Aufgrund dieser besonderen Struktur ergibt sich unter anderem die folgende spezielle Eigenschaft:

Hat die Trajektorie  $\{(y_t, \dots, y_{t-\tau+1})\}_{t=1}^\infty$  eines ökonomischen Systems  $f \circ \psi$  die Eigenschaft, daß im Zeitverlauf die Prognosefehler

$$\epsilon_f(y_t, \psi^*(y_t)) = f(\psi^*(y_t)) - \psi^*(y_t), \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

verschwinden, also  $\epsilon_f(y_t, \psi^*(y_t)) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{N}$  ist, so bezeichnet man  $\{(y_t, \dots, y_{t-\tau+1})\}_{t=1}^{\infty}$  als Trajektorie mit *perfekter Voraussicht*. Die Frage nach der Existenz einer Prognoseregeln  $\psi^*$ , so daß sämtliche Trajektorien des ökonomischen Systems  $f \circ \psi^*$  die Eigenschaft der perfekten Voraussicht besitzen, wird in der Arbeit von Böhm & Wenzelburger (1997b) beantwortet. Sie zeigen, daß eine solche *perfekte Prognoseregeln*  $\psi^*$  genau dann existiert, wenn das Bildungsgesetz  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  einen Fixpunkt  $y^*$  besitzt. Die perfekte Prognoseregeln entspricht dann der konstanten Funktion  $\psi^* \equiv y^*$ .

Dynamische ökonomische Systeme weisen je nach Form der Prognoseregeln und des Bildungsgesetzes eine unterschiedlich hohe Dimension auf. Die Analyse der dynamischen Eigenschaften eines Systems von hoher Dimension ist meistens sehr schwierig. So lassen sich Fragen nach dem Zusammenhang von bestimmten Parametern des Systems und der Komplexität des dynamischen Verhaltens oftmals nicht beantworten. Aus diesem Grunde konzentrieren sich die weiteren Untersuchungen dieser Arbeit auf ökonomische Systeme vom Cobweb-Typ, denn diese Systeme weisen die einfachste Form der Prognoserückkopplung auf.

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird sich zeigen, daß einige Verbindungen zwischen dem dynamischen Verhalten der Systeme vom Cobweb-Typ mit Prognoseregeln von endlichem Gedächtnis und dem dynamischen Verhalten der Systeme vom Cobweb-Typ mit Prognoseregeln von nicht endlichem Gedächtnis existieren. Aus diesem Grunde wird im nächsten Abschnitt 2.1.2 der Begriff der Prognoseregeln etwas weiter gefaßt.

### 2.1.2 Rekursive und linear rekursive Prognoseregeln

Geht man von der Annahme aus, daß die Wirtschaftssubjekte das dem ökonomischen Prozeß zugrundeliegende Bildungsgesetz nicht kennen, dann muß das Verhalten der Wirtschaftssubjekte beim Erstellen ihrer Prognosen in derselben Art und Weise modelliert werden, wie Individuen lernen, vergessen und Informationen verarbeiten. Die Prognose ist somit jeweils das Ergebnis des auf vergangenen beobachteten Realisierungen des ökonomischen Prozesses beruhenden adaptiven Lernverhaltens der Wirtschaftssubjekte. Sargent (1993) zeigt, daß ein solches adaptives Lernverhalten meistens analog zu einem ökonometrischen Prognoseverfahren modelliert werden kann. Die meisten der gängigen Prognoseverfahren der Ökonometrie sind rekursive Prognoseverfahren (Harvey (1981) und Schlittgen & Streitberg (1984)). Rekursive Prognoseverfahren basieren auf Algorithmen, die

zur Berechnung der Prognose nur eine endliche Datenspeicherkapazität benötigen. Nach Marimon (1996) sind *rekursive Prognoseregeln* wie folgt definiert:

**Definition 1** (*Rekursive Prognoseregeln*)

Es sei  $\Theta \subset \mathbb{R}^l$  ein Parameterraum und  $\theta_t \in \Theta$  sei der Adaptations-Parameter zur Bestimmung der Prognose in  $t \in \mathbb{N}$  für die nächste Periode  $t + 1$ . Des Weiteren sei eine parametrisierte Familie von Prognoseregeln

$$\psi : \mathcal{X} \times \Theta \longrightarrow \mathcal{Y}, \quad y_{t,t+1}^e = \psi(x_t, \theta_{t+1}), \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

und eine Parameter-Adaptationsregel

$$\rho : \mathcal{X} \times \Theta \longrightarrow \Theta, \quad \theta_{t+1} = \rho(x_t, \theta_t), \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

mit Startwert  $\theta_1$  gegeben. Die Prognose für  $t + 1$  kann dann berechnet werden als

$$y_{t,t+1}^e = \psi(x_t, \theta_{t+1}) = \psi(x_t, \rho(x_t, \theta_t)). \quad (2.6)$$

Rekursive Prognoseregeln haben die Eigenschaft, daß sie die Information aus allen vergangenen Beobachtungen verwenden und trotzdem nur eine begrenzte Datenspeicherkapazität zur Berechnung der jeweiligen Prognose benötigen. Nicht rekursive Prognoseverfahren, wie etwa Prognoseverfahren, die auf neuronalen Netzen oder genetischen Algorithmen basieren, haben dagegen die Eigenschaft, daß die zur Prognoseberechnung notwendige Datenmenge im Zeitverlauf unbegrenzt anwächst.

Das ökonomische Bildungsgesetz (2.3) und die rekursive Prognoseregeln (2.6) ergeben zusammen das autonome dynamische System

$$\begin{cases} x_{t+1} &= F(x_t, \psi(x_t, \rho(x_t, \theta_t))) \\ \theta_{t+1} &= \rho(x_t, \theta_t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{N}, \quad (2.7)$$

mit Zustandsraum  $(x_t, \theta_t) \in \mathcal{X} \times \Theta$ . Erweitert man das Bildungsgesetz  $F$  um die Funktion  $\rho$ , dann kann das System (2.7) in den Modellrahmen eines dynamischen ökonomischen Systems eingebettet werden.

Bekannte einfache Beispiele für rekursive Prognoseregeln sind die verschiedenen von Marcet & Sargent (1989) und Evans & Honkapohja (1995a) eingeführten Kleinste-Quadrate-Prognoseregeln. Die Kleinste-Quadrate-Prognoseregeln

gehören zu den nichtlinear rekursiven Prognoseregeln. Schlittgen & Streitberg (1984) leiten aus einem exponentiellen Glättungsverfahren der Zeitreihenanalyse die Prognoseregeln

$$y_{t,t+1}^e = (1-w) \sum_{i=0}^{t-1} w^i y_{t-i}, \quad t \in \mathbb{N} \quad (2.8)$$

ab. Durch den Gewichtungsfaktor  $w \in [0, 1]$  wird der Grad der Glättung aller vergangenen Beobachtungen festgelegt. Im wesentlichen handelt es sich bei dieser Art der Prognose um eine Extrapolation des Trends. Ist  $w \in [0, 1)$ , so kann die Prognoseregeln (2.8) durch Anwendung der Formel für die geometrische Reihe auch als linear rekursive Prognoseregeln

$$y_{t,t+1}^e = w y_{t-1,t}^e + (1-w) y_t$$

dargestellt werden. Ersetzt man  $w$  durch den Adaptationsparameter  $\alpha = (1-w) \in [0, 1]$ , so entspricht die Prognoseregeln (2.8) den von Nerlove (1958) eingeführten *adaptiven Erwartungen*<sup>4</sup>

$$y_{t,t+1}^e = y_{t-1,t}^e + \alpha(y_t - y_{t-1,t}^e). \quad (2.9)$$

Da sich die aktuelle Prognose jeweils durch lineare Adaptation aus der vorherigen Prognose ergibt, wird (2.9) im folgenden als *linear adaptive Prognoseregeln* bezeichnet.

Weitere Beispiele für rekursive Prognoseregeln sind die Prognoseregeln (2.4) mit endlichem Gedächtnis der Länge  $\tau$ . Gemäß Lemma 10 aus Anhang A gilt sogar, daß *lineare* Prognoseregeln mit endlichem Gedächtnis zur Familie der *linear* rekursiven Prognoseregeln gehören. Ein Standardbeispiel einer linear rekursiven Prognoseregeln ist der im Rahmen des tatsächlichen Börsengeschehens von Finanzmarktakteuren zur chart-technischen Analyse und Prognose von Börsenkursen verwendete geometrisch gewichtete Durchschnitt endlich vieler vergangener

---

<sup>4</sup>Hicks' Definition der Erwartungselastizität regte Cagan (1956) dazu an, das Konzept der zeitstetigen adaptiven Erwartungen einzuführen. Einige Jahre später interpretierte Nerlove (1958) diese adaptiven Erwartungen zeitdiskret, indem er das Konzept des *erwarteten normalen* Preises entwickelte. Der erwartete normale Preis ist der von den ökonomischen Agenten erwartete Gleichgewichtspreis der nächsten Periode. Die Agenten berechnen den für die nächste Periode erwarteten normalen Preis aus dem für heute erwarteten normalen Preis, linear korrigiert um die Differenz zwischen dem heutigen realisierten Preis und dem für heute erwarteten normalen Preis. In den Arbeiten von Arrow & Nerlove (1958) und Solow (1960) wird das Konzept der adaptiven Erwartungen nochmals erweitert. Adaptive Erwartungen werden dort als allgemeine gleitende Durchschnitte vergangener Beobachtungen definiert.

Beobachtungen:

$$y_{t,t+1}^e = \sum_{k=0}^{\tau-1} \frac{1}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} w^k y_{t-k} \quad t \geq \tau. \quad (2.10)$$

Für  $w = 1$  ist der geometrisch gewichtete Durchschnitt ein *ungewichteter Durchschnitt* vergangener Beobachtungen:

$$y_{t,t+1}^e = \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\tau-1} y_{t-k} \quad t \geq \tau.$$

Die Gedächtnislänge ist  $\tau \in \mathbb{N}$  und  $w > 0$  wird als *geometrischer Glättungs- bzw. Gewichtungsfaktor* bezeichnet. Eine Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt stellt im wesentlichen eine Extrapolation des Trends dar, wobei auf weit zurückliegende Beobachtungen verzichtet wird. Insbesondere wird durch die Wahl des geometrischen Gewichtungsfaktors und der Gedächtnislänge festgelegt, wie stark weiter vergangene Beobachtungen die Prognose beeinflussen. Bei einem sehr kleinen Gewichtungsfaktor liegt die Prognoseregeln (2.10) in der Nähe des zuletzt realisierten Wertes der Zustandsvariablen. Prognoseregeln, die jeweils den zuletzt realisierten Wert der Zustandsvariablen verwenden, sind die oben eingeführten *naiven Erwartungen*. Bei einem sehr großen Gewichtungsfaktor entspricht die Prognoseregeln in etwa der saisonalen Prognose  $y_{t,t+1}^e = y_{t-\tau+1}$ . Wird die Glättung über alle Beobachtungen hinweg vorgenommen, dann ist die Prognoseregeln (2.10) gleich der linear adaptiven Prognoseregeln (2.9).

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird das dynamische Verhalten von Modellen vom Cobweb-Typ untersucht, wobei sich die Modelle aus unterschiedlichen nichtlinearen Bildungsgesetzen und linear rekursiven Prognoseregeln zusammensetzen. Bei nichtlinearem Cobweb-Bildungsgesetz ist eine systematische Analyse der Dynamik für alle linear rekursiven Prognoseregeln nicht möglich. Da sowohl lineare Prognoseregeln mit endlichem Gedächtnis, hierbei insbesondere Prognosen mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt, wie auch linear adaptive Prognoseregeln zu den einfachsten und am häufigsten verwendeten Formen der linear rekursiven Prognose gehören, konzentrieren sich die weiteren Untersuchungen auf diese Familien von Prognoseregeln. Ausgangspunkt der Untersuchung des Einflusses linearer Prognoseregeln mit endlichem Gedächtnis bzw. des Einflusses linear adaptiver Prognoseregeln auf das dynamische Verhalten von Modellen vom Cobweb-Typ ist die Klassifizierung der Verzögerungsstruktur, die die Systeme aufweisen:

*Lineare Prognoseregeln mit endlichem Gedächtnis:*

Eine lineare Prognoseregeln mit endlichem Gedächtnis  $\tau \in \mathbb{N}$  ist eine lineare Funktion  $\psi : \mathbb{R}^\tau \rightarrow \mathbb{R}$  von  $\tau$  vergangenen Beobachtungen

$$y_{t,t+1}^e = \psi(y_t, \dots, y_{t-\tau+1}) = w_\tau + \sum_{k=0}^{\tau-1} w_k y_{t-k}, \quad (2.11)$$

wobei die Gewichtungsfaktoren mit  $W_\tau = \{w_k\}_{k=0}^{\tau-1}$  abgekürzt werden. Des Weiteren gelte für die Gewichtungsfaktoren  $W_\tau = \{w_k\}_{k=0}^{\tau-1}$ :

$$\sum_{k=0}^{\tau-1} w_k = 1 \quad \text{und} \quad w_\tau = 0,$$

denn nur so bleiben die Fixpunkte  $\tilde{y}$  des Cobweb-Bildungsgesetzes als stationäre Zustände  $y^* = (\tilde{y}, \dots, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^\tau$  des Modells vom Cobweb-Typ unter der Prognoseregeln (2.11) erhalten:

$$f\left(\sum_{k=0}^{\tau-1} w_k \tilde{y}\right) = f(\tilde{y}) = \tilde{y}.$$

Ein Modell vom Cobweb-Typ mit einer Prognoseregeln von endlichem Gedächtnis  $\tau$  hat die Struktur einer Differenzgleichung der Ordnung  $\tau$

$$y_{t+1} = f\left(\sum_{k=0}^{\tau-1} w_k y_{t-k}\right), \quad t \geq \tau, \quad (2.12)$$

mit Startwerten  $y_\tau, \dots, y_1$ . Die Verzögerungsstruktur<sup>5</sup> der Differenzgleichung hängt ganz wesentlich von der Gewichtung  $W_\tau = \{w_k\}_{k=0}^{\tau-1}$  ab.

Um die Eigenschaften der Differenzgleichung (2.12) einfacher analysieren zu können, wird sie auch in Form eines  $\tau$ -dimensionalen Systems

$$\begin{pmatrix} z_{t+1}^{(0)} \\ \vdots \\ z_{t+1}^{(\tau-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_t^{(1)} \\ \vdots \\ f\left(\sum_{k=0}^{\tau-1} w_k z_t^{(\tau-1-k)}\right) \end{pmatrix}, \quad t \geq \tau, \quad (2.13)$$

mit Zustandsvariablen

$$z_t^{(0)} = y_{t-\tau+1}, \quad z_t^{(1)} = y_{t-\tau+2}, \quad \dots, \quad z_t^{(\tau-1)} = y_t$$

---

<sup>5</sup>Da in (2.12) die letzten  $\tau$  Beobachtungen mitgeschleppt werden, spricht man auch von einer *schleppenden Struktur*.

und Startwert  $z_\tau$  dargestellt.

*Linear adaptive Prognoseregeln :*

Ein Modell vom Cobweb-Typ mit linear adaptiver Prognoseregeln ergibt gemäß den obigen Ausführungen zu System (2.7) ein zwei-dimensionales dynamisches ökonomisches System. Der Zustandsraum dieses Systems ist  $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+^2$  und die Zustandsvariablen sind  $(y_t, y_{t-1,t}^e) \in \mathcal{X}$ . Das ökonomische Bildungsgesetz wird erweitert zu

$$\begin{aligned} F^1(y_t, y_{t-1,t}^e, y_{t,t+1}^e) &:= y_{t,t+1}^e, \\ f(y_t, y_{t-1,t}^e, y_{t,t+1}^e) &:= f(y_{t,t+1}^e). \end{aligned}$$

Bildungsgesetz und linear adaptive Prognoseregeln ergeben das zwei-dimensionale System

$$\begin{pmatrix} y_{t,t+1}^e \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-w)y_{t-1,t}^e + wy_t \\ f((1-w)y_{t-1,t}^e + wy_t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{N},$$

mit Startwert  $(y_1, y_{0,1}^e)$ .

Die dynamischen Eigenschaften dieser beiden Modelle sind bereits, in unterschiedlichem Zusammenhang, in mehreren Arbeiten zur dynamischen Wirtschaftstheorie qualitativ und numerisch analysiert worden. Der folgende Abschnitt 2.2 faßt die wichtigsten Ergebnisse dieser Beiträge zusammen.

## 2.2 Die Literatur zu Cobweb-Modellen

Endogene Marktmechanismen, durch die es in bestimmten Agrarsektoren zu Preis- und Mengenschwankungen kommt, wurden zunächst durch lineare Modelle vom Cobweb-Typ beschrieben. Unter der Annahme, daß die Erwartungen von Produzenten naiv oder adaptiv sind, konnten dann Bedingungen hergeleitet werden, so daß das Verhalten der Preise stabil ist. Da jedoch lineare dynamische Systeme für fast alle Parameterkombinationen entweder gegen den stationären Zustand konvergieren oder unbeschränkt divergieren, war eine Erklärung von komplexeren empirischen Phänomenen nicht möglich. Erst durch die neueren Entwicklungen auf dem Gebiet der Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme kam es zu einem erneuten Interesse an den dynamischen Eigenschaften von

nichtlinearen Modellen vom Cobweb-Typ. Für eine Vielzahl unterschiedlicher Prognoseregeln wurde seitdem die Dynamik von Modellen vom Cobweb-Typ untersucht. Neben den im folgenden betrachteten linear rekursiven Prognoseregeln entstanden auch eine Reihe von Arbeiten zu Cobweb-Modellen mit Kleinst-Quadrat-Prognoseregeln (Bray & Savin (1986)) und zu Cobweb-Modellen mit Prognoseregeln auf der Basis genetischer Algorithmen (Arifovic (1994)).

Neben den klassischen Cobweb-Modellen zur Erklärung von Preis- und Mengenschwankungen auf Agrarmärkten spielen Modelle vom Cobweb-Typ auch in anderen Gebieten der dynamischen Wirtschaftstheorie, wie etwa in der Konjunktur- und Wachstumstheorie, eine wichtige Rolle. In Abschnitt 2.1.2 wird ein Wachstumsmodell von Jarsulic (1993) und ein Finanzmarktmodell von Day & Huang (1990) vorgestellt. Beide Modelle weisen dieselbe Verzögerungsstruktur wie das Cobweb-Modell (2.12) mit Prognoseregeln von endlichem Gedächtnis auf. Die von Jarsulic und Day & Huang gezeigten dynamischen Eigenschaften können im weiteren Verlauf unter allgemeineren Voraussetzungen ebenfalls abgeleitet werden.

### 2.2.1 Linear adaptive Prognoseregeln

In den dreißiger Jahren untersuchen Schultz (1930), Tinbergen (1930) und später Ezekiel (1938) die Dynamik linearer Cobweb-Modelle, wobei sie von einer linearen Nachfragefunktion  $D(p) = a - bp$ , einer linearen Angebotsfunktion  $S(p) = c + dp$  und naiven Preiserwartungen der Produzenten ausgehen. Eine formale Analyse der Stabilitätseigenschaften des Gleichgewichtspreises, also des Schnittpunktes der Angebots- und Nachfragefunktion, wird von Ezekiel gegeben. Er zeigt, daß das globale dynamische Verhalten des Modells anhand des Quotient  $d/b$  bestimmt werden kann. Der Quotient  $d/b$  entspricht dem Verhältnis der Steigung der Angebotsfunktion zur Steigung der Nachfragefunktion. Falls  $|d/b| < 1$  ist, so konvergiert das Cobweb-Modell global zum Gleichgewichtspreis. Falls  $|d/b| = 1$  ist, dann verhält sich das Cobweb-Modell zyklisch mit Periode 2. Für  $|d/b| > 1$  divergiert das Cobweb-Modell unbeschränkt. Goodwin (1947) erweitert diese Überlegungen auf Mehrsektoren-Modelle. Diese Modelle können auch unter der Annahme von naiven Erwartungen Zyklen von höherer Ordnung erzeugen. Goodwin zeigt, daß durch die Rückkopplungen zwischen den Sektoren das Gesamtsystem eher instabil wird.

Ende der fünfziger Jahre kritisieren Nerlove (1958) und Arrow & Nerlove (1958) das Konzept der naiven Erwartungen als eine zu eingeschränkte Annah-

me an das Verhalten von Wirtschaftssubjekten und erweitern das Konzept zu adaptiven Erwartungen. Er zeigt, daß das globale dynamische Verhalten eines Cobweb-Modells ganz wesentlich von der Form der Prognose, in diesem Falle von der Wahl des Adaptationsparameters, bestimmt wird. Für alle Werte des Adaptationsparameters unterhalb einer gewissen Schranke ist der Gleichgewichtspreis global stabil. Für Werte oberhalb der Schranke divergiert das System. Intuitiv fand Nerlove dafür die folgende Erklärung: Revidieren die Wirtschaftssubjekte ihre Erwartungen nur langsam, so stabilisiert das den Gleichgewichtspreis. Reagieren Wirtschaftssubjekte dagegen schnell auf Veränderungen der Beobachtungen, dann hat das ein instabiles Verhalten des Systems zur Folge.

Die Arbeiten von Li & Yorke (1975) und Sarkovskii (1964) zur Theorie der Dynamik nichtlinearer Systeme<sup>6</sup> führte zu einer Reihe von Arbeiten, die sich mit der Dynamik von nichtlinearen Cobweb-Modellen befassen.

Anfang der achtziger Jahre betrachten Artstein (1983) und Jensen & Urban (1984) Cobweb-Modelle mit naiven Erwartungen, wobei sie von einer nichtlinearen Angebots- und einer linearen Nachfragefunktion ausgehen. Die nicht monotone Form der Angebotsfunktion wird durch spezielle Einkommenseffekte begründet, die unter bestimmten Gegebenheiten bei Produzenten des agrarwirtschaftlichen Sektors vorliegen können. Für eine offene Teilmenge des Parameterraums gelingt ihnen der Nachweis von Zyklen der Periode 3 und damit von topologischem Chaos. Je nach Anfangswert erzeugt das Cobweb-Modell Zyklen beliebiger Ordnung und sogar aperiodische Trajektorien.

Day (1994) und Day & Hanson (1991) betrachten ebenfalls Cobweb-Modelle mit naiven Erwartungen. Sie leiten die zurückgebogene Form der Angebotsfunktion sowohl aus Einkommenseffekten wie auch aus Finanzierungsrestriktionen der Produzenten ab. Sie zeigen, daß das Cobweb-Modell bei einer Änderungen der Finanzierungsrestriktionen eine Folge von Periodenverdopplungen erfährt.

Huang (1995) weist darauf hin, daß unter bestimmten Voraussetzungen die Schwankungen auf Gütermärkten nicht nur permanent, sondern von den Produzenten sogar erwünscht sein können. Er zeigt, daß die Produzenten trotz naiver Erwartungen im Falle des Auftretens von Preisschwankungen einen höheren Durchschnittsgewinn erzielen, als sie bei einem global stabilen Gleichgewichtspreis erzielen würden. Das dynamische Verhalten eines Cobweb-Modells mit nai-

---

<sup>6</sup>Wichtige Impulse gingen vorallem von dem Ergebnis aus, daß bei ein-dimensionalen Abbildungen im Falle eines Zyklus der Ordnung 3 topologisches Chaos auftritt.

ven Erwartungen ist allerdings nur im Falle einer nicht-monotonen Angebots- oder Nachfragefunktion komplex.

Nichtlineare Cobweb-Modelle mit linear adaptiver Prognoseregeln werden erstmals von Chiarella (1988) und Hommes (1991), Hommes (1994) untersucht. Beide gehen von einer linear fallenden Nachfragefunktion und einer S-förmigen und damit monotonen Angebotsfunktion aus. Hierdurch ergibt sich ein nichtlineares monotonen Cobweb-Bildungsgesetz. Bei genügend kleinem Adaptationsparameter ist das Cobweb-Modell global stabil. Liegt der Adaptationsparameter oberhalb eines bestimmten Wertes, dann läßt sich immer eine lineare Nachfragefunktion finden, so daß das zugehörige Cobweb-Modell einen Zyklus der Periode 3 aufweist. Gemäß dem Theorem von Li & Yorke (1975) bedeutet das, daß topologisches Chaos auftritt. Darüber hinaus führen Chiarella und Hommes zahlreiche numerische Analysen durch, aus denen abgeleitet werden kann, daß das Bifurkationsverhalten ganz wesentlich durch den Adaptationsparameter der Prognoseregeln und der Elastizität des nichtlinearen Bildungsgesetzes beeinflusst wird.

Die von Hommes (1994) durchgeführten Analysen der Dynamik des Cobweb-Modells mit S-förmiger Angebotsfunktion werden von Gallas & Nusse (1996) erweitert. Sie untersuchen die Dynamik des Cobweb-Modelles im Hinblick auf sensitive Abhängigkeit von den Startwerten. Hierzu berechnen sie numerisch den Lyapunov Exponenten, in Abhängigkeit von mehreren Parametern des Modells. Ist der Lyapunov Exponent negativ, dann ist die erzeugte Trajektorie ein Zyklus. Ist der Lyapunov Exponent positiv, so liegt sensitive Abhängigkeit von den Startwerten vor. Gallas & Nusse zeigen, daß das Auftreten von positiven Lyapunov Exponenten vom Adaptationsparameter der Prognoseregeln abhängt. Die Menge der Parameter mit positivem Lyapunov Exponent weist außerdem eine fraktale Struktur auf.

### 2.2.2 Prognoseregeln mit endlichem Gedächtnis

Linear adaptive Prognoseregeln werden von einigen Ökonomen kritisiert. So weisen Grandmont & Laroque (1986) darauf hin, daß mittels einer linear adaptiven Prognoseregeln ein periodisches Verhalten des ökonomischen Systems nicht prognostiziert werden kann. Balasko & Royer (1996) geben zu bedenken, daß linear adaptive Prognoseregeln eine Funktion aller vergangenen Beobachtungen sind. Damit wird den Wirtschaftssubjekten unterstellt, daß sie auch weit zurückliegende Beobachtungen noch für relevant erachten. Prognoseregeln mit endlichem

Gedächtnis hängen dagegen nicht von weit vergangenen Beobachtungen ab. Um den Einfluß eines solchen endlichen Gedächtnisses auf ökonomische Prozesse zu verstehen, befaßten sich verschiedene neuere Beiträge mit der Dynamik von Modellen vom Cobweb-Typ, wobei sie von einer linearen Prognoseregeln mit endlichem Gedächtnis unterstellten.

Da die Modelle, je nach der Gedächtnislänge der Prognoseregeln, eine unterschiedlich hohe Dimension haben, ist eine Analyse der globalen dynamischen Eigenschaften häufig schwierig. Die meisten Arbeiten beschäftigen sich vor allem mit Fragen der lokalen Stabilität von stationären Zuständen. Einige der wichtigsten Stabilitätsbedingungen für lineare Modelle vom Cobweb-Typ sind in der Arbeit von Bear, Conlisk & Harriff (1980) zusammengefaßt. Werden die Zustandsvariablen eines stabilen linearen Systems einer Verzögerung unterworfen, dann stellt sich die Frage, ob das verzögerte System ebenfalls stabil ist. Bear, Conlisk & Harriff (1980) zeigen, unter welchen Bedingungen an die Verzögerung der Zustandsvariablen das verzögerte System stabil bleibt. Unter Anwendung dieser Resultate untersuchen Balasko & Royer (1996) die lokalen Stabilitätseigenschaften der stationären Zustände eines Modells vom Cobweb-Typ. Für lineare Prognoseregeln mit endlichem Gedächtnis leiten sie die allgemeinsten bisher bekannten Stabilitätsbedingungen für stationäre Zustände her. Insbesondere zeigen Balasko & Royer (1996) für Prognosen mittels ungewichtetem Durchschnitt, daß wenn der stationäre Zustand eines Modells vom Cobweb-Typ ab einer bestimmten Gedächtnislänge lokal stabil ist, auch der stationäre Zustand bei größerer Gedächtnislänge lokal stabil ist. Diese Ergebnisse werden ausführlich in Kapitel 3 dargestellt.

Verschiedene globale dynamische Eigenschaften eines nichtlinearen Cobweb-Modells mit geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln werden erstmals in dem Beitrag von Hommes (1996) untersucht. Er unterstellt dabei dieselbe S-förmige Angebotsfunktion und dieselbe lineare Nachfragefunktion, die er im Zusammenhang mit linear adaptiven Prognoseregeln (Hommes (1996)) betrachtet. Hommes zeigt, daß die Komplexität der Dynamik, insbesondere das Bifurkationsverhalten des Modells, von der Gedächtnislänge und dem Gewichtungsfaktor der Prognoseregeln beeinflusst wird. Außerdem weist er anhand von zweidimensionalen Attraktorprojektionen und Bifurkationsdiagrammen nach, daß bei sehr langem Gedächtnis das dynamische Verhalten eines Cobweb-Modells mit geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln gewisse Übereinstimmungen zu dem dynamischen Verhalten eines Cobweb-Modells mit linear adap-

tiver Prognoseregeln zeigt. Die Arbeit von Hommes (1996) befaßt sich darüber hinaus mit den Autokorrelationseigenschaften der von dem Cobweb-Modell erzeugten Zeitreihen. Für verschiedene Parameterkombinationen weist Hommes numerisch nach, daß die statistischen Eigenschaften der Zeitreihen schwachem weißen Rauschen entsprechen und damit nicht durch lineare statistische Methoden von rein stochastisch erzeugten Zeitreihen unterschieden werden können.<sup>7</sup> In Hommes & Sorger (1996) wird außerdem analytisch gezeigt, daß Cobweb-Modelle mit zurückgebogenem Bildungsgesetz unkorrelierte Zeitreihen erzeugen können.

Die vorliegende Arbeit knüpft vor allem an die Arbeiten von Hommes (1994), Hommes (1996) und Hommes & Sorger (1996) an. Hommes geht im Rahmen seiner qualitativen und numerischen Untersuchungen meistens von einer speziellen Familie von monotonen Bildungsgesetzen aus. Dagegen wird im Rahmen der qualitativen Analyse der vorliegenden Arbeit der Einfluß von Gedächtnislänge und Gewichtungsstruktur einer Prognoseregeln auf das dynamische Verhalten nur unter der Voraussetzung der Differenzierbarkeit des Bildungsgesetzes untersucht. Außerdem befassen sich die numerischen Analysen dieser Arbeit sowohl mit den dynamischen Eigenschaften von Cobweb-Modellen mit monotonem Bildungsgesetz, wie auch mit den dynamischen Eigenschaften von Cobweb-Modellen mit nicht monotonem Bildungsgesetz.

### 2.2.3 Finanzmarkt- und Makromodelle vom Cobweb-Typ

Neben den klassischen Cobweb-Modellen zur Erklärung von Preis- und Mengenschwankungen auf Agrarmärkten werden Modelle vom Cobweb-Typ auch in der Finanzmarkt- und Wachstumstheorie zur Erklärung des periodischen und aperiodischen Verhaltens gesamtwirtschaftlicher Größen verwendet. Das Verständnis der globalen Dynamik dieser Modelle ist wesentlich zur Erklärung einer ganzen Reihe von empirischen Phänomenen. Um die Bedeutung der Familie der Modelle vom Cobweb-Typ für die Erklärung der Schwankung von aggregierten wie auch von sektoralen Größen zu verdeutlichen, wird in diesem Abschnitt ein Wachstumsmodell von Jarsulic (1993) und ein Finanzmarktmodell von Day & Huang (1990) vorgestellt. In beiden Arbeiten werden numerische Analysen durchgeführt, wobei sich zeigt, daß die Dynamik der Modelle in charakteristischer Weise von der

---

<sup>7</sup>Hommes bezeichnet Trajektorien, die eine solche Eigenschaft aufweisen, als *konsistent*.

Form des ökonomischen Bildungsgesetzes und von der Art der Prognose abhängt. Die Ergebnisse von Jarsulic und Day & Huang können im Rahmen der folgenden Untersuchungen noch weiter vertieft werden.

### Ein Wachstumsmodell vom Cobweb-Typ

Dynamische Systeme mit Verzögerungsstruktur spielen eine wichtige Rolle in der Wachstums- und Konjunkturtheorie. Bereits die frühen Beiträge von Kalecki (1935), Samuelson (1939) und später Goodwin (1951) weisen nach, daß es bei makroökonomischen Modellen aufgrund von Budget- oder Produktionsrestriktionen zu Rückkopplungen von ökonomischen Variablen kommen kann. Die Modelle entsprechen dabei einer Differenzgleichung von höherer Ordnung und generieren Zeitreihen, die den empirisch beobachteten Zeitreihen der entsprechenden ökonomischen Größen sehr nahe kommen.

Das von Jarsulic (1993) entwickelte Wachstumsmodell beschreibt ebenfalls einen solchen Rückkopplungsmechanismus. Das Modell dient vor allem zur Erklärung der Phasen mit periodischer und mit aperiodischer Entwicklung des Wirtschaftswachstums der USA. Jarsulic entwickelt das Modell auf der Basis eines Keynesianischen Makromodells, wobei er von einer verzögerten Kapitalstockanpassung ausgeht. Somit hat das Modell dieselbe Struktur wie ein Modell vom Cobweb-Typ mit Prognoseregeln von endlichem Gedächtnis. Unter bestimmten Nichtlinearitätsannahmen erzeugt das Modell dann sogar chaotische Wachstumspfade. Die Herleitung des Modells beruht auf den folgenden Annahmen:

In einer Ökonomie existiert nur ein Gut und in jeder Periode  $t \in \mathbb{N}$  werden  $Y_t$  Einheiten des Gutes produziert. Die Nachfrage nach dem Gut setzt sich aus der Investitionsnachfrage  $I_t$  und der Konsumnachfrage  $C_t$  zusammen. Das Marktgleichgewicht in Intensitätsform wird beschrieben durch

$$\frac{Y_t}{K_{t-1}} = \frac{I_t}{K_{t-1}} + \frac{C_t}{K_{t-1}}, \quad (2.14)$$

wobei  $K_{t-1}$  der Kapitalstock am Ende der Periode  $t-1$  ist und keine Abschreibung vorliegt.

Aufgrund der Annahme, daß die Konsumnachfrage proportional zum Einkommen  $Y_t$  ist, kann die Gleichgewichtsbedingung (2.14) auch in der Form

$$u_t = \frac{g_t}{s},$$

mit  $u_t = Y_t/K_{t-1}$ ,  $g_t = K_t/K_{t-1} - 1$  und  $s = 1 - c$  dargestellt werden. Hierbei bezeichnet  $u_t$  die Kapitalproduktivität in Periode  $t$ ,  $g_t$  die relative Investitionsrate und  $s = 1 - c \in (0, 1)$  die Sparquote bzw. marginale Konsumneigung.

Des Weiteren wird davon ausgegangen, daß die Investitionsnachfrage von der prognostizierten Kapitalrendite der Investoren abhängt.<sup>8</sup> Außerdem wird angenommen, daß die relative Investitionsnachfrage proportional zur prognostizierten Kapitalrendite ist, also  $g_{t+1} = \sigma \pi_{t,t+1}^e$  mit  $\sigma > 0$  gilt. Ist dann die Prognose für die Kapitalrendite jeweils der Durchschnitt aus endlich vielen vergangenen Kapitalrenditen  $\pi_t, \dots, \pi_{t-\tau+1}$ , so ist

$$g_{t+1} = \frac{\sigma}{\tau} \sum_{k=0}^{\tau-1} \pi_{t-k}. \quad (2.15)$$

Die Beziehung zwischen Kapitalproduktivität  $u_t$  und Kapitalrendite  $\pi_t$  sei durch die stückweise lineare Funktion

$$\pi_t = f(u_t) = \begin{cases} A \cdot u_t & , 0 \leq u_t \leq u^* \\ B - C \cdot u_t & , u^* \leq u_t \leq u^{**} \end{cases} \quad (2.16)$$

beschrieben, mit positiven Konstanten  $A$ ,  $B$  und  $C$ . Überschreitet die Kapitalproduktivität den Auslastungsgrad  $u^*$ , dann beginnt die Kapitalrendite zu sinken. Der Wert  $u^{**} = B/C$  entspricht der maximal möglichen Kapitalproduktivität. Eine theoretische Erklärung für eine solche Beziehung zwischen Kapitalrendite und Kapitalproduktivität wird von Bowles, Gordon & Weisskopf (1989) gegeben.

Setzt man  $\gamma = A\sigma/s$ ,  $\psi = B/s$  und  $\phi = C\sigma/s$ , dann ist  $\pi^* = \psi/(\gamma + \phi)$  und  $\pi^{**} = \psi/\phi$ . Aus Gleichung (2.15) und (2.16) folgt, falls  $(1 + \gamma/\phi) > \gamma$  und  $\pi_1 \geq 0$  ist, daß die Entwicklung der Kapitalrendite durch die nicht-negative Differenzgleichung

$$\pi_{t+1} = \begin{cases} \gamma \left( \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\tau-1} \pi_{t-k} \right) & , 0 \leq \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\tau-1} \pi_{t-k} \leq \pi^* \\ \psi - \phi \left( \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\tau-1} \pi_{t-k} \right) & , \pi^* < \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\tau-1} \pi_{t-k} \leq \pi^{**} \end{cases} \quad (2.17)$$

beschrieben wird. Die Parameter  $\gamma$ ,  $\psi$  und  $\phi$  werden von Jarsulic (1993) auf der Basis des BSP der USA empirisch geschätzt. Für  $\tau = 1$  ist das System (2.17) in Abbildung 2.1 dargestellt.

---

<sup>8</sup>Ein möglicher Grund für eine solche Abhängigkeit ergibt sich beispielsweise aus der Finanzierungsrestriktion von Unternehmen. In Fazzari, Hubbard & Petersen (1988) findet man eine ausführliche Darstellung dieses Zusammenhangs.

Für  $\gamma > 1$  besitzt das System einen instabilen stationären Zustand  $\tilde{\pi} > 0$ . Das Bildungsgesetz ist für  $\gamma > 1$  negativ elastisch in der Umgebung von  $\tilde{\pi}$  und damit ist bei entsprechend großem  $\tau$  der stationäre Zustand  $\tilde{\pi}$  lokal stabil. Ist  $\gamma < 1$ , dann konvergiert das System gegen den stationären Zustand 0. Damit treten Phasen des stabilen wirtschaftlichen Wachstums immer dann auf, wenn die Investoren im Rahmen ihrer Investitionsentscheidung auch weiter zurückliegende Kapitalrenditen berücksichtigen. Das Modell von Jarsulic beschreibt allerdings nur die zeitliche Entwicklung der relativen Größen und nicht die Entwicklung der absoluten Größen. Zwischen dem dynamischen Verhalten eines Systems mit relativen Zustandsvariablen und dem dynamischen Verhalten des entsprechenden Systems mit absoluten Zustandsvariablen bestehen einige wesentliche Unterschiede. Man sehe hierzu vor allem die Arbeit von Koch (1995).

Jarsulic (1993) weist numerisch nach, daß das System (2.17) für  $\tau = 1, 2, 3$  einen homoklinen Punkt besitzt, falls  $\pi^*$  nahe genug bei  $\pi^{**}$  liegt.<sup>9</sup> Die Existenz eines homoklinen Punktes impliziert ein chaotisches Verhalten des Systems auf einer invarianten Teilmenge des Zustandsraums. Das Modell von Jarsulic liefert daher eine Erklärung sowohl für Phasen des zyklischen Wachstums wie auch für Phasen des irregulären Wachstums. Die Resultate von Jarsulic in bezug auf den Einfluß von  $\pi^*$ ,  $\pi^{**}$  und  $\tau$  auf die Dynamik des Systems werden im Rahmen der folgenden numerischen und theoretischen Analysen noch weiter vertieft.

### Ein Finanzmarktmodell vom Cobweb-Typ

Day & Huang (1990) untersuchen die zeitliche Entwicklung der Aktienkurse eines Unternehmens, wobei sie nicht von rationalen Erwartungen der Wirtschaftssubjekte ausgehen, sondern vielmehr annehmen, daß für die Wirtschaftssubjekte die Möglichkeiten des Informationszugangs und der Informationsverarbeitung unterschiedlich sind. Day & Huang unterscheiden zwischen zwei Gruppen von Marktteilnehmern. Die eine Gruppe besitzt vollständige Informationen und wird als die Gruppe der  $\alpha$ -Investoren bezeichnet. Die andere Gruppe ist nur unvollständig informiert und wird als die Gruppe der  $\beta$ -Investoren bezeichnet.<sup>10</sup> Die Aktien werden auf einem Markt mit vollkommenem Wettbewerb gehandelt. Das Angebot und die Nachfrage der Aktie in Periode  $t \in \mathbb{N}$  leitet sich aus dem aggregierten

---

<sup>9</sup>Die Definition und die Eigenschaften homokliner Punkte werden in Anhang B.1 erläutert.

<sup>10</sup>Finanzmarktmodelle mit ähnlichen Voraussetzungen findet man in dem Buch von DeGrauwe, Dewachter & Embrechts (1993).

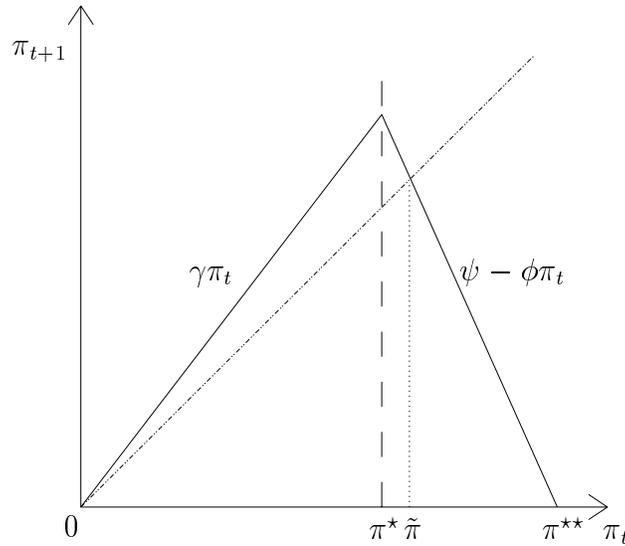


Abbildung 2.1: Ein einfaches Wachstumsmodell  $\pi_{t+1} = f(\frac{\alpha}{s}\pi_t)$  nach Jarsulic.

Angebot und der aggregierten Nachfrage der  $\alpha$ - und  $\beta$ -Investoren ab. Der Aktienkurs  $p_t$  ist jeweils der markträumende Kurs der Periode  $t$ , wobei angenommen wird, daß dieser Kurs durch  $m \leq p_t \leq M$  beschränkt ist.

Die  $\alpha$ -Investoren treffen ihre Kaufentscheidung für die Periode  $t+1$  aufgrund einer Fundamentalbewertung der Aktie. Sie ermitteln den Fundamentalkurs  $\tilde{p}$  der Aktie, indem sie den abdiskontierten Wert aller zukünftigen Erträge je Aktie berechnen. Der Fundamentalkurs  $\tilde{p}$  sei für alle Perioden als fest angenommen. Die  $\alpha$ -Investoren wissen, daß die  $\beta$ -Investoren häufig einen anderen Kurs als  $\tilde{p}$  erwarten. Weicht deshalb ihre Kurserwartung  ${}^\alpha p_{t,t+1}^e$  für die nächste Periode  $t+1$  vom Fundamentalkurs  $\tilde{p}$  nach oben (bzw. nach unten) ab, dann verkaufen (bzw. kaufen) sie einen Teil ihrer Aktien in der Periode  $t+1$ . Die Überschufnachfrage  $\alpha({}^\alpha p_{t,t+1}^e)$  der  $\alpha$ -Investoren nach Aktien in der Periode  $t+1$  wird durch eine stetige und streng monoton fallende Funktion

$$\alpha : [m, M] \longrightarrow \mathbb{R}$$

beschrieben. Dabei sei angenommen, daß  $\alpha(m) < 0$ ,  $\alpha(M) > 0$  und  $\alpha(\tilde{p}) = 0$  sei. Die Funktion  $\alpha({}^\alpha p_{t,t+1}^e)$  ist in Abbildung 2.2 dargestellt.

Im Gegensatz zu den  $\alpha$ -Investoren kennen die  $\beta$ -Investoren den Fundamentalkurs  $\tilde{p}$  der Aktie nicht. Sie kaufen Aktien in der Periode  $t+1$ , wenn sie für diese Periode einen hohen Kurs  ${}^\beta p_{t,t+1}^e \in [m, M]$  erwarten und sie verkaufen Aktien,

wenn sie einen niedrigen Kurs erwarten. Die Überschußnachfrage  $\beta(\beta p_{t,t+1}^e)$  der  $\beta$ -Investoren nach Aktien in Periode  $t + 1$  wird deshalb durch eine stetige und streng monoton steigende Funktion

$$\beta : [m, M] \longrightarrow \mathbb{R}$$

beschrieben, wobei  $\beta(m) < 0$  und  $\beta(M) > 0$  ist. Das Verhalten eines  $\beta$ -Investors gleicht dem Verhalten eines kurzfristig orientierten Investors, der mit Hilfe einfacher Charttechniken seine Kauf- und Verkaufsentscheidungen fällt.

Die aggregierte Überschußnachfrage nach Aktien in Periode  $t + 1$  lautet daher

$$E(\alpha p_{t,t+1}^e, \beta p_{t,t+1}^e) = \alpha(\alpha p_{t,t+1}^e) + \beta(\beta p_{t,t+1}^e).$$

Neben den  $\alpha$ - und  $\beta$ -Investoren gibt es noch einen Börsenmakler. Er legt in jeder Periode den markträumenden Aktienkurs  $p_{t+1}$  fest, wobei er aus seinem eigenen Bestand Aktien verkauft bzw. kauft, bis die andere Marktseite befriedigt ist. Entsprechend der aggregierten Überschußnachfrage ergibt sich also der markträumende Kurs der Periode  $t + 1$  gemäß

$$p_{t+1} = \gamma(E(\alpha p_{t,t+1}^e, \beta p_{t,t+1}^e)), \quad t \in \mathbb{N}, \quad (2.18)$$

wobei  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow [m, M]$  eine stetige und streng monoton fallende Funktion ist.

Day & Huang (1990) gehen unter anderem davon aus, daß die Erwartungen der  $\alpha$ - und  $\beta$ -Investoren homogen sind. Das Bildungsgesetz (2.18) des Finanzmarktmodells ist dann vom Cobweb-Typ. Bilden die  $\alpha$ - und  $\beta$ -Investoren ihre Erwartungen mittels der Prognoseregeln

$$p_{t,t+1}^e = \frac{\sigma}{\tau} \sum_{k=0}^{\tau-1} p_{t-k},$$

dann entspricht das Modell der Differenzgleichung der Ordnung  $\tau$ :

$$p_{t+1} = \gamma\left(E\left(\frac{\sigma}{\tau} \sum_{k=0}^{\tau-1} p_{t-k}\right)\right).$$

Dieses System erzeugt bereits für einfache nichtlineare Funktionen  $\gamma$ ,  $\alpha$  oder  $\beta$  Zeitreihen, welche die für Aktienkursbewegungen typischen Merkmale aufweisen. Day & Huang weisen für lineares  $\beta$ ,  $\gamma$  und für verschiedene nichtlineare Funktionen  $\alpha$  nach, daß im Falle von  $\tau = 1$  Zyklen der Periode 3 existieren. Nach Li & Yorke (1975) liegt dann topologisches Chaos vor. Das Modell von Day &

Huang (1990) erklärt periodische und aperiodische Kursschwankungen einer Aktie durch einen deterministischen Mechanismus. Das Modell steht damit im Gegensatz zu anderen Finanzmarktmodellen, wie etwa den Modellen von Grossman & Stiglitz (1980), die Kursschwankungen auf exogene zufällige Störungseinfüsse zurückführen.

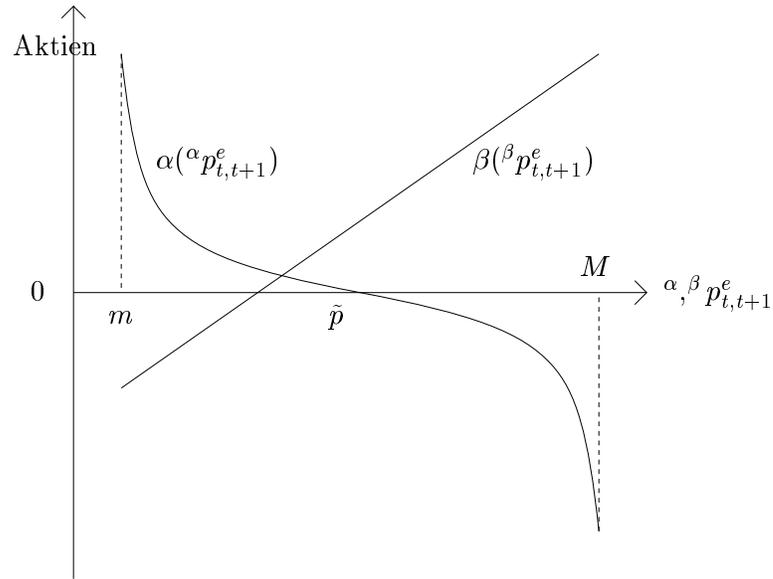


Abbildung 2.2: Die Aktiennachfrage der  $\alpha$ -Investoren und  $\beta$ -Investoren im Modell von Day & Huang.

# Kapitel 3

## Qualitative Analyse der Dynamik für Prognoseregeln mit endlichem Gedächtnis

Die Untersuchungen dieses Kapitels befassen sich mit der Frage, in welcher Weise das dynamische Verhalten eines stetig differenzierbaren<sup>1</sup> Modells vom Cobweb-Typ mit linearer Prognoseregeln und endlichem Gedächtnis

$$y_{t+1} = f\left(\sum_{k=0}^{\tau-1} w_k y_{t-k}\right), \quad t \geq \tau \quad (3.1)$$

durch die Elastizitätseigenschaften des Bildungsgesetzes, durch die Gewichtung  $W_\tau = \{w_k\}_{k=0}^{\tau-1}$  bzw. durch die Gedächtnislänge  $\tau \in \mathbb{N}$  der Prognoseregeln beeinflusst werden. Im Rahmen der qualitativen Analyse wird meistens ein ein-dimensionales Bildungsgesetz  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  unterstellt und die Elastizität am Punkt  $y \in \mathbb{R}$  für  $f(y) \neq 0$  wird mit  $\epsilon_f(y) = yf'(y)/f(y)$  abgekürzt. Die Frage, inwiefern bestimmte Eigenschaften von  $f$  oder  $W_\tau = \{w_k\}_{k=0}^{\tau-1}$  das globale dynamische Verhalten von System (3.1) beeinflussen, ist aufgrund der von  $\tau \in \mathbb{N}$  abhängigen Dimension des Systems meist nur schwer zu beantworten. Die qualitative Analyse befaßt sich deshalb zunächst mit dem lokalen dynamischen Verhalten des Systems in der Umgebung der stationären Zustände. Aus bestimmten Eigenschaften der lokalen Dynamik von System (3.1) können mit Hilfe ergodentheoretischer Methoden, insbesondere durch Analyse der Lyapunov Exponenten, auch

---

<sup>1</sup>Aussagen über die topologischen und statistischen Eigenschaften der Trajektorien eines Systems, wie etwa Aussagen über strukturelle Stabilität oder Ergodizität, lassen sich unter der Annahme von Differenzierbarkeit einfacher erzielen, als wenn nur Stetigkeit vorausgesetzt wird.

