

**Unterteilungsmethoden für  
Triangulierungen und bivariate  
Splineinterpolation**

**N. Kohlmüller**

Nr. 249/1999

# Unterteilungsmethoden für Triangulierungen und bivariate Splineinterpolation

Norbert Kohlmüller

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit beschreiben wir eine effiziente Unterteilungsmethode für die Interpolation mit bivariaten Splines auf beliebigen Triangulierungen. Bei unserer Methode müssen nur wenige Dreiecke einer Triangulierung  $\Delta$  unterteilt werden. Durch die Unterteilung erhalten wir eine Triangulierung  $\tilde{\Delta}$ , für die wir einen Interpolanten  $s \in S_d^{r,\rho}(\tilde{\Delta})$  mit  $\rho = \lfloor \frac{3r}{2} \rfloor$  und  $d = 2\rho + 1$  konstruieren. Wir zeigen, dass unser Interpolant (fast-)optimale Approximationsordnung besitzt. Insbesondere erhalten wir für  $r = 1$  einen Interpolanten  $s \in S_3^1(\tilde{\Delta})$ , der nur Funktionswert und die ersten partiellen Ableitungen in den Eckpunkten von  $\Delta$  benötigt.

## 1 Einleitung

Im Zusammenhang mit der bivariaten Splineinterpolation spielen finite Elemente eine wichtige Rolle. Bei diesen Methoden kann der interpolierende Spline durch Bedingungen auf jedem Dreieck lokal berechnet werden. Dies hat den Vorteil, dass der Interpolant leicht zu beschreiben ist und zudem eine lokale Basis des zugehörigen Splineraums existiert, so dass er optimale Approximationsordnung besitzt. Andererseits hat Farin [16] gezeigt, dass für einen  $C^r$ -Interpolanten ein Polynomgrad  $d \geq 4r + 1$  benötigt wird. Zudem werden in jedem Eckpunkt alle Ableitungen bis zur Ordnung  $\rho = 2r$  verlangt. Für  $C^1$ -Splines vom Grade 5 haben dies Strang und Fix [32] und Farin [16] untersucht. Die Interpolation mit  $C^2$ -Splines vom Grad 9 behandelt ausführlich Whelan [34].

Will man einen kleineren Polynomgrad wählen, so müssen die Dreiecke der Triangulierung unterteilt werden. In der Literatur wurden verschiedene Unterteilungsmethoden untersucht. Eine Methode ist der Clough-Tocher-Split, bei dem jedes Dreieck  $\Delta(v_1, v_2, v_3)$  in drei kleinere geteilt wird. Diese erhält man, indem drei Kanten von den Eckpunkten  $v_i$  zum Baryzentrum  $v_4$  des Dreiecks eingezeichnet werden. Für den Clough-Tocher-Split kann man einen  $C^1$ -Interpolanten vom Grad 3 beschreiben (vgl. Strang und Fix [32] und Farin [16]). Dieser ist durch Funktionswert und partielle Ableitungen in jedem Eckpunkt, sowie die orthogonale Ableitung im Mittelpunkt jeder Kante der ursprünglichen Triangulierung eindeutig bestimmt. Für beliebiges  $r$  haben Sablonnière [27] und Laghchim-Lahlou und Sablonnière [18] den Clough-Tocher-Split untersucht. Laghchim-Lahlou und Sablonnière zeigten, dass für die Interpolation mit Elementen vom Clough-Tocher-Typ ein Polynomgrad  $d = 3r$  für ungerades  $r$  und  $d = 3r + 1$  für gerades  $r$  ausreicht. Zudem werden nur Ableitungen bis zur Ordnung  $\rho = \lfloor \frac{3r}{2} \rfloor$  benötigt.