Aussagen über globale dynamische Eigenschaften abgeleitet werden. So wird sich zeigen, daß die sensitive Abhängigkeit von den Anfangswerten ganz wesentlich von der Gedächtnislänge und der Form der Gewichtung  $W_\tau = \{w_k\}_{k=0}^{\tau-1}$  abhängt. Im Rahmen der folgenden Betrachtungen wird nur die stetige Differenzierbarkeit des Bildungsgesetzes  $f$  vorausgesetzt. Inwiefern bestimmte nichtlineare Formen des Bildungsgesetzes die dynamischen Eigenschaften von System (3.1) beeinflussen, wird später in den Kapiteln 4 und 5 mit Hilfe numerischer Methoden untersucht.

Im folgenden Abschnitt 3.1 werden Bedingungen angegeben unter denen ein stationärer Zustand eines Modells vom Cobweb-Typ mit linearer Prognoseregeln von endlichem Gedächtnis lokal stabil ist. Es handelt sich dabei um Bedingungen an die Gewichtungsstruktur bzw. an die Gedächtnislänge der Prognoseregeln und an die Elastizität des Bildungsgesetzes. Diese Elastizität ist an einem Fixpunkt  $\tilde{y}$  von  $f$  gleich der Ableitung, also  $\epsilon_f(\tilde{y}) = \tilde{y}f'(\tilde{y})/f(\tilde{y}) = f'(\tilde{y})$ . Mittels der lokalen linearen Approximation des Systems in der Umgebung des stationären Zustandes und dem Satz von Grobman & Hartman (siehe Kuznetsov (1995), Seite 50) können die Stabilitätsbedingungen aus der speziellen Struktur der jeweiligen Jacobi-Matrix abgeleitet werden. Geht man speziell von Prognosen mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt aus, so zeigt sich, daß die Stabilitätseigenschaften eines Modells vom Cobweb-Typ mit linear adaptiver Prognoseregeln und die eines Modells vom Cobweb-Typ mit dem geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln bei entsprechend großer Gedächtnislänge dieselben sind.

Der Abschnitt 3.2 versucht eine systematische Darstellung des primären Bifurkationsverhaltens eines Modells vom Cobweb-Typ mit dem geometrisch gewichteten Durchschnitt vergangener Beobachtungen als Prognoseregeln. Um Aussagen über Änderungen des lokalen dynamischen Verhaltens in der Umgebung eines stationären Zustandes machen können, wird die Abhängigkeit der Eigenwerte von den drei Parametern Gedächtnislänge, geometrischer Gewichtungsfaktor und Elastizität des Bildungsgesetzes untersucht. Hieraus können dann das generische Bifurkationsverhalten und die Bifurkationskurven<sup>2</sup> der Systeme an den stationären Zuständen bestimmt werden. Da das Bildungsgesetz  $f$  als stetig differenzierbar vorausgesetzt ist, können die qualitativen Eigenschaften der sensitiven Abhängigkeit der Dynamik von den Startwerten durch eine Analyse der Lyapunov Exponenten bestimmt werden. Im folgenden wird nur der maximale Lyapunov Exponent untersucht, denn er gibt den durchschnittlichen Faktor an, mit dem

---

<sup>2</sup>Der Begriff Bifurkationskurve wird in Anhang B.2 erklärt.

sich zwei Trajektorie mit nahe beieinander liegenden Startwerten voneinander entfernen.

In Abschnitt 3.3 wird untersucht, inwiefern die Größenordnung der maximalen Lyapunov Exponenten des Systems (3.1) durch die Gewichtung bzw. durch die Gedächtnislänge der Prognoseregeln beeinflusst wird. Da Lyapunov Exponenten als Eigenwerte einer Matrix abgeleitet werden, wobei die Matrix eine auf ergodentheoretischen Methoden basierende Verallgemeinerung der Jacobi-Matrizen des Systems ist, ergeben sich Abschätzungen für Lyapunov Exponenten aus den Abschätzungen für Eigenwerte. Es wird sich zeigen, daß die Lyapunov Exponenten nahe oder unterhalb der Null liegen, wenn die Gewichtung für weiter zurückliegende Beobachtungen anwächst und das Gedächtnis entsprechend lang ist.

## 3.1 Stabilitätsanalyse

Die Anzahl der Gleichgewichtszustände eines Modells vom Cobweb-Typ wird durch die Form des Bildungsgesetzes festgelegt. Die Stabilitätseigenschaften dieser Gleichgewichtszustände hängen dagegen von den Eigenschaften der Prognoseregeln ab.<sup>3</sup> Für Modelle vom Cobweb-Typ mit linearer Prognoseregeln von endlichem Gedächtnis können die Stabilitätseigenschaften der stationären Zustände unter sehr allgemeinen Voraussetzungen bestimmt werden. In den Arbeiten von Bear, Conlisk & Harriff (1980), Balasko & Royer (1996) und Giona (1991) werden lineare Differenzgleichungen mit unterschiedlicher Verzögerungsstruktur betrachtet. Es werden verschiedene Möglichkeiten der Änderung der Verzögerungsstruktur angegeben, so daß der stationäre Zustand der veränderten Differenzgleichung stabil ist. Die folgende qualitative Analyse der Stabilität stationärer Zustände basiert auf den Ergebnissen dieser Arbeiten.

### 3.1.1 Gedächtnislänge und Elastizität des Bildungsgesetzes

Gemäß den Überlegungen aus Abschnitt 2.1 entspricht ein Modell vom Cobweb-Typ mit einer Prognoseregeln von endlichem Gedächtnis einer Differenzgleichung

---

<sup>3</sup>Evans (1986) spricht in diesem Zusammenhang auch von Gleichgewichtsauswahl.

der Ordnung  $\tau$ :

$$y_{t+1} = f\left(\sum_{k=0}^{\tau-1} w_k y_{t-k}\right), \quad t \geq \tau, \quad (3.2)$$

bzw. einem  $\tau$ -dimensionalen System

$$\begin{pmatrix} z_{t+1}^{(0)} \\ \vdots \\ z_{t+1}^{(\tau-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_t^{(1)} \\ \vdots \\ f\left(\sum_{k=0}^{\tau-1} w_k z_t^{(\tau-k-1)}\right) \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

mit den Zustandsvariablen

$$z_t^{(0)} = y_{t-\tau+1}, \quad z_t^{(1)} = y_{t-\tau+2}, \dots, \quad z_t^{(\tau-1)} = y_t.$$

Das System (3.3) mit Gewichtung  $W_\tau = \{w_k\}_{k=0}^{\tau-1}$  sei im folgenden auch mit  $z_{t+1} = F(z_t; W_\tau)$  abgekürzt. Die Jacobi-Matrizen  $DF(z; W_\tau)$  dieses Systems sind *Begleitmatrizen* der Form

$$DF(z; W_\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ c(z; W_\tau)w_{\tau-1} & c(z; W_\tau)w_{\tau-2} & \dots & c(z; W_\tau)w_1 & c(z; W_\tau)w_0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

wobei  $c(z; W_\tau)$  definiert ist als

$$c(z^{(0)}, \dots, z^{(\tau-1)}; W_\tau) := f'\left(\sum_{k=0}^{\tau-1} w_k z^{(\tau-k-1)}\right).$$

Begleitmatrizen haben spezielle Eigenschaften. So konnte Giona (1991) zeigen, daß die lokale Stabilität der stationären Zustände in folgender Weise von der Gewichtung  $W_\tau = \{w_k\}_{k=0}^{\tau-1}$  abhängt:

**Lemma 1** (Giona, 1991)

Gegeben sei die differenzierbare Funktion  $f : I \rightarrow I$  auf dem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  und  $\tilde{y}$  sei ein Fixpunkt von  $f$ .

1. Es sei  $f'(\tilde{y}) > 1$ . Dann ist der stationäre Zustand  $y^* = (\tilde{y}, \dots, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^\tau$  des Systems (3.2) instabil, für alle Gewichtungen  $\{w_i\}_{i=0}^{\tau-1}$  mit  $\sum_{i=0}^{\tau-1} w_i = 1$  und  $w_i \geq 0$ ,  $i = 0, \dots, \tau - 1$ .
2. Es sei  $f'(\tilde{y}) < 1$ . Dann existiert ein  $\tau_0(\tilde{y})$ , so daß für alle  $\tau \geq \tau_0(\tilde{y})$  der stationäre Zustand  $y^* = (\tilde{y}, \dots, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^\tau$  des Systems (3.2) mit ungewichtetem Durchschnitt  $\{1/\tau\}_{i=0}^{\tau-1}$ , also

$$y_{t+1} = f\left(\frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\tau-1} y_{t-k}\right), \quad t \geq \tau,$$

lokal stabil ist.

Aus dem Beweis von Lemma 1 folgt sogar, daß  $\tau_0(\tilde{y}) = \{\tau \in \mathbb{N} \mid \tau \geq |f'(\tilde{y})|\}$  gewählt werden kann. Darüber hinaus ist der geometrisch gewichtete Durchschnitt eine stetige Funktion in  $w > 0$ . Betrachtet man das System  $F(z_t; W_\tau)$  für die geometrische Gewichtung  $W_\tau = \left\{ \frac{w^k}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} \right\}_{k=0}^{\tau-1}$ , dann existiert ein  $\epsilon > 0$  derart, daß für alle geometrischen Gewichtungsfaktoren  $w \in (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$  und alle  $\tau \geq \tau_0(\tilde{y})$  der stationäre Zustand  $y^* = (\tilde{y}, \dots, \tilde{y})$  lokal stabil ist.

Wendet man diese Ergebnisse auf das in Abschnitt 2.1 eingeführte Cobweb-Modell an, so läßt sich in bezug auf die Stabilität der stationären Zustände eines Cobweb-Modells mit Prognoseregeln von endlichem Gedächtnis die folgende Aussage treffen:

Ist  $\tilde{p} = D^{-1} \circ S(\tilde{p})$  der Gleichgewichtspreis, dann hängt die lokale Stabilität des stationären Zustandes  $p^* = (\tilde{p}, \dots, \tilde{p}) \in \mathbb{R}^\tau$  einerseits von der Gewichtung  $W_\tau$  der Prognoseregeln und andererseits von der Elastizität des Bildungsgesetzes  $\epsilon_{D^{-1} \circ S}(\tilde{p})$  ab. Hinsichtlich der Elastizität gilt

$$\epsilon_{D^{-1} \circ S}(\tilde{p}) = \frac{S'(\tilde{p})}{D'(\tilde{p})} = \frac{\epsilon_S(\tilde{p})}{\epsilon_D(\tilde{p})},$$

wobei  $\epsilon_D(\tilde{p})$  die Elastizität der Nachfragefunktion und  $\epsilon_S(\tilde{p})$  die Elastizität der Angebotsfunktion beim Preis  $\tilde{p}$  ist.

Um das Lemma von Giona anwenden zu können, muß zunächst die Existenz des Gleichgewichtspreises  $\tilde{p} = D^{-1} \circ S(\tilde{p})$  sichergestellt sein. Unter den Annahmen des Abschnitts 2.1 an die Nachfragefunktion  $D : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  und die Angebotsfunktion  $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  ist nicht klar, ob ein Gleichgewichtspreis existiert, bzw. ob das Bildungsgesetz  $f = D^{-1} \circ S$  einen Fixpunkt besitzt.

Um die Existenz eines Gleichgewichtspreises zu erhalten, werden zusätzliche Bedingungen an  $S$  und  $D$  gestellt. Diese Bedingungen gehen ursprünglich auf Day (1994) zurück.

- (A) Für die Nachfragefunktion  $D$  gelte  $\lim_{p \rightarrow \infty} D(p) = 0$  und  $D(p) > 0$  für alle  $p > 0$ . Die Angebotsfunktion  $S$  habe die Eigenschaften  $S(0) = 0$  und  $S(p) > 0$  für alle  $p > 0$ . Des Weiteren gelte  $\liminf_{p \rightarrow \infty} S(p) > 0$ .
- (B) Für die Nachfragefunktion  $D$  gelte, daß  $\hat{p} > 0$  ein Reservationspreis mit  $D(\hat{p}) = 0$  sei. Des Weiteren sei  $D(0) < \infty$ . Für die Angebotsfunktion  $S$  gelte  $S(0) = 0$  und  $S(p) > 0$  für alle  $p > 0$ .

Setzt man eine der Bedingungen (A) oder (B) voraus, so können mittels des Lemmas von Giona die folgenden Stabilitätseigenschaften der stationären Zustände eines Cobweb-Modells hergeleitet werden:

## Lemma 2

*Angenommen, eine der Bedingungen (A) oder (B) sei erfüllt. Dann existiert mindestens ein Gleichgewichtspreis  $\tilde{p} > 0$  mit der Eigenschaft  $\epsilon_S(\tilde{p})/\epsilon_D(\tilde{p}) \leq 1$ .*

- Falls  $\epsilon_S/\epsilon_D < 1$  ist, dann gibt es ein  $\tilde{\tau}$  so, daß für alle  $\tau \geq \tilde{\tau}$  der stationäre Zustand  $p^* = (\tilde{p}, \dots, \tilde{p})$  des Cobweb-Modells mit ungewichtetem Durchschnitt als Prognoseregel*

$$p_{t+1} = D^{-1} \circ S\left(\frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\tau-1} p_{t-k}\right), \quad t \geq \tau$$

*lokal stabil ist.*

- Falls  $\epsilon_S/\epsilon_D = 1$  ist, dann gilt für alle  $\tau \geq 1$ , daß der stationäre Zustand  $p^* = (\tilde{p}, \dots, \tilde{p})$  nicht-hyperbolisch ist.*

**Beweis:** Aus den Annahmen in Kapitel 2 folgt, daß die Funktion  $D^{-1} \circ S$  auf  $\mathbb{R}_+$  stetig differenzierbar ist. Da  $D$  und  $S$  eine der Bedingungen (A) oder (B)

erfüllen, hat die Funktion  $D^{-1} \circ S$  die Eigenschaften  $\liminf_{p \rightarrow 0} D^{-1} \circ S(p) > 0$  und  $\limsup_{p \rightarrow \infty} D^{-1} \circ S(p) < \infty$ . Aus dem Zwischenwertsatz folgt, daß  $D^{-1} \circ S(p)$  mindestens einen Fixpunkt  $\tilde{p} > 0$  mit der Eigenschaft  $(D^{-1} \circ S)'(\tilde{p}) \leq 1$  besitzt. Ist  $(D^{-1} \circ S)'(\tilde{p}) < 1$ , dann folgt die 1. Behauptung des Lemmas aus dem Lemma von Giona.

Ist  $(D^{-1} \circ S)'(\tilde{p}) = 1$ , dann besitzt die Begleitmatrix (3.4) des Cobweb-Modells am stationären Zustand  $p^* = (\tilde{p}, \dots, \tilde{p})$  für alle  $\tau \geq 1$  einen Eigenwert  $\mu = 1$ . Daraus ergibt sich die 2. Behauptung des Lemmas.  $\square$

Eine Verallgemeinerung der obigen Ergebnisse für  $m$ -dimensionale Modelle vom Cobweb-Typ, also für Systeme der Form

$$y_{t+1} = f\left(\sum_{k=0}^{\tau-1} w_k y_{t-k}\right), \quad t \geq \tau, \quad (3.5)$$

wobei  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  ist, wird von Balasko & Royer Balasko & Royer (1996) angegeben. Sie leiten das folgende Lemma in bezug auf die Stabilitätseigenschaften von stationären Zuständen her:

**Lemma 3** (Balasko und Royer, 1996)

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $\tilde{y}$  sei ein Fixpunkt von  $f$ .

1. Die Jacobi-Matrix  $Df(\tilde{y})$  weise einen Eigenwert  $\lambda_i$  mit  $\operatorname{Re}(\lambda_i) \geq 1$  auf. Dann gilt für jede Gewichtung  $W_\tau = \{w_i\}_{i=0}^{\tau-1}$  mit  $\sum_{i=0}^{\tau-1} w_i = 1$  und  $w_i$  nicht-negativ, daß der stationäre Zustand  $y^* = (\tilde{y}, \dots, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^{\tau \times m}$  des Systems (3.5) instabil ist.
2. Es sei  $W_\tau = \{\frac{1}{\tau}\}_{k=0}^{\tau-1}$ . Ist dann der stationäre Zustand  $y^* = (\tilde{y}, \dots, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^{\tau \times m}$  des Systems

$$y_{t+1} = f\left(\frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\tau-1} y_{t-k}\right), \quad t \geq \tau$$

für ein  $\tau_0 \geq 0$  lokal stabil, so ist er auch für alle  $\tau \geq \tau_0$  lokal stabil.

Die bisherigen Ergebnisse zeigen, daß die stationären Zustände eines Modells vom Cobweb-Typ mit dem ungewichteten Durchschnitt als Prognoseregeln,

im Falle einer negativen Elastizität des Bildungsgesetzes und bei entsprechender Gedächtnislänge der Prognose, lokal stabil sind. Um Aussagen über die lokalen Stabilitätseigenschaften der stationären Zustände eines Modells vom Cobweb-Typ mit dem geometrisch gewichteten Durchschnitt als Prognoseregeln

$$y_{t+1} = f\left(\sum_{k=0}^{\tau-1} \frac{w^k}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} y_{t-k}\right), \quad w > 0, t \geq \tau \quad (3.6)$$

zu gewinnen, wird ein Vergleich der Dynamik dieses Systems zur Dynamik des Modells bei linear adaptiver Prognoseregeln durchgeführt.

### 3.1.2 Vergleich von linear adaptiven Prognoseregeln und Prognosen mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt

In Abschnitt 2.1 wurde gezeigt, daß linear adaptive Prognoseregeln ein Grenzfall der Prognosen mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt sind. Aus diesem Grund stellt sich die Frage, inwiefern die Stabilitätseigenschaften eines Modells vom Cobweb-Typ bei einer linear adaptiven Prognoseregeln mit den Stabilitätseigenschaften bei einer Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt zusammenhängen. Es wird sich zeigen, daß die stationären Zustände eines Modells vom Cobweb-Typ mit linear adaptiver Prognoseregeln genau dann lokal stabil sind, wenn sie bei Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt mit entsprechendem Adaptationsparameter und entsprechender Gedächtnislänge lokal stabil sind.

#### Stabilität bei linear adaptiver Prognoseregeln

Gemäß den Überlegungen aus Abschnitt 2.1 entspricht ein Modell vom Cobweb-Typ mit linear adaptiver Prognoseregeln dem dynamischen System

$$\begin{pmatrix} y_{t+1}^{(0)} \\ y_{t+1}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \alpha)y_t^{(0)} + \alpha y_t^{(1)} \\ f((1 - \alpha)y_t^{(0)} + \alpha y_t^{(1)}) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{N}, \quad (3.7)$$

wobei  $\alpha \in [0, 1]$  der Adaptationsparameter der Prognoseregeln ist. Der Zustandsraum des Systems (3.7) ist eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  und die Zustandsvariablen lauten  $(y_t^{(0)}, y_t^{(1)}) = (y_{t-1,t}^e, y_t)$ . Da  $f$  als stetig vorausgesetzt ist, genügt es zur Analyse der Stabilitätseigenschaften, das Teilsystem mit Zustandsvariable  $z_t = y_t^{(0)}$

$$z_{t+1} = z_t + \alpha(f(z_t) - z_t), \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (3.8)$$

zu betrachten.

Die Stabilitätseigenschaften der stationären Zustände des Modells (3.8) wurden erstmals von Nerlove (1958) untersucht. Er zeigte, daß die Stabilität eines stationären Zustandes im wesentlichen von dem Wert des Adaptationsparameters  $\alpha$  abhängt. Seine Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen.

**Lemma 4** (Nerlove, 1958)

*Betrachtet sei ein Modell vom Cobweb-Typ mit linear adaptiver Prognoseregeln und stetig differenzierbarem Bildungsgesetz  $f : I \rightarrow I$  auf dem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ .*

*Es sei  $\tilde{y}$  ein Fixpunkt von  $f$ .*

1. *Ist die Elastizität  $\epsilon_f(\tilde{y}) = f'(\tilde{y}) < 1$  (bzw.  $\epsilon_f(\tilde{y}) = f'(y) < 1$  für alle  $y \in I$ ), dann existiert ein  $\delta > 0$ , so daß für alle Adaptationsparameter  $\alpha < \delta$  der stationäre Zustand  $y^* = (\tilde{y}, \tilde{y})$  von System (3.7) lokal stabil (bzw. global stabil) ist.*
2. *Ist die Elastizität  $\epsilon_f(\tilde{y}) = f'(\tilde{y}) > 1$ , dann ist der stationäre Zustand  $y^* = (\tilde{y}, \tilde{y})$  für jeden Adaptationsparameter  $\alpha \in (0, 1]$  instabil.*

Das obige Resultat kann noch weiter verallgemeinert werden. Viele rekursive Prognoseregeln lassen sich in Form der zeitabhängigen adaptiven Prognoseregeln

$$y_{t,t+1}^e = y_{t-1,t}^e + \gamma_t(y_t - y_{t-1,t}^e), \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (3.9)$$

darstellen, wobei  $\{\gamma_t\}_{t=1}^{\infty}$  eine vorgegebene Folge von Adaptationswerten ist. Für die Adaptationswerte gelte  $\sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t = \infty$ . Anderenfalls wären die stationären Zustände des Systems nur lokal stabil. Wählt man beispielsweise  $\gamma_t = \frac{1}{t}$ , dann entspricht die Prognoseregeln (3.9) dem ungewichteten Durchschnitt aller vergangenen Beobachtungen  $y_{t,t+1}^e = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t y_{t-i}$ .

Zur Untersuchung der Stabilitätseigenschaften eines Modells vom Cobweb-Typ mit stetig differenzierbarem Bildungsgesetz  $f$  und einer adaptiven Prognoseregeln der Form (3.9) genügt es, das dynamische System

$$z_{t+1}^{(0)} = z_t^{(0)} + \gamma_t(f(z_t^{(0)}) - z_t^{(0)}), \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

zu betrachten. Balasko & Royer (1996) haben die Stabilitätseigenschaften dieses Systems untersucht und erzielten das folgende Resultat:

**Lemma 5** (*Balasko und Royer, 1996*)

Betrachtet sei ein Modell vom Cobweb-Typ mit adaptiver Prognoseregeln  $y_{t,t+1}^e = y_{t-1,t}^e + \gamma_t(y_t - y_{t-1,t}^e)$  und stetig differenzierbarem Bildungsgesetz  $f : I \rightarrow I$  auf dem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ . Es sei  $\tilde{y}$  ein Fixpunkt von  $f$ . Für die Adaptationswerte gelte  $\sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t = \infty$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_t = 0$ .

1. Falls  $\epsilon_f(\tilde{y}) = f'(\tilde{y}) < 1$  ist, dann ist der stationäre Zustand  $y^* = (\tilde{y}, \tilde{y})$  lokal stabil.
2. Falls  $\epsilon_f(\tilde{y}) = f'(\tilde{y}) > 1$  ist, dann ist der stationäre Zustand  $y^* = (\tilde{y}, \tilde{y})$  instabil.

### Vergleich der Stabilitätseigenschaften

Das Modell vom Cobweb-Typ mit geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln (3.6) kann mittels der stetig differenzierbaren Transformation

$$y_{t,t+1}^e = \sum_{k=0}^{\tau-1} \frac{w^k}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} y_{t-k}^e$$

in das topologisch-konjugierte System<sup>4</sup>

$$y_{t,t+1}^e = \sum_{k=0}^{\tau-1} \frac{w^k}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} f(y_{t-k-1,t-k}^e), \quad t \geq \tau \quad (3.10)$$

überführt werden. Das dynamische Verhalten des Systems (3.8) für  $w = (1 - \alpha)$  und  $z_t = y_{t,t+1}^e$  stimmt mit dem dynamischen Verhalten des  $\tau$ -dimensionalen Systems

$$y_{t,t+1}^e = (1 - w) \sum_{k=0}^{\tau-1} w^k f(y_{t-k-1,t-k}^e) + w^\tau y_{t-\tau,t-\tau+1}^e, \quad t \geq \tau \quad (3.11)$$

überein, falls die  $\tau$  Startwerte die Bedingung  $y_{t,t+1}^e = y_{t-1,t}^e + (1 - w)(f(y_{t-1,t}^e) - y_{t-1,t}^e)$  für  $t = 1, \dots, \tau$  erfüllen. Das System (3.11) unterscheidet sich von dem System (3.10) nur durch den Faktor  $1/(1 - w^\tau)$  und durch den Term  $w^\tau y_{t-\tau,t-\tau+1}^e$ . Folgende Verbindungen zwischen den Stabilitätseigenschaften bei linear adaptiver Prognoseregeln und bei Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt können hergeleitet werden.

---

<sup>4</sup>Der Begriff *topologisch-konjugiert* ist in Anhang B definiert.

**Lemma 6**

Gegeben sei ein stetig differenzierbares Cobweb-Bildungsgesetz  $f : I \rightarrow I$  auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  und  $\tilde{y}$  sei ein Fixpunkt von  $f$ . Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

1. Der stationäre Zustand  $y^* = (\tilde{y}, \tilde{y})$  des Systems (3.7) mit linear adaptiver Prognoseregeln ist für den Adaptationsparameter  $\alpha \in (0, 1)$  lokal stabil.
2. Es existiert ein  $\tau_0 \in \mathbb{N}$  derart, daß der stationäre Zustand  $y^* = (\tilde{y}, \dots, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^\tau$  des Modells (3.6) mit geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln für den Gewichtungsfaktor  $w = (1 - \alpha) < 1$  und für alle Gedächtnislängen  $\tau > \tau_0$  lokal stabil ist.

**Beweis:** Zur Untersuchung der lokalen Stabilität des stationären Zustandes des Systems (3.6) bzw. (3.7) werden die entsprechenden Systeme (3.10) bzw. (3.11) betrachtet. Beide Systeme haben den stationären Zustand  $y^* = (\tilde{y}, \dots, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^\tau$ .

Es sei zunächst angenommen, daß der stationäre Zustand  $y^*$  des Systems (3.7) lokal stabil ist. Somit gilt für die Ableitung von  $f$  am Fixpunkt  $\tilde{y}$ :

$$(1 - \alpha) + \alpha f'(\tilde{y}) \in (-1, 1) \quad \text{bzw.} \quad w + (1 - w)f'(\tilde{y}) \in (-1, 1) \quad (3.12)$$

ist. Das dynamische Verhalten des Systems (3.10) entspricht dem dynamischen Verhalten des Systems

$$y_{t,t+1}^e = \frac{1-w}{1-w^\tau} f(y_{t-1,t}^e) + w y_{t-1,t}^e - \frac{w^\tau(1-w)}{1-w^\tau} f(y_{t-\tau-1,t-\tau}^e), \quad t \geq \tau + 1 \quad (3.13)$$

falls die Startwerte die Bedingung  $y_{\tau,\tau+1}^e = \sum_{k=0}^{\tau-1} \frac{w^k}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} f(y_{\tau-k-1,\tau-k}^e)$  erfüllen. Zur Untersuchung der lokalen Stabilität des stationären Zustandes  $y^{**} = (\tilde{y}, \dots, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^{\tau+1}$  wird die Jacobi-Matrix des Systems (3.13) für  $y^{**}$  betrachtet. Der stationäre Zustand ist genau dann lokal stabil, wenn alle Eigenwerte  $\mu_i$  der Jacobi-Matrix im Einheitskreis liegen, also  $|\mu_i| < 1$  gilt. Die Jacobi-Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{1-w}{1-w^\tau} f'(\tilde{y}) + w & 0 & 0 & \dots & \frac{w^\tau(1-w)}{1-w^\tau} f'(\tilde{y}) \end{bmatrix}$$

hat die Form einer Begleitmatrix. Gemäß Balasko & Royer (1996) (Proposition 6) gilt, daß die Eigenwerte dieser Begleitmatrix im Einheitskreis liegen, falls

$$\left| \frac{1-w}{1-w^\tau} f'(\tilde{y}) + w \right| + \left| \frac{w^\tau(1-w)}{1-w^\tau} f'(\tilde{y}) \right| < 1$$

ist. Da  $0 < w < 1$  ist, gilt

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left| \frac{1-w}{1-w^\tau} f'(\tilde{y}) + w \right| + \left| \frac{w^\tau(1-w)}{1-w^\tau} f'(\tilde{y}) \right| = |(1-w)f'(\tilde{y}) + w|.$$

Aufgrund der Eigenschaft (3.12) folgt die Existenz eines  $\tau_0 \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $\tau > \tau_0$  der stationäre Zustand  $y^{**}$  des Systems (3.13) lokal stabil ist. Damit ist auch der stationäre Zustand  $y^*$  des Systems (3.10) für alle  $\tau > \tau_0$  lokal stabil.

Sei umgekehrt angenommen, daß der stationäre Zustand  $y^*$  des Systems (3.10) für ein  $\tau_0 \in \mathbb{N}$  lokal stabil sei. Das System (3.11) kann für  $\tau_0$  als echte Konvexkombination des Systems (3.10) und des  $\tau$ -dimensionalen Systems  $y_{t,t+1}^e = y_{t-\tau,t-\tau+1}^e$  dargestellt werden, denn es ist

$$y_{t,t+1}^e = (1-w^{\tau_0}) \frac{1-w}{1-w^{\tau_0}} \sum_{k=0}^{\tau_0-1} w^k f(y_{t-k-1,t-k}^e) + w^{\tau_0} y_{t-\tau_0,t-\tau_0+1}^e, \quad t \geq \tau_0. \quad (3.14)$$

Da der stationäre Zustand  $y^*$  des Systems (3.10) lokal stabil ist und da das System (3.11) als Konvexkombination (3.14) dargestellt werden kann folgt, daß auch der stationäre Zustand  $y^*$  des Systems (3.11) lokal stabil ist. Hieraus folgt die Behauptung des Lemmas.  $\square$

Stellt man ein Modell vom Cobweb-Typ mit linear adaptiver Prognoseregeln in Form eines (degenerierten)  $\tau + 1$ -dimensionalen Systems dar, so konvergiert bei festem  $w = (1 - \alpha) < 1$  für wachsendes  $\tau$  der Abstand in der  $\mathcal{C}^1$ -Norm zu dem System (3.11) gegen Null. Im folgenden Abschnitt 3.2 wird die Flip-Bifurkationskurve des stationären Zustands eines Modells vom Cobweb-Typ mit geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln analytisch berechnet. Aufgrund der Annäherung in der  $\mathcal{C}^1$ -Norm, werden die Flip-Bifurkationskurven für wachsendes  $\tau$  gegen die Flip-Bifurkationskurve des Modells vom Cobweb-Typ mit linear adaptiver Prognoseregeln punktweise konvergieren.

## 3.2 Bifurkationsanalyse

Die empirisch beobachteten Zeitreihen verschiedener ökonomischer Größen weisen nicht nur ein zyklisches Verhalten auf. Häufig beobachtet man auch ein quasi-

periodisches oder sogar ein irreguläres Verhalten der Zeitreihen. Zwar lassen sich mit linearen Systemen periodische Zeitreihen erzeugen, doch ist das dynamische Verhalten eines linearen Systems für fast alle Parameterkombinationen entweder global stabil oder global divergent. Ein periodisches Verhalten eines linearen Systems für eine offene Teilmenge des Parameterraums ergibt sich nur, wenn exogene periodische Schocks unterstellt werden. Im Gegensatz dazu können nichtlineare dynamische Systeme periodische, quasi-periodische und sogar irreguläre Zeitreihen erzeugen, ohne daß eine wesentliche Einschränkung des Parameterraums oder des Startwertebereichs vorliegen muß.

Darüber hinaus haben nichtlineare Systeme die Eigenschaft, daß eine kleine Änderung von exogenen Parametern zu unterschiedlichen Formen des komplexen dynamischen Verhaltens führen kann. Diese als Bifurkation bezeichnete Eigenschaft machten sich Ökonomen, wie etwa Hicks (1950) oder Goodwin (1951) zunutze, um das Auftreten von persistenten Schwankungen in makroökonomischen Systemen zu erklären. Einige der wichtigsten Bifurkations-Typen und ihre Eigenschaften sind in Anhang B zusammengefaßt. Je nach den nichtlinearen Eigenschaften eines dynamischen ökonomischen Systems kann beispielsweise aufgrund der Änderung eines Parameters eine Flip-Bifurkation und damit ein stabiler Zyklus der Periode 2 auftreten. Bei fortlaufender Veränderung des Parameters kann es zu weiteren Flip-Bifurkationen der Zyklen kommen, wobei schließlich Zyklen beliebig hoher Ordnung auftreten können.

Liegt bei Variation eines Parameters eine Hopf-Bifurkation vor, so kann der Fall eintreten, daß das System einen lokal stabilen stationären Zustand verläßt und gegen einen quasi-periodischen Attraktor konvergiert. Im Falle einer Fold-Bifurkation führt eine Änderung des Parameters zum Auftreten eines lokal stabilen und eines instabilen stationären Zustandes. Nach weiteren Fold-Bifurkationen können dann sogar mehrere lokal stabile stationäre Zustände koexistieren. Kommt es bei einer Änderung von Startwerten oder Parametern zu einer nachhaltigen Veränderung des langfristigen Verhaltens des ökonomischen Systems, dann spricht man von *ökonomischer Hysterisis*. Man sehe hierzu auch den Beitrag von Göcke (1996).

Im folgenden wird das lokale dynamische Verhalten von Modellen vom Cobweb-Typ mit Hilfe der Methoden der Bifurkationsanalyse untersucht. Eine Bifurkationsanalyse geht weit über die gängige komparativ-statische Analyse der stationären Zustände eines ökonomischen Systems hinaus. Die Bifurkationsanalyse gibt nicht nur Aufschluß darüber, inwieweit sich aufgrund einer Variation

von exogenen Parametern bestimmte Komponenten des stationären Zustandes verändern. Man erhält darüber hinaus auch Aussagen über die Veränderung des lokalen dynamischen Verhaltens des Systems. Insbesondere können qualitative Aussagen über das lokale dynamische Verhalten nur aufgrund der Elastizitätseigenschaften des Bildungsgesetzes und der Form der Gewichtung der Prognoseregeln abgeleitet werden.

Die folgenden Untersuchungen befassen sich mit dem lokalen dynamischen Verhalten von Modellen vom Cobweb-Typ unter der Annahme von Prognosen mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt. Eine Bifurkationsanalyse unter der Annahme einer allgemeinen linearen Prognoseregeln mit Gedächtnis der Länge  $\tau$  wäre gleichbedeutend damit, daß die Änderung der Dynamik bei gleichzeitiger Variation von  $\tau$  Parametern untersucht werden müßte. Betrachtet man nur den Fall der Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt, dann genügt es, die Änderung der Dynamik in Abhängigkeit des Gewichtungsfaktors  $w$  bzw. der Gedächtnislänge  $\tau$  und in Abhängigkeit der Elastizität  $\epsilon_f(\tilde{y}) = f'(\tilde{y})$  am stationären Zustand  $y^* = (\tilde{y} \dots, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^\tau$  zu untersuchen. Insbesondere ist in diesem Fall die numerische Berechnung der Bifurkationskurven wesentlich einfacher und es besteht die Möglichkeit die numerischen Ergebnisse in 2- und 3-dimensionalen Diagrammen darzustellen.

### 3.2.1 Eigenwertanalyse für Prognosen mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt

Die Untersuchungen des Abschnitts 3.1 haben gezeigt, daß die Stabilitätseigenschaften der stationären Zustände eines Modells vom Cobweb-Typ mit linearer Prognoseregeln von der Gedächtnislänge und von der Form der Gewichtung abhängt. Ist die Elastizität des Bildungsgesetzes negativ und weist die Prognoseregeln eine genügend große Gedächtnislänge mit einer gleichmäßigen Verteilung der Gewichte auf, dann ist der stationäre Zustand des Systems lokal stabil. Es stellt sich nun die Frage, was passiert wenn die Elastizität des Bildungsgesetzes zu- oder abnimmt oder wenn sich die Gewichtung der Prognoseregeln ändert? Mittels einer Bifurkationsanalyse kann zumindest lokal, in der Umgebung der stationären Zustände, die Änderung des dynamischen Verhaltens bestimmt werden. Für das Modell vom Cobweb-Typ mit geometrisch gewichtetem Durchschnitt als

Prognoseregeln

$$y_{t+1} = f\left(\sum_{k=0}^{\tau-1} \frac{w^k}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} y_{t-k}\right), \quad \forall t \geq \tau$$

wird deshalb zunächst eine Analyse der Eigenwerte am stationären Zustand  $y^* = (\tilde{y}, \dots, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^\tau$  durchgeführt. Hieraus lassen sich dann verschiedene Bifurkationskurven des stationären Zustandes  $y^*$  ableiten.

Im folgenden sei angenommen, daß das Cobweb-Bildungsgesetz  $f(y, \alpha) = f_\alpha(y)$  von dem Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}$  abhängt. Für das Bildungsgesetz  $f: \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$  gelte  $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R} \times I)$ , wobei  $\tilde{y}$  ein Fixpunkt von  $f_\alpha$  für alle  $\alpha \in I$  sei. Zur Vereinfachung der Eigenwertanalyse wird außerdem vorausgesetzt, daß für die Elastizität am Fixpunkt  $\tilde{y}$

$$\epsilon_f(\tilde{y}, \alpha) = f'(\tilde{y}, \alpha) = \alpha, \quad \forall \alpha \in I$$

gilt.

Sei  $y^* = (\tilde{y}, \dots, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^\tau$  der stationäre Zustand des Systems (3.15). Die zugehörige Jacobi-Matrix  $DF(y^*, \{\frac{w^k}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i}\}_{k=0}^{\tau-1})$  lautet:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{\alpha w^{\tau-1}}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} & \frac{\alpha w^{\tau-2}}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} & \frac{\alpha w^{\tau-3}}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} & \dots & \frac{\alpha w^1}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} & \frac{\alpha}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} \end{bmatrix}.$$

Die Matrix hat die Form einer Begleitmatrix und die Eigenwerte  $\{\mu_k\}_{k=1}^\tau$  dieser Matrix sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\chi_{\alpha, w, \tau}(\mu) = \mu^\tau - \frac{\alpha}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} \mu^{\tau-1} - \dots - \frac{\alpha w^{\tau-2}}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} \mu - \frac{\alpha w^{\tau-1}}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i}.$$

Die  $\tau$  Nullstellen des Polynoms hängen stetig von dem Parameter  $w > 0$  ab.

Für  $w = 1$ , also bei ungewichtetem Durchschnitt, ist das System (3.15) symmetrisch in den Zustandsvariablen. Die Eigenwerte haben deshalb für  $\alpha = -\tau$  bzw.  $\alpha = 1$  spezielle Eigenschaften. Bereits in der Arbeit von Böhm & Wenzelburger (1995) wird gezeigt, daß Systeme mit einer solchen symmetrischen Struktur nur Zyklen von bestimmten Ordnungen besitzen. Im Beitrag von Bischì, Gallegati

& Naimzada (1997) wird darüber hinaus für diese Systeme ein Bifurkationsverhalten nachgewiesen, das zum Auftreten von seltsamen Attraktoren führt. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_{\alpha,1,\tau}(\mu) = \mu^\tau - \frac{\alpha}{\tau}\mu^{\tau-1} - \dots - \frac{\alpha}{\tau}\mu - \frac{\alpha}{\tau}$$

haben aufgrund des Theorems von *Eneström–Kakeya*<sup>5</sup> die Eigenschaft:

**Lemma 7** (*Elastizität und Bifurkation*)

Die Eigenwerte  $\{\mu_k\}_{k=1}^\tau$  der Jacobi-Matrix (3.15) mit  $w = 1$ , die den Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $\chi_{\alpha,1,\tau}(\mu)$  entsprechen, haben die Eigenschaft:

1. Ist  $\alpha < -\tau$ , dann liegen alle Eigenwerte außerhalb des Einheitskreises, das heißt es ist  $|\mu_k| \geq 1$  für  $k = 1, \dots, \tau$ .
2. Ist  $\alpha = -\tau$ , dann lauten die Eigenwerte  $\mu_k = e^{\frac{2\pi i}{\tau+1}k}$ ,  $k = 1, \dots, \tau$ . Also liegen alle Eigenwerte auf dem Einheitskreis.
3. Ist  $\alpha \in (-\tau, 1)$ , dann befinden sich alle Eigenwerte innerhalb des Einheitskreises, das heißt es ist  $|\mu_k| < 1$  für  $k = 1, \dots, \tau$ .
4. Ist  $\alpha = 1$ , dann existiert ein einfacher Eigenwert  $\mu_k = 1$ .
5. Ist  $\alpha > 1$ , dann existiert mindestens ein Eigenwert  $\mu_k$  außerhalb des Einheitskreises mit  $\mu_k > 1$ .

**Beweis:**

1. Diese Aussage folgt aus der Umkehrung des Theorems von *Eneström–Kakeya*. Für Polynome der Form  $a_\tau x^\tau + a_{\tau-1} x^{\tau-1} + \dots + a_0$  mit reellen und nicht-negativen Koeffizienten  $a_\tau \leq a_{\tau-1} \leq \dots \leq a_0$  gilt, daß alle Nullstellen  $\bar{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, \tau$  des Polynoms außerhalb des Einheitskreises liegen. Das heißt es ist  $|\bar{x}_i| \geq 1$  für  $i = 1, \dots, \tau$ .

---

<sup>5</sup>Das Theorem von *Eneström–Kakeya* besagt folgendes: Gegeben sei ein Polynom  $a_\tau x^\tau + a_{\tau-1} x^{\tau-1} + \dots + a_0$  mit reellen und nicht-negativen Koeffizienten  $a_\tau > a_{\tau-1} > \dots > a_0$ . Alle Nullstellen  $\bar{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, \tau$  dieses Polynoms liegen im Einheitskreis, das heißt es ist  $|\bar{x}_i| < 1$  für  $i = 1, \dots, \tau$ . Einen Beweis dieses Theorems findet man bei *Ostrowski* (1973).

2. Ist  $\alpha = -\tau$ , dann folgt die Aussage aus der Umformung des Polynoms  $\chi_{-\tau,1,\tau}(\mu)$  nach

$$\chi_{-\tau,1,\tau}(\mu) = \frac{\mu^{\tau+1} - 1}{\mu - 1}.$$

Die Nullstellen lauten somit  $\mu_k = e^{\frac{2\pi i}{\tau+1}k}$ ,  $k = 1, \dots, \tau$ .

3. Ist  $\alpha \in (-\tau, 1)$ , so folgt die Aussage aus dem Lemma 1 von Giona.
4. Ist  $\alpha = 1$ , dann ist  $\mu_k = 1$  eine Nullstelle des Polynoms  $\chi_{1,1,\tau}(1) = 0$ .
5. Ist  $\alpha > 1$ , dann folgt  $\chi_{\alpha,1,\tau}(1) < 0$  und  $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \chi_{\alpha,1,\tau}(\mu) = \infty$ . Somit existiert ein reeller Eigenwert  $\mu_k > 1$ .  $\square$

Im folgenden werden die Bifurkationskurven im  $(w, \alpha)$ -Raum hergeleitet. Dazu werden diejenigen Paare  $(w, \alpha)$  bestimmt, für welche die Jacobi-Matrix mindestens einen Eigenwert  $\mu_k = 1$  (Fold-Bifurkation), bzw. einen Eigenwert  $\mu_k = -1$  (Flip-Bifurkation), bzw. einen nicht-reellen Eigenwert  $|\mu_k| = 1$  (Hopf-Bifurkation) besitzt.

Für  $\tau = 1$  und  $\tau = 2$  ist eine analytische Berechnung der Eigenwerte und damit auch der Bifurkationskurven möglich. Für  $\tau = 3, 4, 5, 6, 7$  werden die Bifurkationskurven numerisch mit Hilfe des interaktiven Computerprogramms zur Bifurkationsanalyse LOCBIF bestimmt.

### 3.2.2 Gedächtnislänge und Bifurkationsverhalten

Das Modell vom Cobweb-Typ mit naiven Erwartungen  $y_{t,t+1}^e = y_t$  entspricht dem System  $y_{t+1} = f_\alpha(y_t)$ . Aufgrund der obigen Annahmen hat das System für  $-1 < \alpha < 1$  den lokal stabilen stationären Zustand  $y^* = \tilde{y}$ . Für  $\alpha = 1$  erfährt das System am stationären Zustand  $y^*$  eine Fold-Bifurkation und für  $\alpha = -1$  eine Flip-Bifurkation.

Die Bifurkationskurven des Systems (3.15) mit Gedächtnis der Länge  $\tau = 2$

$$y_{t+1} = f_\alpha\left(\frac{1}{1+w}y_t + \frac{w}{1+w}y_{t-1}\right), \quad t \geq 2$$

lassen sich anhand der Nullstellen  $\mu_{1,2}$  des charakteristischen Polynoms

$$\chi_{\alpha,w,2}(\mu) = \mu^2 - \mu \frac{\alpha}{1+w} - \frac{\alpha w}{1+w}$$

bestimmen. Für Polynome der Ordnung 2 können die Nullstellen explizit berechnet werden:

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{1+w} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{1+w}\right)^2 + 4\frac{\alpha w}{1+w}} \right).$$

Daraus ergeben sich die Bifurkationskurven:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 & : \alpha = 1, w > 0 && \text{Fold-Bifurkationskurve} \\ \mathcal{B}_2 & : \alpha = -\frac{1+w}{1-w}, w \geq 0 && \text{Flip-Bifurkationskurve} \\ \mathcal{B}_3 & : \alpha = -\frac{1+w}{w}, w \geq \frac{1}{2} && \text{Hopf-Bifurkationskurve} \end{aligned}$$

Die Abbildung 3.1 zeigt für  $\tau = 2$  einen Teilabschnitt der Flip-Bifurkationskurve  $\mathcal{B}_2$  und der Hopf-Bifurkationskurve  $\mathcal{B}_3$ , wobei  $-6 \leq \alpha \leq 0$  und  $0 \leq w \leq 2$  ist.

Die Parameterkombination  $w = 1$  und  $\alpha = -2$  ist von besonderem Interesse. Das System erfährt bei dieser Parameterkombination eine starke 1:3 Resonanz. Das bedeutet, daß das System für ein  $\delta > 0$  und für alle  $\alpha \in (-2 - \delta, -2)$  einen Sattel-Zyklus der Periode 3 aufweist. Des Weiteren treten generisch für Parameterwerte  $\alpha \in (-2 - \delta, -2)$  homokline Zyklen auf. Es existieren also Parameterwerte  $\alpha < -2$  für die sich das System chaotisch verhält.<sup>6</sup>

Die Bifurkationskurven des Systems (3.15) für eine Gedächtnislänge  $\tau > 2$  lassen sich nur zum Teil anhand des charakteristischen Polynoms  $\chi_{\alpha,w,\tau}(\mu)$  ableiten. Nach Lemma 7 hat die Jacobi-Matrix (3.15) für  $\tau \in \mathbb{N}$ ,  $w = 1$  und  $\alpha = -\tau$  nur im Falle eines ungeraden  $\tau$  einen einfachen Eigenwert  $\mu_k = -1$ . Für das System (3.15) existiert am stationären Zustand nur bei ungeradem  $\tau$  eine Flip-Bifurkationskurve, die durch den Punkt  $w = 1$  und  $\alpha = -\tau$  geht. Bei geradem  $\tau$  bzw. bei ungeradem  $\tau$  hängt die Flip-Bifurkationskurve in folgender Weise von  $w$  und  $\alpha$  ab:

**Lemma 8** (*Gedächtnislänge und Flip-Bifurkation*)

Die Flip-Bifurkationskurve des Systems (3.15) ist

$$\begin{aligned} \alpha & = -\frac{1+w}{1-w}, w \in (0, 1) && \text{für } \tau \text{ ungerade,} \\ \alpha & = -\frac{(1+w)(1-w^\tau)}{(1-w)(1+w^\tau)}, w > 0 && \text{für } \tau \text{ gerade.} \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Eine ausführlichere Beschreibung der Dynamik von Systemen, die eine starke 1:3 Resonanz erfahren, findet man in Kuznetsov (1995) (Seite 381ff).

**Beweis:** Die Flip-Bifurkationskurve ergibt sich aus denjenigen Paaren  $(w, \alpha)$ , für die das Polynom  $\chi_{\alpha, w, \tau}(\mu) = \mu^\tau - \frac{\alpha}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} \mu^{\tau-1} - \dots - \frac{\alpha w^{\tau-2}}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} \mu - \frac{\alpha w^{\tau-1}}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i}$  die Nullstelle  $\mu^* = -1$  besitzt. Die Behauptung des Lemmas folgt durch Einsetzen des Terms  $\alpha = -\frac{1+w}{1-w}$  für  $w \in (0, 1)$  bei ungeradem  $\tau$ , bzw. durch Einsetzen des Terms  $\alpha = -\frac{(1+w)(1-w^\tau)}{(1-w)(1+w^\tau)}$  für  $w > 0$  bei geradem  $\tau$  in die Gleichung

$$\chi_{\alpha, w, \tau}(\mu^*) = (-1)^\tau - \frac{\alpha}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} (-1)^{\tau-1} - \dots - \frac{\alpha w^{\tau-2}}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} (-1) - \frac{\alpha w^{\tau-1}}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} = 0.$$

□

Weitere Bifurkationskurven des stationären Zustandes werden für die Gedächtnislänge  $\tau = 3, \dots, 7$  numerisch mit Hilfe des interaktiven Computerprogramms zur Bifurkationsanalyse LOCBIF berechnet. Eine Beschreibung des Softwarepakets LOCBIF durchgeführt werden können, findet man in dem Handbuch von Khibnik, Kuznetsov, Levitin & Nikolaev (1990). Die Diagramme der Abbildung 3.1 zeigen Abschnitte der Flip- und Hopf-Bifurkationskurven für  $\tau = 2, \dots, 7$ , wobei  $0 \leq w \leq 2$  und  $0 \geq \alpha \geq -\tau$  gewählt wurde. Da das Computerprogramm LOCBIF nur bestimmte Bifurkationskurven bzw. bestimmte Abschnitte dieser Kurven berechnen kann, ist die Darstellung der Kurven nicht vollständig. Jedoch lassen sich aufgrund der berechneten Bifurkationskurven die folgenden Aussagen treffen:

*Stabilitätseigenschaften:*

Für jedes  $\tau \in \mathbb{N}$  schneiden sich die Hopf-Bifurkationskurven in  $(w, \alpha) = (1, -\tau)$ . Ist  $\tau$  ungerade, dann geht zum einen die Flip-Bifurkationskurve durch den Punkt  $(w, \alpha) = (1, -\tau)$  und zum anderen nimmt die Randkurve des Stabilitätsbereichs von  $(w, \alpha)$  als kleinsten Wert für  $\alpha$  den Wert  $\alpha = -\tau$  bei  $w = 1$  an. Ist  $\tau$  gerade, dann existieren Parameterkombinationen  $(w, \alpha)$  mit  $\alpha < -\tau$  und  $w \in (1 - \epsilon, 1)$ , für die der stationäre Zustand noch lokal stabil ist.

Aus Lemma 8 folgt, daß für jedes  $w \in (0, 1)$  die Flip-Bifurkationskurve des Cobweb-Modells mit geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln gegen die Flip-Bifurkationskurve des Modells vom Cobweb-Typ mit linear adaptiver Prognoseregeln und Adaptationsparameter  $\alpha = (1 - w)$  konvergiert. Das

bedeutet, daß für  $w < 1$  der stationäre Zustand des Cobweb-Modells, unabhängig von der Gedächtnislänge, bei entsprechend kleinem  $\alpha$  instabil ist.

Aufgrund der in Abbildung 3.1 dargestellten Hopf-Bifurkationskurven zeigt sich numerisch, daß auch für  $w > 1$  der stationäre Zustand des Cobweb-Modells, unabhängig von der Gedächtnislänge  $\tau$ , bei entsprechend kleinem  $\alpha$  instabil ist.

*Bifurkationseigenschaften:*

Nach Lemma 7 gilt, daß bei  $w = 1$  für  $\alpha = -\tau$  alle  $\tau$  Eigenwerte des Cobweb-Modells am stationären Zustand auf dem Einheitskreis liegen. Damit kann im Rahmen der Bifurkationsanalyse der Satz über Zentrumsmannigfaltigkeiten nicht angewendet werden. Das Cobweb-Modell erfährt daher bei  $w = 1$  für  $\alpha = -\tau$  eine degenerierte Flip- bzw. Hopf-Bifurkation.

Ist  $w < 1$  und  $\tau$  ungerade, so erfährt das Cobweb-Modell am stationären Zustand bei Variation von  $\alpha$  eine Flip-Bifurkation. Ist  $w < 1$  und  $\tau$  gerade, so erfährt das Cobweb-Modell am stationären Zustand bei Variation von  $\alpha$  eine Hopf-Bifurkation, falls  $w$  nahe bei 1 liegt. Ist  $w$  nahe bei 0, dann erfährt das Cobweb-Modell eine Flip-Bifurkation.

Ist  $w > 1$ , so erfährt das Cobweb-Modell am stationären Zustand bei Variation von  $\alpha$  eine Hopf-Bifurkation.

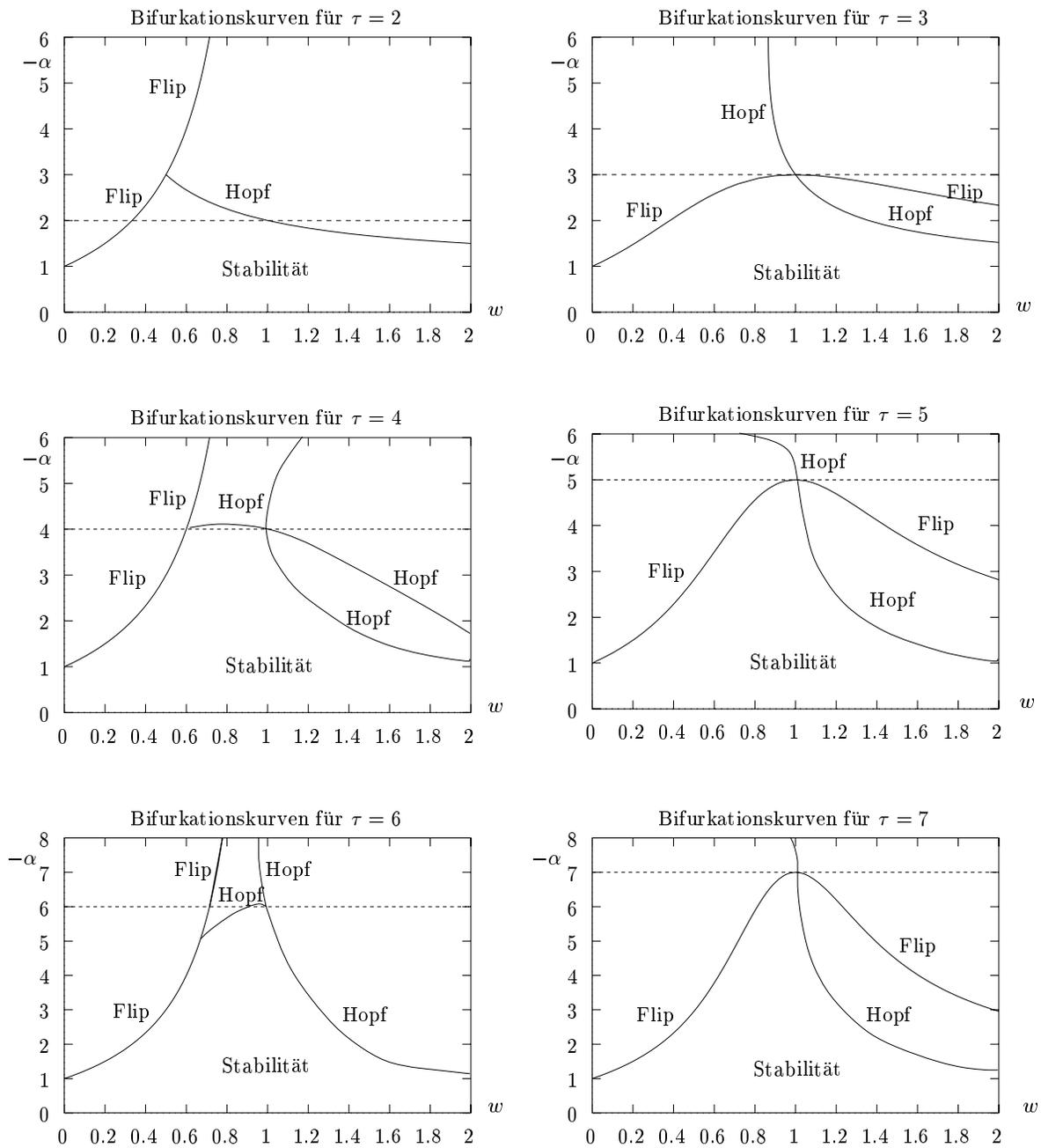


Abbildung 3.1: Verschiedene Hopf- und Flip-Bifurkationskurven in  $-\alpha$  und  $w$  für  $\tau = 2, \dots, 7$ .

### 3.3 Lyapunov Exponenten Analyse

Die Ergebnisse der Abschnitte 3.1 und 3.2 haben gezeigt, daß das lokale dynamische Verhalten eines Modells vom Cobweb-Typ in der Umgebung der stationären Zuständen vor allem von der Form der Prognoseregeln beeinflusst wird. Insbesondere bei geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln konnte nachgewiesen werden, daß die Stabilitäts- und Bifurkationseigenschaften der Modelle vom Cobweb-Typ durch die Elastizität des Bildungsgesetzes sowie durch die Gedächtnislänge  $\tau$  und den Gewichtungsfaktor  $w$  bestimmt werden. Die bisher durchgeführte Analyse der Dynamik orientierte sich an den topologischen Eigenschaften der von den Systemen erzeugten Trajektorien. Ein wesentlich anderer Ansatz zur Untersuchung der Dynamik eines Systems besteht darin, die statistischen Eigenschaften von Trajektorien zu betrachten, wobei Methoden der Ergodentheorie zur Analyse des asymptotischen Verhaltens verwendet werden.<sup>7</sup>

Nichtlineare dynamische Systeme weisen häufig komplexe Formen des asymptotischen Verhaltens auf. Zum Beispiel kann bei nichtlinearen dynamischen Systemen eine sensitive Abhängigkeit von den Startwerten vorliegen.<sup>8</sup> Darüberhinaus besitzen dynamische Systeme auch bestimmte ergodische Eigenschaften. In Verbindung mit der Differenzierbarkeit des Systems können dann invariante Größen des dynamischen Verhaltens, wie etwa Lyapunov Exponenten, definiert werden. Der maximale Lyapunov Exponent entspricht asymptotisch dem durchschnittlichen exponentiellen Streckungsfaktor (oder Stauchungsfaktor) um den sich zwei Trajektorien mit eng benachbarten Startwerten voneinander entfernen (oder annähern). Durch die Bestimmung der Lyapunov Exponenten lassen sich also verschiedene Eigenschaften einer sensitiven Abhängigkeit von den Startwerten genauer charakterisieren. Treten im Rahmen einer Vorausberechnung der zukünftigen Entwicklung von Trajektorien eines dynamischen Systems Meßfehler auf, dann hängt das Anwachsen dieser Meßfehler ebenfalls von der Größenordnung der maximalen Lyapunov Exponenten ab. Hieraus folgt im Falle eines positiven maximalen Lyapunov Exponenten, daß eine langfristige Vorhersage der zukünftigen Entwicklung des Systems nicht möglich ist.

Im folgenden wird eine formale Definition für Lyapunov Exponenten gegeben

---

<sup>7</sup>Diese statistischen Eigenschaften von Trajektorien werden auch als *Rekurrenzeigenschaften* bezeichnet.

<sup>8</sup>Eine formale Definition des Begriffs der sensitiven Abhängigkeit von den Startwerten findet man in Anhang B.

und es wird erläutert, inwiefern Eigenschaften der maximalen Lyapunov Exponenten und Eigenschaften des asymptotischen Verhaltens des Systems zusammenhängen. Hieraus ergeben sich insbesondere Konsequenzen in bezug auf die Erstellung von Vorhersagen der zukünftigen Entwicklung des Systems. Des Weiteren werden die Lyapunov Exponenten von Modellen vom Cobweb-Typ mit geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln einer qualitativen Analyse unterzogen. Dabei wird vor allem der Zusammenhang zwischen der Größenordnung der maximalen Lyapunov Exponenten und der Gedächtnislänge bzw. dem Gewichtungsfaktor der Prognoseregeln untersucht. Da Lyapunov Exponenten in gewisser Weise eine Verallgemeinerung der Eigenwerte eines Systems darstellen, können die Abschätzungen der Eigenwerte aus der obigen Bifurkationsanalyse entsprechend auf Lyapunov Exponenten erweitert werden.

### 3.3.1 Definition und Eigenschaften

Die folgende Definition und Zusammenfassung der Eigenschaften von Lyapunov Exponenten ist aus Eckmann & Ruelle (1985), Hasselblatt & Katok (1995) und Katok & Strelcyn (1986). Der Zusammenhang zwischen dem maximalen Lyapunov Exponenten und der kurzfristigen Vorhersagbarkeit eines dynamischen Systems ist der Arbeit von Casdagli (1989) entnommen.

#### Ergodische Maße und invariante Mengen

Betrachtet sei das dynamische System

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad x_t \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{N}$$

mit einer stetig differenzierbaren Abbildung  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Um die dynamischen Eigenschaften der Trajektorien aufgrund ihrer statistischen Eigenschaften beschreiben zu können, werden die folgenden Definitionen getroffen:

Ein Maß  $\rho$  auf der Borelschen  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$  wird als *f-invariant* bezeichnet, falls  $\rho(f^{-1}(A)) = \rho(A)$  für alle  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$  gilt. Man nennt die Abbildung  $f$  auch *maßerhaltend* bezüglich des Maßes  $\rho$ .

Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^m$  heißt *f-invariant*, falls  $f(A) = A$  ist. Ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\rho$  wird als *ergodisch* bezüglich  $f$  bezeichnet, falls für jede  $f$ -invariante Menge  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$  entweder  $\rho(A) = 0$  oder  $\rho(X - A) = 0$  gilt. Das einfachste Beispiel eines ergodischen Maßes ist das Dirac-Maß  $\delta_{\bar{x}} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \rightarrow$

$\{0, 1\}$ , wobei  $\tilde{x}$  ein Fixpunkt von  $f$  ist. Ergodische Maße beschreiben das dynamische Verhalten einer Trajektorie  $\{f(x_1)^i\}_{i=0}^{\infty}$  mittels der Rekurrenzeigenschaften der Trajektorie. Ist  $\text{supp}(\rho)$  der Träger von  $\rho$  mit  $x_0 \in \text{supp}(\rho)$  und ist  $A$  eine beliebige meßbare Teilmenge von  $\text{supp}(\rho)$ , dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \delta_A(f^i(x_1)) = \rho(A),$$

wobei  $\delta_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \{0, 1\}$  die Indikatorfunktion für Mengen ist.

### Maximale Lyapunov Exponenten

Die Jacobi-Matrix  $Df(x)$  der stetig differenzierbaren Abbildung  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  wird durch die partiellen Ableitungen von  $f$  definiert. Die Jacobi-Matrix entspricht also der Matrix  $Df(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \{\partial f^{(i)} / \partial x^{(j)}\}_{i,j=1}^m$ . Aufgrund der Kettenregel gilt für die Jacobi-Matrix der  $t$ -ten Iteration  $f^t$  von  $f$ :

$$Df^t(x) = \{\partial (f^t)^{(i)} / \partial x^{(j)}\}_{i,j=1}^m = Df(f^{t-1}(x)) \cdots Df(f(x)) Df(x).$$

Die folgende Version des Multiplikativen Ergoden Theorems ist dem Buch von Katok & Strelcyn (1986) entnommen.

#### Theorem 1 (Multiplikatives Ergoden Theorem von Oseledets)

Gegeben sei eine differenzierbare Abbildung  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  und ein endliches  $f$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\rho$  auf  $\mathbb{R}^m$ . Des Weiteren sei  $\rho$  ergodisch und es gelte:

$$\int \ln^+ \|Df(x)\| \rho(dx) < \infty,$$

mit  $\ln^+ v := \max(0, \ln v)$ .

Dann gibt es eine  $f$ -invariante Menge  $\Gamma$  mit  $\rho(\Gamma) = 1$ , so daß für fast alle  $x \in \Gamma$  und  $u \in \mathbb{R}^m$  der Grenzwert

$$\lambda_\rho(x, u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |Df^t(x)u| \quad (3.15)$$

existiert. Dabei ist  $\lambda_\rho(x, u) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  und es existiert ein  $(m-1)$ -dimensionaler Teilraum  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ , so daß für fast alle  $x \in \Gamma$  und für alle  $u \in \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{U}$  der Grenzwert konstant ist und als  $\lambda_\rho^m := \lambda_\rho(x, u)$  definiert werden kann. Man nennt  $\lambda_\rho^m$  den maximalen Lyapunov Exponenten bezüglich des ergodischen Maßes  $\rho$ .

Gemäß einer allgemeineren Version des Theorems von Oseledets existiert zu jedem ergodischen Maß  $\rho$  sogar ein ganzes Spektrum von Lyapunov Exponenten  $\lambda_\rho^1 \geq \lambda_\rho^2 \geq \dots \geq \lambda_\rho^m$ . Im Rahmen der folgenden Untersuchungen ist es ausreichend, nur den maximalen Lyapunov Exponenten zu betrachten. Numerisch erhält man den maximalen Lyapunov Exponenten  $\lambda_\rho^m$  durch explizite Berechnung der vom Startwert  $\hat{x} \in \mathbb{R}^m$  abhängigen Terme

$$\lambda(\hat{x}, u, t) = \frac{1}{t} \ln |Df^t(\hat{x})u|,$$

mit beliebigem  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $u \neq 0$ . Da ein dynamisches System meistens mehrere ergodische Maße aufweist, konvergiert die Trajektorie  $f^t(\hat{x})$  nur gegen den Träger eines bestimmten Maßes  $\rho$ . Der zu diesem  $\rho$  gehörende maximale Lyapunov Exponent  $\lambda_\rho^m$  wird dann durch den Term  $\lambda(\hat{x}, u, t)$  bei großem  $t$  approximiert. In Abschnitt 4 und 5 werden mit dieser Methode für verschiedene Systeme näherungsweise die maximalen Lyapunov Exponenten berechnet.

Die Aussage des Theorems von Oseledets, insbesondere die Gleichung (3.15), kann folgendermaßen interpretiert werden: Der maximale Lyapunov Exponent entspricht asymptotisch dem durchschnittlichen exponentiellen Streckungsfaktor (oder Stauchungsfaktor), mit dem sich zwei Trajektorien mit eng benachbarten Startwerten voneinander entfernen (oder einander annähern). Ist  $x_1 \in \Gamma_\rho$  und liegt eine kleine Abweichung  $\delta x_1 = |x'_1 - x_1|$  der Startwerte vor, so ist zum Zeitpunkt  $t$  der Unterschied zwischen der Trajektorie mit Startwert  $x_1$  und der Trajektorie mit Startwert  $x'_1$  in etwa

$$\begin{aligned} \frac{\delta x_t}{e^{(t-1)\lambda_\rho^m}} &= \frac{|x'_t - x_t|}{e^{(t-1)\lambda_\rho^m}} \\ &\approx \frac{|Df^{t-1}(x_1) \delta x_1|}{e^{(t-1)\lambda_\rho^m}} \\ &\approx 1. \end{aligned}$$

Sensitive Abhängigkeit von den Startwerten liegt dann vor, wenn  $\lambda_\rho^m > 0$  ist. Aus  $\lambda_\rho^m < 0$  folgt hingegen, daß sich das System in einem lokal stabilen stationären oder periodischen Zustand befindet. Die Klassifizierung des dynamischen Verhaltens auf dem Träger von  $\rho$  wird entsprechend dem Vorzeichen von  $\lambda_\rho^m$  in Tabelle 3.1 wiedergegeben. Das quasi-periodische Verhalten eines dynamischen Systems mit  $\lambda_\rho^m = 0$  ist im generischen Sinne zu verstehen.

Im Falle eines positiven maximalen Lyapunov Exponenten wachsen kleine Meßfehler in den Startwerten exponentiell an, so daß Vorhersagen über einen

bestimmten Zeitpunkt hinaus nicht mehr im Rahmen einer vorgegebenen Genauigkeit möglich sind. Die Arbeiten von Abarbanel (1996), Bailey, Ellner & Nychka (1991) und Casdagli (1989) untersuchen die Frage, inwieweit die kurzfristige Vorhersagbarkeit eines dynamischen Systems vom maximalen Lyapunov Exponenten abhängt. So interpretiert beispielsweise Casdagli (1989) den maximalen Lyapunov Exponenten selbst als zeitlichen Maßstab für die Vorhersagbarkeit eines dynamischen Systems, denn aufgrund des Exponenten kann asymptotisch die durchschnittliche Anzahl zukünftiger Zeitpunkte berechnet werden, für die eine verlässliche Vorhersage von Trajektorien, im Rahmen einer vorgegebenen Meßgenauigkeit, noch möglich ist. Ein Anwachsen des maximalen Lyapunov Exponenten hat eine Reduzierung des durchschnittlichen Vorhersagehorizonts zur Folge.<sup>9</sup> Maximale Lyapunov Exponenten stellen nur eine sehr grobe Abschätzung für die Vorhersagbarkeit eines dynamischen Systems dar. Ein etwas verfeinertes Konzept sind die von Bailey, Ellner & Nychka (1991) eingeführten *lokalen Lyapunov*

---

<sup>9</sup>Im Rahmen der Vorhersage von Zeitreihen, die von einem nichtlinearen dynamischen System  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  erzeugt werden, spielen maximale Lyapunov Exponenten ebenso eine wichtige Rolle. Ist das zugrundeliegende dynamische System nicht bekannt, so kann die zukünftige Entwicklung einer Zeitreihe, der eine Trajektorie zugrundeliegt, mittels eines nicht-parametrischen Prognoseverfahrens vorhergesagt werden. Einige der bekanntesten nicht-parametrischen Prognoseverfahren sind in Casdagli (1989) zusammengefaßt. Die meisten dieser Verfahren basieren auf einem *nearest-neighbor* Ansatz. Das bedeutet, daß das zugrundeliegende System  $f$  auf der Grundlage der beobachteten Zeitreihe  $x_1, \dots, x_T$  durch Polynome oder Radial-Basis Funktionen  $\phi(z)$  interpoliert wird. Die Prognosefunktion  $\bar{f}(x)$  ist dabei definiert als

$$\bar{f}(x) := \sum_{r=1}^{T-1} \mu_r \phi(x - x_r),$$

wobei sich die Koeffizienten  $\mu_r$  aus der Interpolationsbedingung

$$\bar{f}(x_r) = x_{r+1}, \quad r = 1, \dots, T-1$$

ergeben. Die Vorhersage für die  $n$  nächsten Perioden lautet dann  $\bar{f}(x_T), \dots, \bar{f}^n(x_T)$ . Gehört das zugrundeliegende dynamische System  $f$  zu einer Familie von Systemen (siehe auch Abschnitt 3.3.2), für die der maximale Lyapunov Exponent nach oben durch  $\bar{\lambda}^{\max}$  abgeschätzt werden kann, und ist  $\sigma(\bar{f}) = \sup_z |\bar{f}(z) - f(z)|$  der Interpolationsfehler, so ist der mittlere Fehler der  $n$ -Perioden Vorhersage

$$|\bar{f}^n(x_T) - f^n(x_T)| \leq \sigma(\bar{f}) e^{n\bar{\lambda}^{\max}}.$$

Weitaus genauere Abschätzungen werden von Abarbanel (1996) und Casdagli (1989) angegeben.

Max. Lyapunov Exponent	Generische Dynamik
$\lambda_\rho^m < 0$	stabiler Fixpunkt bzw. Zyklus
$\lambda_\rho^m = 0$	quasi-periodische Kurve bzw. m-Torus
$\lambda_\rho^m > 0$	sensitive Abhängigkeit von Startwerten

Tabelle 3.1: Max. Lyapunov Exponent  $\lambda_\rho^m$  und generisches dynamisches Verhalten auf dem Träger von  $\rho$ .

### Exponenten.

Im übrigen gilt, daß eine parametrisierte Familie von Systemen  $f(x, \alpha) = f_\alpha(x)$ , mit Parameter  $\alpha \in I$ , für den Parameterwert  $\alpha_0$  eine Bifurkation erfährt, falls das System  $f_{\alpha_0}$  einen maximalen Lyapunov Exponenten  $\lambda_\rho^m = 0$  aufweist. Im Rahmen der numerischen Bifurkationsanalyse sind daher die Parameterwerte, für die bei großem  $t$  der Term  $\lambda(\hat{x}, u, t; \alpha_0) \approx 0$  ist, von besonderem Interesse.<sup>10</sup>

### Allgemeine Schranken für Lyapunov Exponenten

Ein maximaler Lyapunov Exponent  $\lambda_\rho^m$  ist in Abhängigkeit eines ergodischen Maßes  $\rho$  definiert. Da ergodische Maße meistens schwierig zu bestimmen sind, werden im Rahmen analytischer und numerischer Untersuchungen vor allem die oberen Schranken

$$\lambda^s := \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \lambda_x^s, \quad \lambda_x^s := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|Df^t(x)\|. \quad (3.16)$$

betrachtet, wobei  $\|\cdot\|$  eine Matrixnorm auf dem Raum der  $m \times m$ -Matrizen ist. Die beiden oberen Schranken  $\lambda_x^s$  und  $\lambda^s$  sind unabhängig von  $\rho$ .

Um den Zusammenhang zwischen den maximalen Lyapunov Exponenten  $\lambda_\rho^m$  und der oberen Schranke  $\lambda^s$  erklären zu können, muß man die Menge aller rele-

---

<sup>10</sup>An diesen Parameterwerten  $\alpha_0$  ist numerische Evidenz für eine Bifurkation gegeben. Liegt für  $\alpha_0$  ein lokal eindeutiges Maximum vor, wobei  $\lambda(\hat{x}, u, t; \alpha_0) \approx 0$  ist und  $\lambda(\hat{x}, u, t; \alpha) < 0$  ist, für  $\alpha \in (\alpha_0 - \epsilon, \alpha_0)$  bzw.  $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_0 + \epsilon)$ , dann ergibt sich daraus ein numerischer Hinweis auf eine Fold- oder Flip-Bifurkation. Liegt für  $\alpha_0$  kein lokal eindeutiges Maximum vor, gilt aber  $\lambda(\hat{x}, u, t; \alpha_0) < 0$  für  $\alpha \in (\alpha_0 - \epsilon, \alpha_0)$  und  $\lambda(\hat{x}, u, t; \alpha_0) \approx 0$  für  $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_0 + \epsilon)$ , so ist das ein numerischer Hinweis auf eine superkritische Hopf-Bifurkation. Weitere Anmerkungen zum Zusammenhang von Bifurkationsanalyse und Lyapunov Exponenten Analyse findet man in den Arbeiten von Alexander, Kan, Yorke & You (1992) und Aston & Dellnitz (1995).

vanten Maße betrachten:

$$\mathcal{M} := \{ \rho \mid \rho \text{ ergodisch mit } \int \ln^+ \|Df(x)\| \rho(dx) < \infty \}.$$

Ist  $f : I^m \rightarrow I^m$  stetig differenzierbar und ist  $I \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall, dann ist  $\mathcal{M} \neq \emptyset$  und man erhält die Ungleichung

$$\sup_{\rho \in \mathcal{M}} \lambda_\rho^m \leq \lambda^s \leq \ln(\sup_{y \in M} \|Df(y)\|).$$

Weitere Einzelheiten werden im Buch von Hasselblatt & Katok (1995) (Seite 136–142) erläutert. Insbesondere basiert die Aussage  $\mathcal{M} \neq \emptyset$  auf dem Theorem von Krylov–Bogolubov.

### 3.3.2 Von der Gedächtnislänge abhängige obere Schranke

In Abschnitt 3.1 und 3.2 wurden die Stabilitäts- und Bifurkationseigenschaften von Modellen vom Cobweb-Typ mit geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln auf der Basis der Eigenschaften von Eigenwerten der entsprechenden Jacobi-Matrizen hergeleitet. Die Frage, inwieweit Veränderungen der Gedächtnislänge oder des Gewichtungsfaktors der Prognoseregeln die maximalen Lyapunov Exponenten dieser Systeme beeinflussen, kann allerdings nicht mit derartigen Methoden beantwortet werden. Zwar kann der maximale Lyapunov Exponent  $\lambda_\rho^m$ , gemäß der Tabelle 3.1, als eine Verallgemeinerung des Spektralradius interpretiert werden. Da aber  $\lambda_\rho^m$  bezüglich des ergodischen Maßes  $\rho$  definiert ist, lassen sich die Eigenschaften von  $\lambda_\rho^m$  nicht unmittelbar aus algebraischen Umformungen ableiten. Die obere Schranke  $\lambda^s$  ist dagegen unabhängig von einem ergodischen Maß definiert. Damit können die Eigenschaften von  $\lambda^s$  ebenfalls anhand der Eigenschaften der Jacobi-Matrizen bestimmt werden.

Betrachtet man Modelle vom Cobweb-Typ mit ungewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln für Bildungsgesetze auf einem kompakten Intervall  $I$ , dann existieren die oberen Schranken (3.16) für jedes  $\tau$ . Da diese Schranken insbesondere von der Gedächtnislänge  $\tau$  abhängen, werden sie im weiteren mit  $\lambda_x^s(\tau)$  bzw.  $\lambda^s(\tau)$  bezeichnet. Die folgenden Überlegungen werden zeigen, daß die Folge der oberen Schranken  $\{\lambda^s(\tau)\}_{\tau=1}^\infty$  asymptotisch gegen Null konvergiert

$$\limsup_{\tau \rightarrow \infty} \lambda^s(\tau) = 0.$$

Modelle vom Cobweb-Typ mit ungewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln weisen also eine umso geringere sensitive Abhängigkeit von den Startwerten auf, desto länger das Gedächtnis der Prognoseregeln ist.

### Prognose mittels ungewichtetem Durchschnitt

Gegeben sei ein stetig differenzierbares Cobweb-Bildungsgesetz  $y_{t+1} = f(y_{t,t+1}^e)$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , wobei  $f : I \rightarrow I$  auf dem kompakten Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  definiert ist. Des Weiteren sei die Prognoseregeln der ungewichtete Durchschnitt

$$y_{t,t+1}^e = \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\tau-1} y_{t-k} \quad t \geq \tau$$

der  $\tau \in \mathbb{N}$  vergangenen Beobachtungen  $y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-\tau+1}$ . Damit ergibt sich die stetig differenzierbare Differenzgleichung:

$$y_{t+1} = f\left(\frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\tau-1} y_{t-k}\right), \quad t \geq \tau. \quad (3.17)$$

Betrachtet man die Lyapunov Exponenten dieser Systeme für wachsendes  $\tau$ , dann gilt:

**Proposition 1** (Von der Gedächtnislänge abhängige obere Schranke)

Die Abbildung  $f$  sei stetig differenzierbar auf dem kompakten Intervall  $I$ . Die Folge der oberen Schranken  $\{\lambda^s(\tau)\}_{\tau=1}^{\infty}$  der Systeme (3.17) hat den Limes Superior:

$$\limsup_{\tau \rightarrow \infty} \lambda^s(\tau) \leq 0.$$

**Beweis:** Es sei  $\tilde{f}(y) := f\left(\frac{1}{\tau} y\right)$ . Dann entsprechen die Systeme (3.17) den Systemen

$$y_{t+1} = \tilde{f}\left(\sum_{k=0}^{\tau-1} y_{t-k}\right), \quad t \geq \tau. \quad (3.18)$$

Die Ableitung von  $f$  ist durch eine Konstante  $K \geq \max_{y \in I} f'(y)$  beschränkt. Somit gilt für die Ableitung von  $\tilde{f}$ :

$$\max_{y \in I} |\tilde{f}'(y)| \leq \frac{K}{\tau},$$

wobei **o.B.d.A.**  $K > 1$  angenommen werden kann.

Die Differenzgleichungen (3.18) können gemäß Gleichung (2.13) auch als Systeme

$$\begin{pmatrix} z_{t+1}^{(0)} \\ \vdots \\ z_{t+1}^{(\tau-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_t^{(1)} \\ \vdots \\ \tilde{f}(\sum_{k=0}^{\tau-1} z_t^{(\tau-1-k)}) \end{pmatrix} = \tilde{F}(z_t, \{\frac{1}{\tau}\}_{k=0}^{\tau-1})$$

dargestellt werden, wobei  $z_t^{(j)} = y_{t+j-\tau+1}$  ist. Die Jacobi-Matrizen  $D\tilde{F}(z_t, \{\frac{1}{\tau}\}_{k=0}^{\tau-1})$  haben nach Gleichung (3.4) die Form einer Begleitmatrix. Die Jacobi-Matrizen der  $\tau$ -ten Iterierten haben daher die folgende Eigenschaft: Jeder Eintrag der Jacobi-Matrix  $D\tilde{F}^\tau(z, \{\frac{1}{\tau}\}_{k=0}^{\tau-1})$  erfüllt die Ungleichung

$$\left| \frac{\partial \tilde{F}^{\tau(i)}}{\partial z^{(j)}} \right| \leq \left(1 + \frac{K}{\tau}\right)^\tau, \quad \forall z \in I^\tau.$$

Die Ungleichung ergibt sich unmittelbar aus der Berechnung der  $\tau$ -Zeile der Matrix  $D\tilde{F}^\tau(z, \{\frac{1}{\tau}\}_{k=0}^{\tau-1})$ . Damit ist auch die Zeilensummen-Norm  $\|\cdot\|_{\text{msr}}$  der Matrix  $D\tilde{F}^\tau(z, \{\frac{1}{\tau}\}_{k=0}^{\tau-1})$  durch

$$\left\| \left\{ \frac{\partial (\tilde{F}^\tau)^{(i)}}{\partial z^{(j)}} \right\}_{i,j=1}^\tau \right\|_{\text{msr}}^2 \leq \tau \left(1 + \frac{K}{\tau}\right)^\tau, \quad \forall z \in I^\tau \quad (3.19)$$

beschränkt. Um eine gleichmäßige obere Schranke in  $z \in I^\tau$  für den punktweise definierten Limes Superior  $\lambda_z^s(\tau - 1)$  zu erhalten, wählt man  $t = r \cdot \tau + q$  für  $0 \leq q \leq \tau - 1$ , und betrachtet die Ungleichung:

$$\|(D\tilde{F}^t(z))\|^{1/t} = \left\| \left( \prod_{i=1}^r D\tilde{F}^\tau \right) D\tilde{F}^q(z) \right\|^{\frac{1}{r\tau+q}}.$$

Aufgrund der Ungleichung (3.19) ergeben sich die weiteren Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \lambda_z^s(\tau) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|D\tilde{F}^t(z)\| \\ &\leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r \cdot \tau} \ln \left( \tau^\tau \left(1 + \frac{K}{\tau}\right)^{\tau^2} \prod_{i=1}^r \|D\tilde{F}^\tau\| \right) \\ &\leq \frac{\ln(\tau)}{\tau} + \ln \left(1 + \frac{K}{\tau}\right). \end{aligned}$$

Da diese Schranke unabhängig von  $z \in I^\tau$  ist, gilt:

$$\lambda^s(\tau) \leq \frac{\ln(\tau)}{\tau} + \ln \left(1 + \frac{K}{\tau}\right).$$

Es ist sowohl  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\ln(\tau)}{\tau} = 0$  wie auch  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{K}{\tau}\right) = 0$ , so daß hieraus die Behauptung von Proposition 1 folgt.  $\square$

**Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt**

Gegeben sei ein stetig differenzierbares Cobweb-Bildungsgesetz  $y_{t+1} = f(y_{t,t+1}^e)$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , wobei  $f : I \rightarrow I$  auf dem kompakten Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  definiert ist. Des Weiteren sei die Prognoseregeln der geometrisch gewichtete Durchschnitt

$$y_{t,t+1}^e = \sum_{k=0}^{\tau-1} \frac{w^k}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} y_{t-k} \quad \forall t \geq \tau \quad w > 0,$$

der  $\tau \in \mathbb{N}$  vergangenen Beobachtungen  $y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-\tau+1}$ . Damit ergibt sich die stetig differenzierbare Differenzgleichung:

$$y_{t+1} = f\left(\sum_{k=0}^{\tau-1} \frac{w^k}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} y_{t-k}\right), \quad t \geq \tau. \quad (3.20)$$

Für jedes  $\tau \in \mathbb{N}$  und alle  $w > 0$  existieren die in Gleichung (3.16) definierten oberen Schranken. Um die Abhängigkeit der Schranken von  $\tau$  und  $w$  deutlich zu machen, werden sie  $\lambda_x^s(\tau, w)$  bzw.  $\lambda^s(\tau, w)$  bezeichnet. Die folgende Proposition ist eine Verallgemeinerung der Proposition 1, denn Prognosen mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt umfassen Prognosen mittels ungewichteten Durchschnitt. Betrachtet man die Lyapunov Exponenten dieser Systeme für wachsendes  $\tau$  und festes  $w \geq 1$ , dann gilt:

**Proposition 2** *(Von der Gedächtnislänge und dem Gewichtungsfaktor abhängige obere Schranke)*

Die Abbildung  $f$  sei stetig differenzierbar auf dem kompakten Intervall  $I$ . Betrachtet man für festes  $w \geq 1$  die Folge der oberen Schranken  $\{\lambda^s(\tau, w)\}_{\tau=1}^{\infty}$ , dann gilt für den Limes Superior dieser Folge

$$\limsup_{\tau \rightarrow \infty} \lambda^s(\tau, w) \leq 0.$$

**Beweis:** Ist analog zu Proposition 1.

Für festes  $\tau \in \mathbb{N}$  und  $w \rightarrow \infty$  erhält man als Grenzfall des Systems (3.20) die verzögerte Differenzgleichung

$$y_{t+1} = f(y_{t-\tau+1}), \quad t \geq \tau, \quad (3.21)$$

mit einer Verzögerung von  $\tau$  Perioden. Ein Modell vom Cobweb-Typ mit einer Prognoseregeln der saisonalen Periode  $\tau$ , das heißt es ist

$$y_{t,t+1}^e = y_{t-\tau+1}, \quad t \geq \tau, \quad (3.22)$$

entspricht dann genau einer solchen verzögerten Differenzgleichung der Ordnung  $\tau$ .

Da die Prognoseregeln (3.22) ein Grenzfall der Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt ist, kann für die Systeme (3.21) das folgende Korollar abgeleitet werden:

### Korollar 1

*Die Abbildung  $f$  sei stetig differenzierbar auf dem kompakten Intervall  $I$ . Betrachtet man die Folge der oberen Schranken  $\{\lambda^s(\tau)\}_{\tau=1}^{\infty}$  der Systeme (3.21), dann gilt für den Limes Superior dieser Folge:*

$$\limsup_{\tau \rightarrow \infty} \lambda^s(\tau) = 0.$$

**Beweis:** Der Beweis folgt aus Proposition 2.

### Cobweb-Modelle mit unbeschränkter Angebots- oder Nachfragefunktion

Das Bildungsgesetz eines Cobweb-Modells setzt sich aus einer Nachfragefunktion  $D : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  und einer Angebotsfunktion  $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  zusammen. Gemäß der Voraussetzung in Abschnitt 2.1 ist die inverse Nachfragefunktion  $D^{-1}$  auf der Menge  $S(\mathbb{R}_+)$  definiert, so daß sich der markträumende Preise aufgrund des Bildungsgesetzes

$$p_{t+1} = D^{-1} \circ S(p_{t,t+1}^e), \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

ergibt. Geht man davon aus, daß die Produzenten ihre Prognose mittels einer Prognoseregeln  $\psi(p_t, \dots, p_{t-\tau+1})$  mit endlichem Gedächtnis  $\tau \in \mathbb{N}$  erstellen, dann wird die zeitliche Entwicklung der Preise durch das Cobweb-Modell

$$p_{t+1} = D^{-1} \circ S(\psi(p_t, \dots, p_{t-\tau+1})), \quad \forall t \geq \tau \quad (3.23)$$

beschrieben. Die Angebotsfunktion  $S$  sei stetig differenzierbar. Um die Differenzierbarkeit des Bildungsgesetzes  $D^{-1} \circ S$  auf  $\mathbb{R}_+$  zu erhalten, müssen neben der Eigenschaft  $\limsup_{p \rightarrow \infty} S(p) \leq D(0)$  noch weitere Bedingungen erfüllt sein. Hierzu werden die in Abschnitt 3.1.1 eingeführten Bedingungen (A) und (B) durch die folgenden Bedingungen ersetzt:

**(AA)** Für die Nachfragefunktion  $D$  gelte  $\lim_{p \rightarrow \infty} D(p) = 0$  und  $D(p) > 0$  für alle  $p > 0$ . Des Weiteren sei  $D$  stetig differenzierbar mit  $D'(p) < 0$  für alle  $p \geq 0$  und es sei  $D^{-1}(\sup_{p \in \mathbb{R}_+} S(p)) > 0$ . Für die Angebotsfunktion  $S$  gelte  $S(0) = 0$ ,  $S(p) > 0$  für alle  $p > 0$  und  $\liminf_{p \rightarrow \infty} S(p) > 0$ .

**(BB)** Für die Nachfragefunktion  $D$  existiere ein Reservationspreis  $\hat{p}$  mit  $D(\hat{p}) = 0$ . Des Weiteren sei  $D$  stetig differenzierbar auf  $[0, \hat{p}]$  mit  $D'(p) > 0$  für alle  $p \in [0, \hat{p}]$ .

Ist die Angebots- oder Nachfragefunktion eines Cobweb-Modells unbeschränkt, dann kann unter der Bedingung (AA) bzw. (BB) aufgrund der Propositionen 1 und 2 folgendes über die asymptotischen Eigenschaften der maximalen Lyapunov Exponenten des Cobweb-Modells ausgesagt werden:

### Lemma 9

*Angenommen, die Nachfragefunktion  $D$  und die Angebotsfunktion  $S$  erfüllen eine der Bedingungen (AA) oder (BB). Betrachtet man das Cobweb-Modell (3.23) mit*

1. *einer Prognoseregeln für die saisonale Periode  $\tau$ , oder*
2. *dem ungewichteten Durchschnitt als Prognoseregeln, oder*
3. *dem geometrisch gewichteten Durchschnitt als Prognoseregeln mit  $w \geq 1$ ,*

*dann besitzt die Folge der oberen Schranken  $\{\lambda^s(\tau)\}_{\tau=1}^{\infty}$  bzw.  $\{\lambda^s(\tau, w)\}_{\tau=1}^{\infty}$  den Limes Superior*

$$\limsup_{\tau \rightarrow \infty} \lambda^s(\tau, \cdot) \leq 0. \quad (3.24)$$

**Beweis:** Aufgrund der Bedingung (AA) bzw. (BB) ist die Funktion  $D^{-1} \circ S(p)$  stetig differenzierbar auf  $\mathbb{R}_+$  bzw. auf  $[0, \hat{p}]$ .

Falls die Bedingung (AA) erfüllt ist, dann existiert eine Schranke

$$s_u = D^{-1}(\sup_{p \in \mathbb{R}_+} S(p)) > 0 \quad \text{mit} \quad \sigma_u \geq D^{-1} \circ S(p), \quad p \in \mathbb{R}_+.$$

Aufgrund der Annahme  $\liminf_{p \rightarrow \infty} S(p) > 0$  existiert ein  $r > 0$  mit  $r \geq S(p)$  für alle  $p \geq \sigma_u$ . Somit ist  $D^{-1} \circ S(p) \leq \sigma_o < \infty$  für alle  $p \geq \sigma_u$ . Da außerdem  $D^{-1} \circ S(p) > \sigma_u$  für  $p \in [0, \sigma_u]$  ist, folgt  $D^{-1} \circ S \circ D^{-1} \circ S(p) \in [\sigma_u, \sigma_o]$ . Es genügt also, die Dynamik des Cobweb-Modells auf dem kompakten Intervall  $[\sigma_u, \sigma_o]$  zu betrachten. Die Behauptung (3.24) folgt direkt aus den Propositionen 1, 2 und aus dem Korollar 1.

Falls die Bedingung (BB) erfüllt ist, folgt  $0 \leq D^{-1} \circ S(p) \leq \hat{p}$  für alle  $[0, \hat{p}]$ . Es genügt also, die Dynamik des Cobweb-Modells auf dem kompakten Intervall  $[\sigma_u, \sigma_o]$  zu betrachten. Die Behauptung (3.24) folgt dann direkt aus den Propositionen 1, 2 und aus dem Korollar 1.  $\square$

# Kapitel 4

## Numerische Analyse des dynamischen Verhaltens für eine S-förmige Angebotsfunktion

Verschiedene Aspekte des dynamischen Verhaltens von ökonomischen Systemen lassen sich aufgrund ihrer Komplexität nur mit Hilfe von numerischen Methoden erfassen. So ist zum Beispiel eine qualitative Analyse des Bifurkationsverhaltens der Systeme außerhalb der Umgebungen ihrer stationären Zustände oder eine qualitative Analyse der Struktur und der Einzugsbereiche<sup>1</sup> der koexistierenden Zyklen meistens nicht möglich. Um die in Kapitel 3 erzielten qualitativen Ergebnisse zum Einfluß der Gedächtnislänge und der Gewichtungsstruktur von Prognosen mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt auf das dynamische Verhalten von Modellen vom Cobweb-Typ ergänzen und erweitern zu können, wird im folgenden das globale dynamische Verhalten zweier prototypischer Beispiele numerisch analysiert. Das in diesem Kapitel betrachtete Beispiel ist ein Cobweb-Modell mit S-förmigem Bildungsgesetz. Im nächsten Kapitel 5 wird das dynamische Verhalten eines Cobweb-Modells mit zurückgebogenem Bildungsgesetz untersucht und es wird ein Vergleich der dynamischen Eigenschaften der beiden Cobweb-Modelle durchgeführt.

Das S-förmige Bildungsgesetz des in diesem Kapitel betrachteten Cobweb-Modells ergibt sich aus der Komposition einer S-förmigen Angebotsfunktion und einer linear inversen Nachfragefunktion. Die S-Form der Angebotsfunktion ergibt

---

<sup>1</sup>Der Einzugsbereich eines Zyklus ist dabei diejenige offene Menge von Startwerten, für die das System gegen den Zyklus konvergiert.

sich aufgrund einer speziellen Technologie und wird in Abschnitt 4.1 hergeleitet. Die Eigenschaften des Bildungsgesetzes folgen unmittelbar aus den Annahmen, die im Zusammenhang mit der Technologie und der Nachfragefunktion getroffen wurden. Des Weiteren wird davon ausgegangen, daß die Produzenten des Gutes den geometrisch gewichteten Durchschnitt als Prognoseregeln verwenden. Das dynamische Verhalten des Cobweb-Modells hängt also von dem Gewichtungsfaktor  $w$  und der Gedächtnislänge der Prognoseregeln und von den Parametern der Technologie und der Nachfragefunktion ab.

Um zu bestimmen, in welcher Art und Weise die Prognoseregeln das dynamische Verhalten des Cobweb-Modells beeinflussen, wird zunächst das Bifurkationsverhalten und das Verhalten der maximalen Lyapunov Exponenten bei Änderung von Modellparametern mit Hilfe von *MACRODYN* numerisch analysiert. Da bei verschiedenen Parameterkombinationen koexistierende Zyklen auftreten, wird außerdem die Struktur und der Einzugsbereich dieser Zyklen numerisch bestimmt. Das Cobweb-Modell weist bei ungewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln spezielle dynamische Eigenschaften auf, so daß dieser Fall gesondert in Abschnitt 4.2 behandelt wird. Die Dynamik des Cobweb-Modells mit geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln wird in Abschnitt 4.3 numerisch analysiert, wobei vor allem der Einfluß der Gedächtnislänge  $\tau$  und des Gewichtungsfaktors  $w$  der Prognoseregeln auf das dynamische Verhalten untersucht wird. Es wird sich zeigen, daß das dynamische Verhalten im Falle eines Gewichtungsfaktors  $w < 1$  sehr verschieden von dem dynamischen Verhalten im Falle eines Gewichtungsfaktors  $w > 1$  ist.

## 4.1 Eine Technologie mit S-förmiger Grenzkostenfunktion

Wie bereits in Abschnitt 2.1 ausgeführt, beschreibt ein Cobweb-Modell die zeitliche Entwicklung der Preise und Mengen eines Gutes auf einem kompetitiven Markt. Das betrachtete Gut ist nicht lagerfähig und die Entscheidung über die zu produzierende Menge  $q_{t+1}^S$  muß bereits eine Periode vor der Verfügbarkeit des Gutes getroffen werden. Da keine Möglichkeit zum Abschluß von Terminkontrakten besteht und die Preise für die kommenden Perioden nicht bekannt sind, muß der Produzent in Periode  $t$  seine Produktionsentscheidung  $S(p_{t,t+1}^e)$  aufgrund seiner Preiserwartung  $p_{t,t+1}^e$  für die Periode  $t+1$  treffen. Im Falle einer invertierbaren

Nachfragefunktion kann dann der markträumende Preis der Periode  $t + 1$  durch die Gleichgewichtsbedingung  $p_{t+1} = D^{-1} \circ S(p_{t,t+1}^e)$  ermittelt werden.

Geht man im Rahmen der Modellierung des Cobweb-Bildungsgesetzes, neben den in Abschnitt 2.1 gemachten Annahmen, zusätzlich von den in Debreu (1974) getroffenen Standardannahmen an Ökonomien aus, so kann jede auf einem kompakten Intervall definierte und stetige Funktion als Bildungsgesetz abgeleitet werden. Der Grund hierfür ist, daß nach einem Theorem von Debreu (1974) jede auf einem kompakten Intervall definierte Funktion, die stetig und streng monoton fallend ist, als partielle Nachfragefunktion einer Ökonomie, welche gewisse Standardannahmen erfüllt, abgeleitet werden kann.<sup>2</sup> Außerdem läßt sich auch jede stetige und monotone Funktion als Angebotsfunktion einer Ökonomie ableiten. Daraus folgt, daß unter Standardannahmen jede auf einem kompakten Intervall definierte stetige Funktion Bildungsgesetz eines Cobweb-Modells sein kann.

Das im folgenden betrachtete S-förmige Bildungsgesetz leitet sich aus einer speziellen Technologie ab. Eine Funktion  $g \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$  auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  wird als *S-förmig* bezeichnet, falls sie monoton ist und genau einen Wendepunkt  $q^W \in I$  besitzt mit der Eigenschaft, daß  $g''(q) < 0$  für  $q < q^W$  und  $g''(q) > 0$  für  $q > q^W$  ist, oder daß  $g''(q) > 0$  für  $q < q^W$  und  $g''(q) < 0$  für  $q > q^W$  ist. Eine S-förmige Funktion hat die Eigenschaft, daß sie unter einer linearen Transformation S-förmig bleibt. Das Cobweb-Bildungsgesetz leitet sich aus den folgenden Annahmen ab:

Das Ziel eines jeden Produzenten sei die Maximierung des Periodengewinns. Das heißt, seine Produktionsentscheidung  $q_{t+1}^S$  ist Lösung des Maximierungsproblems

$$\pi(p_{t,t+1}^e) = \max_q \{p_{t,t+1}^e q - C(q)\}.$$

Wird außerdem angenommen, daß alle Produzenten über dieselbe Produktionstechnologie verfügen, dann sind deren Kostenfunktionen identisch und es genügt, einen repräsentativen Produzenten zu betrachten. Die Grenzkostenfunktion  $C' : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  der Produzenten sei stetig und streng monoton. Somit lautet die

---

<sup>2</sup>Debreu (1974) hat das folgende Theorem bewiesen: *Gegeben sei eine stetige Funktion auf einer kompakten Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Die Funktion sei homogen vom Grade 0 und erfülle das Walrasgesetz. Zu dieser Funktion existiert eine Ökonomie derart, daß die Funktion und die Marktüberschußnachfragefunktion der Ökonomie auf der kompakten Teilmenge übereinstimmen.*

Angebotsfunktion der Periode  $t + 1$ :

$$\begin{aligned} S_{\text{mon}}(p_{t,t+1}^e) &= \arg \max_{q \geq 0} \{p_{t,t+1}^e q - C(q)\} \\ &= (C')^{-1}(p_{t,t+1}^e). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Zur Produktion einer Menge  $q \geq 0$  des Gutes werden zwei Produktionsfaktoren in der Menge  $x_1 \geq 0$  und  $x_2 \geq 0$  benötigt. Die Technologie sei beschrieben durch die limitative Produktionsfunktion  $q = PF(x_1, x_2)$  mit

$$q = \min\left\{x_1, x_1 I\left(x_2 + \frac{1}{3} \log(\cos(x_1 - q^*))\right)\right\}, q^* - \frac{\pi}{2} < x_1 \leq q_u, 0 \leq x_2 < \infty.$$

Zur Aufrechterhaltung der Technologie sei in jeder Periode ein Mindesteinsatz des ersten Faktors von  $x_1 > q^* - \frac{\pi}{2}$  notwendig, wobei  $q^* > \pi/2$  und  $q^* < q_u < q^* + \pi/2$  gelte. Die Schranke  $q_u$  sei die Kapazitätsobergrenze der Technologie. Des Weiteren sei die Funktion  $I : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  definiert als

$$I(y) = \begin{cases} 0 & , y < 0 \\ 1 & , y \geq 0 \end{cases}.$$

Die Abbildung 4.1 zeigt die Produktionsfunktion  $PF(x_1, x_2)$  und einige ihrer Konturlinien.

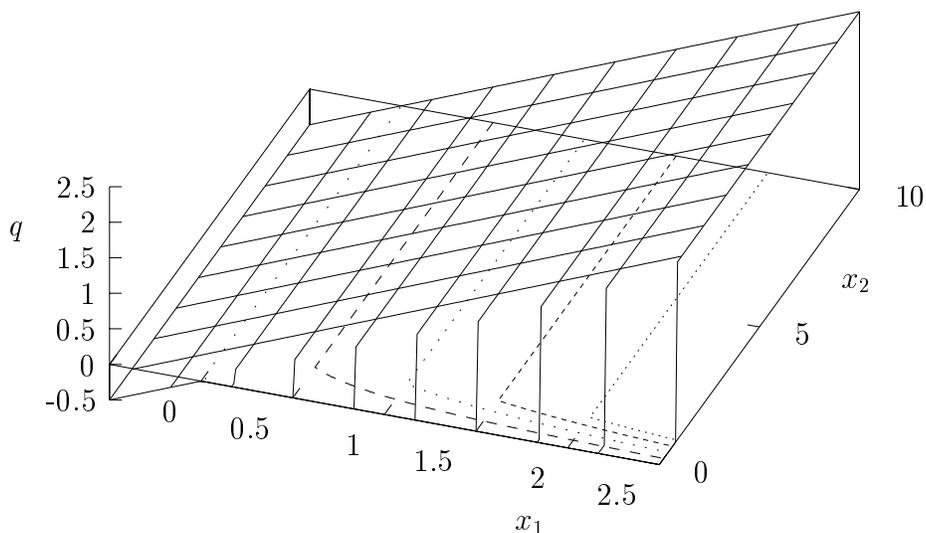


Abbildung 4.1: Die Produktionsfunktion  $q = PF(x_1, x_2)$  und einige ihrer Konturlinien.