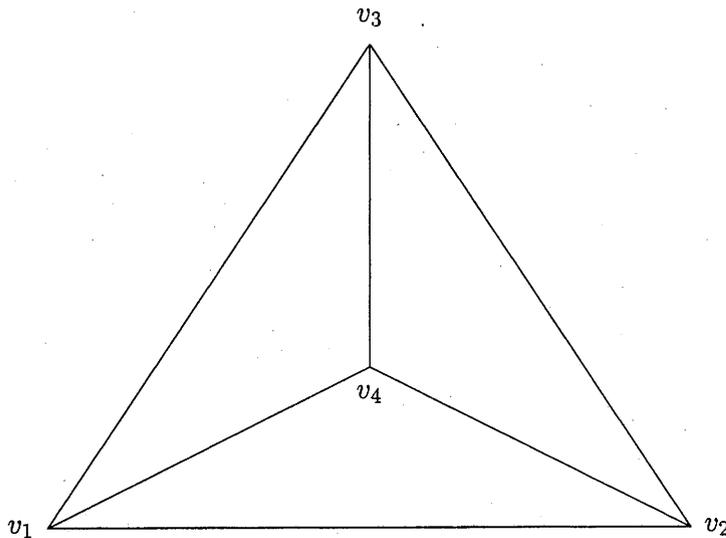


Abbildung 1: Unterteilung nach Clough-Tocher

Eine andere Unterteilungsmethode ist der Powell-Sabin-Split, bei dem jedes Dreieck in sechs Mikro-Dreiecke geteilt wird (siehe Farin [16] und Sablonnière [27]). Sablonnière [27] hat für den Powell-Sabin-Split einen Interpolanten im Splineraum  $S_{3r-1}^r(\Delta)$  bestimmt. Insbesondere erhält man mit der Unterteilung nach Powell-Sabin einen  $C^1$ -Interpolanten vom Grad 2, der nur Funktionswert und erste partielle Ableitungen in den Eckpunkten benötigt.

Andere Unterteilungsmethoden für  $C^2$ -Splines wurden von Alfeld [1] und Wang [33] beschrieben. Ihre Unterteilungen benötigen neun bzw. sieben Mikro-Dreiecke in jedem Dreieck. Für diese Unterteilung behandeln sie die Interpolation in  $S_5^2(\Delta)$ .

Alle Unterteilungsmethoden mit finiten Elementen haben den Nachteil, dass jedes Dreieck unterteilt wird und somit die Anzahl der Dreiecke durch die Unterteilung stark wächst. Wir werden zeigen, dass man nur wenige Dreiecke unterteilen muss, wenn man den Interpolanten iterativ berechnet. Bei unserer Methode muss maximal ein Dreieck für jeden inneren Eckpunkt unterteilt werden. Im allgemeinen ist sogar nur ein Split für zwei innere Eckpunkte notwendig. Wir werden das Verfahren ausführlich für den Clough-Tocher-Split behandeln. Alle Aussagen können aber auch auf andere Unterteilungsmethoden übertragen werden.

Für unsere Beweise verwenden wir Bernstein-Bézier-Methoden. Dieses Kapitel enthält deshalb die wichtigsten Bezeichnungen und Aussagen über Bernstein-Bézier-Polynome und bivariate Splines auf Triangulierungen. Im folgenden Kapitel beschreiben wir unsere Unterteilungsmethode und bestimmen einen Interpolanten, der (fast-)optimale Approximationsordnung hat. In Kapitel 3 liefern wir eine Charakterisierung für eine optimale Unterteilung von  $\Delta$ . Anschließend beschreiben wir einen Lagrange-Interpolanten in  $S_3^1(\tilde{\Delta})$ . Das letzte Kapitel enthält schließlich numerische Ergebnisse für die Interpolation in  $S_3^1(\Delta)$ .

## 1.1 Bernstein-Bézier-Polynome

Für die Bernstein-Bézier-Darstellung werden die *baryzentrischen Koordinaten* eines Punktes  $v \in \mathbb{R}^2$  bezüglich eines Dreiecks  $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$  benötigt. Diese Koordinaten erhält man als eindeutige Lösung  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \\ 1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{aligned}$$

Für einen Multiindex  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{Z}_+^3$  mit  $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = d$  heißt  $B_\alpha^d : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$B_\alpha^d(\lambda) := \frac{d!}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \lambda_3^{\alpha_3}$$

*Bernstein-Bézier-Polynom* vom Grad  $d$ . Jedes Polynom  $p \in \tilde{\Pi}_d$  hat eine eindeutige Darstellung (vgl. de Boor [6] und Farin [16])

$$p(v) = \sum_{|\alpha|=d} c_\alpha B_\alpha^d(\lambda(v))$$

Die Koeffizienten  $c_\alpha$  heißen die *Bernstein-Bézier-Koeffizienten* von  $p$ . Weiter bezeichnen wir mit

$$P_\alpha := \frac{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3}{d}$$

die *Bernstein-Bézier-Punkte* eines Dreiecks  $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$ .

Für einen Richtungsvektor  $z \neq 0$  und eine differenzierbare Funktion  $f$  definieren wir die (nicht-normierte) Richtungsableitung von  $f$  durch

$$D_z f(v) = z \operatorname{grad} f(v)$$

Nach Farin [16] gilt nun der folgende Satz.