Die Faktornachfrage bei einer Produktion von  $q$  Einheiten des Gutes sei im folgenden mit  $x_1(q, w_1, w_2)$  bzw.  $x_2(q, w_1, w_2)$  bezeichnet, wobei  $w_i > 0$  der Faktorpreis des Produktionsfaktors  $i$  sei. Zu jedem Faktorpreisverhältnis  $\alpha = \frac{w_1}{w_2} > 0$  gibt es eine kostenoptimale Produktionsuntergrenze  $q_l(\alpha) < q^*$  mit

$$q_l(\alpha) = q^* - \arctan(3\alpha).$$

Damit ergibt sich eine Faktornachfrage von

$$x_1(q, w_1, w_2) = \begin{cases} q_l(\alpha) & , 0 \leq q \leq q_l(\alpha) \\ q & , q_l(\alpha) < q \leq q_u \end{cases}$$

und

$$x_2(q, w_1, w_2) = \begin{cases} -\frac{1}{3} \log(\cos(q_l(\alpha) - q^*)) & , 0 \leq q \leq q_l(\alpha) \\ -\frac{1}{3} \log(\cos(q - q^*)) & , q_l(\alpha) < q \leq q_u \end{cases}.$$

Hinsichtlich des marginalen Faktoreinsatzes gilt, daß  $\frac{\partial x_2(q, w_1, w_2)}{\partial q} < 0$  für  $q_l(\alpha) < q < q^*$  ist und daß  $\frac{\partial x_2(q, w_1, w_2)}{\partial q} > 0$  für  $q^* < q \leq q_u$  ist. Somit ist der zweite Produktionsfaktor für  $q_l(\alpha) < q < q^*$  *inferior*<sup>3</sup> und für  $q^* < q \leq q_u$  *normal*. Der erste Produktionsfaktor ist für alle  $q \geq q_l(\alpha)$  ein normaler Produktionsfaktor. Die entsprechende Kostenfunktion lautet

$$C(q, w_1, w_2) = \begin{cases} c_0 + w_1 q_l(\alpha) - \frac{w_2}{3} \log(\cos(q_l(\alpha) - q^*)) & , 0 \leq q < q_l(\alpha) \\ c_0 + w_1 q - \frac{w_2}{3} \log(\cos(q - q^*)) & , q_l(\alpha) \leq q \leq q_u \end{cases}.$$

Hierbei bezeichnet  $c_0 > 0$  den Fixkostenanteil. Die Grenzkostenfunktion

$$C'(q, w_1, w_2) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq q < q_l(\alpha) \\ w_1 + \frac{w_2}{3} \tan(q - q^*) & , q_l(\alpha) \leq q \leq q_u \end{cases}$$

---

<sup>3</sup>Gemäß Varian (1984) nennt man den Produktionsfaktor  $i$  einer Produktionsfunktion  $PF(x_1, \dots, x_k)$  *inferior*, falls  $\frac{\partial x_i(q, w_1, \dots, w_k)}{\partial q} < 0$  ist.

Ein Beispiel für eine Produktionsfunktion, die inferiore Produktionsfaktoren aufweist, ist die Produktionsfunktion eines Elektrizitätswerkes. Das Werk benötigt zur Stromerzeugung zwei Produktionsfaktoren. Der eine Produktionsfaktor ist Kohle und der andere Produktionsfaktor sind Betriebshilfsstoffe. Nach dem Energieerhaltungssatz wächst die Menge des erzeugten Stroms proportional zur Menge der verbrauchten Kohle. Ist das Kraftwerk schlecht ausgelastet, dann werden große Mengen an Betriebshilfsstoffen verbraucht. Wird pro Periode die Strommenge  $q^*$  erzeugt, dann ist das Kraftwerk optimal ausgelastet. Wird pro Periode weniger als  $q^*$  erzeugt, dann werden aufgrund der Unterauslastung zunehmend größere Mengen an Betriebshilfsstoffen verbraucht.

ist nicht-negativ und monoton steigend. Darüber hinaus ist  $C'(q, w_1, w_2)$  in  $q$  auf dem Intervall  $[q_l(\alpha), q_u]$  S-förmig und hat den Wendepunkt  $(q^*, w_1)$ . Aufgrund der Beziehung (4.1) ergibt sich die S-förmige Angebotsfunktion

$$S_{\text{mon}}(p_{t,t+1}^e) = q^* + \arctan\left(\frac{3}{w_2}(p_{t,t+1}^e - w_1)\right), \quad p_{t,t+1}^e \in [0, c^*(w_1, w_2)],$$

mit  $c^*(w_1, w_2) = w_1 + \frac{w_2}{3} \tan(q_u - q^*)$ . Im Rahmen der weiteren numerischen Untersuchungen wird  $q^* = 3$  und  $w_1 = 3$  fest gewählt. Das Faktorpreisverhältnis ist daher  $\alpha = \frac{3}{w_2}$  und die Angebotsfunktion lautet

$$S_{\text{mon}}(p_{t,t+1}^e) = 3 + \arctan(\alpha(p_{t,t+1}^e - 3)), \quad p_{t,t+1}^e \in [0, c^*(w_1, w_2)]. \quad (4.2)$$

Im folgenden werden nur Werte von  $\alpha$  aus dem Intervall  $(0, 30]$  betrachtet. Für entsprechend großes  $q_u$  folgt, daß  $c^*(3, w_2) > 6$  gilt. Somit ist  $S_{\text{mon}}(p_{t,t+1}^e) \in [0, 5]$ , für alle  $p_{t,t+1}^e \in [0, 6]$  und alle  $\alpha \in (0, 30)$ .

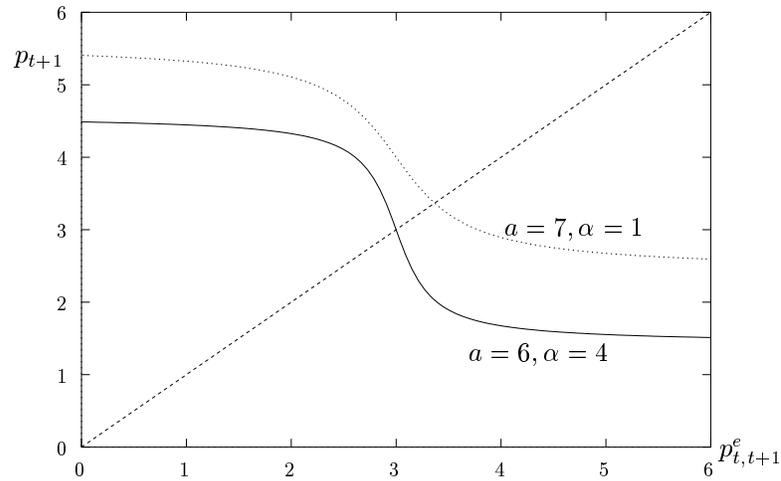


Abbildung 4.2: Das Cobweb-Bildungsgesetz  $D^{-1} \circ S_{\text{mon}}(p_{t,t+1}^e)$  für  $a = 6$ ,  $b = 1$ ,  $\alpha = 4$  und  $a = 7$ ,  $b = 1$ ,  $\alpha = 1$ .

Die Nachfragefunktion wird im folgenden als linear vorausgesetzt:

$$D(p) = a - b \cdot p, \quad p \in [0, \frac{a}{b}]. \quad (4.3)$$

Der Parameter  $a \geq 0$  bezeichnet die maximal nachgefragte Menge nach dem Gut und der Parameter  $b \geq 0$  entspricht der Steigung der Nachfragefunktion. Das

Cobweb-Bildungsgesetz setzt sich damit aus der inversen Funktion zur Nachfragefunktion (4.3) und der S-förmigen Angebotsfunktion (4.2) zusammen. Unter der Voraussetzung, daß  $a \in [5, 7]$ ,  $b \geq 1$ ,  $p_{t,t+1}^e \in [0, 6]$  und  $\alpha \in (0, 30)$  ist, hat das Cobweb-Bildungsgesetz die Form

$$D^{-1} \circ S_{\text{mon}}(p_{t,t+1}^e) = \frac{a-3}{b} - \frac{1}{b} \arctan(\alpha(p_{t,t+1}^e - 3)), \quad (4.4)$$

wobei  $D^{-1} \circ S_{\text{mon}}(p_{t,t+1}^e) \in (0, 6)$  gilt. Das Bildungsgesetz ist S-förmig und hat den Wendepunkt  $(3, \frac{a-3}{b})$ . Die Abbildung 4.2 zeigt das Bildungsgesetz für  $a = 6$ ,  $\alpha = 4.0$  und für  $a = 7$ ,  $\alpha = 1.0$ . Das S-förmige Bildungsgesetz (4.4) wird im folgenden auch mit

$$f(p_{t,t+1}^e, a, b, \alpha) = \frac{a-3}{b} - \frac{1}{b} \arctan(\alpha(p_{t,t+1}^e - 3)), \quad p_{t,t+1}^e \in [0, 6] \quad (4.5)$$

abgekürzt.

Für jede Parameterkombination  $(a, b, \alpha)$  mit  $a \geq 5$ ,  $b \geq 1$  und  $\alpha \geq 0$  besitzt  $f(p_{t,t+1}^e, a, b, \alpha)$  einen eindeutigen Gleichgewichtspreis  $\tilde{p}_{(a,b,\alpha)}$ . Betrachtet man die partiellen Ableitungen nach  $a$ ,  $b$  und  $\alpha$  von  $f(p_{t,t+1}^e, a, b, \alpha)$ , so können folgende komparativ statische Eigenschaften des Gleichgewichtspreises hergeleitet werden:

- Es ist  $\partial \tilde{p}_{(a,b,\alpha)} / \partial a > 0$ , das heißt, eine Vergrößerung der maximalen Nachfrage  $a$  bewirkt eine Erhöhung des Gleichgewichtspreises  $\tilde{p}_{(a,b,\alpha)}$ .
- Es ist  $\partial \tilde{p}_{(a,b,\alpha)} / \partial b < 0$ , das heißt, eine Vergrößerung der Steigung  $b$  der Nachfragefunktion bewirkt eine Verringerung des Gleichgewichtspreises  $\tilde{p}_{(a,b,\alpha)}$ .
- Es ist  $\partial \tilde{p}_{(a,b,\alpha)} / \partial \alpha \leq 0$ , das heißt, eine Vergrößerung des Faktorpreisverhältnisses  $\alpha$  bewirkt eine Verringerung des Gleichgewichtspreises  $\tilde{p}_{(a,b,\alpha)}$ .

Darüber hinaus weist das Bildungsgesetz  $f(p_{t,t+1}^e, a, b, \alpha)$  am Gleichgewichtspreis  $\tilde{p}_{(a,b,\alpha)}$  die folgende Elastizität auf:

$$f'(\tilde{p}_{(a,b,\alpha)}, a, b, \alpha) = \frac{S'(\tilde{p}_{(a,b,\alpha)})}{D'(\tilde{p}_{(a,b,\alpha)})} = \frac{\epsilon_S(\tilde{p}_{(a,b,\alpha)})}{\epsilon_D(\tilde{p}_{(a,b,\alpha)})} = \frac{-\alpha}{b(1 + \alpha^2(\tilde{p}_{(a,b,\alpha)} - 3)^2)}.$$

Für  $p_{t,t+1}^e = 3$  ist die Elastizität des Bildungsgesetzes  $\epsilon_f(3) = \frac{-3\alpha}{a-3}$ . Daraus folgt, daß bei einem hohen Faktorpreisverhältnis das Bildungsgesetz eine negative Elastizität von hohem Betrag aufweist. Des Weiteren führt eine größere maximale Nachfrage zu einer Verringerung des maximalen Betrages der negativen Elastizität.

Das dynamische Verhalten von Cobweb-Modellen, unter der Annahme des obigen Bildungsgesetzes  $f(p_{t,t+1}^e, a, b, \alpha)$ , wurde im Zusammenhang mit linear adaptiven Prognosenregeln von Chiarella (1988) und Hommes (1991) untersucht. Linear adaptive Prognoseregeln sind ein Grenzfall der Prognosen mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt. Die numerischen Analysen dieses Kapitels werden zeigen, daß im Falle des S-förmigen Bildungsgesetzes  $f(p_{t,t+1}^e, a, b, \alpha)$  ein Zusammenhang zwischen dem dynamischen Verhalten des Cobweb-Modells bei linear adaptiver Prognoseregeln und dem dynamischen Verhalten bei Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt besteht.

## 4.2 Prognose mittels ungewichtetem Durchschnitt

Die Prognose mittels ungewichtetem Durchschnitt

$$p_{t,t+1}^e = \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\tau-1} p_{t-k}$$

ist ein Spezialfall der Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt. Da Cobweb-Modelle mit ungewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln besondere dynamische Eigenschaften aufweisen, befassen sich die folgenden Untersuchungen zunächst mit diesem Spezialfall. Ein Cobweb-Modell mit S-förmigem Bildungsgesetz  $f(p_{t,t+1}^e, a, b, \alpha)$  und dem ungewichteten Durchschnitt als Prognoseregeln entspricht bei Anfangswerten  $p_\tau \in [0, 6], \dots, p_1 \in [0, 6]$  der stetig differenzierbaren Differenzgleichung:<sup>4</sup>

$$p_{t+1} = \frac{a-3}{b} - \frac{1}{b} \arctan\left(\alpha \left(\frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\tau-1} p_{t-k} - 3\right)\right), \quad t \geq \tau. \quad (4.6)$$

Diese Differenzgleichung kann auch in Form eines  $\tau$ -dimensionalen dynamischen Systems dargestellt werden und ist in den Parametern  $a \in [5, 7]$ ,  $b \geq 1$  und  $\alpha \in (0, 30]$  stetig differenzierbar. Da sich die Dynamik der Differenzgleichung (4.6) bei einer Variation der Parameter von  $(a, b, \alpha, \tau)$  nach  $(a, b + \delta, \alpha, \tau)$  in gleicher Weise verändert wie bei einer Variation der Parameter von  $(a, b, \alpha, \tau)$  nach  $(a - 3\delta, b, \frac{\alpha b}{b+\delta}, \tau)$ , wird der Parameter  $b$  als  $b = 1$  festgesetzt. Das Bildungsgesetz wird im folgenden mit  $f(p_{t,t+1}^e, a, \alpha)$  abgekürzt.

---

<sup>4</sup>Die Prognose mittels ungewichtetem Durchschnitt  $p_{t,t+1}^e$  liegt jeweils in der konvexen Hülle der endlich vielen vergangenen Beobachtungen  $p_t, \dots, p_{t-\tau+1}$ .

### 4.2.1 Ein-Parameter Bifurkationsanalyse: Faktorpreisverhältnis, maximale Nachfrage

Im folgenden ist zu berücksichtigen, daß das Cobweb-Modell (4.6) stetig von den Parametern  $\alpha$  und  $a$  abhängt, daß sich jedoch bei einer Änderung des Parameters  $\tau \in \mathbb{N}$  die Dimension des Cobweb-Modells ebenfalls ändert. Zur numerischen Analyse des Einflusses der Gedächtnislänge  $\tau$ , des Faktorpreisverhältnisses  $\alpha$  und der maximalen Nachfrage  $a$  auf die Dynamik des Cobweb-Modells, werden deshalb Bifurkationsdiagramme in  $\alpha$  und  $a$  für jeweils festes  $\tau \in \{1, \dots, 6\}$  erstellt und miteinander verglichen. Da das Cobweb-Modell bei entsprechend hohem Faktorpreisverhältnis  $\alpha$  koexistierende Zyklen aufweist, werden zur Untersuchung der Einzugsbereiche dieser Zyklen Bifurkationsdiagramme in den Startwerten erstellt.

#### Naive Erwartungen

Naive Erwartungen  $p_{t,t+1}^e = p_t$  sind der einfachste Fall der Prognose mittels ungewichtetem Durchschnitt, denn die Gedächtnislänge ist  $\tau = 1$ . Das Cobweb-Modell (4.6) reduziert sich auf das ein-dimensionale System

$$p_{t+1} = f(p_t, a, \alpha) = a - 3 - \arctan(\alpha(p_t - 3)), \quad t \in \mathbb{N}. \quad (4.7)$$

Für alle  $a \in [5, 7]$  und  $\alpha \in (0, 30)$  existiert jeweils ein eindeutiger stationärer Zustand  $\tilde{p}_{(a,\alpha)}$ . Außerdem gibt es ein Faktorpreisverhältnis  $\tilde{\alpha} \geq 1$ , so daß die Bedingungen

$$\begin{aligned} f_p(\tilde{p}_{(a,\tilde{\alpha})}, a, \tilde{\alpha}) &= -1, \\ f_{p\alpha}(\tilde{p}_{(a,\tilde{\alpha})}, a, \tilde{\alpha}) &\neq 0, \\ 1/2(f_{pp}(\tilde{p}_{(a,\tilde{\alpha})}, a, \tilde{\alpha}))^2 + 1/3f_{ppp}(\tilde{p}_{(a,\tilde{\alpha})}, a, \tilde{\alpha}) &\neq 0 \end{aligned}$$

für eine nicht-degenerierte Flip-Bifurkation erfüllt sind. Man sehe hierzu auch Anhang 3.2. Das Cobweb-Modell (4.7) erfährt somit am stationären Zustand  $\tilde{p}_{(a,\tilde{\alpha})}$  für  $\tilde{\alpha}$  eine nicht-degenerierte Flip-Bifurkation. Das dynamische Verhalten des Cobweb-Modells ist daher in folgender Weise von dem Faktorpreisverhältnis  $\alpha$  abhängig. Der stationäre Zustand  $\tilde{p}_{(a,\alpha)}$  des Cobweb-Modells ist bei einem Faktorpreisverhältnis  $0 < \alpha < \tilde{\alpha}$  global stabil. Für weiter zunehmendes  $\alpha$  erfährt das Cobweb-Modell dann eine Flip-Bifurkation und es tritt ein global stabiler 2-Zyklus auf.

Das Bifurkationsverhalten des Cobweb-Modells bei einer Änderung der maximalen Nachfrage  $a \in [5, 7]$  kann man dem in Abbildung 4.5 unter  $\tau = 1$  dargestellten Bifurkationsdiagramm entnehmen. Das Bifurkationsdiagramm zeigt für jedes  $a \in [5, 7]$  das langfristige dynamische Verhalten des Cobweb-Modells.<sup>5</sup> Bei einem Faktorpreisverhältnis von  $\alpha = 10$  hängt das dynamische Verhalten von der maximalen Nachfrage  $a$  wie folgt ab. Für  $a \in [6.7, 7]$  konvergiert das Cobweb-Modell gegen den eindeutigen stationären Zustand  $\tilde{p}_{(a,10)}$ . Für  $a = 6.7$  erfährt das Cobweb-Modell eine Flip-Bifurkation, wobei ein global stabiler 2-Zyklus auftritt. Ist  $5 < a < 6.7$ , dann konvergiert das Cobweb-Modell gegen einen global stabilen 2-Zyklus. Da die Abbildung  $f(p_t, a, \alpha)$  monoton in  $p_t$  ist, kann ein aperiodisches Verhalten des Cobweb-Modells nicht auftreten.

### Bifurkationsverhalten bei unterschiedlicher Gedächtnislänge

Die qualitative Bifurkationsanalyse des Abschnitts 3.2 hat ergeben, daß das Bifurkationsverhalten des Cobweb-Modells mit ungewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln in besonderer Weise von der Gedächtnislänge der Prognoseregeln abhängt. Entsprechend Lemma 7 und den Bifurkationskurven des Cobweb-Modells in Abbildung 3.1 gilt folgendes:

Für  $a = 6$  ist das Bildungsgesetz  $f(p_{t,t+1}^e, 6, \alpha)$  symmetrisch zum Gleichgewichtspreis  $\tilde{p} = 3$  und der Gleichgewichtspreis hängt nicht von  $\alpha$  ab. Somit ist im Falle einer Gedächtnislänge  $\tau$  der stationäre Zustand  $p^* = (3, \dots, 3) \in \mathbb{R}^\tau$  für  $0 < \alpha < \tau$  lokal stabil. Ist  $\alpha = \tau$ , dann liegt für gerades  $\tau$  eine degenerierte Hopf-Bifurkation vor. Ist  $\tau$  ungerade, dann erfährt das Cobweb-Modell eine degenerierte Flip-Bifurkation. Für  $a \neq 6$  ist das Bildungsgesetz  $f(p_{t,t+1}^e, a, \alpha)$  asymmetrisch zum Gleichgewichtspreis  $\tilde{p}_{(a,\alpha)}$  und der Gleichgewichtspreis hängt stetig von  $\alpha$  ab. Bei zunehmendem Faktorpreisverhältnis  $\alpha$  existiert ein  $\tilde{\alpha}$ , so daß das Cobweb-Modell am stationären Zustand  $p_{(a,\tilde{\alpha},\tau)}^* = (\tilde{p}_{(a,\tilde{\alpha})}, \dots, \tilde{p}_{(a,\tilde{\alpha})}) \in \mathbb{R}^\tau$  bei ungeradem  $\tau$  eine degenerierte Flip-Bifurkation und bei geradem  $\tau$  eine degenerierte Hopf-Bifurkation erfährt.

Da eine theoretische Analyse des dynamischen Verhaltens des Cobweb-Modells für diese degenerierten Bifurkationsformen außerordentlich schwierig ist, wird eine numerische Analyse des Bifurkationsverhaltens durchgeführt.

---

<sup>5</sup>Für einen festen Startwert  $p_1$  und für  $a \in [5, 7]$  im Abstand von 0.001 werden jeweils 2000 Iterationen des Systems berechnet. Die jeweils letzten 200 Iterationen werden in dem Bifurkationsdiagramm abgebildet.

*Bifurkationsverhalten in  $\alpha \in (0, 10]$  für  $a = 6$  und  $\tau = 2, \dots, 7$ :*

Die Abbildung 4.3 zeigt Bifurkationsdiagramme<sup>6</sup> des Cobweb-Modells, die sich bei einer Variation des Faktorpreisverhältnisses  $\alpha \in (0, 10]$  ergeben. Die maximale Nachfrage ist  $a = 6$  und die betrachteten Gedächtnislängen sind  $\tau = 2, \dots, 7$ . Bei der Analyse der Bifurkationsdiagramme ist zu beachten, daß ein-dimensionale Projektionen eines  $\tau$ -dimensionalen Zustandsraumes dargestellt werden. Die folgenden Aussagen lassen sich ableiten:

Für  $\tau = 2$  erfährt das Cobweb-Modell bei einem Faktorpreisverhältnis von  $\alpha = 2$  eine starke 1:3 Resonanz. Dies ist eine degenerierte Form der Hopf-Bifurkation, wobei für bestimmte Werte von  $\alpha \in (2, 2 + \epsilon)$  chaotisches Verhalten auftritt. In Anhang B.1 findet man eine ausführliche Beschreibung dieses Bifurkations-Typs. Ist  $\tau$  ungerade, dann ist für Faktorpreisverhältnisse  $\alpha < \tau$  der stationäre Zustand  $p^* = (3, \dots, 3) \in \mathbb{R}^\tau$  global stabil. Für  $\alpha > \tau$  tritt ein eindeutiger, global stabiler Zyklus der Ordnung  $\tau + 1$  auf. Ist  $\tau$  gerade und  $\tau > 2$ , dann ist für  $\alpha < \tau$  der stationäre Zustand  $p^* = (3, \dots, 3) \in \mathbb{R}^\tau$  global stabil. Für  $\alpha > \tau$  findet man numerisch zwei koexistierende lokal stabile Zyklen der Ordnung  $\tau + 1$ . Die Struktur dieser Zyklen wird im folgenden Abschnitt 4.2.2 erläutert. Die Amplitude dieser Preisschwankungen wird mit zunehmendem Faktorpreisverhältnis größer.

*Bifurkationsverhalten in  $\alpha \in (0, 10]$  für  $a = 6.65$  und  $\tau = 2, \dots, 7$ :*

Im Falle einer maximalen Nachfrage von  $a = 6.65$  ist das Bildungsgesetz des Cobweb-Modells asymmetrisch zum Gleichgewichtspreis  $\tilde{p}_{(6.65, \alpha)}$ . Der Gleichgewichtspreis ist streng monoton fallend in  $\alpha$  und streng monoton wachsend in  $a$ . Die Abbildung 4.4 zeigt diejenigen Bifurkationsdiagramme des Cobweb-Modells, die sich bei einer Variation des Faktorpreisverhältnisses  $\alpha \in (0, 10]$  für Gedächtnislänge  $\tau = 2, \dots, 7$  ergeben. Hieraus können die folgenden Aussagen abgeleitet werden:

Das Faktorpreisverhältnis  $\tilde{\alpha}$ , zu dem das Cobweb-Modell am stationäre Zustand  $p_{(6.65, \tilde{\alpha}, \tau)}^*$  eine Bifurkation erfährt, so daß der stationäre Zustand instabil

---

<sup>6</sup>Für festen Startwert  $p_\tau, \dots, p_1$  und für Werte von  $\alpha \in (0, 10]$  im Abstand 0.01 werden jeweils 2000 Iterationen des Systems berechnet. Das Bifurkationsdiagramm zeigt die letzten 200 Iterationswerte von  $p_t$ .

wird, ist streng monoton wachsend in  $\tau$ . Der stationäre Zustand  $p_{(6.65, \alpha, \tau)}^*$  ist für Faktorpreisverhältnisse  $\alpha < \tilde{\alpha}$  global stabil. Für bestimmte  $\alpha > \tilde{\alpha}$  koexistiert der lokal stabile stationäre Zustand  $p_{(6.65, \alpha, \tau)}^*$  mit einem lokal stabilen Zyklus der Ordnung  $\tau + 1$ . Für  $\tau > 2$  und für entsprechend große  $\alpha > \tilde{\alpha}$  koexistieren zwei lokal stabile Zyklen der Ordnung  $\tau + 1$ .

Das Bifurkationsverhalten des Cobweb-Modells bei Änderung der maximalen Nachfrage wird im folgenden Abschnitt, im Zusammenhang mit der Struktur der lokal stabilen koexistierenden Zyklen, untersucht. Darüber hinaus wurde eine Zwei-Parameter Bifurkationsanalyse in  $\alpha$  und  $a$  für  $\tau = 3, 4, 5, 6, 7$  durchgeführt. Diese Analyse hat ergeben, daß sich Cobweb-Modelle mit ungewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln, bei einer Gedächtnislänge der Prognoseregeln von  $2 < \tau \leq 7$ , ausschließlich periodisch verhalten. Die Details dieser Analyse werden hier nicht dargestellt.

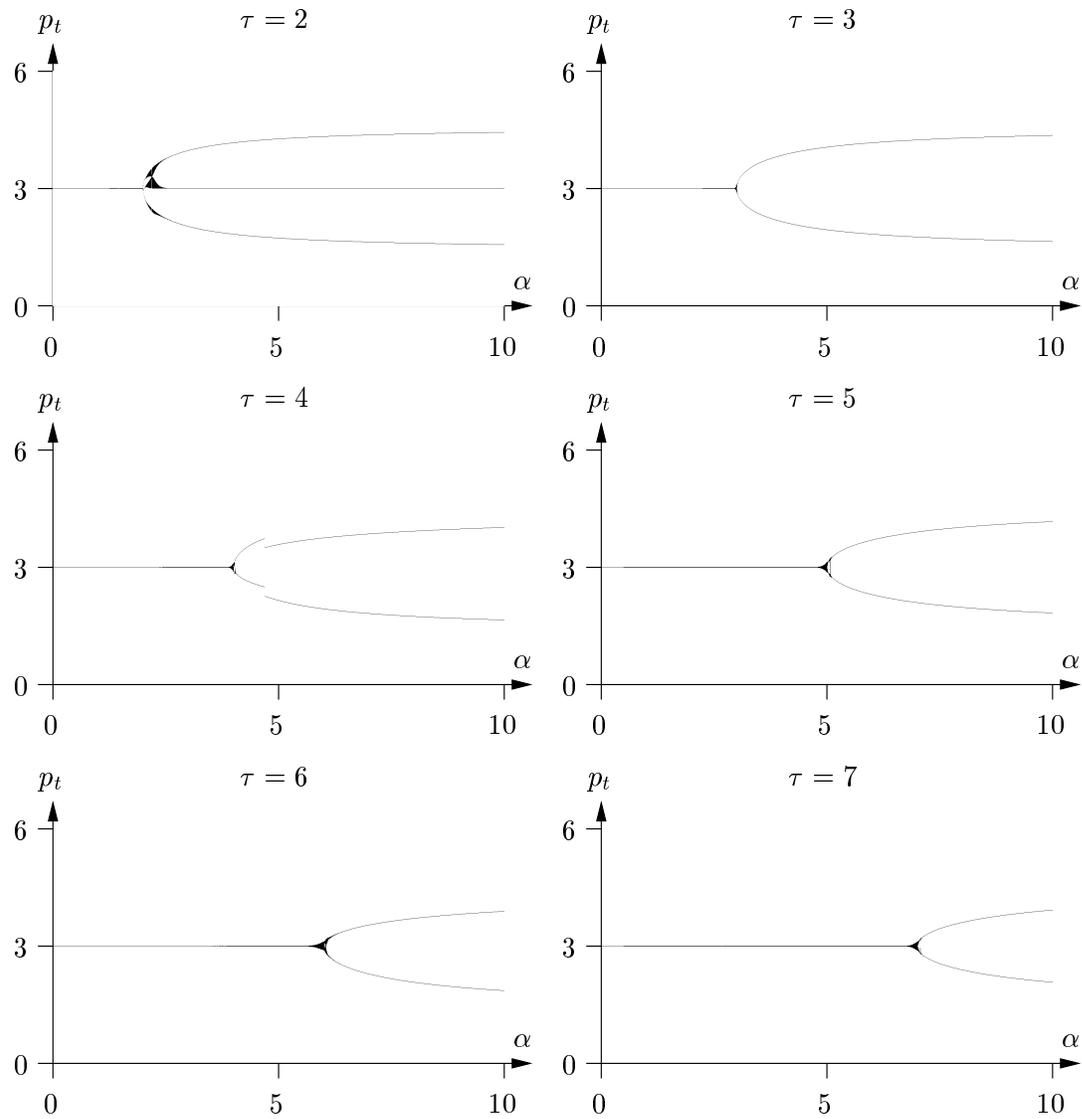


Abbildung 4.3: Ein-Parameter Bifurkationsdiagramme in  $\alpha \in (0, 10]$  für  $\tau = 2, \dots, 7$  und  $a = 6.0$ .

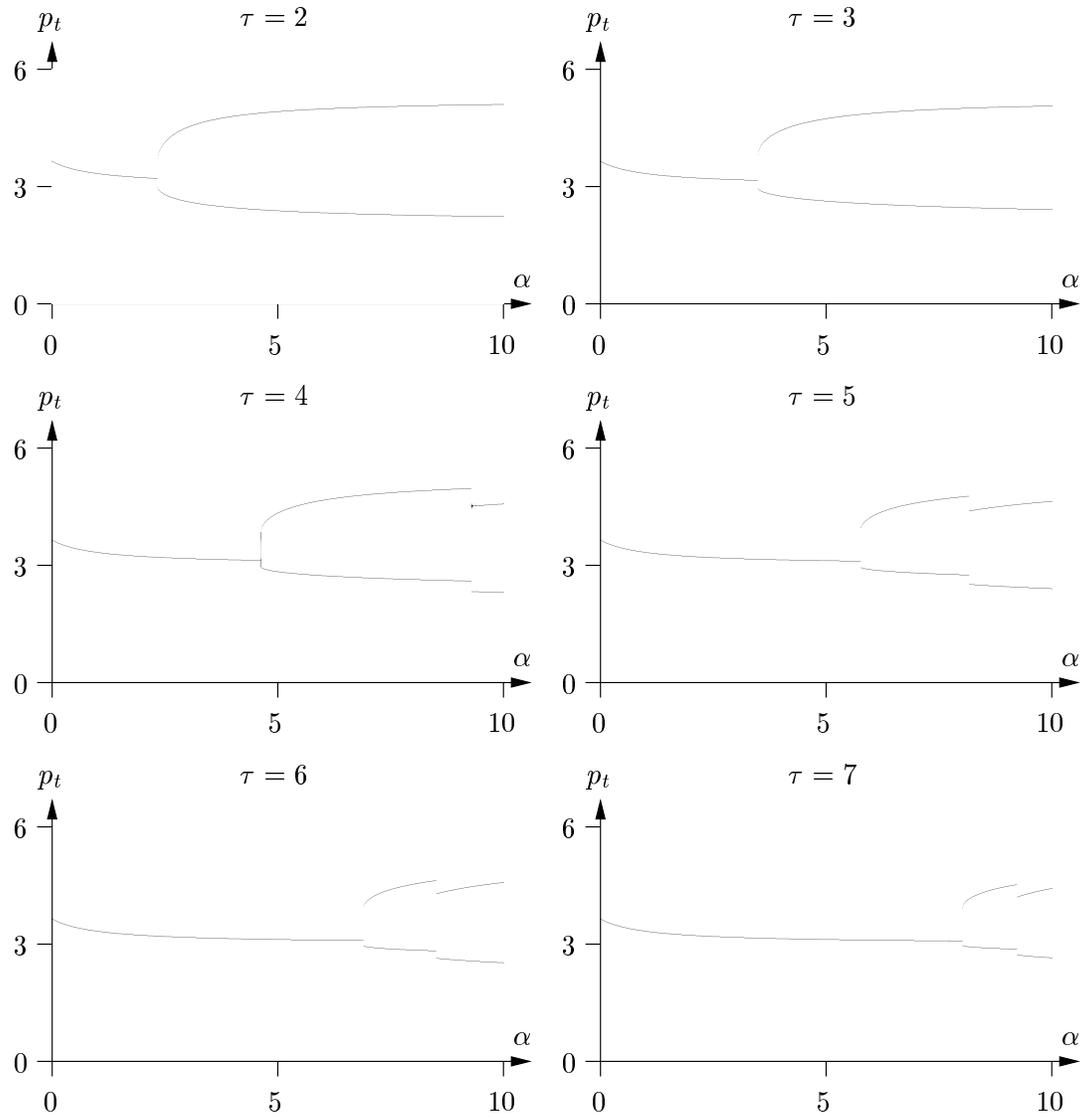


Abbildung 4.4: Ein-Parameter Bifurkationsdiagramme in  $\alpha \in (0, 10]$  für  $\tau = 2, \dots, 7$  und  $a = 6.65$ .

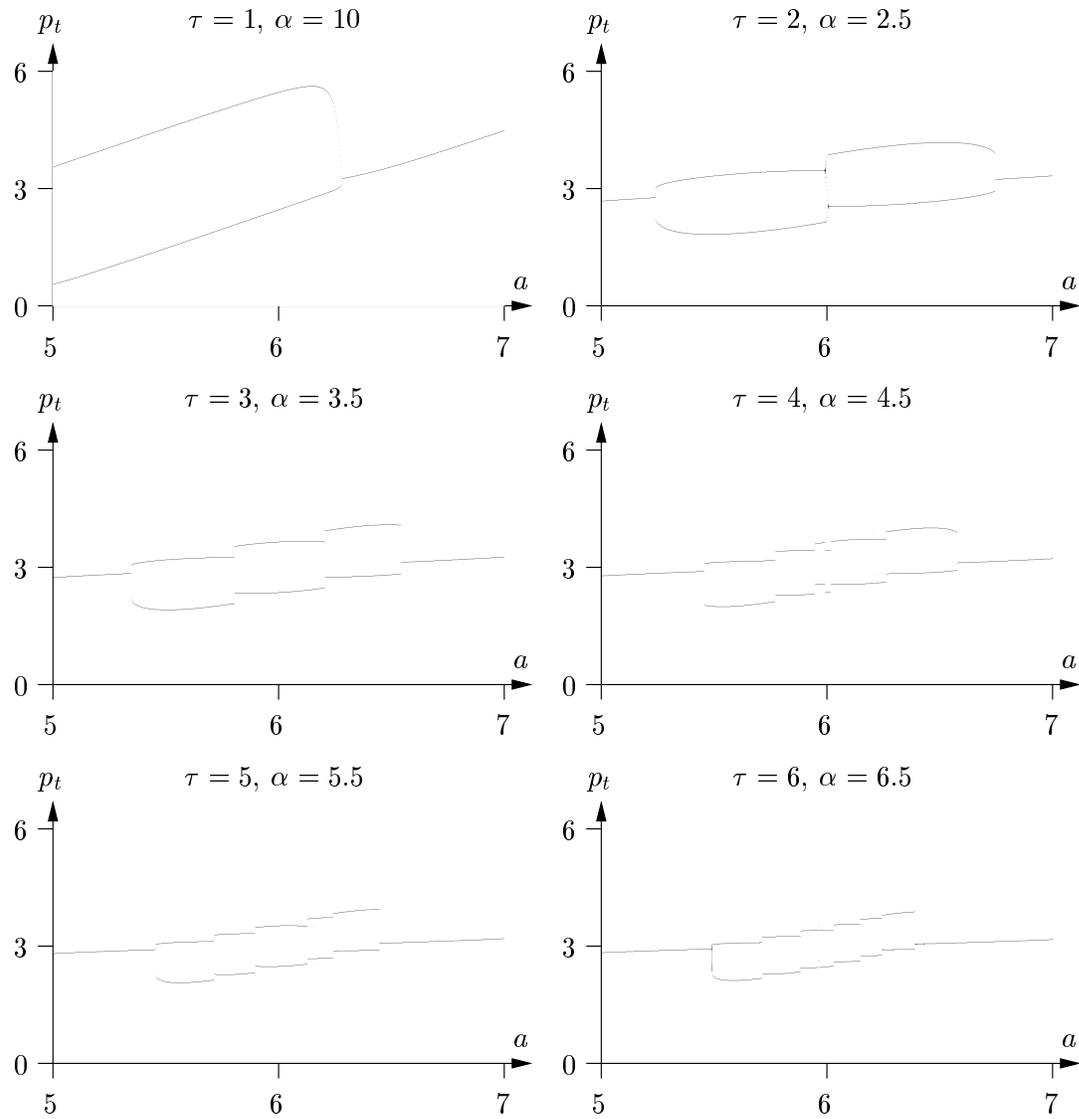


Abbildung 4.5: Ein-Parameter Bifurkationsdiagramme in  $a \in [5, 7]$  für  $\tau = 1, \dots, 6$ .

Gedächtnis $\tau$	# koexist. Zyklen	Ordnung
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	2	5 ; 5
5	1	6
6	2	7 ; 7
7	1	8
8	2	9 ; 9
9	1	10
10	2	11 ; 11

Tabelle 4.1: Die Ordnung der koexistierenden Zyklen für  $\tau = 1, \dots, 10$  bei einer maximalen Nachfrage von  $a = 6$  und entsprechend großem Faktorpreisverhältnis.

#### 4.2.2 Die Struktur der lokal stabilen koexistierenden Zyklen

Modelle vom Cobweb-Typ mit dem ungewichteten Durchschnitt als Prognoseregel weisen nur Zyklen von ganz bestimmter Ordnung auf. Böhm & Wenzelburger (1995) haben gezeigt, daß der Grund hierfür die Invarianz dieser Modelle gegenüber einer zyklischen Permutation der Zustandsvariablen ist. Falls die Gedächtnislänge des ungewichteten Durchschnitts  $\tau$  ist und das Modell einen Zyklus der Ordnung  $1 < k < \tau$  aufweist, so muß  $\tau/k \notin \mathbb{N}$  gelten. Für  $a = 6$ ,  $\tau \leq 10$  und  $\alpha > 10$  sind in Tabelle 4.1 die Ordnungen der verschiedenen lokal stabilen Zyklen des Cobweb-Modells (4.6) zusammengefaßt. Ist die Gedächtnislänge  $\tau$  gerade, dann koexistieren Zyklen der Ordnung  $\tau + 1$ . Ist die Gedächtnislänge  $\tau$  ungerade, dann tritt ein Zyklus der Ordnung  $\tau + 1$  auf. Die Zyklen besitzen darüber hinaus eine typische Struktur. Sie lassen sich jeweils als zyklische Permutation eines  $\tau + 2$ -dimensionalen Vektors darstellen. Die Komponenten dieses Vektors nehmen ausschließlich zwei verschiedene Werte  $c_1 > 0$ ,  $c_2 < 0$  (bzw. im koexistierenden Fall  $c_3 < 0$ ,  $c_4 > 0$ ) an, wobei  $c_1$  und  $c_2$  (bzw.  $c_3$  und  $c_4$ ) stetig von  $a$  und  $\alpha$  abhängen.

Für  $a = 6.65$  ist das Bildungsgesetz  $f(p_{t,t+1}^e, 6.65, \alpha)$  asymmetrisch zum Gleichgewichtspreis. Unabhängig davon, ob die Gedächtnislänge  $\tau > 2$  gerade oder un-

$\{s_i\}_{i=1}^5$	$\{\tilde{s}_i\}_{i=1}^5$
$s_1 = (c_1, c_2, c_1, c_2)$	$\tilde{s}_1 = (c_3, c_4, c_3, c_4)$
$s_2 = (c_2, c_1, c_2, c_2)$	$\tilde{s}_2 = (c_4, c_3, c_4, c_4)$
$s_3 = (c_1, c_2, c_2, c_1)$	$\tilde{s}_3 = (c_3, c_4, c_4, c_3)$
$s_4 = (c_2, c_2, c_1, c_2)$	$\tilde{s}_4 = (c_4, c_4, c_3, c_4)$
$s_5 = (c_2, c_1, c_2, c_1)$	$\tilde{s}_5 = (c_4, c_3, c_4, c_3)$

Tabelle 4.2: Die Struktur der beiden koexistierenden Zyklen der Ordnung 5 für  $a = 6$ .

Gedächtnis $\tau$	# koexist. Zyklen	Ordnung
1	1	2
2	1	3
3	2	1 ; 4
3	2	4 ; 4
4	2	1 ; 5
4	2	5 ; 5
5	2	1 ; 6
5	2	6 ; 6
6	2	1 ; 7
6	2	7 ; 7

Tabelle 4.3: Die Ordnung der koexistierenden Zyklen für  $\tau = 1, \dots, 6$  bei einer maximalen Nachfrage von  $a = 6.65$  und bei unterschiedlich großem Faktorpreisverhältnis  $\alpha$ .

gerade ist, koexistieren bei entsprechend großem Faktorpreisverhältnis  $\alpha$  jeweils zwei lokal stabile Zyklen. Die Tabelle 4.3 zeigt für  $\tau = 1, \dots, 6$  und für unterschiedliche  $\alpha > 0$  die Ordnungen der lokal stabilen koexistierenden Zyklen.

Bestimmt man beispielsweise numerisch die koexistierenden Zyklen des Cobweb-Modells im Falle von  $\tau = 4$  und  $a = 6$  oder  $a = 6.65$ , so koexistieren für  $\alpha > \tilde{\alpha}$  jeweils zwei lokal stabile Zyklen  $\{s_i\}_{i=1}^5$  und  $\{\tilde{s}_i\}_{i=1}^5$ . Die Tabelle 4.2 zeigt die Struktur dieser beiden koexistierenden Zyklen. Sie entspricht der zyklischen Permutation eines 5-dimensionalen Vektors. Bei einer Änderung des Startwertes  $p_1$  oder bei einer Variation des Faktorpreisverhältnisses konvergiert das Cobweb-Modell entweder gegen den Zyklus  $\{s_i\}_{i=1}^5$  oder gegen den Zyklus  $\{\tilde{s}_i\}_{i=1}^5$ . Man sehe hierzu auch das Einzugsbereich-Diagramm in Abbildung 4.6 für  $\tau = 4$  und  $a = 6$  bzw.  $a = 6.65$ , sowie das Bifurkationsdiagramm mit  $\tau = 4$  in Abbildung 4.3 bzw. in Abbildung 4.4.

*Eigenschaften von koexistierenden Zyklen bei einer Änderung von  $a \in [5, 7]$ :*

Die Bifurkationsdiagramme 4.5 zeigen für  $\tau = 1, \dots, 6$  und festen Startwert  $(p_\tau, \dots, p_1)$  die Änderung des dynamischen Langzeitverhaltens bei einer Variation von  $a$ . Da sich bei zunehmendem  $a$  die Form der Einzugsbereiche verändert, liegt der Startwert entweder im Einzugsbereich des stationären Zustandes oder im Einzugsbereich eines koexistierenden Zykluses.

Wird  $\tau$  größer, dann nimmt auch die Anzahl der Sprünge zwischen den Einzugsbereichen zu. Dies ist ein numerischer Hinweis darauf, daß bei größer werdender Gedächtnislänge  $\tau$  die Einzugsbereiche eine zunehmend kompliziertere Struktur aufweisen.

*Einzugsbereiche der koexistierenden Zyklen für Startwerte  $p_1 \in [0, 6]$ :*

Die Einzugsbereich-Diagramme in Abbildung 4.6 zeigen die Veränderung des Konvergenzverhaltens des Cobweb-Modells bei einer Variation der ersten Komponente  $p_1$  des Startwertvektors  $(p_\tau, \dots, p_1)$ . Die Einzugsbereich-Diagramme in Abbildung 4.6 für  $a = 6$  und  $\tau = 4, \tau = 6$  bzw. für  $a = 6.65$  und  $\tau = 4, \tau = 5$  lassen den Schluß zu, daß bei großer Gedächtnislänge und einem hohen Faktorpreisverhältnis die Einzugsbereiche der Zyklen eine komplizierte Struktur besitzen. Brock & Hommes (1997) führen zur Beschreibung der komplizierten Strukturen von Startwerteinzugsbereichen den Begriff der Unsicherheitsdimen-

sion ein. Ein dynamisches System, dessen Startwertebereich eine positive Unsicherheitsdimension aufweist, hat die folgende Eigenschaft. Kann der jeweilige Zustand des Systems nur bis zu einem gewissen Fehlergrad ermittelt werden, so existiert eine offene Menge von Startwerten, für die das dynamische Verhalten des Systems trotz Kenntnis der zugrundeliegenden Gleichungen nicht bestimmbar ist. Im Falle einer mangelnden Meßgenauigkeit oder im Falle des Auftretens zufälliger Meßfehler ist ein solches dynamisches System nur bedingt vorhersagbar. Eine formale Darstellung des Zusammenhangs von Unsicherheitsdimension und Vorhersagbarkeit findet man in der Arbeit von McDonald, Grebogi, Ott & Yorke (1985).

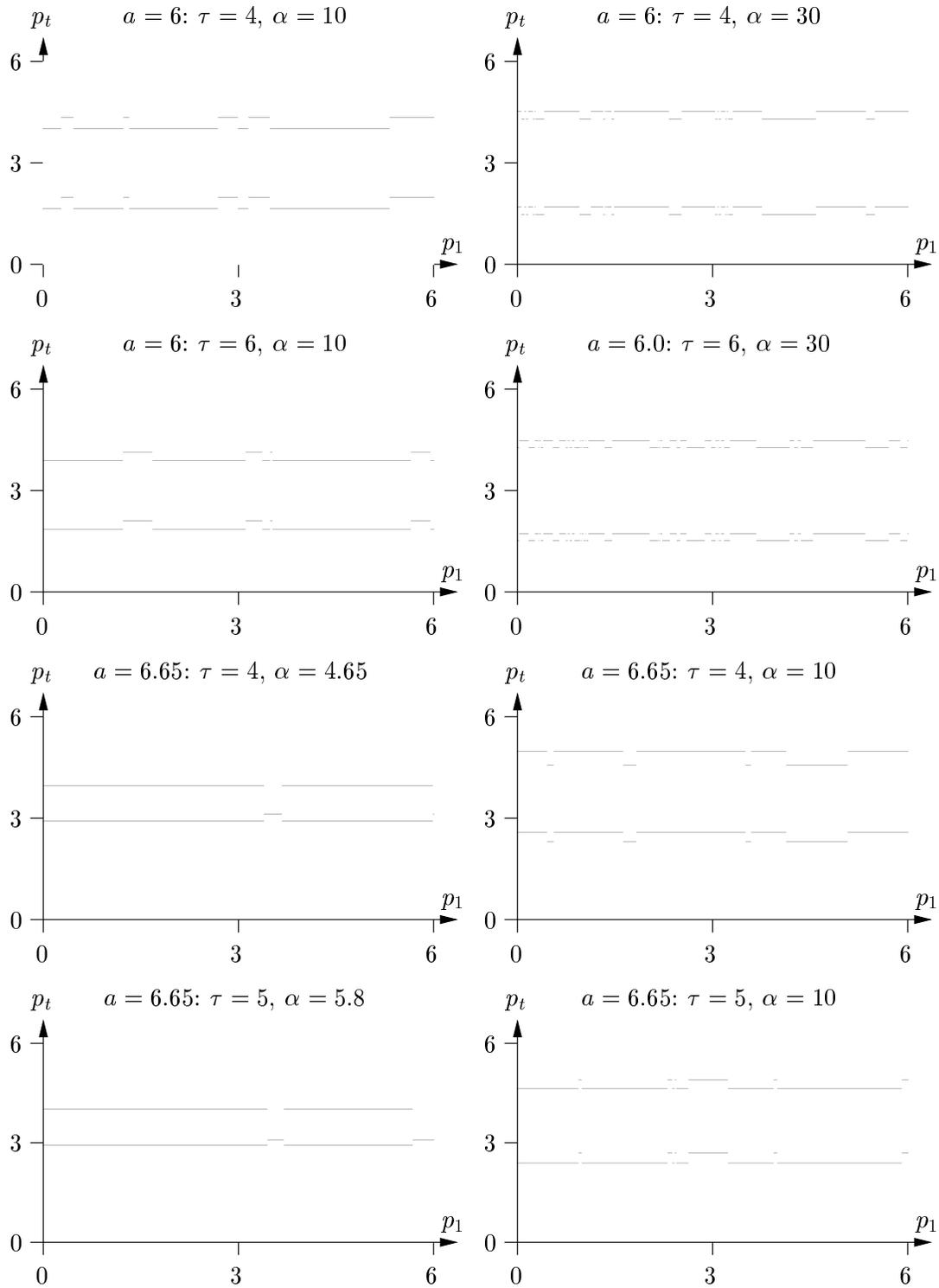


Abbildung 4.6: Einzugsbereiche koexistierender Zyklen in  $p_1 \in [0, 6]$  für  $a = 6.0$  und  $a = 6.65$ .

### 4.2.3 Schlußfolgerungen

Die numerische Analyse des Cobweb-Modells mit S-förmigem Bildungsgesetz und ungewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln hat folgendes ergeben.

Der Gleichgewichtspreis des Cobweb-Modells ist monoton fallend im Faktorpreisverhältnis  $\alpha$  und streng monoton wachsend in der maximalen Nachfrage  $a$ . Das Bildungsgesetz weist bei einem hohen Faktorpreisverhältnis am Gleichgewichtspreis eine negative Elastizität von hohem Betrag auf. Der entsprechende stationäre Zustand des Cobweb-Modells ist dann erst ab einer bestimmten Gedächtnislänge der Prognoseregeln lokal stabil.<sup>7</sup> Der stationäre Zustand verliert bei einer entsprechenden Zunahme des Faktorpreisverhältnisses seine Stabilität aufgrund einer degenerierten Hopf- bzw. Flip-Bifurkation. Hierbei treten lokal stabile koexistierende Zyklen auf und die Amplitude dieser zyklischen Preisschwankungen nimmt mit wachsendem Faktorpreisverhältnis zu.

Aperiodische Formen des dynamischen Verhaltens weist das Cobweb-Modell, außer im Falle von  $\tau = 2$  und  $\alpha > 2$ , nicht auf. Die Struktur und die Ordnung der lokal stabilen koexistierenden Zyklen hängt in charakteristischer Weise von der Länge des Gedächtnisses ab. Die Einzugsbereiche der koexistierenden Zyklen weisen bei großer Gedächtnislänge und bei hohem Faktorpreisverhältnis eine komplizierte Struktur auf. Dies kann zur Folge haben, daß das Cobweb-Modell (für außenstehende Beobachter) nur bedingt vorhersagbar ist.

## 4.3 Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt

Bei einer Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt

$$p_{t,t+1}^e = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} \sum_{k=0}^{\tau-1} w^k p_{t-k}$$

können die vergangenen Beobachtungen  $p_t, \dots, p_{t-\tau+1}$ , je nach Gewichtungsfaktor  $w \in (0, \infty)$  und Gedächtnislänge  $\tau \in \mathbb{N}$ , unterschiedlich gewichtet werden.

<sup>7</sup>Die Untersuchung einzelner Trajektorien des Cobweb-Modells zeigt, daß der stationäre Zustand bei längerem Gedächtnis zwar lokal stabil ist, daß sich jedoch die Konvergenzgeschwindigkeit der Trajektorien gegen den stationären Zustand verringert. Bei einer Gedächtnislänge von  $\tau = 1$  konvergieren die Trajektorien lokal mit einem Konvergenzfaktor von  $\delta = f'(\hat{p}_{(a,\alpha)}, a, \alpha)$  gegen den stationären Zustand  $\hat{p}_{(a,\alpha,\tau)}$ . Für  $\tau > 1$  verringert sich dieser geometrische Konvergenzfaktor, wobei teilweise ein Konvergenzfaktor  $\delta_\tau = \sqrt[\tau]{\delta}$  beobachtet wird.

Die Prognose  $p_{t,t+1}^e$  ist für jedes  $w \in (0, \infty)$  und jedes  $\tau \in \mathbb{N}$  in der konvexen Hülle der vergangenen Beobachtungen  $p_t, \dots, p_{t-\tau+1}$ . Das Cobweb-Modell mit S-förmigem Bildungsgesetz (4.5) und dem geometrisch gewichteten Durchschnitt als Prognoseregeln entspricht bei Anfangswerten  $p_\tau \in [0, 6], \dots, p_1 \in [0, 6]$  der stetig differenzierbaren Differenzgleichung:

$$p_{t+1} = \frac{a-3}{b} - \frac{1}{b} \arctan\left(\alpha \left( \frac{1}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} \sum_{k=0}^{\tau-1} w^k p_{t-k} - 3 \right)\right), \quad t \geq \tau.$$

Außerdem ist die Differenzgleichung in den Parametern  $a \in [5, 7]$ ,  $b \geq 1$ ,  $\alpha \in (0, 30]$  und  $w > 0$  stetig differenzierbar. Darüberhinaus wird  $\tau \geq 2$  vorausgesetzt, da der Fall  $\tau = 1$  dem oben untersuchten Fall naiver Erwartungen entspricht.

Da sich die Dynamik des Cobweb-Modells (4.8) bei einer Variation der Parameter von  $(a, b, \alpha, w, \tau)$  nach  $(a, b + \delta, \alpha, w, \tau)$  in gleicher Weise ändert, wie bei einer Variation der Parameter von  $(a, b, \alpha, w, \tau)$  nach  $(a - 3\delta, b, \frac{\alpha b}{b+\delta}, w, \tau)$ , wird der Parameter  $b$  als  $b = 1$  festgesetzt. Das Bildungsgesetz des Cobweb-Modells wird im folgenden mit  $f(p_{t,t+1}^e, a, \alpha)$  abgekürzt.

### 4.3.1 Ein-Parameter Bifurkationsanalyse: Faktorpreisverhältnis und Gewichtungsfaktor

Im diesem Abschnitt wird der Einfluß der Gedächtnislänge  $\tau$  und des Gewichtungsfaktors  $w$  auf die Dynamik des Cobweb-Modells (4.8) bei unterschiedlichem Faktorpreisverhältnis  $\alpha$  numerisch analysiert. Insbesondere wird die Frage untersucht, inwiefern sich die Dynamik des Cobweb-Modells bei einem Gewichtungsfaktor  $w < 1$  von der Dynamik bei einem Gewichtungsfaktor  $w > 1$  unterscheidet. Hierzu wird das Bifurkationsverhalten des Cobweb-Modells bei Änderung des Faktorpreisverhältnisses  $\alpha$  für ein festes  $w < 1$  und für ein festes  $w > 1$  untersucht. Außerdem wird für den Fall eines festen Faktorpreisverhältnisses  $\alpha$  das Bifurkationsverhalten des Modells bei Variation des Gewichtungsfaktors von  $w < 1$  nach  $w > 1$  bestimmt. Die numerische Analyse wird zeigen, daß für  $w < 1$  bei einer Änderung des Faktorpreisverhältnisses komplexe Formen des dynamischen Verhaltens, wie etwa sensitive Abhängigkeit von den Startwerten, auftritt. Im Falle von  $w > 1$  verhält sich das Cobweb-Modell periodisch oder quasi-periodisch. Ein chaotisches Verhalten tritt nicht auf. Vergleicht man die Bifurkationsdiagramme des Cobweb-Modells mit geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln und die Bifurkationsdiagramme des Cobweb-Modells mit line-

ar adaptiver Prognoseregeln, so gibt es bei großer Gedächtnislänge verschiedene Übereinstimmungen zwischen dem Bifurkationsverhalten der beiden Modelle.

Bifurkationsdiagramme eignen sich vor allem dazu, die verschiedenen Formen des periodischen Verhaltens eines Systems zu untersuchen, die bei einer Variation der Parameter auftreten. Eine Unterscheidung von Zyklen mit sehr hoher Ordnung und quasi-periodischem Verhalten, oder auch eine Unterscheidung von quasi-periodischem Verhalten und chaotischem Verhalten, ist mit Hilfe von Bifurkationsdiagrammen meistens nur schwer möglich. Zusätzliche Informationen in bezug auf die dynamischen Eigenschaften eines Systems ergeben sich aus Lyapunov Exponenten Diagrammen. Für einen festen Startwert und für Parameterwerte aus einem vorgegebenen Parameterintervall wird der jeweilige maximale Lyapunov Exponent mittels des Algorithmus von Benettin, Galgani, Giorgilli & Strelcyn (1980) berechnet. Die maximalen Lyapunov Exponenten werden dann als Funktion des Parameters in einem Diagramm abgetragen. Nach Abschnitt 3.3.1 ergeben sich aus dem Verhalten des maximalen Lyapunov Exponenten, in der Umgebung der Bifurkationsstelle, Hinweise auf den Bifurkations-Typ. Ein positiver maximaler Lyapunov Exponent impliziert sensitive Abhängigkeit des Systems von den Anfangswerten und damit das Auftreten von Chaos. Ist der Lyapunov Exponent negativ, dann konvergiert das System gegen einen stabilen stationären Zustand oder Zyklus. Der Betrag des negativen Lyapunov Exponenten entspricht der exponentiellen Konvergenzgeschwindigkeit der Trajektorien zum stabilen Zustand.

### **Einfluß des Faktorpreisverhältnisses auf die Dynamik**

Ist bei einer Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt der Gewichtungsfaktor  $w < 1$ , so ist der Einfluß der vor kurzem gemachten Beobachtungen auf die Prognose weitaus stärker, als der Einfluß der weiter zurückliegenden Beobachtungen. Anhand der Bifurkationskurven des Cobweb-Modells in Abbildung 3.1 lassen sich nur Aussagen in bezug auf das dynamische Verhalten des Cobweb-Modells in der Umgebung des stationären Zustandes ableiten. Verschiedene Aspekte des allgemeinen Bifurkationsverhaltens des Cobweb-Modells können aufgrund der folgenden numerischen Analyse bestimmt werden.

*Bifurkationsverhalten in  $\alpha \in (0, 30]$  für  $w = 0.8$ ,  $a = 6.65$  und  $\tau = 2, 3, 4, 5$ :*

Die Bifurkationsdiagramme und Lyapunov Exponenten Diagramme<sup>8</sup> in Abbildung 4.7 zeigen das Bifurkationsverhalten im Faktorpreisverhältnis  $\alpha \in (0, 30]$  für Gewichtungsfaktor  $w = 0.8$ , maximale Nachfrage  $a = 6.65$  und Gedächtnislänge  $\tau = 2, 3, 4, 5$ . Die folgenden Aussagen lassen sich ableiten:

Ist  $\tau = 2$ , dann erfährt das Cobweb-Modell bei wachsendem  $\alpha$  zunächst eine Hopf-Bifurkation. Das Auftreten einer Hopf-Bifurkation ergibt sich auch aus der Bifurkationskurve des Cobweb-Modells in Abbildung 3.1. Entsprechend dem Lyapunov Exponenten Diagramm liegen die maximalen Lyapunov Exponenten für  $\alpha$  oberhalb der Hopf-Bifurkationsstelle nahe bei 0. Das ist ein numerischer Hinweis darauf, daß aufgrund der Hopf-Bifurkation quasi-periodische Attraktoren auftreten. Bei weiter zunehmendem Faktorpreisverhältnis  $\alpha$  treten positive maximale Lyapunov Exponenten auf. Damit ist eine sensitive Abhängigkeit des Cobweb-Modells von den Startwerten gegeben. Bei entsprechend großem  $\alpha$  konvergiert das Cobweb-Modell gegen einen global stabilen 3-Zyklus. Man vergleiche darüber hinaus das Bifurkationsdiagramm mit dem Zyklusdiagramm in Abbildung 4.13.

Für  $\tau = 3$  kommt es bei zunehmendem  $\alpha$  zu einer Flip-Bifurkation und dann zu einer Folge von Perioden-Verdopplungen. Das Auftreten einer Flip-Bifurkation ergibt sich auch aus der Bifurkationskurve des Cobweb-Modells in Abbildung 3.1. Für  $\alpha > 5$  treten positive Lyapunov Exponenten auf, mit einer Größenordnung von bis zu 1.5. Wird  $\alpha$  weiter erhöht, so verhält sich das Cobweb-Modell für  $\alpha$  aus Teilintervallen von  $(8, 30)$  periodisch. Solche Teilintervalle werden auch als *periodische Fenster* bezeichnet.

Für  $\tau = 4$  erfährt das Cobweb-Modell für zunehmendes  $\alpha$  eine Hopf-Bifurkation. Aufgrund des Lyapunov Exponenten Diagramm ergibt sich ein numerischer Hinweis darauf, daß nach der Hopf-Bifurkation zunächst quasi-periodische Attraktoren auftreten. Für ein Faktorpreisverhältnis  $\alpha \leq 16$  findet man numerisch keine signifikant positiven Lyapunov Exponenten. Das Intervall  $(13, 16)$  weist mehrere periodische Fenster auf. Für  $\alpha > 16$  existieren dann auch signifikant po-

---

<sup>8</sup>Zur Erstellung der Lyapunov Exponenten Diagramme wird das Cobweb-Modell für einen festen Startwert und für jeden Parameterwert 5000 mal iteriert. Für die letzten 2000 Iterationen berechnet der Algorithmus von Benettin, Galgani, Giorgilli & Strelcyn (1980) jeweils die maximale lokale Streckung und approximiert den maximalen Lyapunov Exponenten als den Durchschnitt aller dieser lokalen Streckungen.

sitive Lyapunov Exponenten. Ist  $\alpha > 27$ , dann konvergiert das Cobweb-Modell gegen einen global stabilen Zyklus.

Für  $\tau = 5$  erfährt das Cobweb-Modell in  $\alpha$  zunächst eine Flip-Bifurkation. Der 2-Zyklus erfährt anschließend eine Hopf-Bifurkation. Für verschiedene  $\alpha \in (8, 9)$  treten positive Lyapunov Exponenten auf. Ist  $\alpha > 9$ , dann konvergiert das Cobweb-Modell gegen einen 3-Zyklus. Man vergleiche das Bifurkationsdiagramm auch mit dem entsprechenden Zycklogramm in Abbildung 4.13.

Unabhängig von der Gedächtnislänge der Prognoseregeln gilt, daß der Durchmesser der Attraktoren<sup>9</sup> des Cobweb-Modells bei zunehmendem Faktorpreisverhältnis größer wird. Das bedeutet, daß bei höherem Faktorpreisverhältnis größere Preisschwankungen auftreten.

Hat die Prognoseregeln eine Gedächtnislänge  $\tau$ , so ist der Zustandsraum des Cobweb-Modells  $\tau$ -dimensional. Da eine  $\tau$ -dimensionale Darstellung der Trajektorien nicht möglich ist, werden für verschiedene Parameterkombinationen zwei-dimensionale Einbettungen der  $\tau$ -dimensionalen Attraktoren des Cobweb-Modells untersucht.

---

<sup>9</sup>Sei  $|\cdot|$  die Euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^n$ . Der Durchmesser  $\delta(M)$  einer Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist definiert als  $\sup\{|x - y| \mid x, y \in M\}$ .

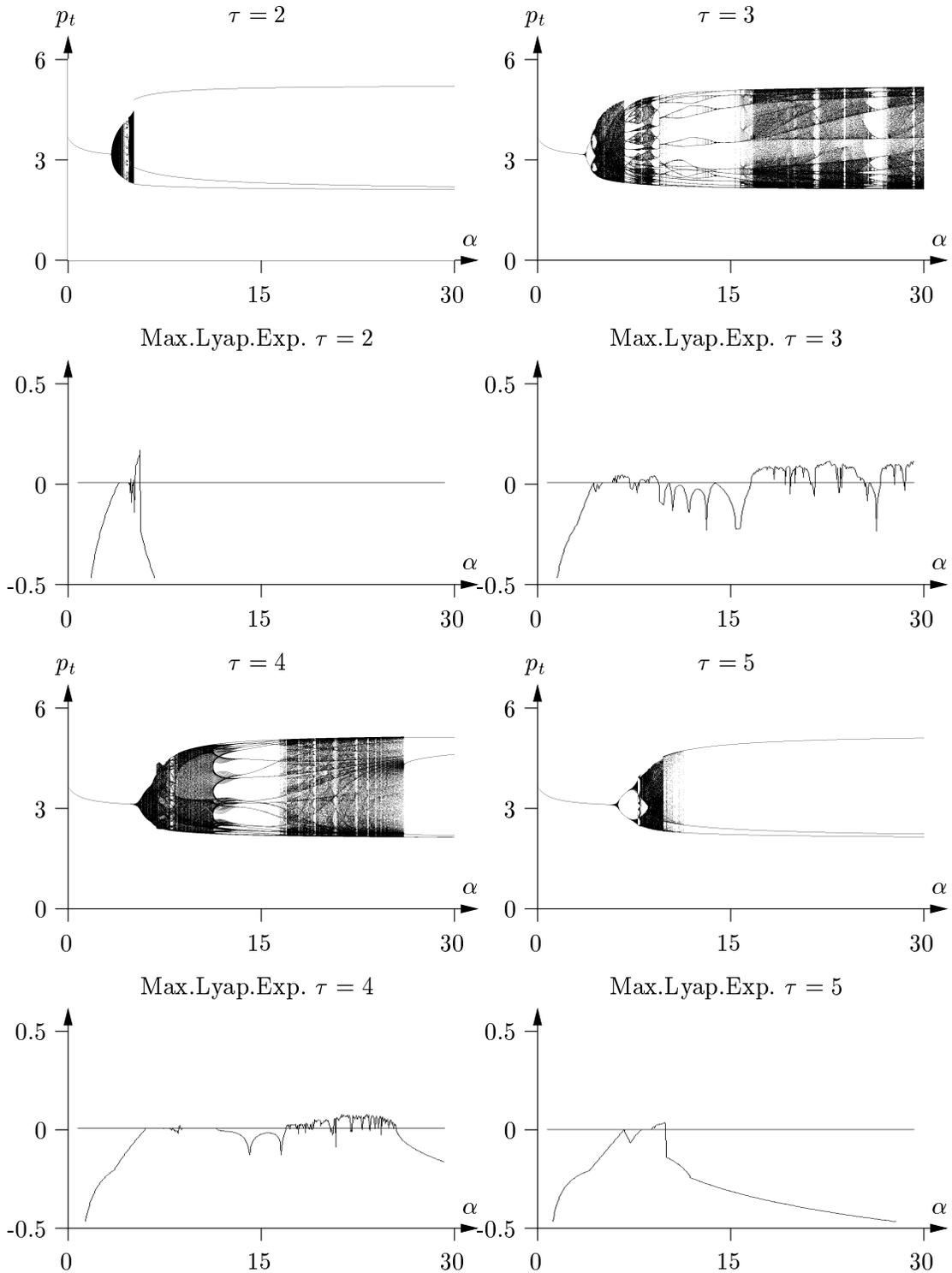


Abbildung 4.7: Ein-Parameter Bifurkationsdiagramme und Diagramme des max. Lyap. Exp. in  $\alpha \in (0, 30]$  für  $\tau = 2, \dots, 5$  mit  $a = 6.65$ ,  $w = 0.8$ .

*Attraktoreinbettungen für  $\tau = 3$  und  $\tau = 4$  mit  $a = 6.65$  und  $w = 0.8$ :*

Die Abbildung 4.8 zeigt eingebettete Attraktoren<sup>10</sup> für Gedächtnislänge  $\tau = 3$  und für die Faktorpreisverhältnisse  $\alpha = 7, 9, 15, 20$ . Der Attraktor für  $\alpha = 7$  ist ein Zyklus der Ordnung 32, der während einer Phase von Perioden–Verdopplung auftritt. Nach der Phase der Perioden–Verdopplung treten für bestimmte Faktorpreisverhältnisse, etwa für  $\alpha = 9$ , Attraktoren mit einer fraktalen Struktur auf. Innerhalb der periodischen Fenster, beispielsweise für  $\alpha = 15$ , treten Zyklen von niedriger Ordnung auf. Der Attraktor für  $\alpha = 20$  weist eine fraktale Struktur auf, die ähnlich zur Struktur des Attraktors für  $\alpha = 9$  ist.

Die Abbildung 4.8 zeigt für Gedächtnislänge  $\tau = 4$  und für die Faktorpreisverhältnisse  $\alpha = 7, 9, 15, 20$  zwei–dimensional eingebettete Attraktoren des Cobweb–Modells. Der Attraktor für  $\alpha = 7$  ist ein Zyklus von hoher Ordnung und tritt nach einer Hopf–Bifurkation auf. Für  $\alpha = 9$  liegt ein Attraktor von fraktaler Struktur vor. Für Faktorpreisverhältnisse innerhalb des periodischen Fensters, etwa für  $\alpha = 15$ , treten Zyklen von niedriger Ordnung auf. Der Attraktor für  $\alpha = 20$  hat eine fraktale Struktur. Die Struktur dieses Attraktors ist wiederum ähnlich zur Struktur des Attraktors bei  $\alpha = 9$ . Unabhängig von der Gedächtnislänge zeigt sich numerisch, daß im Falle eines niedrigen Preises  $p_{t-1}$  in Periode  $t - 1$  in der nächsten Periode  $t$  sowohl ein hoher wie auch ein niedriger Preis  $p_t$  auftreten kann. Im Falle eines hohen Preises  $p_{t-1}$  in Periode  $t - 1$  ergibt sich in der nächsten Periode  $t$  immer ein niedriger Preis  $p_t$ .

Ist bei einer Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt der Gewichtungsfaktor  $w > 1$ , so ist der Einfluß der vor kurzem gemachten Beobachtungen auf die Prognose weitaus schwächer, als der Einfluß der weiter zurückliegenden Beobachtungen. Entsprechend den Bifurkationskurven aus Abbildung 3.1 erfährt das Cobweb–Modell bei einer Gedächtnislänge  $\tau = 2, 3, 4, 5, 6$  oder  $\tau = 7$  der Prognoseregeln für das Faktorpreisverhältnis  $\tilde{\alpha}_\tau$  eine Hopf–Bifurkation. Bei einer weiteren Erhöhung des Faktorpreisverhältnisses kommt es zu folgendem Bifurkationsverhalten.

---

<sup>10</sup>Zu einem festen Startwert wird ein Orbit mit 40000 Iterationswerten berechnet. Um bis zu einem gewissen Grade transientes Verhalten auszuschließen, werden nur die letzten 10000 Iterationswerte  $p_t$  als Paare  $(p_t, p_{t-1})$  dargestellt.

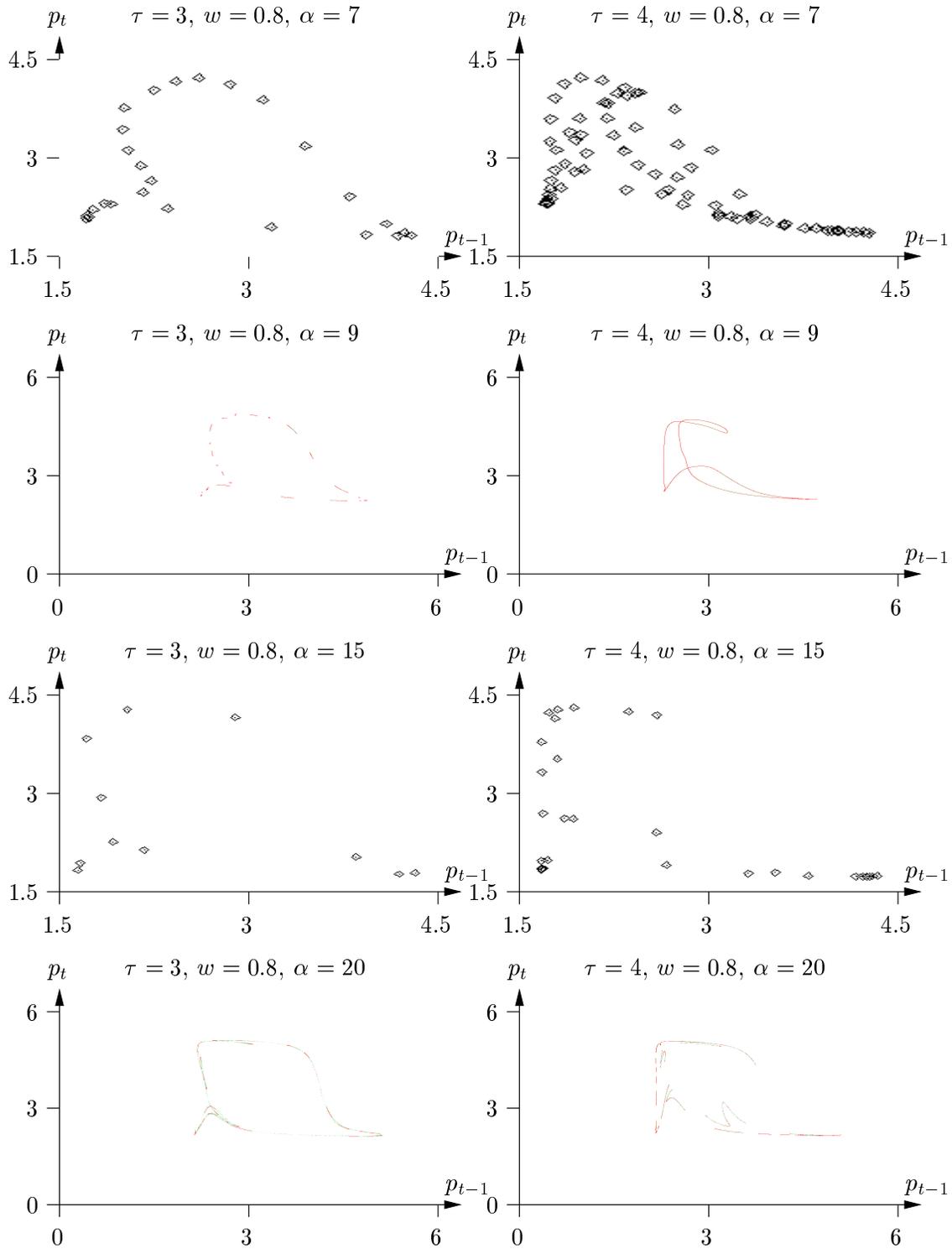


Abbildung 4.8: Attraktoren im  $(p_t, p_{t-1})$ -Raum für  $\tau = 3$  und  $\tau = 4$  mit  $a = 6.65$  und  $w = 0.8$ .

*Bifurkationsverhalten in  $\alpha \in (0, 30]$  für  $w = 1.5$ ,  $a = 6.65$  und  $\tau = 2, 3, 4, 5$ :*

Die Bifurkationsdiagramme und Lyapunov Exponenten Diagramme in Abbildung 4.9 zeigen, daß der Wert  $\tilde{\alpha}_\tau$ , zu dem das Cobweb-Modell eine Hopf-Bifurkation erfährt, in der Nähe von 2 liegt. Für  $\alpha > \tilde{\alpha}_\tau$  treten quasi-periodische Attraktoren auf. Numerische Evidenz für die Quasi-Periodizität des Cobweb-Modells folgt aus dem Verhalten der maximalen Lyapunov Exponenten, denn die sind für  $\alpha > \tilde{\alpha}_\tau$  kleiner oder gleich Null. Für große Werte von  $\alpha$  verschwindet der quasi-periodische Attraktor und das Cobweb-Modell konvergiert gegen einen Zyklus. Die Ordnung des Zykluses hängt von der Gedächtnislänge  $\tau$  ab. Man vergleiche die Bifurkationsdiagramme auch mit den entsprechenden Zyklogrammen der Abbildung 4.13. Komplexe Formen des dynamischen Verhaltens treten im Falle von  $w > 1$  nicht auf.

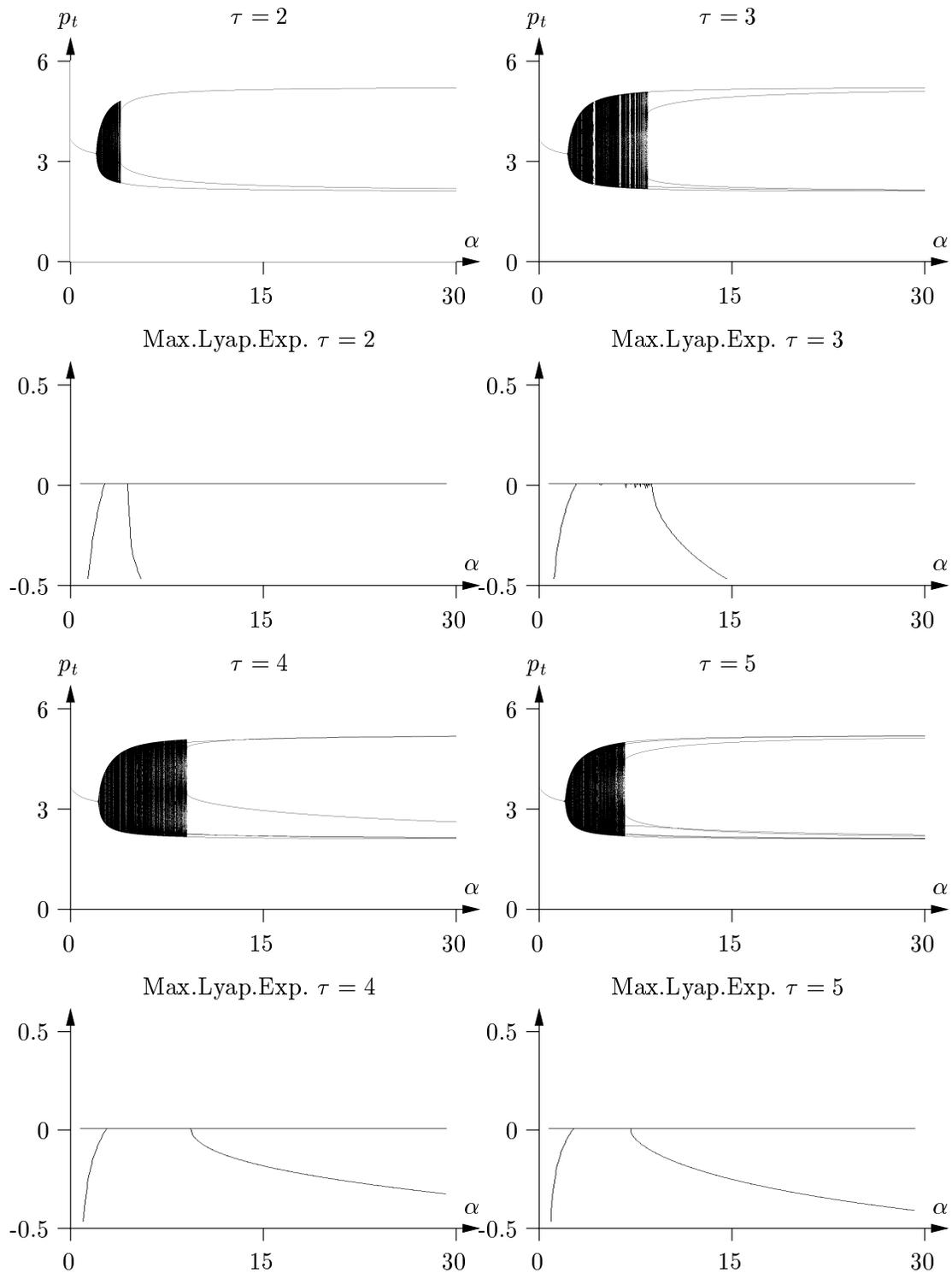


Abbildung 4.9: Ein-Parameter Bifurkationsdiagramme und Diagramme des max. Lyap. Exp. in  $\alpha \in (0, 30]$  für  $\tau = 2, \dots, 5$  mit  $a = 6.65$ ,  $w = 1.5$ .

### Einfluß des Gewichtungsfaktors auf die Dynamik

Die Bifurkationskurven des Cobweb-Modells in Abbildung 3.1 zeigen, daß der stationäre Zustand bei einem Faktorpreisverhältnis von  $\alpha < \tau$ , einer Gedächtnislänge größer als  $\tau$  und einem Gewichtungsfaktor  $w$  aus der Umgebung von 1 lokal stabil ist. Bei zunehmendem Gewichtungsfaktor erfährt das Cobweb-Modell eine Hopf-Bifurkation. Bei abnehmendem Gewichtungsfaktor erfährt das Cobweb-Modell eine Flip-Bifurkation. Aussagen über weitere Bifurkation des Cobweb-Modells bei einer Änderung des Gewichtungsfaktors  $w$  können aus den folgenden Bifurkations- und Lyapunov Exponenten Diagrammen abgeleitet werden.

*Bifurkationsverhalten in  $w \in [0, 2]$  für  $\alpha = 10$ ,  $a = 6.65$  und  $\tau = 2, 3, 4, 5$ :*

Die Abbildung 4.10 zeigt Bifurkations- und Lyapunov Exponenten Diagramme des Cobweb-Modells im Gewichtungsfaktor  $w \in [0, 2]$  für ein Faktorpreisverhältnis von  $\alpha = 10$ , eine maximale Nachfrage von  $a = 6.65$  und für die Gedächtnislängen  $\tau = 2, 3, 4, 5$ . Der stationäre Zustand des Cobweb-Modells ist für alle Gewichtungsfaktoren  $w$  instabil. Die Eigenschaften des periodischen Verhaltens des Cobweb-Modells bei einem Gewichtungsfaktor  $w = 1$  wurden bereits in Abschnitt 4.2.2 untersucht. Für Gewichtungsfaktoren  $w < 1$  treten im Falle von  $\tau = 3$  und  $\tau = 4$  signifikant positive Lyapunov Exponenten auf. Für  $w$  nahe bei 0 konvergiert das Cobweb-Modell gegen einen 2-Zyklus. Für  $w > 1$  findet man numerisch keine signifikant positiven Lyapunov Exponenten. Damit ist das Verhalten der maximalen Lyapunov Exponenten ausgeprägter als es in Proposition 2 behauptet wird. Aus Proposition 2 folgt nur, daß sich die maximalen Lyapunov Exponenten bei zunehmender Gedächtnislänge  $\tau$  dem Wert 0 annähern. Das vorliegende Cobweb-Modell weist für Gedächtnislänge  $\tau = 2, 3, 4, 5$  und jeden Gewichtungsfaktors  $w \geq 1$  einen maximalen Lyapunov Exponenten kleiner oder gleich Null auf.

*Das dynamische Verhalten bei langem Gedächtnis:*

Untersucht man das dynamische Verhalten des Cobweb-Modells für Gewichtungsfaktoren  $w < 1$  bei großer Gedächtnislänge  $\tau$ , so kommt man zu folgendem Ergebnis:

In Abschnitt 3.1.2 wurde gezeigt, daß ein stationärer Zustand eines Cobweb-Modells mit geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln bei entsprechend langem Gedächtnis und einem Gewichtungsfaktor  $w \in (0, 1]$  genau dann lokal stabil ist, wenn der stationäre Zustand des Cobweb-Modells mit linear adaptiver Prognoseregeln und Adaptationsparameter  $(1 - w)$  lokal stabil ist. Der Zustandsraum eines Cobweb-Modells mit geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln ist  $\tau$ -dimensional. Der Zustandsraum eines Cobweb-Modells mit linear adaptiver Prognoseregeln ist ein-dimensional. Um das dynamische Verhalten der beiden Cobweb-Modelle vergleichen zu können, wird bei dem Cobweb-Modell mit geometrisch gewichtetem Durchschnitt nur das Verhalten der ersten Komponente  $p_t$  der Zustandsvariablen  $(p_t, \dots, p_{t-\tau+1})$  betrachtet. Die Zustandsvariable eines Cobweb-Modells mit linear adaptiver Prognoseregeln kann gemäß der Differenzgleichung 3.8 aus Abschnitt 3.1.2 als Variable  $p_{t,t+1}^e$  interpretiert werden.

Die Abbildung 4.11 zeigt die Bifurkationsdiagramme des Cobweb-Modells mit geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln bei einer Änderung des Faktorpreisverhältnisses  $\alpha \in (0, 30]$ . Die Gedächtnislänge ist  $\tau = 20$  und der Gewichtungsfaktor ist  $w = 0.5$  und  $w = 0.6$ . Unterhalb dieser Bifurkationsdiagramme sind die Bifurkationsdiagramme des Cobweb-Modells mit linear adaptiver Prognoseregeln bei einer Änderung von  $\alpha \in (0, 30]$  für die Adaptationsparameter  $1 - w = 0.5$  und  $1 - w = 0.6$  abgebildet. Daneben sind für festes  $\alpha = 14$  und  $\alpha = 16$  die Bifurkationsdiagramme der beiden Cobweb-Modelle im Gewichtungsfaktor  $w \in (0, 1]$  bzw. im Adaptationsparameter  $1 - w \in [0, 1)$  abgebildet. Es zeigen sich deutliche Übereinstimmungen im Bifurkationsverhalten der beiden Cobweb-Modelle. Insbesondere weisen beide Modelle numerisch dieselben Bifurkationsstellen auf.

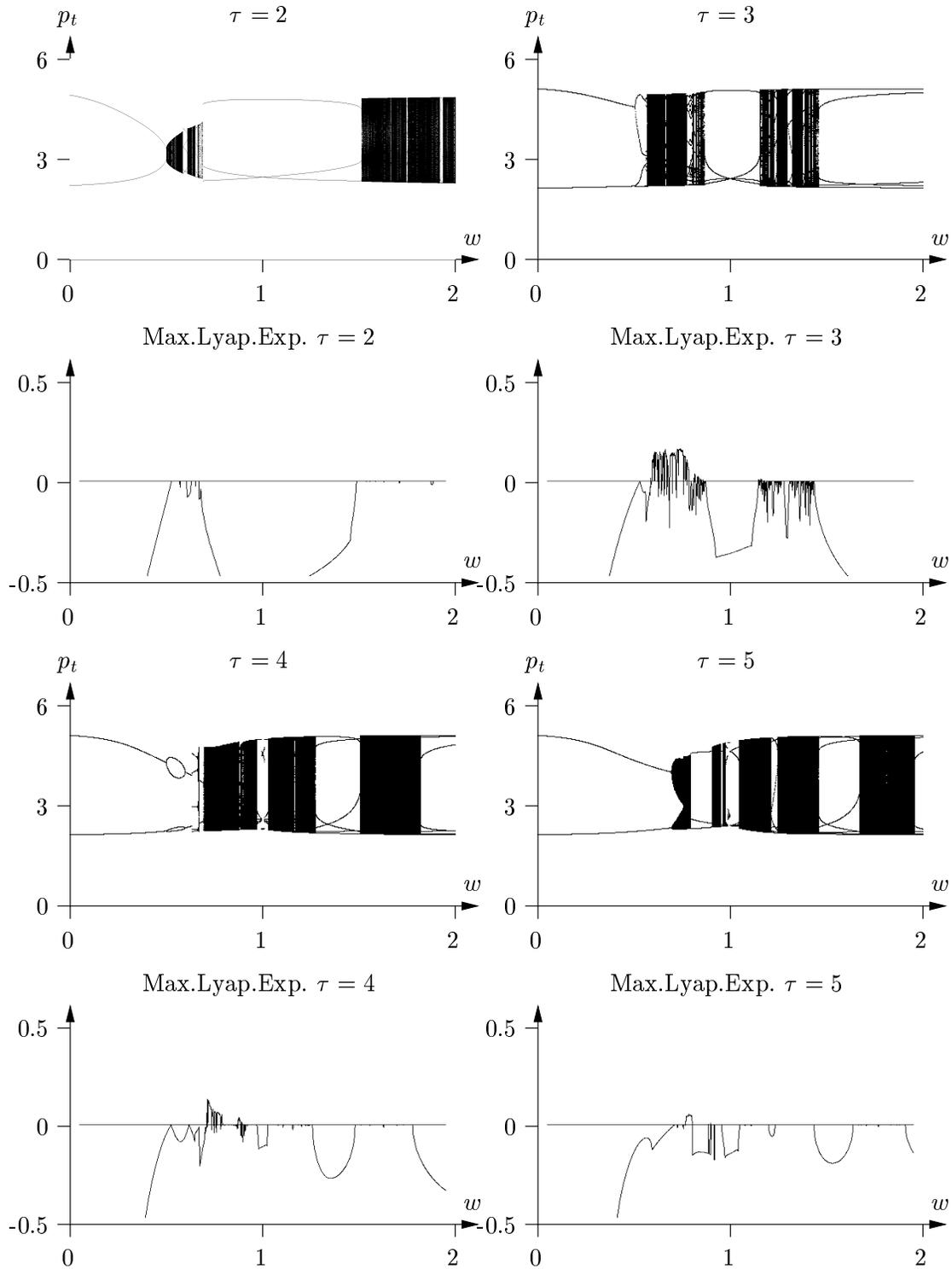


Abbildung 4.10: Ein-Parameter Bifurkationsdiagramme und Diagramme des max. Lyap. Exp. in  $w \in [0, 2]$  für  $\tau = 2, \dots, 5$  mit  $a = 6.65$ ,  $\alpha = 10$ .

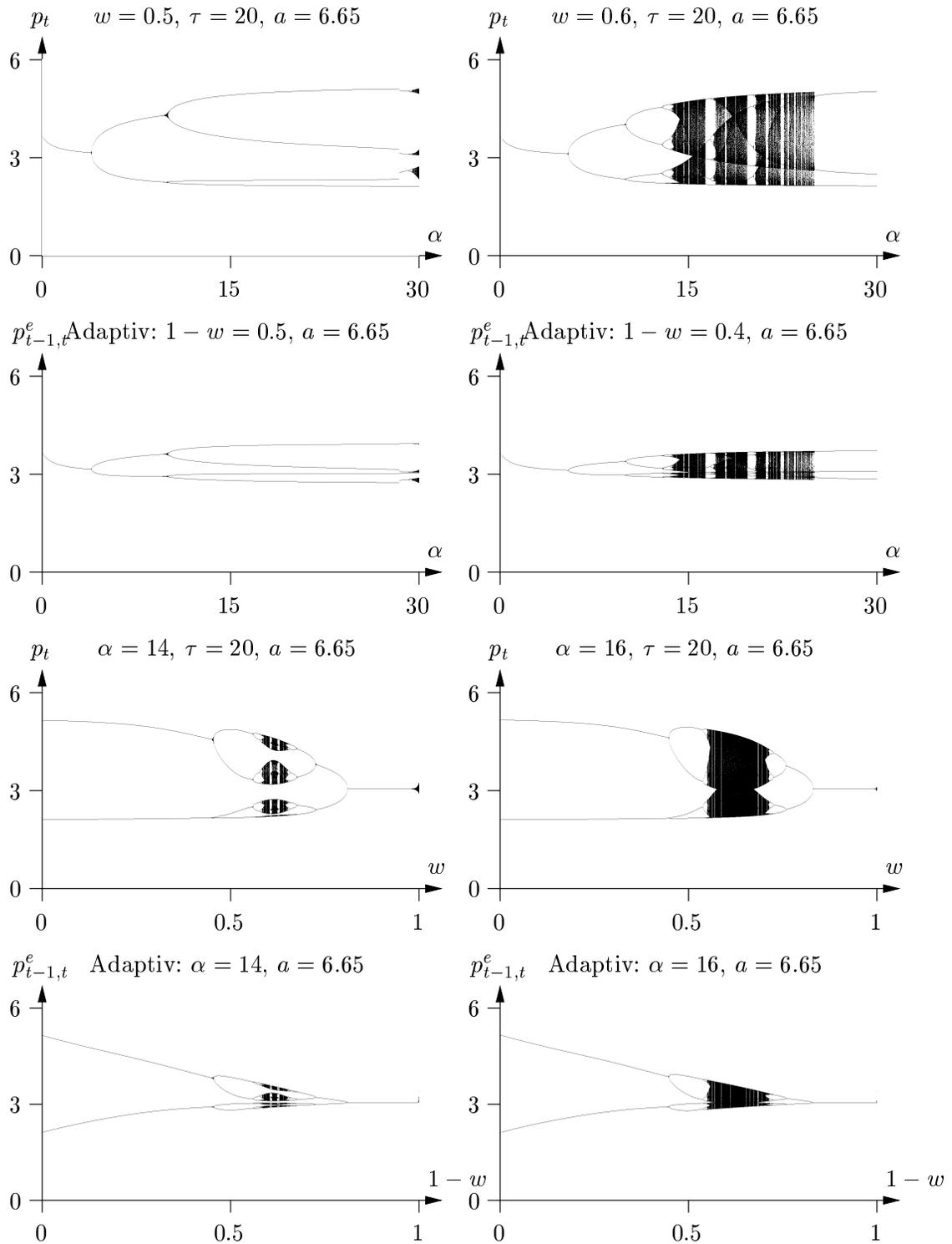


Abbildung 4.11: Vergleich des Bifurkationsverhaltens bei lin. adap. Prognose und bei Prognose mittels geo. gew. Durchschn. ( $\tau = 20$ ) für  $\alpha \in (0, 30]$  bzw.  $w \in [0, 2]$ ,  $a = 6.65$ .

### 4.3.2 Zwei-Parameter Bifurkationsanalyse: Faktorpreisverhältnis und Gewichtungsfaktor, Faktorpreisverhältnis und maximale Nachfrage

Qualitative Veränderungen des dynamischen Langzeitverhaltens eines zeitdiskreten Systems bei gleichzeitiger Variation zweier Parameter können mit Hilfe des Softwarepakets `MACRODYN` untersucht werden.<sup>11</sup> Das Softwarepaket kann für Parameterkombinationen aus einem vorgegebenen zwei-dimensionalen Intervall das jeweilige dynamische Langzeitverhalten des Systems numerisch ermitteln und farblich kodiert in Form einer Landkarte, dem sogenannten *Zyklogramm*, darstellen.<sup>12</sup> Im folgenden wird zunächst die Änderung der Dynamik des Cobweb-Modells bei gleichzeitiger Variation des Faktorpreisverhältnisses und des Gewichtungsfaktors der Prognoseregeln untersucht. Anschließend wird die Änderung der Dynamik bei gleichzeitiger Variation der maximalen Nachfrage und des Gewichtungsfaktors der Prognoseregeln analysiert. Die im Rahmen der Ein-Parameter Bifurkationsanalyse gewonnenen Ergebnisse können dadurch in einen allgemeineren Zusammenhang eingebettet werden.

*Zyklogramm in  $(\alpha, w) \in (0, 10] \times [0, 2]$  für  $a = 6$  und  $\tau = 2, \dots, 7$ :*

Die Abbildung 4.12 zeigt Zyklogramme des Faktorpreisverhältnisses und Gewichtungsfaktors  $(\alpha, w) \in (0, 10] \times [0, 2]$  bei einer maximalen Nachfrage von  $a = 6$  und für die Gedächtnislängen  $\tau = 2, \dots, 7$ . Im Rahmen der Ein-Parameter Bifurkationsanalyse wurden bereits ein-dimensionale Projektionen von Trajektorien für bestimmte Parameterkombinationen  $(\alpha, w) \in (0, 10] \times [0, 2]$  betrachtet. Die Ordnung von Zyklen wurde dann anhand von Attraktoreinbettungen ermittelt. Bei einem Zyklogramm kann die Ordnung der Zyklen direkt abgelesen werden.

<sup>11</sup>Eine Beschreibung der möglichen qualitativen Zwei-Parameter Analysen, die mit Hilfe von `MACRODYN` durchgeführt werden können, findet man in dem Handbuch von Böhm & Schenk-Hoppé (1998).

<sup>12</sup>Für jede Parameterkombination werden 1000 Iterationswerte des Systems berechnet. Mittels eines von Lohmann (1995) entwickelten Erkennungsverfahrens können Zyklen bis zu einer Ordnung von 100 unterschieden werden. Zyklen mit einer Ordnung kleiner als 30 werden unterschiedlich farblich kodiert in das Zyklogramm eingetragen. Liegt ein Zyklus mit einer Ordnung zwischen 30 und 100 vor, dann wird er mit derselben Farbe kodiert. Weist der Zyklus eine höhere Ordnung als 100 auf oder verhält sich das System aperiodisch, dann wird „Aperiodic“ markiert. Verläßt das System den Definitionsbereich, so wird „oor“ angezeigt.

Da die Parameter  $(\alpha, w) \in (0, 10] \times [0, 2]$  variiert werden, führt ein Vergleich der Zyklogramme in Abbildung 4.12 und der Bifurkationskurven in Abbildung 3.1 zu folgenden Ergebnissen:

Das unterschiedliche Bifurkationsverhalten des Cobweb-Modells bei gerader und bei ungerader Gedächtnislänge zeigt sich am Verlauf derjenigen Bifurkationskurven, die den Rand der Menge der Parameter markieren, für die der stationäre Zustand lokal stabil ist. Ist  $\tau$  ungerade und  $w < 1$ , dann konvergiert das Cobweb-Modell gegen einen Zyklus der Periode  $\tau + 1$  oder gegen einen Zyklus der Periode 2. Ist  $\tau$  gerade und  $w \in (1 - \epsilon, 1)$ , dann existieren Faktorpreisverhältnisse, zu denen sich das Cobweb-Modell aperiodisch verhält. Für  $\alpha > 1$  und  $w$  in der Umgebung von 0 konvergiert das Cobweb-Modell immer gegen einen 2-Zyklus. Für  $w \geq 1$  existieren ausgeprägte periodische Fenster mit Zyklen der Ordnung größer als  $\tau + 1$ . Der Durchmesser der periodischen Fenster wächst mit zunehmendem Faktorpreisverhältnis an. Außerdem ist das für  $w > 1$  angezeigte aperiodische Verhalten aufgrund der Ergebnisse des Abschnitts 4.3.1 ein quasi-periodisches Verhalten.

*Zyklogramm in  $(\alpha, w) \in (0, 10] \times [0, 2]$  für  $a = 6.65$  und  $\tau = 2, \dots, 7$ :*

Die Abbildung 4.13 zeigt Zyklogramme des Faktorpreisverhältnisses und des Gewichtungsfaktors  $(\alpha, w) \in (0, 10] \times [0, 2]$  bei einer maximalen Nachfrage von  $a = 6.65$  und für die Gedächtnislängen  $\tau = 2, \dots, 7$ . Für  $a = 6$  ist das Bildungsgesetz  $f(p_{t,t+1}^e, a, \alpha)$  symmetrisch in  $p_{t,t+1}^e$  zu  $p_{t,t+1}^e = 3$ . Da für  $a = 6.65$  das Bildungsgesetz nicht symmetrisch in  $p_{t,t+1}^e$  ist, weist das Cobweb-Modell ein wesentlich anderes dynamisches Langzeitverhalten auf. Ist  $\tau = 2$ , dann existiert eine große Menge von Parametern, für die jeweils ein global stabiler Zyklus der Ordnung 3 existiert. Ist  $w < 1$ , dann verhält sich das Cobweb-Modell sowohl für  $\tau$  gerade, wie auch für  $\tau$  ungerade, aperiodisch. Für  $w > 1$  existieren periodische Fenster, wobei die Ordnung der Zyklen in diesen periodischen Fenstern größer als  $\tau + 1$  ist. Die Ordnung der Zyklen erhöht sich bei zunehmendem  $w$ . Das für  $w > 1$  angezeigte aperiodische Verhalten ist nach Abschnitt 4.3.1 Quasi-Periodizität.

*Zyklogramm in  $(a, w) \in [5, 7] \times [0, 2]$  für  $\alpha = 10$  und  $\tau = 2, \dots, 7$ :*

Die Abbildung 4.14 zeigt für  $\alpha = 10$  und für  $\tau = 2, \dots, 7$  Zyklogramme, die sich bei Variation der maximalen Nachfrage und des Gewichtungsfaktors  $(a, w) \in$

$[5, 7] \times [0, 2]$  ergeben. Da das Bildungsgesetz  $f(p_{i,t+1}^e, a, \alpha)$  symmetrisch in  $a$  zu  $a = 6$  ist, weisen die Zyklogramme eine symmetrische Struktur auf.

Betrachtet man das dynamische Verhalten des Cobweb-Modells für  $w < 1$ , dann ergibt sich folgendes. Bei gerader Gedächtnislänge  $\tau$  ändert sich die Menge der Parameter  $(a, w)$ , für die das Cobweb-Modell gegen einen 2-Zyklus konvergiert, nur wenig, wenn die Gedächtnislänge zunimmt. Für Gewichtungsfaktoren  $w$  in der Umgebung von 1 liegt aperiodisches dynamisches Verhalten vor. Bei einer Erhöhung der ungeraden Gedächtnislänge  $\tau$  nähert sich die Menge der Parameter  $(a, w)$ , für die das Cobweb-Modell gegen einen 2-Zyklus konvergiert, der Parameterkombination  $(a, w) = (5, 1)$  an.

Für Parameterkombinationen  $(a, w)$  mit  $w > 1$  ergibt sich folgendes. Bei Erhöhung der Gedächtnislänge wächst die Anzahl der periodischen Fenster. Für Gedächtnislänge  $\tau$  und Gewichtungsfaktor  $1 < w < 2$  findet man numerisch periodische Fenster, die Zyklen bis zu einer Ordnung von  $2\tau - 1$  aufweisen. Die Ordnung der Zyklen ist dabei ansteigend im Gewichtungsfaktor  $w \geq 1$ .

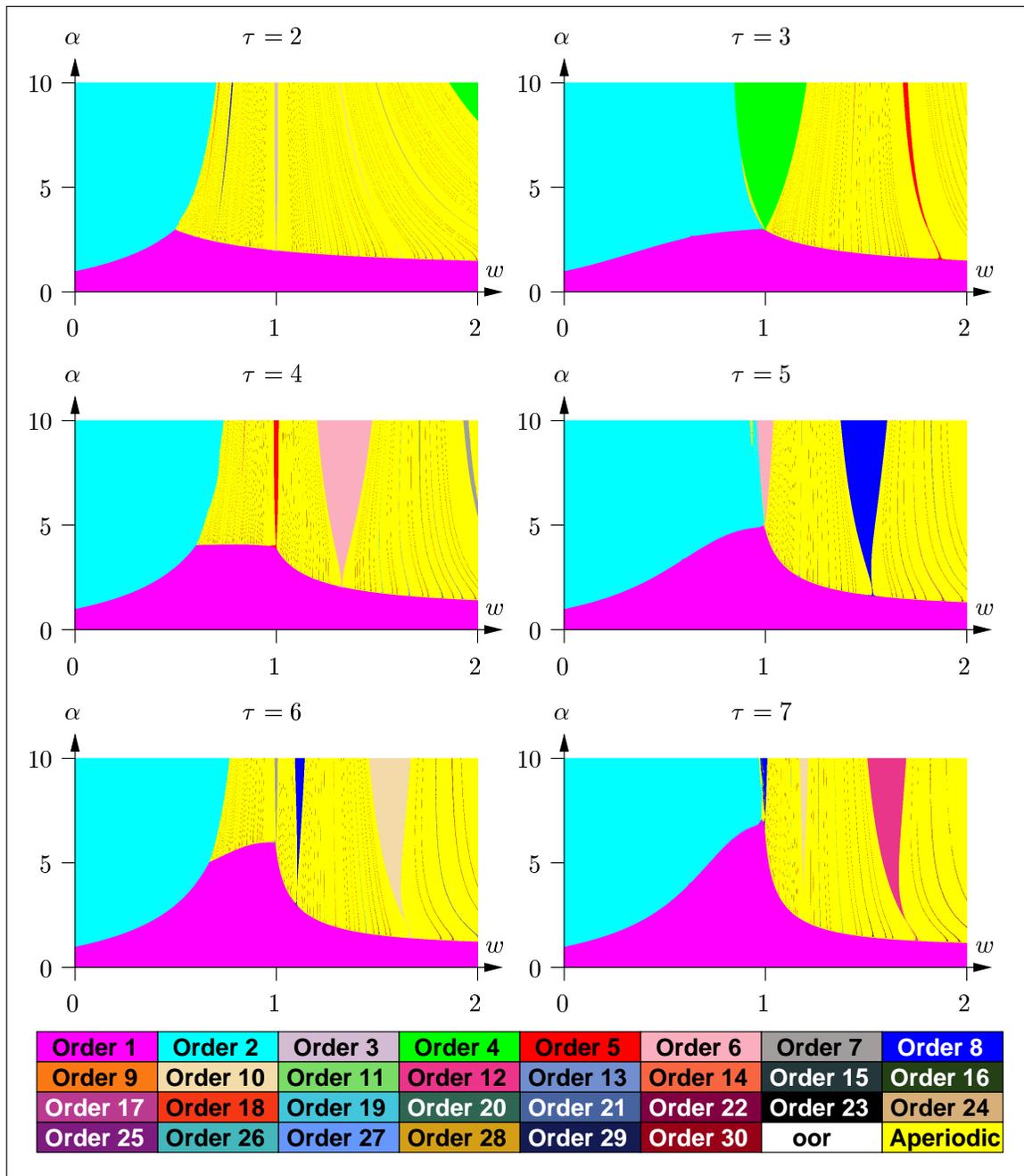


Abbildung 4.12: Zyklogramme in  $w \in [0, 2]$  und  $\alpha \in (0, 10]$  für  $\tau = 2, \dots, 7$  und  $a = 6$ .

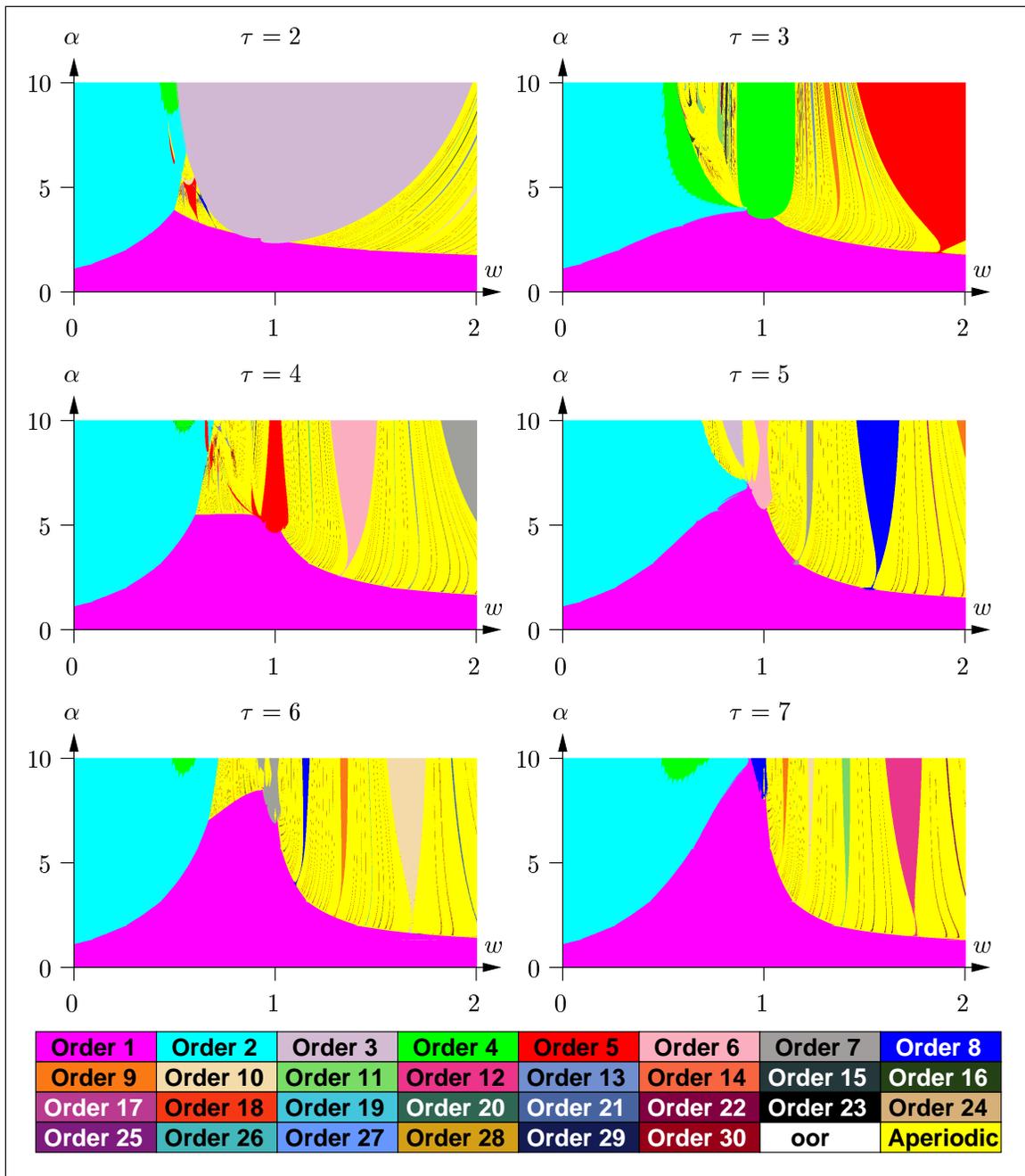


Abbildung 4.13: Zyklusdiagramme in  $w \in [0, 2]$  und  $\alpha \in (0, 10]$  für  $\tau = 2, \dots, 7$  und  $a = 6.65$ .

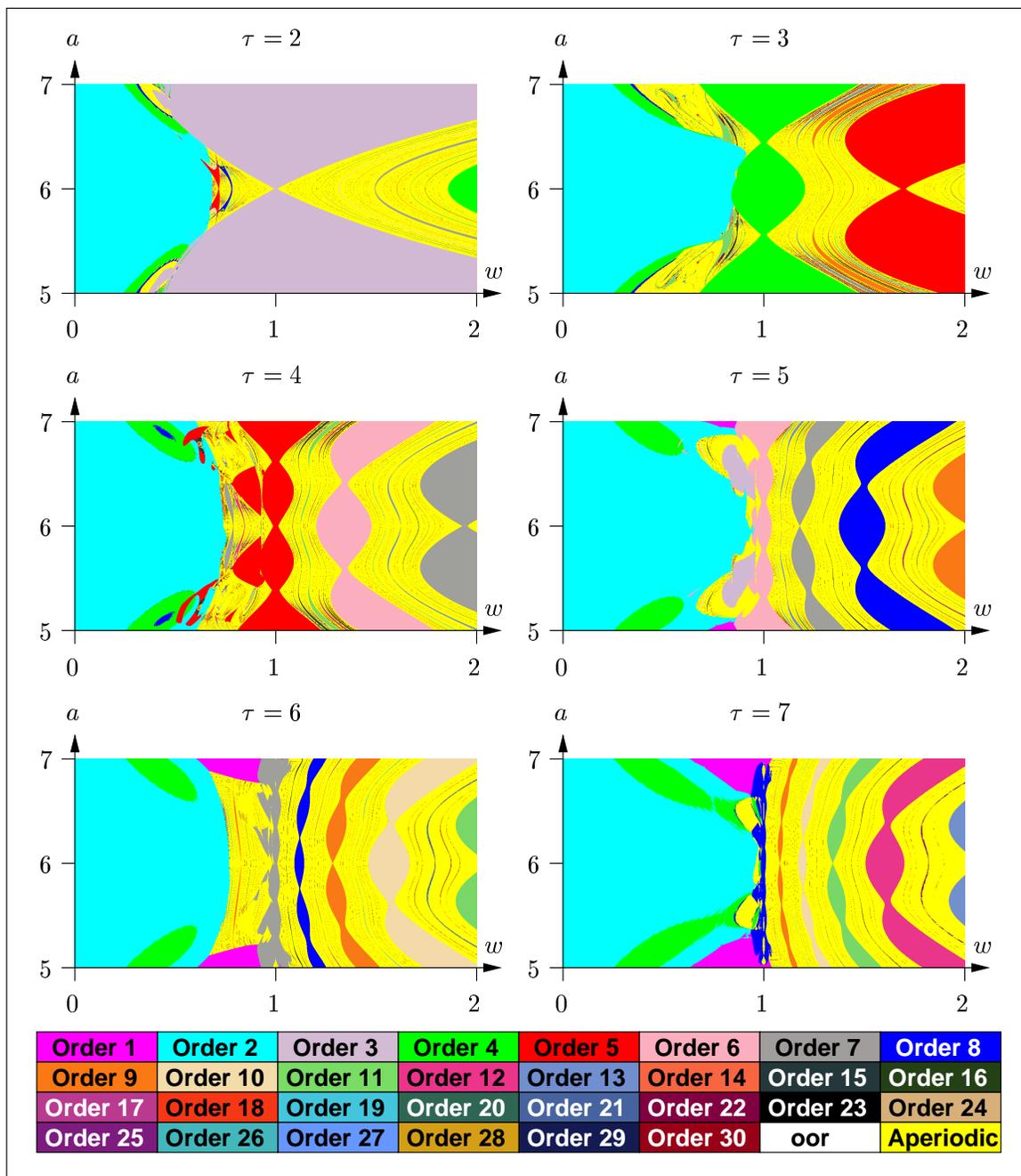


Abbildung 4.14: Zyklogramme in  $w \in [0, 2]$  und  $a \in [5, 7]$  für  $\tau = 2, \dots, 7$  und  $\alpha = 10.0$ .

### 4.3.3 Schlußfolgerungen

Die numerische Analyse des Cobweb-Modells mit S-förmigem Bildungsgesetz und geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln führte zu folgenden Ergebnissen.

Bei hohem Faktorpreisverhältnis  $\alpha$  ist die Elastizität des S-förmigen Bildungsgesetzes am Gleichgewichtspreis negativ und von hohem Betrag. Bei entsprechend langem Gedächtnis  $\tau$  ist der stationäre Zustand des Cobweb-Modells für Gewichtungsfaktoren  $w$  aus der Umgebung von 1 lokal stabil. Die Bifurkationskurven in Abbildung 3.1 und die Zyklogramme in  $(\alpha, w)$  zeigen, daß das Bifurkationsverhalten des Cobweb-Modells, bei Änderung der Elastizität des Bildungsgesetzes, einerseits davon abhängt, ob der Gewichtungsfaktor  $w$  größer oder kleiner als 1 ist. Andererseits hängt das Bifurkationsverhalten davon ab, ob die Gedächtnislänge  $\tau$  gerade oder ungerade ist. Unabhängig von  $w$  nimmt die Amplitude der Preisschwankungen zu, wenn das Faktorpreisverhältnis größer wird.

Komplexes dynamisches Verhalten, Attraktoren mit fraktaler Struktur und signifikant positive Lyapunov Exponenten können bei einer Änderung des Faktorpreisverhältnisses  $\alpha$  für Gewichtungsfaktoren  $0 < w < 1$  auftreten. Befindet sich  $w$  in der Umgebung von 0 und ist  $\alpha$  entsprechend groß, so konvergiert das Cobweb-Modell, unabhängig von der Gedächtnislänge, immer gegen einen 2-Zyklus. Außerdem zeigt der Vergleich der Dynamik bei linear adaptiver Prognose und bei Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt, daß bei großer Gedächtnislänge Übereinstimmungen zwischen dem dynamischen Verhalten der beiden Modelle bestehen.

Ist der Gewichtungsfaktor  $w > 1$ , dann verhält sich das Cobweb-Modell entweder periodisch oder quasi-periodisch. Insbesondere treten für alle  $w > 1$  keine signifikant positiven Lyapunov Exponenten auf. Darüber hinaus hängt auch die Struktur und die Ordnung der lokal stabilen koexistierenden Zyklen von der Länge  $\tau$  des Gedächtnisses ab, wobei man numerisch keine lokal stabilen Zyklen findet, deren Ordnung größer als  $2\tau$  ist.



# Kapitel 5

## Numerische Analyse des dynamischen Verhaltens für eine zurückgebogene Angebotsfunktion

Im vorherigen Kapitel 4 wurde das dynamische Verhalten eines Cobweb-Modells mit S-förmigem Bildungsgesetz und geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln numerisch analysiert. Dabei hat sich gezeigt, daß die Gedächtnislänge und der Gewichtungsfaktor der Prognoseregeln das dynamische Verhalten dieses Cobweb-Modells in charakteristischer Weise beeinflussen. S-förmige Cobweb-Bildungsgesetze sind monotone Funktionen der Prognose. Die in Abschnitt 2.1.2 vorgestellten Cobweb-Modelle von Jensen & Urban (1984), Jarsulic (1993) und Day & Huang (1990) weisen dagegen ein Bildungsgesetz auf, das nicht monoton von der Prognose abhängt. Die in diesen Beiträgen untersuchten Cobweb-Bildungsgesetze sind insbesondere von zurückgebogener Form.

Die numerischen Analysen dieses Kapitels befassen sich mit dem dynamischen Verhalten eines Cobweb-Modells, dessen Bildungsgesetz eine zurückgebogene Form aufweist. Das Bildungsgesetz ergibt sich dabei aus der Komposition einer zurückgebogenen Angebotsfunktion und einer linear inversen Nachfragefunktion. Wie in Kapitel 4 wird von dem geometrisch gewichteten Durchschnitt als Prognoseregeln ausgegangen, so daß ein Vergleich des Einflusses der Gedächtnislänge und Gewichtungsstruktur der Prognoseregeln auf das dynamische Verhalten des Cobweb-Modells bei S-förmigem und bei zurückgebogenem Bildungsge-

setz möglich ist.

Die zurückgebogene Form der Angebotsfunktion des im folgenden betrachteten Cobweb-Modells leitet sich aus der Annahme ab, daß der Produzent den Preis der nächsten Periode subjektiv als risikobehaftet erwartet und sich entsprechend risikoavers verhält. Der Erwartungsnutzen des Produzenten ergibt sich dabei aus einer quadratischen von Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion. Im folgenden Abschnitt 5.1 wird gezeigt, daß in diesem Fall der Erwartungsnutzen des Produzenten von der produzierten Menge des Gutes und von dem für die nächste Periode erwarteten ersten und zweiten Moment des zufälligen Preises abhängt. Unter der Voraussetzung, daß die Kostenfunktion linear ist, und daß das erwartete zweite Moment vom Quadrat des erwarteten ersten Moments abhängt, ergibt sich eine zurückgebogene Angebotsfunktion.

Das dynamische Verhalten des Cobweb-Modells für den Fall des ungewichteten Durchschnitts als Prognoseregeln wird in Abschnitt 5.2 numerisch analysiert. Bei dem Cobweb-Modell mit S-förmigem Bildungsgesetz hatte sich ergeben, daß außer für  $\tau = 2$  das Modell entweder gegen einen eindeutigen stationären Zustand oder gegen einen Zyklus der Ordnung  $\tau + 1$  konvergiert. Dagegen kann bei dem Cobweb-Modell mit zurückgebogenem Bildungsgesetz auch komplexes dynamisches Verhalten vorliegen. So können mehrere lokal stabile stationäre Zustände gleichzeitig vorliegen, oder es treten lokal stabile Zyklen auf, wobei einige der Zyklen eine Ordnung größer als  $\tau + 1$  aufweisen. Darüber hinaus können auch positive Lyapunov Exponenten vorliegen.

Das dynamische Verhalten des Cobweb-Modells mit geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln wird in Abschnitt 5.3 numerisch analysiert. Analog zu Kapitel 4 wird die Frage untersucht, inwieweit sich die Dynamik des Cobweb-Modells bei einem Gewichtungsfaktor  $w < 1$  von der Dynamik bei einem Gewichtungsfaktor  $w > 1$  unterscheidet. Es wird sich zeigen, daß das Cobweb-Modell mit zurückgebogenem Bildungsgesetz, im Gegensatz zum Cobweb-Modell mit S-förmigem Bildungsgesetz, für beliebig kleine Gewichtungsfaktoren  $w < 1$  positive Lyapunov Exponenten aufweist. Außerdem treten positive Lyapunov Exponenten auch für Gewichtungsfaktoren  $w > 1$  auf. Das Cobweb-Modell verhält sich für  $w \geq 1$  erst für entsprechend großer Gedächtnislänge periodisch oder quasi-periodisch.

## 5.1 Risikoaversion und subjektives Preisrisiko

Bereits Sandmo (1971) und Epstein (1978) haben die Produktionsentscheidung eines Produzenten unter Preisunsicherheit und bei vollkommenem Wettbewerb analysiert. Sie zeigen für den Fall konstanter Grenzkosten, daß der Produzent die Produktionsmenge in Abhängigkeit seiner absoluten bzw. relativen Risikoaversion und der erwartungstreuen Streuung<sup>1</sup> des Preises wählt. Beide kommen zu dem Ergebnis, daß der Produzent die Produktionsmenge verringert, falls seine Risikoaversion größer wird oder falls die erwartungstreue Streuung des Preises zunimmt.

Boussard (1996) untersucht die Dynamik eines Cobweb-Modells, das ein zurückgebogenes Bildungsgesetz aufweist. Das Bildungsgesetz leitet er unter der Annahme her, daß der Produzent den Preis der nächsten Periode als unsicher betrachtet. Der Produzent macht daher keine Preisprognose, sondern er erstellt eine Prognose in bezug auf den Erwartungswert und die Varianz des zufälligen Preises. Boussard (1996) geht insbesondere davon aus, daß der Produzent den heute realisierten Preis als Prognose des Erwartungswertes verwendet, und daß die prognostizierte Varianz proportional zum Quadrat des heute realisierten Preises ist. Falls die absolute Risikoaversion des Produzenten konstant ist, er subjektiv von einem normalverteilten Preisprozeß ausgeht und seine Kostenfunktion linear ist, so weist die Angebotsfunktion eine zurückgebogene Form auf. Eine Funktion  $g \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$  auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  wird als *zurückgebogen* bzw. als *unimodal* bezeichnet, falls sie ein globales Maximum (oder Minimum)  $q^M \in I$  im Inneren von  $I$  besitzt mit der Eigenschaft, daß  $g'(q) > 0$  für  $q < q^M$  und  $g'(q) < 0$  für  $q > q^M$  (oder  $g'(q) < 0$  für  $q < q^M$  und  $g'(q) > 0$  für  $q > q^M$ ) ist. Eine zurückgebogene Funktion bleibt unter einer linearen Transformation zurückgebogen.

Im Rahmen des folgenden Cobweb-Modells wird von einer quadratischen von Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion des Produzenten ausgegangen. Der Erwartungsnutzen des Produzenten hängt dann nur von dem ersten und zweiten Moment der Verteilung ab, so daß er zur Produktionsentscheidung nur diese beiden Momente und sonst keine weiteren Informationen über den Preisprozeß benötigt. Da außerdem alle Produzenten Zugang zur gleichen Technologie haben

---

<sup>1</sup>Nach Huang & Litzenberger (1988) ist der Begriff der erwartungstreuen Streuung bezüglich einer Zufallsvariablen wie folgt definiert: Gegeben seien die beiden Zufallsvariablen  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$ . Gilt für die Differenz  $\epsilon = \mathcal{Y} - \mathcal{X}$ , daß  $E(\epsilon|\mathcal{X}) = 0$  ist, dann wird  $\epsilon$  als *erwartungstreue Streuung* bezüglich  $\mathcal{X}$  bezeichnet.

und vollkommene Konkurrenz gegeben ist, genügt es, die Angebotsfunktion eines repräsentativen Produzenten zu betrachten. Der Produzent geht im Rahmen seiner Produktionsentscheidung subjektiv davon aus, daß die Folge der Marktpreise  $\{p_t\}_{t=1}^{\infty}$  die Realisierungen eines nicht-negativen Zufallsprozesses  $\{\mathbf{P}_t\}_{t=1}^{\infty}$  sind. Er unterstellt dabei, daß das erste und zweite Moment jeder Zufallsvariablen  $\mathbf{P}_t$  endlich ist. Da zur Erzeugung des Gutes eine Zeitspanne von einer Periode benötigt wird, basiert die Produktionsentscheidung des Produzenten in Periode  $t$  auf seiner Prognose des ersten und zweiten Moments der Zufallsvariablen  $\mathbf{P}_{t+1}$ . Das von ihm prognostizierte erste Moment  $(E(\mathbf{P}_{t+1}))^e$  wird im folgenden mit  $p_{t,t+1}^e$  abgekürzt. Des Weiteren ist die von ihm prognostizierte Varianz der Zufallsvariablen  $(\text{Var}(\mathbf{P}_{t+1}))^e$  proportional zum Quadrat des prognostizierten ersten Moments. Das heißt, es ist  $(\text{Var}(\mathbf{P}_{t+1}))^e = \sigma^2 \cdot (p_{t,t+1}^e)^2$ . Der Parameter  $\sigma$  ist dabei ein von dem Produzenten unterstellter Streuungsfaktor, der die Korrelation zwischen dem Erwartungswert und der Standardabweichung des Preises angibt. Trifft der Produzent in Periode  $t$  die Entscheidung  $q_{t+1}^S$  Einheiten des Gutes zu produzieren, dann entspricht der Gewinn der Periode  $t+1$  der Zufallsvariablen  $\pi(\mathbf{P}_{t+1}, q_{t+1}^S) = q_{t+1}^S \mathbf{P}_{t+1} - C(q_{t+1}^S)$ . Der Produzent hat eine durch den zufälligen Periodengewinn bestimmte Nutzenfunktion. Sein Erwartungsnutzen leitet sich aus der quadratischen von Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion

$$u(x) = x - \frac{\lambda}{2} x^2, \quad x \leq \frac{1}{\lambda}$$

ab. Da außerdem  $\frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{-u''}{u'} \right) > 0$  ist, entspricht jedem Parameterwert  $\lambda > 0$  eine bestimmte absolute Risikoaversion  $-u''/u'$ . Der Erwartungsnutzen des Produzenten ist somit

$$\begin{aligned} E(u(\pi(\mathbf{P}_{t+1}, q_{t+1}^S))) &= E(\pi(\mathbf{P}_{t+1}, q_{t+1}^S)) - \frac{\lambda}{2} [(E(\pi(\mathbf{P}_{t+1}, q_{t+1}^S)))^2 + \\ &\quad + \text{Var}(\pi(\mathbf{P}_{t+1}, q_{t+1}^S))]. \end{aligned}$$

Setzt man für  $E(\mathbf{P}_{t+1})$  das erwartete erste Moment  $p_{t,t+1}^e$  ein und ersetzt man die Varianz  $\text{Var}(\mathbf{P}_{t+1})$  durch die erwartete Varianz  $\sigma^2 \cdot (p_{t,t+1}^e)^2$ , dann ergibt sich der prognostizierte Erwartungsnutzen

$$\begin{aligned} E(u(\pi(\mathbf{P}_{t+1}, q_{t+1}^S))) &= q_{t+1}^S p_{t,t+1}^e - C(q_{t+1}^S) - \frac{\lambda}{2} [(q_{t+1}^S p_{t,t+1}^e - \\ &\quad - C(q_{t+1}^S))^2 + (q_{t+1}^S)^2 (p_{t,t+1}^e)^2 \sigma^2]. \end{aligned}$$

Die Kostenfunktion sei linear mit

$$C(q) = c \cdot q, \quad c > 0, q \geq 0.$$

Eine solche Kostenfunktion kann aus einer Cobb–Douglas Produktionsfunktion mit konstanten Skalenerträgen abgeleitet werden.

Da der Produzent den Erwartungsnutzen der Periode  $t + 1$  maximiert, folgt seine Entscheidung in bezug auf die zu produzierende Menge  $q_{t+1}^S$  aus der notwendigen Bedingung:

$$0 = p_{t,t+1}^e - c - \lambda q_{t+1}^S [(p_{t,t+1}^e)^2 - 2p_{t,t+1}^e c + c^2 + (p_{t,t+1}^e)^2 \sigma^2].$$

Löst man diese Bedingung nach  $q_{t+1}^S$  auf, wobei die Nebenbedingung  $q_{t+1}^S \geq 0$  zu beachten ist, dann ergibt sich die Angebotsfunktion

$$S_b(p_{t,t+1}^e) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq p_{t,t+1}^e < c \\ \frac{p_{t,t+1}^e - c}{\lambda((p_{t,t+1}^e - c)^2 + \sigma^2(p_{t,t+1}^e)^2)} & , c \leq p_{t,t+1}^e < \infty \end{cases}. \quad (5.1)$$

Die Lösung  $S_b(p_{t,t+1}^e)$  ist insbesondere zulässig, denn für  $c \geq p_{t,t+1}^e$  gilt

$$\pi(p_{t,t+1}^e, S_b(p_{t,t+1}^e)) = \frac{p_{t,t+1}^e - c}{\lambda((p_{t,t+1}^e - c)^2 + \sigma^2(p_{t,t+1}^e)^2)} (p_{t,t+1}^e - c) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Die Angebotsfunktion  $S_b(p_{t,t+1}^e)$  ist nicht–negativ und weist auf dem Intervall  $[c, \infty)$  eine zurückgebogene Form auf.<sup>2</sup> Die Angebotsfunktion  $S_b(p_{t,t+1}^e)$  besitzt dabei ein globales Maximum und es ist  $\lim_{p_{t,t+1}^e \rightarrow \infty} S_b(p_{t,t+1}^e) = 0$ .

Im folgenden wird eine lineare Nachfragefunktion

$$D(p) = a - b \cdot p, \quad p \in \left[0, \frac{a}{b}\right] \quad (5.2)$$

vorausgesetzt. Der Parameter  $a \geq 0$  bezeichnet die maximale Nachfrage nach dem Gut und der Parameter  $b \geq 0$  entspricht der Steigung der Nachfragefunktion.

---

<sup>2</sup>Eine zurückgebogene Angebotsfunktion kann auch aufgrund der folgenden allgemeineren Nutzenfunktion hergeleitet werden. Der Erwartungsnutzen des Produzenten bei einem zufälligen Gewinn  $\pi$  betrage

$$E(u(\pi)) = \mathcal{V} \left[ E(\pi) - \frac{\lambda}{2} \text{Var}(\pi) \right],$$

wobei  $\mathcal{V}$  eine streng monoton steigende und stetig differenzierbare Funktion auf  $\mathbb{R}$  sei. Wird  $(E(\mathbf{P}_{t+1}))^e$  wieder mit  $p_{t,t+1}^e$  abgekürzt, ist  $(\text{Var}(\mathbf{P}_{t+1}))^e = \sigma^2 \cdot (p_{t,t+1}^e)^2$  und sind die Grenzkosten  $c > 0$  konstant, so ist die in Periode  $t + 1$  angebotene Menge:

$$q_{t+1}^S = \frac{p_{t,t+1}^e - c}{\lambda \sigma^2 (p_{t,t+1}^e)^2}, \quad p_{t,t+1}^e \geq c.$$

Ist die maximale Nachfrage  $a$  grösser als das Maximum der Angebotsfunktion  $\max_{p_{t,t+1}^e} S_b(p_{t,t+1}^e)$ , dann ergeben die Angebotsfunktion (5.1) und die Inverse der Nachfragefunktion (5.2) das Bildungsgesetz:

$$D^{-1} \circ S_b(p_{t,t+1}^e) = \begin{cases} \frac{a}{b} & , 0 \leq p_{t,t+1}^e < c \\ \frac{a}{b} - \frac{\frac{a}{b}}{b\lambda((p_{t,t+1}^e - c)^2 + \sigma^2(p_{t,t+1}^e)^2)} & , c \leq p_{t,t+1}^e < \infty \end{cases} .$$

Das Bildungsgesetz  $D^{-1} \circ S_b(p_{t,t+1}^e)$  weist auf  $[c, \infty)$  ebenfalls eine zurückgebogene Form auf. Die Elastizität des Bildungsgesetzes ist für  $p_{t,t+1}^e$  nahe bei  $c$  negativ. Für entsprechend großes  $p_{t,t+1}^e$  wird sie dann positiv.

Im Rahmen der weiteren numerischen Untersuchungen wird  $b = 1$  und  $c = 1$  gesetzt. Für  $p_{t,t+1}^e \geq 1$  ist das Bildungsgesetz stetig differenzierbar und wird mit

$$f(p_{t,t+1}^e, \lambda, \sigma, a) = a - \frac{p_{t,t+1}^e - 1}{\lambda((p_{t,t+1}^e - 1)^2 + \sigma^2(p_{t,t+1}^e)^2)}, \quad p_{t,t+1}^e \geq 1$$

abgekürzt. Nach Lemma 2 aus Kapitel 3 besitzt dieses zurückgebogene Bildungsgesetz mindestens einen Gleichgewichtspreis  $p_{\lambda,\sigma,a}^I$ . Für die Elastizität des Bildungsgesetzes an diesem Gleichgewichtspreis gilt

$$\epsilon_f(p_{\lambda,\sigma,a}^I) = \frac{\epsilon_S(p_{\lambda,\sigma,a}^I)}{\epsilon_D(p_{\lambda,\sigma,a}^I)} \leq 1 .$$

Die Abbildung 5.1 zeigt das Bildungsgesetz für  $a = 4.0$ ,  $b = 1.0$ ,  $c = 1.0$ ,  $\sigma = 0.4$  und für  $\lambda = 0.29$  bzw.  $\lambda = 0.32$ . Es existieren Werte von  $\lambda$ , für die ein, zwei oder drei verschiedene Gleichgewichtspreise vorliegen. Die Abbildung 5.2 zeigt das Bildungsgesetz für  $a = 4.0$ ,  $b = 1.0$ ,  $c = 1.0$ ,  $\sigma = 0.55$  und für  $\lambda = 0.18$  bzw.  $\lambda = 0.2$ . Bei beliebiger Änderung von  $\lambda$  existiert immer nur ein Gleichgewichtspreis. Die Abbildung 5.3 zeigt das Bildungsgesetz für  $a = 4.0$ ,  $b = 1.0$ ,  $c = 1$ ,  $\lambda = 0.18$  und für  $\sigma = 0.55$  bzw.  $\sigma = 0.6$ . Bei beliebiger Änderung von  $\sigma$  existiert immer nur ein Gleichgewichtspreis.

Die Gleichgewichtspreise des Bildungsgesetzes können als Nullstellen eines Polynoms vom Grade 3 berechnet werden. Außerdem existiert zu jedem Gleichgewichtspreis eine eindeutige Gleichgewichtsmenge. Im Falle einer Änderung der Parameter  $\lambda$ ,  $\sigma$  und  $a$  kann es bei den drei Gleichgewichtspreisen zu unterschiedlichen Verschiebungen kommen. Liegt ein Gleichgewichtspreis in der Nähe der Grenzkosten  $c$ , dann ist die partielle Ableitung der Gleichgewichtsmenge nach dem Gleichgewichtspreis positiv. Bei entsprechend hohem Gleichgewichtspreis ist die partielle Ableitung der Gleichgewichtsmenge nach dem Gleichgewichtspreis negativ.

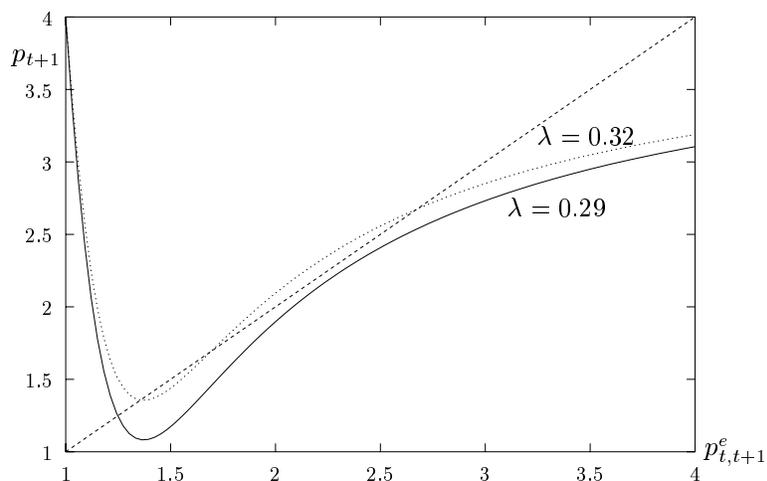


Abbildung 5.1: Zurückgebogenes Cobweb-Bildungsgesetz  $D^{-1} \circ S_b$  mit  $\sigma = 0.4$ ,  $a = 4.0$ ,  $c = 1.0$ ,  $b = 1.0$  und  $\lambda = 0.29, 0.32$ .

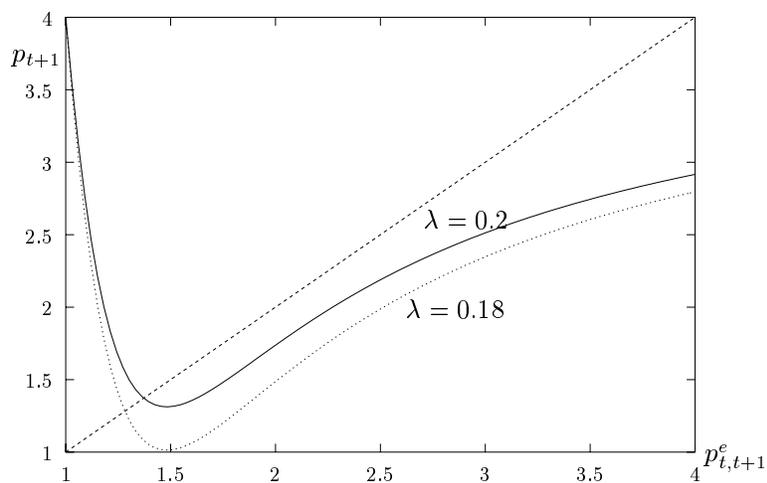


Abbildung 5.2: Zurückgebogenes Cobweb-Bildungsgesetz  $D^{-1} \circ S_b$  mit  $\sigma = 0.55$ ,  $a = 4.0$ ,  $c = 1.0$ ,  $b = 1.0$  und  $\lambda = 0.18, 0.2$ .

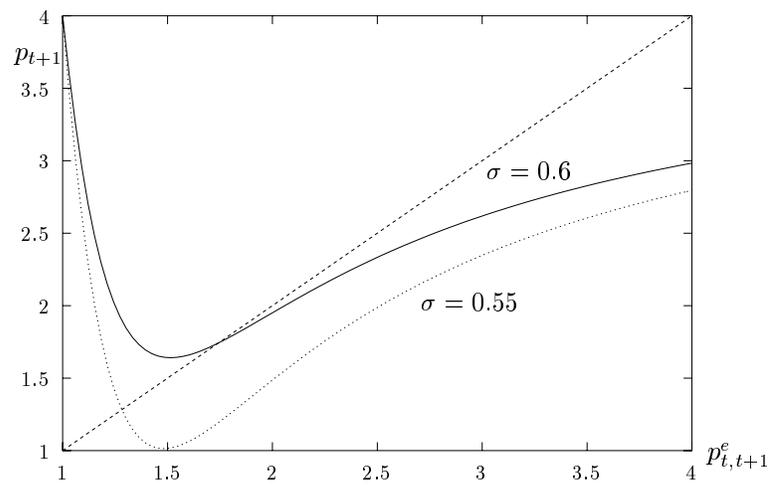


Abbildung 5.3: Zurückgebogenes Cobweb-Bildungsgesetz  $D^{-1} \circ S_b$  mit  $\lambda = 0.18$ ,  $a = 4.0$ ,  $c = 1.0$ ,  $b = 1.0$  und  $\sigma = 0.55, 0.6$ .

## 5.2 Prognose mittels ungewichtetem Durchschnitt

Um die dynamischen Eigenschaften des Cobweb-Modells mit S-förmigem Bildungsgesetz unmittelbar mit den dynamischen Eigenschaften des Cobweb-Modells mit zurückgebogenem Bildungsgesetz vergleichen zu können, wird in diesem Abschnitt zunächst davon ausgegangen, daß die Produzenten zur Prognose des ersten Moments  $p_{t,t+1}^e$  den ungewichteten Durchschnitt

$$p_{t,t+1}^e = \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\tau-1} p_{t-k}, \quad t \geq \tau$$

verwenden. Die Prognose  $p_{t,t+1}^e$  liegt jeweils in der konvexen Hülle der endlich vielen vergangenen Beobachtungen  $p_t, \dots, p_{t-\tau+1}$ . Sind die Parameter  $a$ ,  $\lambda$  und  $\sigma$  so gewählt, daß das globale Minimum des zurückgebogenen Bildungsgesetzes größer als  $c = 1$  ist und gilt für die Anfangswerte  $p_1 \geq 1, \dots, p_k \geq 1$ , dann entspricht das Cobweb-Modell der stetig differenzierbaren Differenzgleichung

$$p_{t+1} = a - \frac{\frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\tau-1} p_{t-k} - 1}{\lambda \left( \left( \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\tau-1} p_{t-k} - 1 \right)^2 + \sigma^2 \left( \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\tau-1} p_{t-k} \right)^2 \right)}, \quad t \geq \tau. \quad (5.3)$$

Diese Differenzgleichung kann auch in Form eines  $\tau$ -dimensionalen dynamischen Systems dargestellt werden und ist in den Parametern  $a$ ,  $\lambda$  und  $\sigma$  stetig differenzierbar.

### 5.2.1 Ein-Parameter Bifurkationsanalyse: Risikoaversion und Streuungsfaktor

In diesem Abschnitt wird die Veränderung des dynamischen Verhaltens bei Änderung des Risikoaversions-Parameters  $\lambda$ , des Streuungsfaktors  $\sigma$ , der maximalen Nachfrage  $a$  und der Gedächtnislänge  $\tau$  untersucht. Es wird sich zeigen, daß wesentliche Unterschiede zwischen dem dynamischen Verhalten des Cobweb-Modells mit S-förmigem Bildungsgesetz und dem dynamischen Verhalten des Cobweb-Modells mit zurückgebogenem Bildungsgesetz bestehen. Im Rahmen der folgenden Bifurkationsanalyse ist zu beachten, daß das Cobweb-Modell stetig von dem Risikoaversions-Parameter  $\lambda$ , dem Streuungsfaktor  $\sigma$  und der maximalen Nachfrage  $a$  abhängt, daß jedoch eine Änderung der Gedächtnislänge  $\tau$  zu einer Erhöhung der Dimension des Cobweb-Modells führt. Um den Einfluß der

Gedächtnislänge  $\tau$  auf die Dynamik numerisch zu untersuchen, werden daher Bifurkationsdiagramme in  $\lambda$ ,  $\sigma$  und  $a$  für jeweils festes  $\tau = 1, 2, 3, 4$  erstellt und miteinander verglichen.

### Naive Erwartungen

Naive Erwartungen  $p_{t,t+1}^e = p_t$  sind der einfachste Fall der Prognose mittels ungewichtetem Durchschnitt, denn die Gedächtnislänge ist  $\tau = 1$ . Das Cobweb-Modell (5.3) entspricht somit der ein-dimensionalen Differenzgleichung

$$p_{t+1} = f(p_t, \lambda, \sigma, a), \quad t \in \mathbb{N}. \quad (5.4)$$

Das dynamische Verhalten eines Cobweb-Modells mit zurückgebogenem Bildungsgesetz und unter der Annahme von naiven Erwartungen wurde erstmals von Artstein (1983) und später von Jensen & Urban (1984) untersucht. Beide Arbeiten weisen nach, daß bei diesen Cobweb-Modellen für eine offene Teilmenge des Parameterraums topologisches Chaos auftritt. Die folgenden Untersuchungen werden ergeben, daß auch bei dem obigen Cobweb-Modell (5.4) für eine offene Teilmenge des Parameterraums topologisches Chaos auftritt. Insbesondere zeigen die Bifurkationsdiagramme, daß es bei abnehmender Risikoaversion zu einem Perioden-Verdopplungsszenario kommt.

*Bifurkationen bei abnehmender Risikoaversion und Streuungsfaktor  $\sigma = 0.4$ :*

Nach Abbildung 5.1 liegen in Abhängigkeit der Parameter  $\lambda$ ,  $\sigma$  und  $a$  ein, zwei oder drei stationäre Zustände  $p_{\lambda,\sigma,a}^I < p_{\lambda,\sigma,a}^{II} < p_{\lambda,\sigma,a}^{III}$  vor. Die Abbildung 5.1 macht außerdem deutlich, daß bei einem Streuungsfaktor von  $\sigma = 0.4$  und bei einer maximalen Nachfrage von  $a = 4$  ein Risikoaversions-Parameter  $\lambda_1$  existiert, so daß am stationären Zustand  $p_{\lambda_1,0.4,4}^{III}$  die Fold-Bifurkationsbedingungen

$$\begin{aligned} f_p(p_{\lambda_1,0.4,4}^{III}, \lambda_1, 0.4, 4) &= 1, \\ f_{pp}(p_{\lambda_1,0.4,4}^{III}, \lambda_1, 0.4, 4) &\neq 0, \\ f_\lambda(p_{\lambda_1,0.4,4}^{III}, \lambda_1, 0.4, 4) &\neq 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind. Man sehe hierzu auch die Ausführungen in Anhang 3.2. Für  $\lambda$  in einer entsprechenden Umgebung von  $\lambda_1$  gilt daher folgendes. Ist  $\lambda > \lambda_1$ , dann existiert ein lokal stabiler stationärer Zustand  $p_{\lambda,0.4,4}^{III}$  und ein instabiler stationärer Zustand  $p_{\lambda,0.4,4}^{II}$ . Ist  $\lambda < \lambda_1$ , dann verschwinden die stationären Zustände

$p_{\lambda_1,0.4,4}^{II}$  und  $p_{\lambda,0.4,4}^{III}$ . Darüber hinaus existiert für beliebiges  $\lambda \in [0.29, 0.32]$  ein stationärer Zustand  $p_{\lambda,0.4,4}^I$ . Die Elastizität des Bildungsgesetzes am stationären Zustand  $p_{\lambda,0.4,4}^I$  ist negativ, denn es ist  $f'(p_{\lambda,0.4,4}^I, \lambda, 0.4, 1) < 0$  für  $\lambda \in [0.29, 0.32]$ .

Die Abbildung 5.4 zeigt unter  $\tau = 1$  Bifurkationsdiagramme in  $\lambda \in [0.29, 0.32]$  für unterschiedliche Anfangswerte. Für  $\lambda > 0.31$  koexistieren die lokal stabilen stationären Zustände  $p_{\lambda,0.4,4}^I$  und  $p_{\lambda,0.4,4}^{III}$ . Ist der Anfangswert  $p_1 = 1.5$ , dann kommt es bei abnehmender Risikoaversion zu einem Perioden–Verdopplungsszenario. Ist  $\lambda < 0.305$ , dann verhält sich das Cobweb–Modell in Abhängigkeit der Startwerte periodisch oder aperiodisch. Der Durchmesser der Attraktoren wächst mit abnehmender Risikoaversion. Das bedeutet, daß bei niedrigerer Risikoaversion größere Preisschwankungen auftreten.

*Bifurkationen bei abnehmender Risikoaversion und Streuungsfaktor  $\sigma = 0.55$ :*

Die Abbildung 5.2 macht deutlich, daß im Falle eines Streuungsfaktors von  $\sigma = 0.55$  und einer maximalen Nachfrage von  $a = 4$  zu jedem  $\lambda \in [0.18, 0.2]$  genau ein stationärer Zustand  $p_{\lambda,0.55,4}^I$  existiert. Darüber hinaus gibt es ein  $\lambda_0$  derart, daß die Flip–Bifurkationsbedingungen

$$\begin{aligned} f_p(p_{\lambda_0,0.55,4}^I, \lambda_0, 0.55, 4) &= -1, \\ f_{p\alpha}(p_{\lambda_0,0.55,4}^I, \lambda_0, 0.55, 4) &\neq 0, \\ 1/2(f_{pp}(p_{\lambda_0,0.55,4}^I, \lambda_0, 0.55, 4))^2 + 1/3f_{ppp}(p_{\lambda_0,0.55,4}^I, \lambda_0, 0.55, 4) &\neq 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind. Für  $\lambda$  in einer entsprechenden Umgebung von  $\lambda_0$  gilt daher folgendes. Ist  $\lambda > \lambda_0$ , dann ist der stationäre Zustand  $p_{\lambda_0,0.55,4}^I$  lokal stabil. Für  $\lambda = \lambda_0$  erfährt das Cobweb–Modell eine nicht–degenerierte Flip–Bifurkation und konvergiert für  $\lambda < \lambda_0$  lokal gegen einen 2–Zyklus.

Die Abbildung 5.5 zeigt unter  $\tau = 1$  das Bifurkationsdiagramm in  $\lambda \in [0.18, 0.2]$  und das zugehörige Diagramm des maximalen Lyapunov Exponenten. Für  $\lambda < 0.196$  treten positive Lyapunov Exponenten und damit sensitive Abhängigkeit von den Anfangswerten auf. Im folgenden wird außerdem der Nachweis erbracht, daß topologisches Chaos auftritt. Der Durchmesser der Attraktoren wächst auch in diesem Fall wieder mit abnehmender Risikoaversion. Das bedeutet, daß bei niedrigerer Risikoaversion größere Preisschwankungen auftreten.

Die Abbildung 5.6 zeigt unter  $\tau = 1$  Zyklogramme des Cobweb–Modells mit naiven Erwartungen. Die Zyklogramme zeigen die qualitative Veränderung des

dynamischen Verhaltens, die im Falle einer Änderung zweier Modellparameter eintritt. Zum einen wird der Risikoaversions-Parameter  $\lambda \in [0.18, 0.2]$  und der Streuungsfaktor  $\sigma \in [0.55, 0.58]$  variiert. Zum anderen wird der Risikoaversions-Parameter  $\lambda \in [0.18, 0.2]$  und die maximale Nachfrage  $a \in [4.0, 4.2]$  variiert. Numerisch zeigt sich, daß im Falle von  $a = 4$  ein offener Parameterbereich für  $\lambda$  und  $\sigma$  existiert, so daß ein lokal stabiler Zyklus der Ordnung 3 vorliegt. Ebenfalls findet man numerisch bei  $\sigma = 0.55$  einen offenen Parameterbereich für  $\lambda$  und  $a$ , so daß ein lokal stabiler Zyklus der Ordnung 3 vorliegt. Da diese numerisch nachgewiesenen 3-Zyklen lokal stabil sind, kann aufgrund einer hohen Rechengenauigkeit auf die analytische Existenz von lokal stabilen 3-Zyklen geschlossen werden. Nach Li & Yorke (1975) existiert damit ein offener Parameterbereich in  $(\lambda, \sigma, a)$ , für den topologisches Chaos auftritt.

### Bifurkationsverhalten bei unterschiedlicher Gedächtnislänge

In diesem Abschnitt wird der Einfluß der Risikoaversion auf das dynamische Verhalten des Cobweb-Modells bei unterschiedlicher Gedächtnislänge  $\tau$  der Prognoseregeln untersucht. Im Rahmen der qualitativen Bifurkationsanalyse des Abschnitts 3.2 wurde für die stationären Zustände das Verhalten der Eigenwerte in Abhängigkeit der Gedächtnislänge und der Elastizität des Bildungsgesetzes bestimmt (Abbildung 3.1). Da meistens ein degenerierter Bifurkations-Typ vorliegt, ist eine theoretische Bifurkationsanalyse dieser Cobweb-Modelle außerordentlich schwierig. Das Bifurkationsverhalten des Cobweb-Modells wird deshalb numerisch mit Hilfe von Bifurkationsdiagrammen und Diagrammen des maximalen Lyapunov Exponenten analysiert. Die obigen Untersuchungen haben gezeigt, daß für  $\tau = 1$  lokal stabile stationäre Zustände koexistieren. Im folgenden werden Bifurkationsdiagramme im Risikoaversions-Parameter  $\lambda$  bei unterschiedlicher Gedächtnislänge und für unterschiedliche Startwerte erstellt.

*Bifurkationsverhalten in  $\lambda \in [0.29, 0.32]$  für  $a = 4$ ,  $\sigma = 0.4$  und  $\tau = 1, 2, 3$ :*

Die Abbildung 5.4 zeigt Bifurkationsdiagramme<sup>3</sup> in  $\lambda \in [0.29, 0.32]$  für  $\tau = 1, 2, 3$  mit  $\sigma = 0.4$ ,  $a = 4$  und  $c = 1$ , wobei von zwei verschiedenen Anfangswerten ausge-

---

<sup>3</sup>Zu Parameterwerten  $\lambda \in [0.29, 0.32]$  und Anfangswerten  $\hat{p}_\tau, \dots, \hat{p}_1$  bzw.  $\bar{p}_\tau, \dots, \bar{p}_1$  werden jeweils 2000 Iterationswerte berechnet. Das Bifurkationsdiagramm zeigt die letzten 200 Iterationswerte  $p_t$ .

gangen wird. Im Gegensatz zu dem Cobweb-Modell mit S-förmigem Bildungsgesetz koexistieren bei dem Cobweb-Modell mit zurückgebogenem Bildungsgesetz lokal stabile stationäre Zustände für  $\tau = 1, 2, 3$ .

Für  $\tau = 1$  und Risikoaversions-Parameterwerte  $\lambda \in [0.31, 0.32]$  sind die beiden stationären Zustände  $p_{\lambda,0.4,4}^I$  und  $p_{\lambda,0.4,4}^{II}$  lokal stabil. Für  $\lambda \in [0.3, 0.31]$  koexistieren der stationäre Zustand  $p_{\lambda,0.4,4}^{III}$  und Zyklen von höherer Ordnung. Bei längerem Gedächtnis ist nur der stationäre Zustand  $p_{\lambda,0.4,4}^I$  für Risikoaversions-Parameterwerte  $\lambda < 0.3$  noch lokal stabil. Nähert sich  $\lambda$  dem Wert 0.29, dann tritt komplexes dynamisches Verhalten auf. Der Durchmesser der Attraktoren und damit der maximale Ausschlag der Preisschwankungen nimmt mit kleiner werdender Risikoaversion zu. Diese Zunahme ist unabhängig von  $\tau$ .

Um zusätzliche Informationen über die Form des komplexen dynamischen Verhaltens des Cobweb-Modells zu erhalten, werden zu verschiedenen Bifurkationsdiagrammen die entsprechenden Diagramme des maximalen Lyapunov Exponenten erstellt.

*Bifurkationsverhalten in  $\lambda \in [0.18, 0.2]$  für  $a = 4$ ,  $\sigma = 0.55$ ,  $\tau = 1, 2, 3, 4$ :*

Die Abbildung 5.5 zeigt die Bifurkationsdiagramme und die zugehörigen Diagramme des maximalen Lyapunov Exponenten in  $\lambda \in [0.18, 0.2]$  für  $\sigma = 0.55$ ,  $a = 4$  und  $\tau = 1, 2, 3, 4$ . Es existiert ein eindeutiger stationärer Zustand, der bei wachsender Gedächtnislänge für immer größere Bereiche des Risikoaversions-Parameters lokal stabil ist. Im Gegensatz zu dem Cobweb-Modell mit S-förmigem Bildungsgesetz weist das Cobweb-Modell mit zurückgebogenem Bildungsgesetz bei jeder Gedächtnislänge  $\tau = 1, 2, 3, 4$  positive Lyapunov Exponenten und damit komplexes dynamisches Verhalten auf. Das Supremum der positiven Lyapunov Exponenten wird bei zunehmender Gedächtnislänge kleiner. Der Durchmesser der Attraktoren und damit der maximale Ausschlag der Preisschwankungen nimmt mit kleiner werdender Risikoaversion zu. Für  $\lambda$  in der Nähe von 0.18 ist diese Zunahme unabhängig von  $\tau$ . Um Aussagen über Eigenschaften des periodischen Verhaltens und deren Abhängigkeit von der Gedächtnislänge machen zu können, werden im folgenden Zycklogramme für unterschiedliche Parameterkombinationen erstellt.



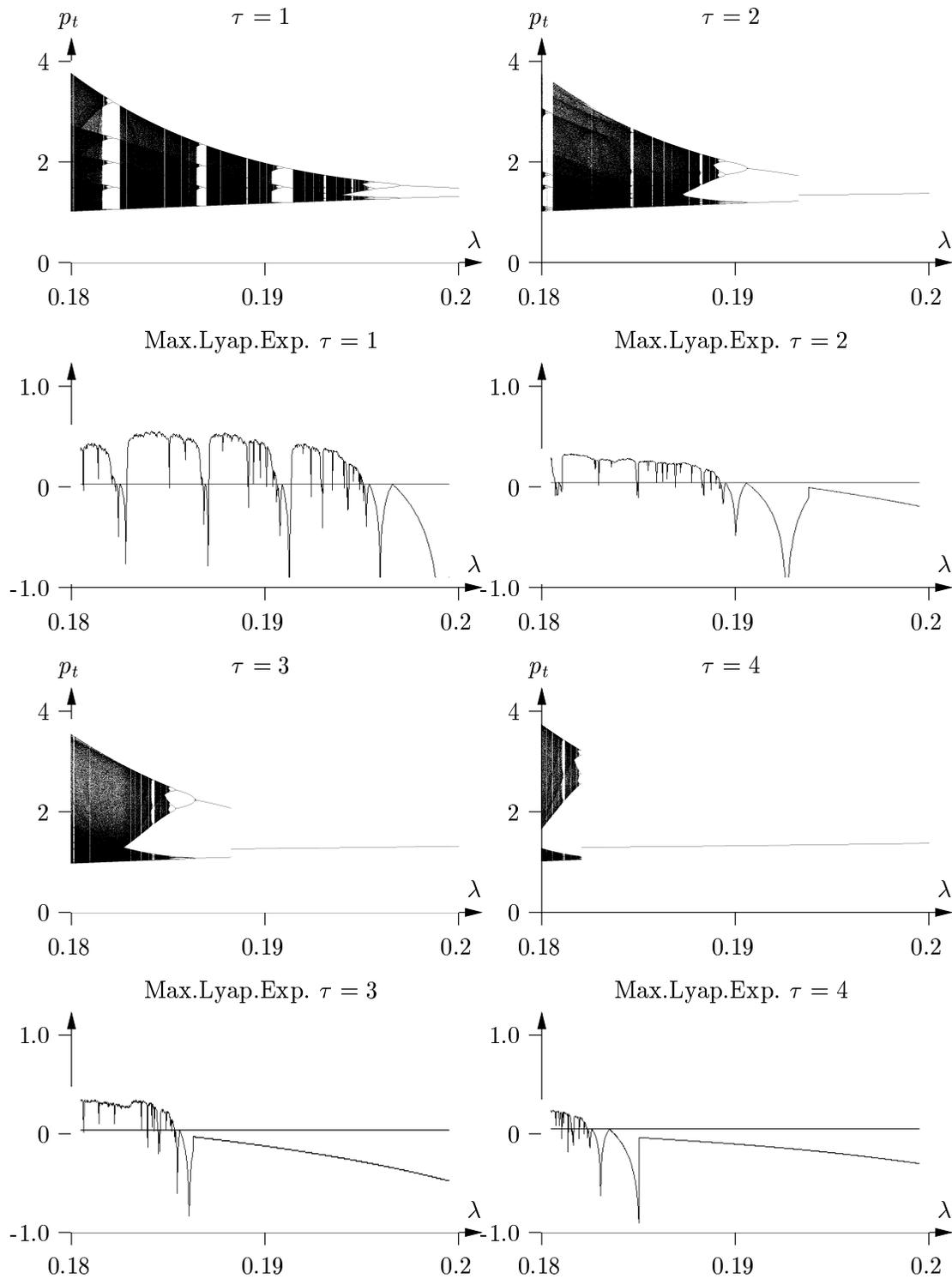


Abbildung 5.5: Ein-Parameter Bifurkationsdiagramme und Diagramme des max. Lyap. Exp. in  $\lambda \in [0.18, 0.2]$  für  $\tau = 1, 2, 3, 4$  mit  $\sigma = 0.55$  und  $a = 4$ .

### 5.2.2 Zwei-Parameter Bifurkationsanalyse: Streuungsfaktor und Risikoaversion, maximale Nachfrage und Risikoaversion

Zur Untersuchung der qualitativen Veränderung der Dynamik bei Variation zweier Modellparameter werden wieder mittels MACRODYN Zyklogramme<sup>4</sup> erstellt. Dieser Abschnitt befaßt sich zunächst mit dem Bifurkationsverhalten des Cobweb-Modells bei gleichzeitiger Variation des Risikoaversions-Parameters und des Streuungsfaktors. Anschließend wird das Bifurkationsverhalten bei Variation des Risikoaversions-Parameters und der maximalen Nachfrage untersucht. Die Abbildung 5.6 zeigt für Gedächtnislänge  $\tau = 1, 2, 3$  der Prognoseregeln das jeweilige Zyklogramm in  $(\lambda, \sigma) \in [0.18, 0.2] \times [0.55, 0.58]$  und das jeweilige Zyklogramm in  $(\lambda, a) \in [0.18, 0.2] \times [4.0, 4.2]$ .

*Zyklogramm in  $(\lambda, \sigma) \in [0.18, 0.2] \times [0.55, 0.58]$  für  $\tau = 1, 2, 3$ :*

Bei hoher Risikoaversion oder hohem Streuungsfaktor konvergiert das Cobweb-Modell gegen den eindeutigen stationären Zustand. Insbesondere wächst die Menge der Parameterkombinationen  $(\lambda, \sigma)$ , für die der stationäre Zustand lokal stabil ist, wenn die Gedächtnislänge  $\tau$  der Prognoseregeln größer wird. Bei abnehmender Risikoaversion  $\lambda$  oder abnehmendem Streuungsfaktor  $\sigma$  treten zunächst lokal stabile Zyklen der Ordnung  $\tau + 1$  auf. Bei dem in Abschnitt 4.2 untersuchten Cobweb-Modell mit S-förmigem Bildungsgesetz ist die Ordnung der lokal stabilen Zyklen durch  $\tau + 1$  beschränkt. Im Gegensatz dazu weist das Cobweb-Modell mit zurückgebogenem Bildungsgesetz, bei entsprechend niedrigem  $\lambda$  oder  $\sigma$ , auch lokal stabile Zyklen von einer Ordnung größer als  $\tau + 1$  auf. Insbesondere findet man für  $\tau = 1, 2, 3$  periodische Fenster mit lokal stabilen Zyklen der Ordnung 3.

*Zyklogramm in  $(\lambda, a) \in [0.18, 0.2] \times [4.0, 4.2]$  für  $\tau = 1, 2, 3$ :*

Bei gleicher Gedächtnislänge  $\tau$  weisen die Zyklogramme in den Parametern  $(\lambda, a)$  und die Zyklogramme in  $(\lambda, \sigma)$  eine Vielzahl von Gemeinsamkeiten auf. So wächst

---

<sup>4</sup>Wie bereits in Abschnitt 4.3.2 erklärt, kann MACRODYN für Parameterkombinationen aus einem vorgegebenen zwei-dimensionalen Intervall das jeweilige dynamische Langzeitverhalten eines Systems numerisch ermitteln und farblich kodiert in Form einer Landkarte, dem Zyklogramm, darstellen. Man sehe hierzu auch das Handbuch von Böhm & Schenk-Hoppé (1998).

die Menge der Parameterkombinationen  $(\lambda, a)$ , für die der stationäre Zustand lokal stabil ist, wenn die Gedächtnislänge  $\tau$  der Prognoseregeln größer wird. Insbesondere liegt ein aperiodisches Verhalten des Cobweb-Modells erst bei entsprechend niedriger maximaler Nachfrage  $a$  oder bei niedrigem Risikoaversionsparameter  $\lambda$  vor.

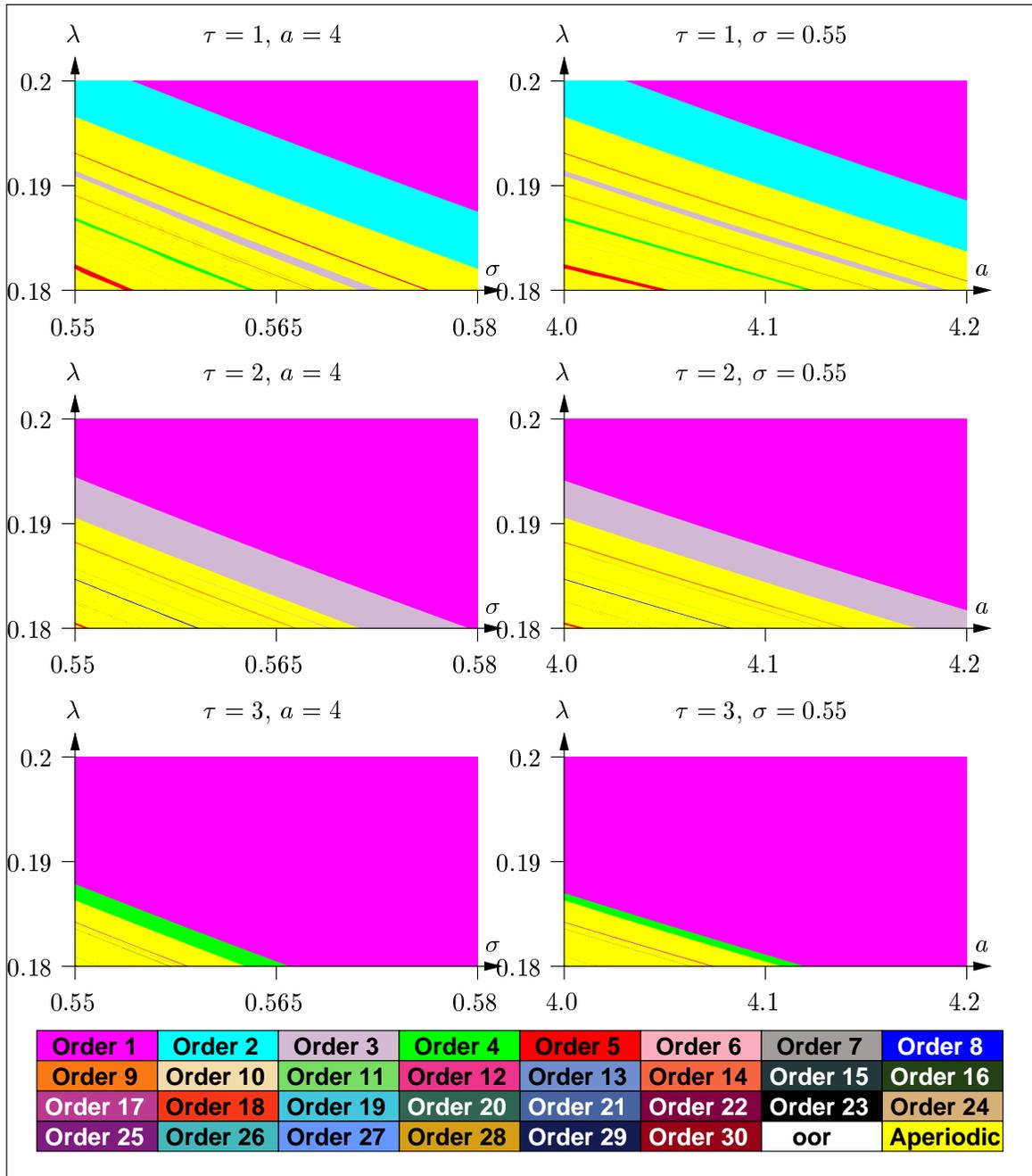


Abbildung 5.6: Zycklogramme in  $(\lambda, \sigma) \in [0.18, 0.2] \times [0.55, 0.58]$  und in  $(\lambda, a) \in [0.18, 0.2] \times [4, 4.2]$  für  $\tau = 1, 2, 3$ .

### 5.2.3 Schlußfolgerungen

Die numerische Analyse der Dynamik des Cobweb-Modells mit zurückgebogenem Bildungsgesetz und dem ungewichteten Durchschnitt als Prognoseregeln hat folgendes ergeben:

Bei einer hohen Risikoaversion des Produzenten hat das Cobweb-Modell entweder einen eindeutigen lokal stabilen stationären Zustand oder es koexistieren drei stationäre Zustände. Entspricht dem stationären Zustand ein hoher Gleichgewichtspreis, so ist das Bildungsgesetz zu diesem Gleichgewichtspreis positiv elastisch. Entspricht dem stationären Zustand ein niedriger Gleichgewichtspreis, dann ist das Bildungsgesetz zu diesem Gleichgewichtspreis negativ elastisch. Daher hängen nur die Stabilitätseigenschaften des stationären Zustandes, der dem niedrigen Gleichgewichtspreis entspricht, von der Länge des Gedächtnisses der Prognoseregeln ab.<sup>5</sup>

Die im Kapitel 4 durchgeführte numerische Analyse der Dynamik des Cobweb-Modells mit S-förmigem Bildungsgesetz und dem ungewichteten Durchschnitt als Prognoseregeln hat gezeigt, daß außer für  $\tau = 2$  kein komplexes dynamisches Verhalten auftritt und daß die Ordnung der lokal stabilen Zyklen  $\tau + 1$  ist. Im Gegensatz dazu zeigten die Untersuchungen dieses Abschnitts, daß das Cobweb-Modell mit zurückgebogenem Bildungsgesetz und ungewichteten Durchschnitt als Prognoseregeln bei kurzer Gedächtnislänge auch komplexere Formen des dynamischen Verhaltens aufweist.

So kann es bei naiven Erwartungen im Falle einer Variation des Risikoaversions-Parameters oder des Streuungsfaktors sowohl zu einer Flip-Bifurkation, wie auch zu einer Fold-Bifurkation kommen. Außerdem tritt komplexes dynamisches Verhalten, wie etwa topologisches Chaos, bei niedriger Risikoaversion und niedrigem Streuungsfaktor auf. Ist die Gedächtnislänge der Prognoseregeln  $\tau$ , so liegen nicht nur lokal stabile Zyklen der Ordnung  $\tau + 1$  vor. Numerisch lassen sich auch lokal stabile Zyklen von einer Ordnung größer als  $\tau + 1$  nachweisen. Außerdem nimmt bei abnehmender Risikoaversion der Durchmesser der Attraktoren und damit die Amplitude der Preisschwankungen zu. Im Falle einer Verringerung der Risikoaversion, der maximalen Nachfrage  $a$ , oder des Streuungsfaktors  $\sigma$  kommt es zu einem aperiodischen Verhalten des Cobweb-Modells, wobei häufig auch positive Lyapunov Exponenten auftreten. Eine Erhöhung der Gedächtnislänge bewirkt, daß sich

---

<sup>5</sup>Die Konvergenzgeschwindigkeit der Trajektorien zu diesem stationären Zustand verringert sich dabei mit zunehmender Gedächtnislänge.

diese maximalen Lyapunov Exponenten schnell der Null annähern. Das bedeutet, daß das Cobweb–Modell dann nur noch eine geringe sensitive Abhängigkeit von den Anfangswerten aufweist.

## 5.3 Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt

In diesem Abschnitt wird davon ausgegangen, daß die Produzenten zur Prognose des ersten Moments  $p_{t,t+1}^e$  den geometrisch gewichteten Durchschnitt

$$p_{t,t+1}^e = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} \sum_{k=0}^{\tau-1} w^k p_{t-k}$$

verwenden. Die folgende numerische Analyse befaßt sich daher sowohl mit dem Einfluß des Gewichtungsfaktors  $w \in (0, \infty)$ , wie auch mit dem Einfluß der Gedächtnislänge  $\tau \in \mathbb{N}$  auf das dynamische Verhalten des Cobweb–Modells mit zurückgebogenem Bildungsgesetz. Die Prognose  $p_{t,t+1}^e$  liegt jeweils in der konvexen Hülle der endlich vielen vergangenen Beobachtungen  $p_t, \dots, p_{t-\tau+1}$ . Sind die Parameter  $a$ ,  $\lambda$  und  $\sigma$  so gewählt, daß das globale Minimum des zurückgebogenen Bildungsgesetzes größer als  $c = 1$  ist und gilt für die Anfangswerte  $p_1 \geq 1, \dots, p_k \geq 1$ , dann entspricht das Cobweb–Modell der stetig differenzierbaren Differenzgleichung

$$p_{t+1} = a - \frac{\sum_{k=0}^{\tau-1} \frac{w^k p_{t-k}}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} - 1}{\lambda \left( \sum_{k=0}^{\tau-1} \frac{w^k p_{t-k}}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} - 1 \right)^2 + \sigma^2 \left( \sum_{k=0}^{\tau-1} \frac{w^k p_{t-k}}{\sum_{i=0}^{\tau-1} w^i} \right)^2}, \quad t \geq \tau. \quad (5.5)$$

Diese Differenzgleichung kann auch in Form eines  $\tau$ –dimensionalen dynamischen Systems dargestellt werden und ist in den Parametern  $a$ ,  $\lambda$ ,  $\sigma$  und  $w > 0$  stetig differenzierbar. Es wird  $\tau \geq 2$  vorausgesetzt, denn für  $\tau = 1$  entspricht die Prognoseregeln den bereits oben untersuchten naiven Erwartungen.

### 5.3.1 Ein–Parameter Bifurkationsanalyse: Risikoaversion, Streuungsfaktor, Gewichtungsfaktor

In diesem Abschnitt wird der Einfluß des Gewichtungsfaktors  $w$  und der Gedächtnislänge  $\tau$  auf das dynamische Verhalten des Cobweb–Modells (5.5) numerisch analysiert. Analog zu Kapitel 4 wird insbesondere die Frage untersucht, inwiefern

sich die Dynamik des Cobweb-Modells bei einem Gewichtungsfaktor  $w < 1$  von der Dynamik bei einem Gewichtungsfaktor  $w > 1$  unterscheidet. Hierzu wird das Bifurkationsverhalten des Cobweb-Modells in  $w \in [0, 1]$  und in  $w \in [1, 2]$  mit Hilfe von Bifurkationsdiagrammen und Zyklogrammen untersucht. Um außerdem verschiedene Formen des komplexen dynamischen Verhaltens voneinander unterscheiden zu können, wird zu jedem Bifurkationsdiagramm jeweils das entsprechende Diagramm des maximalen Lyapunov Exponenten erstellt. Daneben werden zu einigen Gewichtungsfaktoren  $w$  zwei-dimensionale Einbettungen von verschiedenen  $\tau$ -dimensionalen Attraktoren des Cobweb-Modells betrachtet.

Die numerische Analyse wird zeigen, daß bei dem Cobweb-Modell mit zurückgebogenem Bildungsgesetz, im Gegensatz zu dem Cobweb-Modell mit S-förmigem Bildungsgesetz, für  $w < 1$  und für  $w > 1$  signifikant positive Lyapunov Exponenten, und damit sensitive Abhängigkeiten von den Anfangswerten, auftreten. Insbesondere weist das Cobweb-Modell mit zurückgebogenem Bildungsgesetz, für Gewichtungsfaktoren  $w$  in der Umgebung von 0 und bei beliebiger Gedächtnislänge, häufig ein komplexes dynamisches Verhalten auf. Für Gewichtungsfaktoren  $w$  aus der Umgebung von 1 verhält sich das Cobweb-Modell erst bei einem entsprechend langen Gedächtnis periodisch oder quasi-periodisch. Vergleicht man im Falle des zurückgebogenen Bildungsgesetzes die Bifurkationsdiagramme des Cobweb-Modells mit geometrisch gewichtetem Durchschnitt und die Bifurkationsdiagramme des Cobweb-Modells mit linear adaptiver Prognoseregeln, so zeigen sich bei großer Gedächtnislänge wieder Übereinstimmungen zwischen dem Bifurkationsverhalten der beiden Modelle.

### Einfluß des Gewichtungsfaktors auf die Dynamik

Nach Lemma 2 aus Kapitel 3 existiert für das zurückgebogene Bildungsgesetz immer ein Gleichgewichtspreis  $p_{\lambda, \sigma, a}^I$ , wobei für die Elastizität des Bildungsgesetzes an diesem Gleichgewichtspreis  $\epsilon_f(p_{\lambda, \sigma, a}^I) = \epsilon_S(p_{\lambda, \sigma, a}^I) / \epsilon_D(p_{\lambda, \sigma, a}^I) \leq 1$  gilt. Das Cobweb-Modell besitzt daher für fast alle Parameterkombinationen  $(\lambda, \sigma, a)$ , bei entsprechend langem Gedächtnis  $\tau$  und Gewichtungsfaktor  $w = 1$ , einen lokal stabilen stationären Zustand.

Bei zunehmendem Gewichtungsfaktor erfährt das Cobweb-Modell eine Hopf-Bifurkation. Bei abnehmendem Gewichtungsfaktor erfährt das Cobweb-Modell eine Flip-Bifurkation. Die folgenden Bifurkations- und Lyapunov Exponenten Diagramme zeigen das globale Bifurkationsverhalten des Cobweb-Modells bei

Variation des Gewichtungsfaktors  $w \in [0, 2]$ .

*Bifurkationsverhalten in  $w \in [0, 2]$  für  $\lambda = 0.18$ ,  $a = 4$ ,  $\sigma = 0.55$  und  $\tau = 2, 3, 4, 5$ :*

Die Abbildung 5.7 zeigt Bifurkationsdiagramme und Diagramme des maximalen Lyapunov Exponenten im Gewichtungsfaktor  $w \in [0, 2]$  für die Gedächtnislängen  $\tau = 2, 3, 4, 5$ . Hierbei beträgt die maximale Nachfrage  $a = 4$ , der Streuungsfaktor  $\sigma = 0.55$ , und der Risikoaversions-Parameter  $\lambda = 0.18$ . Der stationäre Zustand des Cobweb-Modells ist für  $\tau = 2, 3, 4$  und Gewichtungsfaktoren aus der Umgebung von 1 instabil. Die Diagramme des maximalen Lyapunov Exponenten in Abbildung 5.7 zeigen, daß für  $w$  in jeder Umgebung von 1 positive Lyapunov Exponenten auftreten. Außerdem findet man numerisch für Gewichtungsfaktoren  $w$  in jeder beliebigen Umgebung von 0 signifikant positive Lyapunov Exponenten. Im Gegensatz dazu konvergiert das Cobweb-Modell mit S-förmigem Bildungsgesetz, für alle Gewichtungsfaktoren aus einer Umgebung von 0, gegen 2-Zyklen.

Für Gewichtungsfaktoren  $w \geq 1$  treten signifikant positive maximale Lyapunov Exponenten auf, die sich bei zunehmender Gedächtnislänge  $\tau$  dem Wert Null annähern. Dieses numerische Ergebnis stimmt mit der Aussage der Proposition 2 überein. Im Gegensatz dazu treten bei dem Cobweb-Modell mit S-förmigem Bildungsgesetz, für alle Gewichtungsfaktoren  $w \geq 1$ , nicht-positive Lyapunov Exponenten auf.

Unabhängig von der Gedächtnislänge der Prognoseregeln vergrößern sich die Durchmesser der Attraktoren des Cobweb-Modells bei abnehmendem Gewichtungsfaktor  $w < 1$ . Das bedeutet, daß die Preisschwankungen eine zunehmend größere Amplitude aufweisen. Die Durchmesser der Attraktoren vergrößern sich ebenso im Falle einer Zunahme des Gewichtungsfaktors  $w > 1$ .

Hat die Prognoseregeln eine Gedächtnislänge  $\tau$ , so ist der Zustandsraum des Cobweb-Modells  $\tau$ -dimensional. Da eine  $\tau$ -dimensionale Darstellung der Trajektorien nicht möglich ist, werden für verschiedene Parameterkombinationen zwei-dimensionale Einbettungen der  $\tau$ -dimensionalen Attraktoren des Cobweb-Modells untersucht.

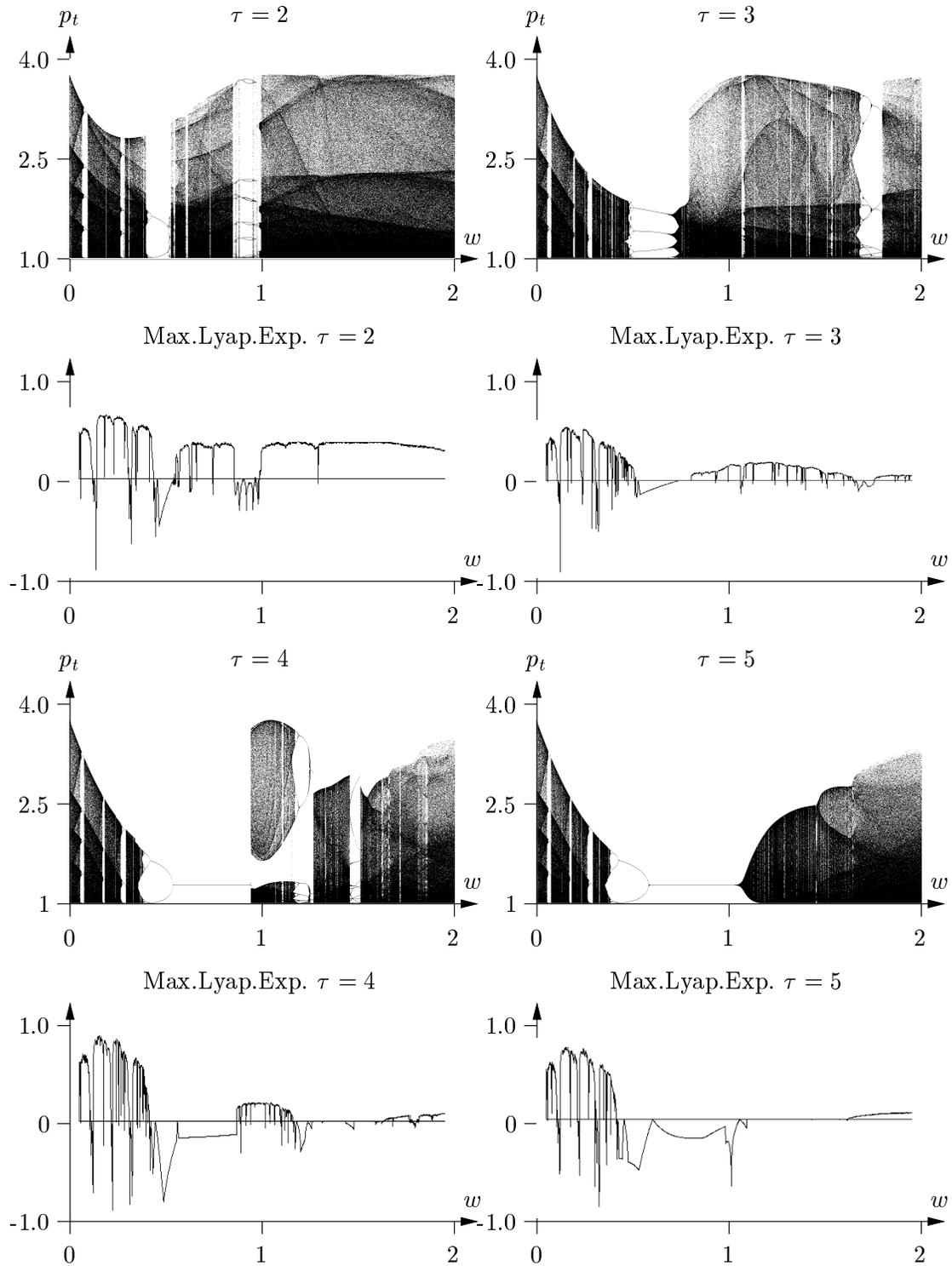


Abbildung 5.7: Ein-Parameter Bifurkationsdiagramme und Diagramme des max. Lyap. Exp. in  $w \in [0, 2]$  für  $\tau = 1, \dots, 4$  mit  $\lambda = 0.18$ ,  $\sigma = 0.55$  und  $a = 4$ .

*Attraktoreinbettungen mit unterschiedlicher Risikoaversion und Gedächtnislänge:*

Die Abbildung 5.8 zeigt zwei-dimensional eingebettete Attraktoren<sup>6</sup> des Cobweb-Modells für die Risikoaversions-Parameterwerte  $\lambda = 0.18, 0.1825, 0.185, 0.1875$ , wobei die Gedächtnislänge  $\tau = 2$ , der Gewichtungsfaktor  $w = 1$  und der Streuungsfaktor  $\sigma = 0.55$  ist. Die Attraktoren weisen eine fraktale Struktur auf und ihr Durchmesser verringert sich bei zunehmendem Risikoaversions-Parameter. Unabhängig von der Gedächtnislänge gilt, daß wenn in Periode  $t - 1$  der Preis  $p_{t-1}$  niedrig ist, dann kann in der nächsten Periode ein hoher oder ein niedriger Preis  $p_t$  auftreten. Im Falle eines hohen Preises  $p_{t-1}$  in Periode  $t - 1$  ergibt sich in der nächsten Periode  $t$  ein Preis  $p_t$  mittlerer Höhe.

Die Abbildung 5.8 zeigt für Gewichtungsfaktor  $w = 1.15$ , Streuungsfaktor  $\sigma = 0.55$ , Risikoaversions-Parameter  $\lambda = 0.18$  und Gedächtnislänge  $\tau = 2, 3, 4, 5$  zwei-dimensional eingebettete Attraktoren des Cobweb-Modells. Für  $\tau = 2, 3, 4$  weisen die Attraktoren eine fraktale Struktur auf. Für  $\tau = 5$  liegt ein quasi-periodischer Attraktor vor. Im Falle eines niedrigen Preises  $p_{t-1}$  in Periode  $t - 1$  kann der Preis  $p_t$  in der nächsten Periode  $t$  niedrig oder hoch sein. Ist aber in Periode  $t - 1$  der Preis  $p_{t-1}$  hoch, dann liegt in der nächsten Periode  $t$  immer ein niedriger Preis  $p_t$  vor.

*Das dynamische Verhalten bei langem Gedächtnis:*

Untersucht man das dynamische Verhalten des Cobweb-Modells für Gewichtungsfaktoren  $w < 1$  bei großer Gedächtnislänge  $\tau$ , so kommt man zu folgendem Ergebnis:

Die Abbildung 5.9 zeigt das Bifurkationsverhalten des Cobweb-Modells mit geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregeln bei einer Änderung des Risikoaversions-Parameters  $\lambda \in [0.18, 0.2]$ . Hierbei beträgt die Gedächtnislänge der Prognoseregeln  $\tau = 10$  und die betrachteten Gewichtungsfaktoren sind  $w = 0.2$  und  $w = 0.3$ . Unterhalb der Bifurkationsdiagramme ist jeweils das Bifurkationsdiagramm des Cobweb-Modells mit linear adaptiver Prognoseregeln bei einer Änderung von  $\lambda \in [0.18, 0.2]$  für Adaptationsparameter  $1-w = 0.8$  und  $1-w = 0.7$  abgebildet. Daneben sind für festes  $\lambda = 0.18$  und  $\lambda = 0.19$  die Bifurkationsdi-

---

<sup>6</sup>Zu einem festen Startwert werden 20000 Iterationswerte berechnet. Um bis zu einem gewissen Grade transientes Verhalten auszuschließen, werden nur die letzten 10000 Iterationswerte  $p_t$  als Paare  $(p_t, p_{t-1})$  dargestellt.

gramme der beiden Cobweb-Modelle im Gewichtungsfaktor  $w \in (0, 1]$  bzw. im Adaptationsparameter  $1 - w \in [0, 1)$  abgebildet. Es zeigen sich deutliche Übereinstimmungen im Bifurkationsverhalten der beiden Cobweb-Modelle. Insbesondere weisen beide Modelle numerisch dieselben Bifurkationsstellen auf.

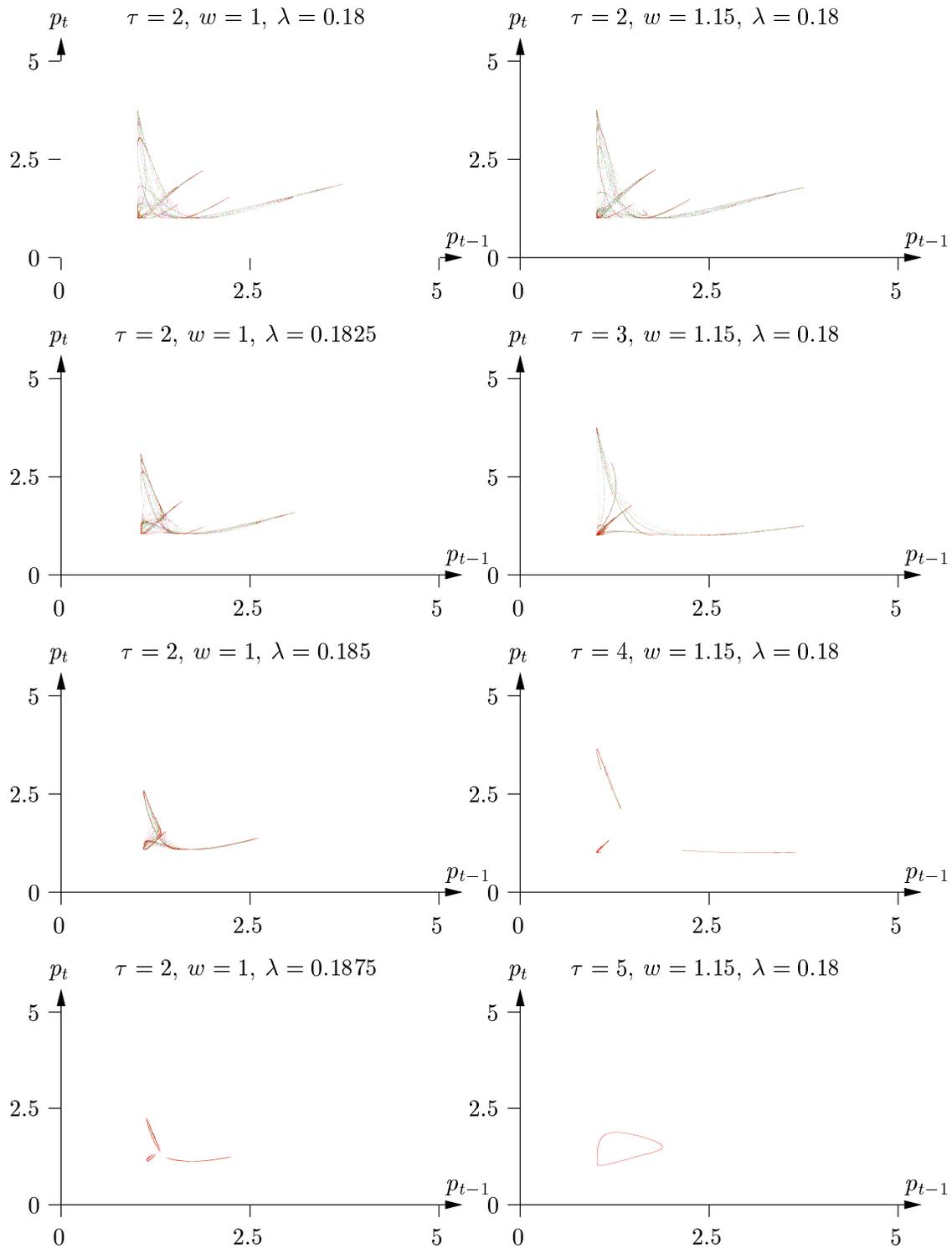


Abbildung 5.8: Attraktoren im  $(p_t, p_{t-1})$ -Raum für  $\tau = 2, w = 1, \sigma = 0.55, a = 4$  und  $\lambda = 0.18, 0.1825, 0.185, 0.1875$ , sowie für  $w = 1.15, \sigma = 0.55, \lambda = 0.18$  und  $\tau = 2, 3, 4, 5$ .

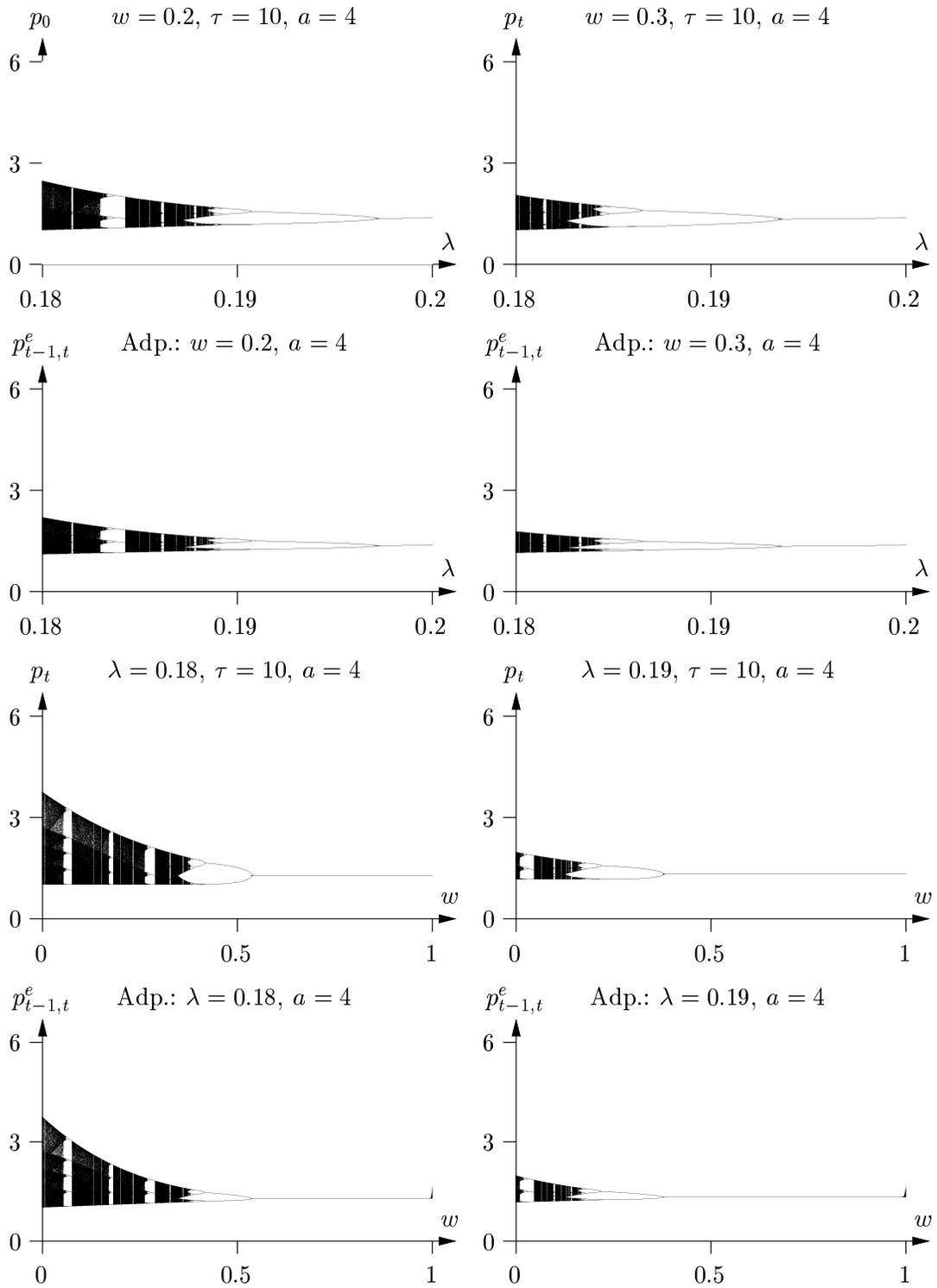


Abbildung 5.9: Vergleich des Bifurk.verh. bei lin. adap. Prognose und bei Prognose mittels geo. gew. Durch. ( $\tau = 10$ ) für  $\lambda \in [0.18, 0.2]$  bzw.  $w \in [0, 1]$ ,  $\sigma = 0.55$ ,  $a = 4$ .

### 5.3.2 Zwei-Parameter Bifurkationsanalyse: Risikoaversi- on und Gewichtungsfaktor

In diesem Abschnitt wird die Änderung des dynamischen Verhaltens des Cobweb-Modells (5.5) bei gleichzeitiger Variation des Risikoaversions-Parameters und des Gewichtungsfaktors der Prognoseregeln numerisch analysiert. Die Ergebnisse werden anschließend mit den Ergebnissen der Zwei-Parameter Bifurkationsanalyse des Cobweb-Modells mit S-förmigem Bildungsgesetz verglichen. Die qualitative Änderung der Dynamik des Cobweb-Modells bei Variation zweier Parameter wird dabei mittels Zyklusdiagrammen untersucht. Man sehe hierzu auch Abschnitt 4.3.2. Die im Rahmen der obigen Ein-Parameter Bifurkationsanalyse gewonnenen Ergebnisse können hierdurch in einen allgemeineren Zusammenhang eingebettet werden. Die Abbildung 5.10 zeigt *Zyklusdiagramme* in  $(\lambda, w) \in [0.18, 0.2] \times [0, 2]$  für  $\sigma = 0.55$ ,  $a = 4$  und  $\tau = 2, \dots, 7$ . Die beiden variierten Parameter sind also der Risikoaversions-Parameter  $\lambda \in [2.5, 3.0]$  und der Gewichtungsfaktor  $w \in [0, 2]$ . Der Streuungsfaktor ist  $\sigma = 0.55$  und die maximale Nachfrage ist  $a = 4$ . Wie bereits aus den in Abbildung 3.1 dargestellten Bifurkationskurven folgt auch aufgrund der Zyklusdiagramme, daß für Gewichtungsfaktoren  $w \neq 1$  ab einer bestimmten Elastizität des Bildungsgesetzes durch Vergrößerung der Gedächtnislänge eine Stabilisierung des stationären Zustandes nicht mehr möglich ist.

Das unterschiedliche Bifurkationsverhalten des Cobweb-Modells bei gerader und ungerader Gedächtnislänge zeigt sich vor allem am Verlauf der Bifurkationskurven des stationären Zustandes. Die Zyklusdiagramme zeigen diese Bifurkationskurven als den Rand der Menge derjenigen Parameter  $(\lambda, w)$ , für die das Cobweb-Modell gegen den stationären Zustand konvergiert. Betrachtet man das Bifurkationsverhalten für Gewichtungsfaktoren  $w < 1$ , dann zeigen sich für Gedächtnislänge  $\tau \geq 4$  keine weiteren Veränderungen der Zyklusdiagramme. Das dynamische Verhalten der Cobweb-Modelle ist also für  $0 < w < 1$  und großes  $\tau$ , trotz unterschiedlicher Dimension der Modelle, kaum noch von der Gedächtnislänge abhängig. Nur im Falle eines Gewichtungsfaktors  $w > 1$  kommt es zu wesentlichen Veränderungen des Bifurkationsverhaltens, wenn die Gedächtnislänge variiert wird. Insbesondere findet man, im Gegensatz zu dem Cobweb-Modell mit S-förmigem Bildungsgesetz, für  $w \geq 1$  lokal stabile Zyklen, die eine Ordnung größer als  $2\tau$  aufweisen.

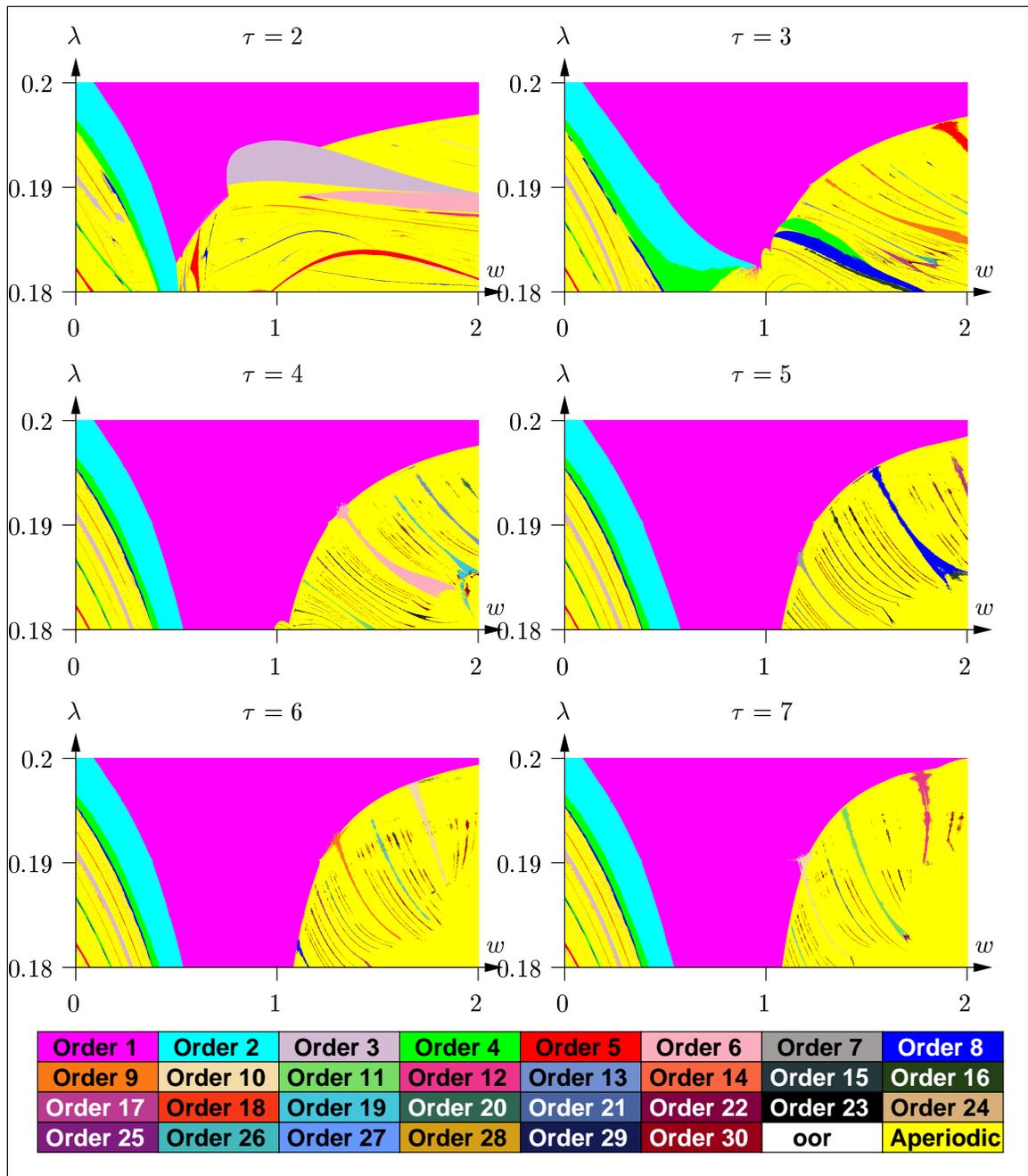


Abbildung 5.10: Zyklogramme in  $w \in [0, 2]$  und  $\lambda \in [0.18, 0.2]$  für  $\tau = 2, \dots, 7$  mit  $a = 4$  und  $\sigma = 0.55$ .

### 5.3.3 Schlußfolgerungen

Die numerische Analyse der Dynamik des Cobweb-Modells mit zurückgebogenem Bildungsgesetz und geometrisch gewichteten Durchschnitt als Prognoseregelle führte zu folgenden Ergebnissen.

In Abhängigkeit der Risikoaversion  $\lambda$ , des Streuungsfaktors  $\sigma$  und der maximalen Nachfrage  $a$ , besitzt das zurückgebogene Cobweb-Bildungsgesetz einen, zwei oder drei Gleichgewichtspreise. Bei niedriger Risikoaversion oder niedrigem Streuungsfaktor ist die Elastizität des Bildungsgesetzes an einem dieser Gleichgewichtspreise negativ und weist einen hohen Betrag auf. Liegen drei stationäre Zustände vor, so ist der stationäre Zustand, der dem hohen Gleichgewichtspreis immer lokal stabil. Die lokalen Stabilitätseigenschaften des stationären Zustandes, der dem niedrigen Gleichgewichtspreis entspricht, hängen von der Gedächtnislänge  $\tau$  ab.

Die numerischen Untersuchungen zeigen, daß das Cobweb-Modell für Gewichtungsfaktoren  $w > 1$  und  $w < 1$ , sowie bei gerader und ungerader Gedächtnislänge  $\tau$ , ein unterschiedliches dynamisches Verhalten aufweist. Die in Kapitel 4 durchgeführte numerische Analyse ergab, daß bei dem Cobweb-Modell mit S-förmigem Bildungsgesetz und geometrisch gewichtetem Durchschnitt als Prognoseregelle nur für Gewichtungsfaktoren  $w < 1$  komplexes dynamisches Verhalten auftritt. Außerdem konvergiert dieses Cobweb-Modell für  $w$  nahe bei 0 jeweils gegen einen 2-Zyklus. Im Gegensatz dazu weist das Cobweb-Modell mit zurückgebogenem Bildungsgesetz für Gewichtungsfaktoren  $w$  in der Nähe von 0 ein komplexes dynamisches Verhalten auf, wobei meistens signifikant positive Lyapunov Exponenten vorliegen. Bei kurzer Gedächtnislänge tritt auch für Gewichtungsfaktoren  $w \geq 1$  komplexes dynamisches Verhalten mit zum Teil signifikant positiven Lyapunov Exponenten auf. Erst bei größerer Gedächtnislänge  $\tau$  nähern sich die Lyapunov Exponenten der Null an, wobei sich das Cobweb-Modell für Gewichtungsfaktoren  $w$  in der Umgebung von 1 periodisch oder quasi-periodisch verhält.

Der Vergleich der Dynamik bei linear adaptiver Prognose und bei Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt zeigt, daß auch bei zurückgebogenem Bildungsgesetz Übereinstimmungen zwischen dem dynamischen Verhalten der beiden Modelle bestehen. Unabhängig von der Gedächtnislänge der Prognoseregelle gilt außerdem, daß sich die Durchmesser der Attraktoren des Cobweb-Modells vergrößern, wenn sich der Gewichtungsfaktor  $w$  von der 1 entfernt. Die Preisschwankungen weisen dadurch also eine zunehmend größere Amplitude auf.

Des Weiteren existieren sowohl für Gewichtungsfaktoren  $w < 1$ , wie auch für Gewichtungsfaktoren  $w > 1$  Attraktoren mit fraktaler Struktur. Für alle Attraktoren gilt, daß im Falle eines niedrigen Preises  $p_{t-1}$  in Periode  $t - 1$  der Preis  $p_t$  in der nächsten Periode  $t$  niedrig oder hoch sein kann. Ist in Periode  $t - 1$  der Preis  $p_{t-1}$  hoch so liegt in der nächsten Periode  $t$  ebenfalls ein hoher Preis  $p_t$  vor. In Anlehnung an die Untersuchungen von Hommes & Sorger (1996) müßte sich daher die Analyse der Autokorrelationsfunktion der Zeitreihen dieses Cobweb-Modells ergeben, daß die Autokorrelationseigenschaften von einigen der Zeitreihen den Autokorrelationseigenschaften von schwachem weißen Rauschen entsprechen. Hommes & Sorger (1996) bezeichnen dann die Prognoseregeln von solchen Cobweb-Modellen als konsistent.

Somit läßt sich zusammenfassend sagen, daß die Komplexität der Dynamik von Cobweb-Modellen mit S-förmigem Bildungsgesetz vor allem durch die Form der Prognoseregeln bestimmt wird. Bei zurückgebogenem Bildungsgesetz hängt die Komplexität des dynamischen Verhaltens dagegen sowohl von der Form der Prognoseregeln, wie auch von den Krümmungseigenschaften des Bildungsgesetzes ab. Im obigen Beispiel wurde die Krümmung des Bildungsgesetzes im wesentlichen durch die absolute Risikoaversion des Produzenten bestimmt. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß die absolute Risikoaversion selbst ein Krümmungsmaß der Nutzenfunktion ist.



# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Schlußbemerkung

Die mathematischen Entdeckungen, die in den letzten Jahren auf dem Gebiet der nichtlinearen dynamischen Systeme gemacht wurden, haben die Entwicklung der ökonomischen Theorie nachhaltig beeinflusst. Insbesondere ergaben sich daraus wichtige Impulse für die Kontroverse, ob Schwankungen von ökonomischen Größen durch endogene Ursachen erklärt werden müssen oder ob diese Schwankungen allein auf exogene Ursachen zurückzuführen sind. Vor allem die Kontroverse zwischen den Anhängern der *Bounded Rationality* Literatur<sup>1</sup> und den Vertretern der Hypothese rationaler Erwartungen wurde stark durch die Entdeckung beeinflusst, daß fast jede von einem stochastischen Prozeß erzeugte Zeitreihe auch durch ein nichtlineares deterministisches System erzeugt werden kann. Ein Teil der *Bounded Rationality* Literatur (Grandmont (1985), Grandmont (1998), Evans & Honkapohja (1995a), Evans & Honkapohja (1995b), usw.) befaßt sich fast ausschließlich mit der Frage, unter welchen Voraussetzungen die Trajektorien eines ökonomischen Systems gegen eine Gleichgewichtslösung mit rationalen Erwartungen konvergieren. Allerdings haben gerade die Beiträge von Hommes (1998) und Hommes & Sorger (1996) gezeigt, daß auch die Trajektorien, die nicht gegen eine

---

<sup>1</sup>Unter *bounded rationality* bzw. beschränkt rationalem Verhalten wird in der Regel verstanden, daß die Erwartungsbildung der Wirtschaftssubjekte auf einer vorgegebenen Familie von Prognoseregeln beruht. Die Prognosen der Wirtschaftssubjekte werden dabei adaptiv erstellt, indem sie, basierend auf vergangenen Beobachtungen, jeweils eine neue Prognoseregeln auswählen. Die Gleichgewichtslösungen des zugrundeliegenden ökonomischen Systems, also die perfekten Prognoseregeln, müssen nicht notwendigerweise zu der vorgegebenen Familie von Prognoseregeln gehören. Man sehe hierzu auch Kirman & Salmon (1995).

Gleichgewichtslösung konvergieren, im Rahmen von Untersuchungen langfristiger ökonomischer Entwicklungen mitberücksichtigt werden müssen.<sup>2</sup>

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird ebenfalls von der Annahme ausgegangen, daß die Wirtschaftssubjekte die Struktureigenschaften der Ökonomie nur unzureichend kennen und sich deshalb beschränkt rational verhalten. Das bedeutet, daß die Form ihrer Erwartungsbildung nur zu einem Teil oder überhaupt nicht durch die Eigenschaften der Ökonomie bestimmt werden. Vielmehr verwenden die Wirtschaftssubjekte zur Erstellung ihrer Prognosen einfache linear rekursive Prognoseregeln. Beschränkt rationales Verhalten bedeutet im folgenden also, daß die Erwartungen der Wirtschaftssubjekte einfachen Trendbestimmungen entsprechen, wobei der Trend zum Beispiel mittels der Bildung geometrisch gewichteter Durchschnitte von vergangenen Beobachtungen bestimmt wird. In diesem Fall legen sie durch den Gewichtungsfaktor und die Gedächtnislänge des geometrisch gewichteten Durchschnitts fest, welche der vergangenen Beobachtungen die Extrapolation des Trends am stärksten beeinflussen. Das Verständnis des Einflusses von linear rekursiven Prognoseregeln auf das dynamische Verhalten von ökonomischen Systemen ist wichtig um die beiden oben genannten Kontroversen voranzubringen.

Da im allgemeinen die Analyse des dynamischen Verhaltens ökonomischer Systeme schwierig ist, befassen sich die Untersuchungen dieser Arbeit ausschließlich mit der Frage, in welcher Weise Prognosen mittels einem geometrisch gewichteten Durchschnitt das dynamische Verhalten von Cobweb-Modellen beeinflussen. Cobweb-Modelle bzw. Modelle vom Cobweb-Typ zeichnen sich dadurch aus, daß die Realisation aller Modellvariablen der nächsten Periode ausschließlich von dem für die nächste Periode erwarteten Zustand der Modellvariablen bestimmt wird. Gerade wegen dieser einfachen Struktur werden in der Konjunktur-, Wachstums-, und Finanzmarkttheorie häufig Modelle vom Cobweb-Typ zur Analyse marktdynamischer Prozesse verwendet. Zum Studium des Einflusses der Gedächtnislänge  $\tau$  und des Gewichtungsfaktors  $w$  einer Prognose mittels geometrisch gewichtetem

---

<sup>2</sup>Weist ein ökonomisches System ein komplexes dynamisches Verhalten auf, dann ist nicht klar, inwiefern die Wirtschaftssubjekte ihre Prognosefehler als systematische Fehler erkennen können. So weist unter anderem Hommes (1998) darauf hin, daß bestimmte Prognoseregeln Fehler in der Vorhersage erzeugen, die dieselben Autokorrelationseigenschaften wie weißes Rauschen aufweisen. Hommes bezeichnet das Verhalten der Wirtschaftssubjekte als konsistent, da diese ihre Prognosefehler nicht mittels linearer statistischer Methoden von weißem Rauschen unterscheiden können.

Durchschnitt auf das dynamische Verhalten eines Cobweb-Modells, werden in dieser Arbeit analytische wie auch numerische Untersuchungen durchgeführt.

*Die analytischen Untersuchungen führten zu folgenden Ergebnissen:*

Unter der Annahme, daß das Bildungsgesetz des untersuchten Cobweb-Modells stetig differenzierbar ist, weisen die Eigenwerte der Jacobi-Matrizen spezielle Eigenschaften auf. So zeigt sich im Falle der Prognose mittels ungewichtetem Durchschnitt, daß bei negativ elastischem Bildungsgesetz die stationären Zustände des Cobweb-Modells bei genügend großer Gedächtnislänge  $\tau$  lokal stabil sind. Im übrigen ist das Bildungsgesetz negativ elastisch, wenn die Angebotsfunktion streng monoton steigend und die Nachfragefunktion streng monoton fallend ist. Im Falle der Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt mit einem Gewichtungsfaktor  $w \neq 1$ , ist dagegen die Stabilität der stationären Zustände hauptsächlich von der Größenordnung des Produktes aus der Elastizität des Bildungsgesetzes und der Distanz  $(w - 1)$  abhängig.

Des Weiteren weisen Cobweb-Modelle in der Umgebung der stationären Zustände folgendes charakteristisches Bifurkationsverhalten auf. Ist der stationäre Zustand lokal stabil, dann tritt im Falle eines Gewichtungsfaktors  $w > 1$  bei einer Änderung der Elastizität des Bildungsgesetzes zunächst eine Hopf-Bifurkation auf. Ist jedoch  $w < 1$ , dann tritt bei gerader Gedächtnislänge  $\tau$  für  $w$  nahe 0 eine Flip- und für  $w$  nahe 1 eine Hopf-Bifurkation auf. Bei ungerader Gedächtnislänge  $\tau$  tritt für alle  $w < 1$  bei einer Elastizitätsänderung eine Flip-Bifurkation auf.

Aufgrund der Begleitmatrixstruktur der Jacobi-Matrizen von Cobweb-Modellen ist es außerdem möglich, das Verhalten der maximalen Lyapunov Exponenten in Abhängigkeit der Gedächtnislänge  $\tau$  genauer zu charakterisieren. Insbesondere kann analytisch nachgewiesen werden, daß im Falle eines Gewichtungsfaktors  $w \geq 1$ , das Supremum aller Lyapunov Exponenten unterhalb einer oberen Schranke liegt. Diese obere Schranke strebt gegen Null, wenn die Gedächtnislänge  $\tau$  gegen  $\infty$  konvergiert. Hat also eine Prognoseregeln die Eigenschaft, daß sie nur die weit vergangenen Beobachtungen berücksichtigt, so weist das entsprechende Cobweb-Modell nur eine geringe oder gar keine sensitive Abhängigkeit von den Startwerten auf. Ein außenstehender Beobachter könnte nun die Entwicklung des Modells nicht nur kurzfristig sondern auch mittelfristig vorhersagen.

Sämtliche Resultate bestätigen in gewisser Weise die Ergebnisse von Grandmont (1998). Er betrachtet OLG-Modelle unter der Annahme einer Kleinst-

Quadrat-Lernregel und untersucht die lokalen dynamischen Eigenschaften dieser Systeme. Dabei kommt er zu folgendem Schluß:

*Learning generates local instability of self-fulfilling expectations whenever agents are on average uncertain about the local dynamics of the system, and thus ready to extrapolate a wide range of regularities (trends) out of past deviations from equilibrium, and when the influence of expectations on the dynamics of the system is significant.*  
(Grandmont (1998), Seite 743)

Im Rahmen von analytischen Untersuchungen kann aber nur wenig über das globale dynamische Verhalten eines Cobweb-Modells ausgesagt werden. Aus diesem Grund befaßt sich die vorliegende Arbeit zu einem großen Teil mit numerisch-experimentellen Analysen. In diesen numerischen Analysen wird das globale dynamische Verhalten eines Cobweb-Modells mit S-förmigem sowie mit zurückgebogenem Bildungsgesetz untersucht. Monotone Bildungsgesetze, wie das im folgenden betrachtete S-förmige Bildungsgesetz, können aus der Voraussetzung einer speziellen Technologie abgeleitet werden. Bildungsgesetze von zurückgebogener Form ergeben sich dagegen erst wenn man annimmt, daß die Produzenten den Preis der nächsten Periode subjektiv als unsicher betrachten. Im Falle einer quadratischen Nutzenfunktion weist dann die Angebotsfunktion bereits bei einer geringen Risikoaversion der Produzenten eine zurückgebogene Form auf. Das globale Bifurkationsverhalten der Modelle wird mittels einer systematische Kombination von Bifurkationsdiagrammen, Diagrammen des maximalen Lyapunov Exponenten, Zyklogrammen und Attraktorabbildungen untersucht.

*Die numerischen Untersuchungen führten zu folgenden Ergebnissen:*

Da S-förmige Bildungsgesetze negativ elastisch sind, besitzen Cobweb-Modelle mit S-förmigem Bildungsgesetz immer einen eindeutigen Gleichgewichtspreis. Im Fall der Prognose mittels ungewichtetem Durchschnitt ist der entsprechende stationäre Zustand des Cobweb-Modells bei genügend großer Gedächtnislänge  $\tau$  nicht nur lokal sondern global stabil. Bei zunehmendem Absolutbetrag der Elastizität des Bildungsgesetzes treten lokal stabile koexistierende Zyklen der Ordnung  $\tau + 1$  auf. Die Einzugsbereiche dieser koexistierenden Zyklen weisen bei großer Gedächtnislänge eine komplizierte, Fraktal-ähnliche Struktur auf. Das bedeutet, daß für einen außenstehenden Beobachter die zukünftige Entwicklung des Systems nur

bedingt vorhersagbar ist.

Der Einfluß einer Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt auf das globale dynamische Verhalten von Cobweb-Modellen mit S-förmigem Bildungsgesetz hängt im wesentlichen davon ab, ob der Gewichtungsfaktor  $w$  größer oder kleiner als 1 und ob die Gedächtnislänge  $\tau$  gerade oder ungerade ist. Insbesondere tritt komplexes dynamisches Verhalten mit signifikant positiven Lyapunov Exponenten nur für Gewichtungsfaktoren  $0 < w < 1$  auf. Ist der Gewichtungsfaktor  $w > 1$ , so verhält sich das Cobweb-Modell entweder periodisch oder quasi-periodisch, aber niemals aperiodisch. Des Weiteren hängt die Struktur und die Ordnung der lokal stabilen koexistierenden Zyklen im wesentlichen von der Gedächtnislänge  $\tau$  ab, wobei die lokal stabilen Zyklen immer eine Ordnung größer als  $\tau$  und kleiner als  $2\tau$  aufweisen. Dagegen nimmt die Amplitude der Preisschwankungen, unabhängig von  $\tau$  und  $w$ , mit wachsendem Absolutbetrag der Elastizität des Bildungsgesetzes zu.

Der Einfluß der Prognose mittels geometrisch gewichtetem Durchschnitt auf die Dynamik eines Cobweb-Modells mit zurückgebogenem Bildungsgesetz ist unterschiedlich zum Einfluß auf die Dynamik bei einem S-förmigen Bildungsgesetz. Da zurückgebogene Bildungsgesetze für niedrig erwartete Preise negativ elastisch und für hohe erwartete Preise positiv elastisch sind, treten entweder 1, 2 oder 3 Gleichgewichtspreise auf. Bei Prognose mittels ungewichtetem Durchschnitt mit großer Gedächtnislänge  $\tau$  kann es daher zur Koexistenz zweier lokal stabiler stationärer Zustände kommen. Bei kurzer Gedächtnislänge  $\tau$  weist das Cobweb-Modell häufig ein komplexes dynamisches Verhalten und positive Lyapunov Exponenten auf. Dagegen ist das Verhalten des Cobweb-Modells mit S-förmigem Bildungsgesetz, bei Prognose mittels ungewichtetem Durchschnitt, immer periodisch.

Das globale dynamische Verhalten des Cobweb-Modells mit zurückgebogenem Bildungsgesetz hängt ebenfalls davon ab, ob der Gewichtungsfaktor  $w > 1$  oder  $w < 1$  und die Gedächtnislänge  $\tau$  gerade oder ungerade ist. Für  $w$  nahe bei 0 ist die Dynamik des Cobweb-Modells meistens komplex und wird kaum durch Änderungen der Gedächtnislänge beeinflusst. Für  $w \geq 1$  können bei kurzer Gedächtnislänge  $\tau$  zwar positive Lyapunov Exponenten vorliegen, doch bei einem Anwachsen der Gedächtnislänge nähern sich die Lyapunov Exponenten der Null an. Unabhängig von der Gedächtnislänge der Prognoseregeln vergrößert sich die Amplitude der Preisschwankungen, wenn der Absolutbetrag der Elastizität des Bildungsgesetzes zunimmt.

Insgesamt zeigt sich also, daß das Auftreten eines komplexen dynamischen Verhaltens bei S-förmigem Bildungsgesetz durch die Form der Prognoseregeln bestimmt wird. Bei zurückgebogenem Bildungsgesetz hängt die Komplexität der Dynamik sowohl von der Form der Prognoseregeln, als auch von der Krümmungseigenschaft des Bildungsgesetzes ab. Die zurückgebogene Form des Bildungsgesetzes wird vor allem durch die subjektive Preisunsicherheit und das risikoaverse Verhalten des Produzenten bestimmt.<sup>3</sup>

Es wäre nun notwendig, die in dieser Arbeit vorgenommenen Untersuchungen auch bei allgemeineren sozioökonomischen Systemen durchzuführen. Die hier gefundenen Resultate wurden zwar schon teilweise auf ökonomische Systeme mit „Leads“<sup>4</sup> (Guesnerie & Woodford (1991)) und auf ökonomische Systeme mit „vorherbestimmten Variablen“ (Gauthier (1997)) übertragen. Allerdings befassen sich diese Arbeiten nur mit dem lokalen dynamischen Verhalten der Systeme in der Umgebung der stationären Zustände. Darüberhinaus wurden erst wenige Formen von rekursiver und nicht rekursiver Erwartungsbildung im Zusammenhang mit nichtlinearen Cobweb-Modellen untersucht. Die bisher wichtigsten Beiträge sind dazu die Arbeit von Bray & Savin (1986) (Cobweb-Modelle mit Kleinst-Quadrat-Lernregeln), die Arbeit von Arifovic (1994) (Cobweb-Modelle mit genetischen Algorithmen als Prognoseregeln) und der Beitrag von Brock & Hommes (1997) (Cobweb-Modelle mit heterogenen Formen der Erwartungsbildung). Ein Vergleich dieser Arbeiten zeigt, daß noch vollkommen unklar ist, inwieweit verschiedene Formen der Erwartungsbildung, bzw. ihr Einfluß auf das dynamische Verhalten von sozioökonomischen Systemen, miteinander zusammenhängen.

---

<sup>3</sup>Die absolute Risikoaversion ist dabei ein Krümmungsmaß der Nutzenfunktion des Produzenten.

<sup>4</sup>Bei ökonomischen Bildungsgesetzen mit „Leads“ ist der Zustand in der nächsten Periode auch von Erwartungen abhängig, die über die nächsten Periode hinausgehende Zeitpunkte betreffen. Eine genaue Definition findet man in Böhm & Wenzelburger (1997a).

# Anhang A

## Lineare Rekursivität und endliches Gedächtnis

Der Zusammenhang zwischen linear rekursiven Prognoseregeln und linearen Prognoseregeln mit endlichem Gedächtnis wird deutlich, wenn eine nicht rekursive Darstellung der linear rekursiven Prognoseregeln gewählt wird.

Eine linear rekursive Prognoseregeln basiert nach Definition 1 auf dem Parameterraum  $\Theta = \mathbb{R}^k$  und der parametrisierten Familie von Prognoseregeln

$$y_{t,t+1}^e = \psi_L(x_t, \theta_{t+1}) = a_0 + Ax_t + B\theta_{t+1}, \quad t \in \mathbb{N},$$

mit Matrizen<sup>1</sup>  $A \in \mathcal{M}(q, n)$ ,  $B \in \mathcal{M}(q, k)$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}^q$  und Adaptations-Parameter  $\theta_{t+1} \in \mathbb{R}^k$ . Die Parameter-Adaptationsregel lautet

$$\theta_{t+1} = \rho_L(x_t, \theta_t) = c_0 + Cx_t + D\theta_t, \quad t \in \mathbb{N},$$

mit Matrizen  $C \in \mathcal{M}(k, n)$ ,  $D \in \mathcal{M}(k, k)$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}^k$  und Startwert  $\theta_1 \in \Theta$ . Setzt man  $\rho_L(x_t, \theta_t)$  in  $\psi_L(x_t, \theta_{t+1})$  ein, dann erhält man die Prognoseregeln

$$y_{t,t+1}^e = \psi_L(x_t, \rho_L(x_t, \theta_t)) = a_0 + Ax_t + B(c_0 + Cx_t + D\theta_t). \quad (\text{A.1})$$

Durch weiteres iteratives Einsetzen von  $\rho_L(x_{t-i}, \theta_{t-i})$  in die Prognoseregeln (A.1) ergibt sich die folgende **nicht parametrische Darstellung** für linear rekursive Prognoseregeln:

$$y_{t,t+1}^e = a_0 + Ax_t + B(c_0 + Cx_t + Dc_0 + DCx_{t-1} + \dots + D^{t-1}c_0 + D^{t-1}Cx_1 + D^t\theta_1), \quad t \in \mathbb{N}.$$

---

<sup>1</sup>Es bezeichne  $\mathcal{M}(q, n)$  die Menge der reellwertigen Matrizen mit  $q$  Zeilen und  $n$  Spalten.

**Lemma 10**

Existiert ein  $\tau \in \mathbb{N}$  derart, daß  $D^{\tau+1} = 0$  und  $D^k \neq 0$  für  $k \leq \tau$  ist, so ist eine linear rekursive Prognoseregeln zugleich eine lineare Prognoseregeln mit endlichem Gedächtnis der Länge  $\tau \in \mathbb{N}$ .

Umgekehrt kann jede linear Prognoseregeln mit endlichem Gedächtnis  $\tau \in \mathbb{N}$  als eine linear rekursive Prognoseregeln dargestellt werden.

**Beweis:** Ist  $D^{\tau+1} = 0$ , dann folgt unmittelbar, daß die Prognoseregeln ein endliches Gedächtnis der Länge  $\tau$  aufweist.

Sei umgekehrt eine lineare Prognoseregeln

$$y_{t,t+1}^e = w_\tau + \sum_{k=0}^{\tau-1} w_k y_{t-k}, \quad t \geq \tau \quad (\text{A.2})$$

mit endlichem Gedächtnis  $\tau \in \mathbb{N}$  und mit Koeffizienten  $w_k \in \mathbb{R}$  gegeben. Eine rekursive Darstellung dieser Prognoseregeln gemäß Definition 1 erhält man, wenn man die folgende parametrisierte Familie von Prognoseregeln und die folgende Parameter-Adaptationsregeln betrachtet:

Es sei  $\Theta = \mathbb{R}^\tau$  der Parameterraum,  $a_0 = w_\tau$ ,  $A = 0 \in \mathbb{R}$ ,  $B = (w_{\tau-1}, \dots, w_0) \in \mathcal{M}(1, \tau)$ ,  $c_0 = 0$ ,  $C = (0, \dots, 0, 1)^T \in \mathcal{M}(\tau, 1)$  und es sei  $D \in \mathcal{M}(\tau, \tau)$  mit

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die hierdurch definierte rekursive Prognoseregeln ist äquivalent zur Prognoseregeln (A.2). Im Falle der allgemeineren Voraussetzung  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^q$  und  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$  kann die rekursive Darstellung von linearen Prognoseregeln mit endlichem Gedächtnis in analoger Weise abgeleitet werden.

# Anhang B

## Grundlagen der Bifurkationsanalyse

Im folgenden wird eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Bifurkationstypen gegeben.

Es bezeichne  $G(x, \alpha) = G_\alpha(x)$  eine parametrisierte Familie von Abbildungen mit Parameter  $\alpha \in I$ . Dabei sei  $I$  ein offenes Intervall in  $\mathbb{R}$  und für  $G : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  gelte  $G \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^n \times I)$ . Die Bifurkationsanalyse befaßt sich mit der Frage, inwiefern die qualitativen dynamischen Eigenschaften des diskreten dynamischen Systeme

$$x_{t+1} = G(x_t, \alpha), \quad t \in \mathbb{N}_0, \quad \alpha \in I$$

verändert werden, falls der Parameter  $\alpha$  variiert wird.

### Definition 2

*Die beiden dynamischen Systeme  $G_{\alpha_1}$  und  $G_{\alpha_2}$ , mit  $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ , werden als topologisch konjugiert bezeichnet, falls ein Homöomorphismus  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  existiert, so daß  $G_{\alpha_2} = H^{-1} \circ G_{\alpha_1} \circ H$  gilt.*

*Das dynamische System  $G_{\alpha_0}$  wird als strukturell stabil bezeichnet, falls eine Umgebung  $U_{\alpha_0} \subset I$  von  $\alpha_0$  existiert, so daß alle Systeme  $G_\alpha$ ,  $\alpha \in U_{\alpha_0}$  zu  $G_{\alpha_0}$  topologisch konjugiert sind.*

*Falls  $G_{\alpha_0}$  strukturell instabil ist, dann erfährt die Familie  $G_\alpha$  von Abbildungen in  $\alpha_0$  eine Bifurkation.*

## B.1 Ein-Parameter Bifurkationsanalyse

Untersucht man das lokale dynamische Verhalten von  $G_{\alpha_0}$  in der Umgebung eines stationären Zustandes  $x^* \in \mathbb{R}^n$ , dann wird die Form der Bifurkation in  $\alpha_0$  unter anderem durch die Eigenschaften der Jacobi-Matrix  $DG_{\alpha_0}(x^*)$  bestimmt.

Gemäß dem Theorem von Grobman und Hartman kann eine Familie von Abbildungen  $G_\alpha$  in  $(x^*, \alpha_0)$  nur dann eine Bifurkation erfahren, falls  $DG_{\alpha_0}(x^*)$  mindestens einen Eigenwert  $\mu_i$  mit  $|\mu_i| = 1$  aufweist. Eine ausführliche Darstellung dieses Theorems findet man in Kuznetsov (1995) (Seite 50).

Die Bifurkation an einem stationären Zustand eines  $n$ -dimensionalen Systems läßt sich meistens auf die Bifurkation eines Systems der Dimension 1 oder 2 zurückführen. Sei  $x^* \in \mathbb{R}^n$  ein stationärer Zustand und  $DG_{\alpha_0}(x^*)$  die dazugehörige  $n$ -dimensionale Jacobi-Matrix. Falls es genau  $n_0$  Eigenwerte  $\mu_i$  mit  $|\mu_i| = 1$  gibt, dann ändert sich das dynamische Verhalten von  $G_{\alpha_0}$  nur in einer  $n_0$ -dimensionalen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , der sogenannten *Zentrumsmanifoldigkeit*. Eine ausführliche Darstellung dieses Reduktionsprinzips findet man in Kuznetsov (1995).

Für Ein-Parameter Familien von Abbildungen der Dimension 1 und 2 lassen sich im wesentlichen die folgenden drei Bifurkationstypen unterscheiden:

**Fold-Bifurkation:** Gegeben sei die Ein-Parameter Familie von  $\mathcal{C}^3$ -Abbildungen  $G(x, \alpha)$  mit  $G : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ . Es sei  $x^* \in \mathbb{R}$  ein stationärer Zustand von  $G_{\alpha_0}$  mit  $G_x(x^*, \alpha_0) = 1$ . Des Weiteren seien die folgenden Bedingungen erfüllt:

1.  $G_{xx}(x^*, \alpha_0) \neq 0$ ,
2.  $G_\alpha(x^*, \alpha_0) \neq 0$ .

Dann ist das System in der Umgebung des stationären Zustandes  $x^*$  lokal topologisch konjugiert zur Ein-Parameter Familie von Abbildungen:

$$\tilde{G}(z, \beta) = \beta + z \pm z^2. \quad (\text{B.1})$$

Man nennt das System (B.1) auch die *Normalform der Fold-Bifurkation*.

**Flip-Bifurkation:** Gegeben sei die Ein-Parameter Familie von  $\mathcal{C}^3$ -Abbildungen  $G(x, \alpha)$  mit  $G : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ . Es sei  $x^* \in \mathbb{R}$  ein stationärer Zustand von  $G_{\alpha_0}$  mit  $G_x(x^*, \alpha_0) = -1$ . Des Weiteren seien die folgenden Bedingungen erfüllt:

1.  $\frac{1}{2}(G_{xx}(x^*, \alpha_0))^2 + \frac{1}{3}G_{xxx}(x^*, \alpha_0) \neq 0$ ,
2.  $G_{x\alpha}(x^*, \alpha_0) \neq 0$ .

Dann ist das System in der Umgebung des stationären Zustandes  $x^*$  lokal topologisch konjugiert zur Ein-Parameter Familie von Abbildungen:

$$\tilde{G}(z, \beta) = -(1 + \beta)z \pm z^3. \quad (\text{B.2})$$

Man nennt das System (B.2) auch die *Normalform der Flip-Bifurkation*.

**Hopf-Bifurkation:** Gegeben sei die Ein-Parameter Familie von  $\mathcal{C}^3$ -Abbildungen  $G(x, \alpha)$  mit  $G : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Es sei  $x^* \in \mathbb{R}^2$  ein stationärer Zustand von  $G(x, \alpha)$  für alle  $\alpha \in I$ . Die Eigenwerte von  $DG(x^*, \alpha)$  seien

$$\mu_{1,2}(\alpha) = r(\alpha)e^{\pm i\phi(\alpha)}, \quad \alpha \in I \quad (\text{B.3})$$

mit  $r(\alpha_0) = 1$  und  $\phi(\alpha_0) = \theta_0$ . Des Weiteren seien die folgenden Bedingungen erfüllt:

1.  $r'(\alpha_0) > 0$ ,
2.  $e^{ik\theta_0} \neq 1$  für  $k = 1, 2, 3, 4$ .

Dann existiert eine Umgebung  $U$  von  $x^*$ , so daß gilt:

- Für  $\alpha \leq \alpha_0$  (bzw.  $\alpha \geq \alpha_0$ ) existiert nur der stationäre Zustand  $x^*$  in  $U$  und keine invariante abgeschlossene Kurve.
- Für  $\alpha > \alpha_0$  (bzw.  $\alpha < \alpha_0$ ) existiert in  $U$  neben dem stationären Zustand  $x^*$  eine eindeutige, abgeschlossene und invariante Kurve.

Man bezeichnet in diesem Fall die Hopf-Bifurkation als *superkritisch* (bzw. als *subkritisch*).

### Bemerkung 1

1. Die Bedingung  $e^{ik\theta_0} \neq 1$  für  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$  ist keine rein technische Bedingung. Falls diese Bedingung nicht erfüllt ist, dann kann der Fall eintreten, daß überhaupt keine invariante abgeschlossene Kurve in der Umgebung des stationären Zustandes existiert. Es können aber auch mehrere Kurven gleichzeitig existieren. Ist  $e^{ik\theta_0} = 1$  für ein  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ , dann wird die Hopf-Bifurkation als *starke* 1:1, 1:2, 1:3 bzw. 1:4 *Resonanz* bezeichnet.

Bis heute existiert noch keine mathematische Theorie zur vollständigen Beschreibung der Dynamik im Falle einer starken 1:3 Resonanz. Nach Kuznetsov (1995) (Seite 381ff) ist für starke 1:3 Resonanzen bekannt, daß das System für  $\alpha > \alpha_0$  heterokline 3-Zyklen aufweist. Generisch kann es zum Auftreten von homoklinen Zyklen kommen, so daß sich das System chaotisch verhält.

2. Homokline Punkte sind folgendermaßen definiert:

Es sei  $x^*$  ein expandierender Fixpunkt der differenzierbaren Abbildung  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Das heißt, es existiert eine Umgebung  $U(x^*)$  von  $x^*$ , so daß die Jacobi-Matrizen an allen Punkten in  $U(x^*)$  nur Eigenwerte mit einem Absolutbetrag größer als 1 haben. Man nennt  $x_h$  einen *homoklinen Punkt* von  $G$ , wenn ein Punkt  $x_0 \in U(x^*)$  mit  $x_0 \neq x_h$  und ein  $t_0 \in \mathbb{N}$  existiert, so daß  $G^{t_0}(x_0) = x_h$  und  $\det(DG^{t_0}(x_0)) \neq 0$  ist.

Besitzt ein dynamisches System  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  einen homoklinen Punkt, dann bezeichnet man das System als *chaotisch*, da es die folgenden Eigenschaften aufweist:

- (a) Es existiert ein  $m \in \mathbb{N}$ , so daß  $G$  für alle  $p \in \mathbb{N}$  mit  $p \geq m$  einen Zyklus der Ordnung  $p$  besitzt.
- (b) Es existiert eine überabzählbare Menge  $S$ , die keine periodischen Punkte von  $G$  enthält, so daß  $G(S) \subset S$  ist und

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |G^t(x) - G^t(y)| > 0, \quad \forall x, y \in S, \quad x \neq y. \quad (\text{B.4})$$

- (c) Es existiert eine überabzählbare Menge  $S_0 \subset S$ , so daß für alle  $x, y \in S_0$  gilt:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} |G^t(x) - G^t(y)| > 0. \quad (\text{B.5})$$

Diese Definition von Chaos geht auf Marotto (1978) zurück. Weist ein dynamisches System die Eigenschaften 2. und 3. auf, so bezeichnet man das auch als *sensitive Abhängigkeit von den Startwerten*.

## B.2 Zwei-Parameter Bifurkationsanalyse

Es bezeichne  $G(x, \alpha) = G_\alpha(x)$  eine parametrisierte Familie von Abbildungen mit Parameter  $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2)$  und  $\alpha \in I_1 \times I_2$ . Dabei seien  $I_1$  bzw.  $I_2$  offene Intervalle in  $\mathbb{R}$  und für die Familie von Abbildungen  $G : \mathbb{R}^n \times I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  gelte  $G \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^n \times I_1 \times I_2)$ .

Darüber hinaus besitze die Abbildung  $G_{\alpha_0}$  für  $\alpha_0 = (\alpha_0^1, \alpha_0^2)$  den stationären Zustand  $x^* \in \mathbb{R}^n$  und es seien die Voraussetzungen für eine Fold-, Flip- oder Hopf-Bifurkation erfüllt. Dann existiert eine sogenannte *Bifurkationskurve*  $\mathcal{B}$  im Parameterraum  $I_1 \times I_2$ , entlang derer  $G_\alpha$  jeweils einen stationären Zustand mit den entsprechenden Bifurkationseigenschaften aufweist. Beispielsweise ergibt sich eine Fold-Bifurkationskurve als implizite Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} G(x, \alpha) - x &= 0 \\ \det(G_x(x, \alpha) - I) &= 0. \end{aligned}$$

Eine Flip-Bifurkationskurve folgt aus der impliziten Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} G(x, \alpha) - x &= 0 \\ \det(G_x(x, \alpha) + I) &= 0. \end{aligned}$$

Beide Gleichungssysteme bestehen aus  $n + 1$  Gleichungen in den  $n + 2$  Variablen  $(x, \alpha^1, \alpha^2)$ . Unter bestimmten Voraussetzungen existiert für beide Systeme jeweils eine ein-dimensionale Kurve, die durch den Punkt  $(x^*, \alpha_0^1, \alpha_0^2)$  verläuft.

Entlang einer Bifurkationskurve können allerdings auch degenerierte Formen von Fold-, Flip- oder Hopf-Bifurkationen auftreten. Ein solcher Punkt auf einer Fold-Bifurkationskurve wird als *Cusp-Bifurkation*, auf einer Flip-Bifurkationskurve als *verallgemeinerte Flip-Bifurkation* und auf einer Hopf-Bifurkationskurve als *Chenciner-Bifurkation* bezeichnet. Eine ausführliche Darstellung dieser Bifurkationstypen findet man bei Kuznetsov (1995).



# Literaturverzeichnis

- ABARBANEL, H. (1996): *Analysis of observed chaotic data*. Springer-Verlag, New York.
- ALEXANDER, J., I. KAN, J. YORKE & Z. YOU (1992): “Riddled basins”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 6, 795–813.
- ANDERSON, J. & R. TYERS (1992): *Disarray in world food markets: A quantitative assessment*. Cambridge University Press, Cambridge.
- ARIFOVIC, J. (1994): “Genetic Algorithm Learning and the Cobweb Model”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18, 3–28.
- ARROW, K. & M. NERLOVE (1958): “A note on expectations and stability”, *Econometrica*, 26, 297–305.
- ARTSTEIN, Z. (1983): “Irregular cobweb dynamics”, *Economics Letters*, 11, 15–17.
- ASTON, P. & M. DELLNITZ (1995): “Symmetry Breaking Bifurcations of Chaotic Attractors”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 5(6), 1643–1676.
- BAILEY, B., S. ELLNER & D. NYCHKA (1991): “Chaos with Confidence: Asymptotics and Applications of Local Lyapunov Exponents”, Fields Institute Communication, American Mathematical Association, Providence, RI.
- BALASKO, Y. & D. ROYER (1996): “Stability of competitive equilibrium with respect to recursive and learning processes”, *Journal of Economic Theory*, 68, 319–348.
- BEAR, D., J. CONLISK & R. HARRIFF (1980): “Stability and speed of adjustment under retiming of lags”, *Econometrica*, 48(2), 335–370.

- BEGG, D. (1982): *The Rational Expectations Revolution in Macroeconomics*. John Hopkins Press, Baltimore.
- BENETTIN, G., L. GALGANI, A. GIORGILLI & J. STRELCYN (1980): “Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems: A method for computing all of them”, *Meccanica*, 15, 9–30.
- BENHABIB, J. & R. DAY (1982): “A Characterization of Erratic Dynamics in the Overlapping Generations Model”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 4, 37–55.
- BENHABIB, J. & K. NISHIMURA (1985): “Competitive equilibrium cycles”, *Journal of Economic Theory*, 35, 284–306.
- BISCHI, G.-I., M. GALLEGATI & A. NAIMZADA (1997): “Symmetry-Breaking Bifurcations and Representative Firm in Dynamic Duopoly Games”, Discussion paper, Università di Teramo, Department of Economics, 64100 Teramo (Italy).
- BLANDFORD, D. (1983): “Instability in world grain markets”, *Journal of Agricultural Economics*, 34, 379–392.
- BÖHM, V. & K. SCHENK-HOPPÉ (1998): “ACRODYN – A User’s Guide”, Discussion Paper 400, Department of Economics, University of Bielefeld, Bielefeld.
- BÖHM, V. & J. WENZELBURGER (1995): “Cycles and Local Stability in Discrete Dynamical Systems with Delay Structure”, Discussion Paper 320, University of Bielefeld, Department of Economics, Bielefeld.
- (1997a): “Expectational Leads in Economic Dynamical Systems”, Discussion Paper 373, University of Bielefeld, Department of Economics, Bielefeld.
- (1997b): “Expectations, Forecasting, and Perfect Foresight: A Dynamical Systems Approach”, Discussion Paper 307, University of Bielefeld, Department of Economics, Bielefeld.
- (1997c): “Perfect Predictions in Economic Dynamical Systems with Random Perturbations”, Discussion Paper 356, University of Bielefeld, Department of Economics, Bielefeld.

- BOUSSARD, J.-M. (1996): "When risk generates chaos", *Journal of Economic Behavior and Organization*, 29(3), 433–446.
- BOWLES, S., D. GORDON & T. WEISSKOPF (1989): "Business ascendancy and economic impasse", *Journal of Economic Perspectives*, 3, 107–134.
- BRAY, M. & N. SAVIN (1986): "Rational Expectations Equilibria, Learning and Model Specification", *Econometrica*, 54, 1129–1160.
- BROCK, W. & C. HOMMES (1997): "A Rational Route to Randomness", *Econometrica*, 65(5), 1059–1097.
- CAGAN, P. (1956): "The Monetary Dynamics of Hyperinflation", in *Studies in the Quantity Theory of Money*, ed. by M. Friedman. University of Chicago Press.
- CASDAGLI, M. (1989): "Nonlinear prediction of chaotic time series", *Physica D*, 35, 335–356.
- CHIARELLA, C. (1988): "The cobweb model. Its instability and the onset of chaos", *Economic Modelling*, 5, 377–384.
- DAY, R. (1994): *Complex Economic Dynamics - Volume I - An Introduction to Dynamical Systems and Market Mechanisms*. MIT Press, Cambridge (Mass.).
- DAY, R. & A. HANSON (1991): "Cobweb Chaos", in *Essays in Honor of Karl A. Fox*, ed. by T. Kaul & J. Sengupta. Elsevier Science Publishers B.V., New York.
- DAY, R. & W. HUANG (1990): "Bulls, bears and market sheeps", *Journal of Economic Behavior and Organization*, 14, 299–329.
- DEBREU, G. (1974): "Excess demand functions", *Journal of Mathematical Economics*, 2.
- DEGRAUWE, P., H. DEWACHTER & M. EMBRECHTS (1993): *Exchange Rate Theory: Chaotic Models of Foreign Exchange Markets*. Blackwell Publishers, Oxford.
- DENECKERE, R. & S. PELIKAN (1986): "Competitive chaos", *Journal of Economic Theory*, 40, 13–25.

- ECKMANN, J.-P. & D. RUELLE (1985): "Ergodic theory of chaos and strange attractors", *Review of Modern Physics*, 57, 617–656.
- EPSTEIN, L. (1978): "Production Flexibility and the Behavior of the Competitive Firm under Price Uncertainty", *Review of Economic Studies*, 45(2), 251–261.
- EVANS, G. (1986): "Selection Criteria for Models with Non-Uniqueness", *Journal of Monetary Economics*, 18, 147–157.
- EVANS, G. & S. HONKAPOHJA (1995a): "Learning, Convergence, and Stability with Multiple Rational Expectations Equilibria", *European Economic Review*, 38, 1071–1098.
- (1995b): "Local convergence of recursive learning to steady states and cycles in stochastic nonlinear models", *Econometrica*, 63(1), 295–206.
- EZEKIEL, M. (1938): "The cobweb theorem", *Quarterly Journal of Economics*, 52, 255–280.
- FAZZARI, S., R. HUBBARD & B. PETERSEN (1988): "Financing constraints and corporate investment", *Brookings Papers on Economic Activity*, 1, 141–206.
- FRISCH, R. (1965): "Propagation problems and impulse problems in dynamic economics (first published 1933)", in *Economic essays in honor of Gustav Cassel, Allan & Unwin*, ed. by R. Gordon & K. L.R., pp. 155–185. R.D. Irwin Inc., Homewood, Illinois.
- FUCHS, G. & G. LAROQUE (1976): "Dynamics of temporary equilibria and expectations", *Econometrica*, 44, 229–252.
- GABISCH, G. & H.-W. LORENZ (1987): *Business Cycle Theory*. Springer-Verlag, Heidelberg.
- GALLAS, J. & H. NUSSE (1996): "Periodicity versus chaos in the dynamics of cobweb models", *Journal of Economic Behavior and Organization*, 29, 447–464.
- GAUTHIER, S. (1997): "Learning Dynamics and the Memory Effect", Discussion paper, DELTA, Joint Research Unit CNRS-EHESS-ENS, Paris.
- GIONA, M. (1991): "Dynamics and relaxation properties of complex systems with memory", *Nonlinearity*, 4, 911–925.

- GÖCKE, M. (1996): "Formen ökonomischer Hysterese", *Zeitschrift für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften*, 116, 31–57.
- GOODWIN, R. (1947): "Dynamical Coupling with Especial Reference to Markets Having Production Lags", *Econometrica*, 15, 181–204.
- (1951): "The Nonlinear Accelerator and the Persistence of Business Cycles", *Econometrica*, 19, 1–17.
- GRANDMONT, J.-M. (1985): "On endogenous competitive business cycles", *Econometrica*, 53, 995–1045.
- (1998): "Expectations Formation and Stability of Large Socioeconomic Systems", *Econometrica*, 66, 741–782.
- GRANDMONT, J.-M. & G. LAROQUE (1986): "Stability of cycles and expectations", *Journal of Economic Theory*, 40, 138–151.
- GROSSMAN, S. & J. STIGLITZ (1980): "On the impossibility of informationally efficient markets", *American Economic Review*, 70(3), 393–408.
- GUESNERIE, R. & M. WOODFORD (1991): "Stability of cycles with adaptive learning rules", in *Equilibrium Theory and Applications*, ed. by W. Barnett, B. Cornet, C. D'Aspremont, J. Gabszewicz & A. Mas-Colell. Cambridge University Press.
- HARROD, R. (1936): *The Trade Cycle*. Oxford University Press (Clarendon), Oxford.
- HARVEY, A. (1981): *Time Series Models*. Phillip Allan Publishers Limited, Oxford.
- HASSELBLATT, B. & A. KATOK (1995): *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge.
- HICKS, J. (1950): *A Contribution to the Theory of the Trade Cycle*. Oxford University Press (Clarendon), Oxford.
- HOMMES, C. (1991): "Adaptive Learning and Roads to Chaos: The Case of the Cobweb", *Economics Letters*, 36, 127–132.

- (1994): “Dynamics of the Cobweb Model with Adaptive Expectations and Nonlinear Supply and Demand”, *Journal of Economic Behavior and Organization*, 24, 315–335.
- (1996): “On the Consistency of Backward Looking Expectations: The Case of the Cobweb”, Discussion Paper TI 8-96-19, University of Amsterdam, Department of Economics and Tinbergen Institute, Amsterdam.
- (1998): “On the consistency of backward-looking expectations: The case of the cobweb”, *Journal of Economic Behavior and Organization*, 33, 333–362.
- HOMMES, C. & G. SORGER (1996): “Consistent Expectations Equilibria”, Working paper, University of Amsterdam, Tinbergen Institute and University of Vienna.
- HUANG, C. & R. LITZENBERGER (1988): *Foundations for Financial Economics*. North-Holland, New York.
- HUANG, W. (1995): “Caution implies profit”, *Journal of Economic Behavior and Organization*, 27, 257–277.
- JARSULIC, M. (1993): “A nonlinear model of the pure growth cycle”, *Journal of Economic Behavior and Organization*, 22, 133–151.
- JENSEN, R. & R. URBAN (1984): “Chaotic price behavior in a nonlinear cobweb model”, *Economics Letters*, 15, 235–240.
- KALDOR, N. (1934): “A classificatory note on the determinateness of equilibrium”, *Review of Economic Studies*, 1, 122–136.
- KALECKI, M. (1935): “A Macroeconomic Theory of the Business Cycle”, *Econometrica*, 3, 327–344.
- KATOK, A. & J.-M. STRELCYN (1986): *Invariant Manifolds, Entropy and Billiards; Smooth Maps with Singularities*. Springer-Verlag, Berlin.
- KHIBNIK, A., Y. KUZNETSOV, V. LEVITIN & E. NIKOLAEV (1990): *Interactive LOCAL BIFurcation Analyzer* Computer Algebra Netherlands, CAN Expertise Center, 1098 SJ, Amsterdam, 2nd edn.

- KIRMAN, A. & M. SALMON (1995): *Learning and Rationality in Economics*. Basil Blackwell Ltd., Oxford.
- KOCH, K.-J. (1995): "Stability Issues of Endogenous Growth Models", Diskussionsbeiträge, Serie II 270, Universität Konstanz, Sonderforschungsbereich 178, Konstanz.
- KRELLE, W. (1959): "Grundlagen einer stochastischen Konjunkturtheorie", *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft*, 115, 472–494.
- KUZNETSOV, Y. (1995): *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, New York.
- LI, T. & J. YORKE (1975): "Period three implies chaos", *American Mathematical Monthly*, 82, 985–992.
- LOHMANN, M. (1995): "Cycle Recognition in Discrete Dynamical Systems: An Algorithmic Approach", Discussion Paper 306, University of Bielefeld, Department of Economics, Bielefeld.
- MARCET, A. & T. SARGENT (1989): "Convergence of Least Squares Learning Mechanisms in Self-referential Linear Stochastic Models", *Journal of Economic Theory*, 48, 337–368.
- MARIMON, R. (1996): "Learning from learning in economics", Working Paper 96/12, European University Institute, Florence.
- MAROTTO, F. (1978): "Snap-Back Repellers Imply Chaos in  $\mathbb{R}^n$ ", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 63, 199–223.
- MASSEL, B. (1970): "Some welfare implications of international price stabilizations", *Journal of Political Economy*, 78, 404–417.
- MCCALLUM, B. (1980): "Rational Expectations and Macroeconomic Stabilization Policy", *Journal of Money, Credit and Banking*, 12, 716–746.
- MCDONALD, S., E. GREBOGI, E. OTT & J. YORKE (1985): "Fractal Basin Boundaries", *Physica*, 17D, 125–153.
- MUTH, J. (1960): "Optimal Properties of exponentially weighted forecasts", *Journal of the American Statistical Association*, 55, 299–305.

- NERLOVE, M. (1958): "Adaptive expectations and cobweb phenomena", *Quarterly Journal of Economics*, 72, 227–240.
- NEWBERRY, D. & J. STIGLITZ (1981): *The theory of commodity price stabilization*. Clarendon Press, Oxford.
- OSTROWSKI, A. (1973): *Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces*. Academic Press, New York, 3rd edn.
- ROSE, H. (1967): "On the nonlinear theory of the employment cycle", *Review of Economic Studies*, 34, 153–173.
- SAMUELSON, P. (1939): "Interactions Between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration", *Review of Economics and Statistics*, 21, 75–78.
- SANDMO, A. (1971): "The Competitive Firm under Price Uncertainty", *American Economic Review*, pp. 65–73.
- SARGENT, T. (1993): *Bounded Rationality in Macroeconomics*. Clarendon Press, Oxford.
- SARKOVSKII, A. (1964): "Coexistence of Cycles of a Continuous Map of a Line into Itself", *Ukrainian Mathematical Journal*, 16, 61–71.
- SCHLITZGEN, R. & B. STREITBERG (1984): *Zeitreihenanalyse*. Oldenbourg Verlag, München.
- SCHULTZ, H. (1930): "Der Sinn der statistischen Nachfragekurve", in *Veröffentlichungen der Frankfurter Gesellschaft für Konjunkturforschung*, ed. by E. Altschul, vol. 10. Frankfurter Gesellschaft für Konjunkturforschung.
- SLUTZKY, E. (1937): "The summation of random causes as the source of cyclic processes", *Econometrica*, 5, 105–146.
- SOLOW, R. (1960): "On a family of lag distributions", *Econometrica*, 28, 393–406.
- TINBERGEN, J. (1930): "Bestimmung und Deutung von Angebotskurven: Ein Beispiel", *Zeitschrift für Nationalökonomie*, Band 1, 669–679.
- VARIAN, H. (1984): *Microeconomic Analysis*. Norton, New York, 2nd edn.

Anton Stiefenhofer  
Bahnhofstrasse 27  
88239 Wangen i.A.

# LEBENS LAUF

## PERSÖNLICHE DATEN

Geburtsdatum: 17. April 1966  
Geburtsort: Wangen i.A.  
Familienstand: ledig

## SCHULAU SBILDUNG

**1972 – 1985** Grundschule und Gymnasium in Wangen i.A.  
**1985** Abitur

## UNIVERSITÄT

**1986 – 1993** Studium der Mathematik an der Universität Ulm  
**1/1993** Diplom Mathematik (Nebenfach Wirtschaftswissen.)  
**ab 5/1993** Stipendiat des Graduiertenkollegs "Allokation auf Finanz- und Gütermärkten" an der Universität Mannheim  
**2/1995 – 9/1995** Auslandsaufenthalt in Barcelona, Spanien; Teilnahme am Doktorandenprogramm "International Doctorate in Economic Analysis" an der Universität Autonoma de Barcelona  
**ab 10/1996** wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Bielefeld  
**1/1999** Rigorosum an der Fakultät für Volkswirtschaftslehre der Universität Mannheim

## WEHRDIENST

**1985 – 1986** Gebirgsinstandsetzungsbataillon Sonthofen