**Satz 1.1.** *Seien  $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$  und  $\tilde{T} = \Delta(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$  zwei Dreiecke,  $p : T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{p} : \tilde{T} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Polynome mit der Bernstein-Bézier-Darstellung*

$$\begin{aligned} p(v) &= \sum_{|\alpha|=d} c_\alpha B_\alpha^d(\lambda(v)) \\ \tilde{p}(v) &= \sum_{|\alpha|=d} \tilde{c}_\alpha B_\alpha^d(\tilde{\lambda}(v)) \end{aligned}$$

und  $s : T \cup \tilde{T} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$s(v) := \begin{cases} p(v) & v \in T \\ \tilde{p}(v) & v \in \tilde{T} \setminus T \end{cases}$$

(i) Seien  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$  zwei Vektoren und  $\zeta_1, \zeta_2$  die zugehörigen baryzentrischen Richtungsvektoren bezüglich  $T$ . Dann gilt für  $\nu + \mu \leq d$

$$D_{z_1}^\nu D_{z_2}^\mu p = \frac{d!}{(d - \nu - \mu)!} \sum_{|\alpha|=d-\nu-\mu} \sum_{|\beta|=\nu} \sum_{|\gamma|=\mu} c_{\alpha+\beta+\gamma} B_\beta^\nu(\zeta_1) B_\gamma^\mu(\zeta_2) B_\alpha^{d-\nu-\mu}(\lambda)$$

(ii) Es gelte  $v_1 = \bar{v}_1$  und  $\lambda_2, \lambda_3$  seien die baryzentrischen Koordinaten von  $\bar{v}_2, \bar{v}_3$  bezüglich  $T$ . Dann ist  $s$  in  $v_1$  genau dann  $\rho$ -mal stetig differenzierbar, wenn für alle  $|\alpha| = d$  mit  $\alpha_2 + \alpha_3 \leq \rho$  gilt:

$$\tilde{c}_\alpha = \sum_{|\beta|=\alpha_2} \sum_{|\gamma|=\alpha_3} c_{(\alpha_1, 0, 0) + \beta + \gamma} B_\beta^{\alpha_2}(\lambda_2) B_\gamma^{\alpha_3}(\lambda_3)$$

(iii) Es gelte  $v_1 = \bar{v}_1$  und  $v_2 = \bar{v}_2$  und  $\lambda$  seien die baryzentrischen Koordinaten von  $\bar{v}_3$  bezüglich  $T$ . Dann ist  $s$  über die gemeinsame Kante  $\bar{v}_1 \bar{v}_2$  genau dann  $r$ -mal stetig differenzierbar, wenn für alle  $|\alpha| = d$  mit  $\alpha_3 \leq r$  gilt:

$$\tilde{c}_\alpha = \sum_{|\beta|=\alpha_3} c_{(\alpha_1, \alpha_2, 0) + \beta} B_\beta^{\alpha_3}(\lambda)$$

Aus diesem Satz erhalten wir die beiden folgenden Aussagen, die den Zusammenhang zwischen den Bernstein-Bézier-Koeffizienten und den Ableitungen in den Eckpunkten und an den Kanten beschreiben.

**Satz 1.2.** Sei  $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$  ein Dreieck,  $z_i := v_i - v_1$ ,  $i = 2, 3$  und  $p \in \Pi_d$  mit der Bernstein-Bézier-Darstellung  $\sum_{|\alpha|=d} c_\alpha B_\alpha^d(\lambda)$ .

(i) Für  $\nu + \mu \leq d$  gilt

$$D_{z_2}^\nu D_{z_3}^\mu p(v_1) = \frac{d!}{(d - \nu - \mu)!} \sum_{k=0}^\nu \sum_{m=0}^\mu \binom{\nu}{k} \binom{\mu}{m} (-1)^{\nu-k+\mu-m} c_{d-k-m, k, m}$$

(ii) Für  $|\alpha| = d$  gilt

$$c_\alpha = \sum_{\nu=0}^{\alpha_2} \sum_{\mu=0}^{\alpha_3} \binom{\alpha_2}{\nu} \binom{\alpha_3}{\mu} \frac{(d - \nu - \mu)!}{d!} D_{z_2}^\nu D_{z_3}^\mu p(v_1)$$

**Satz 1.3.** Sei  $T := \Delta(v_1, v_2, v_3)$  ein Dreieck,  $p \in \tilde{\Pi}_d$  in der Bernstein-Bézier-Darstellung  $p = \sum_{|\alpha|=d} c_\alpha B_\alpha^d(\lambda)$  und  $\nu \leq d$ . Weiter seien  $z$  ein Vektor, der nicht parallel zur Kante  $e := \bar{v}_1 \bar{v}_2$  verläuft,  $0 < \lambda_0 < \dots < \lambda_{k-1} < 1$  für  $k \leq d - \nu + 1$  und  $u_i := \lambda_i v_1 + (1 - \lambda_i) v_2$ .

(i) Es gilt

$$D_z^\nu p(u_j) = d! \sum_{\substack{|\alpha|=d-\nu \\ \alpha_3=0}} \sum_{|\beta|=\nu} c_{\alpha+\beta} B_\beta^\nu(\zeta) \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2!} \lambda_j^{\alpha_1} (1 - \lambda_j)^{\alpha_2}$$

(ii) Sei  $j \in \mathbb{N}$  mit  $j + k - 1 \leq d - \nu$  und  $I = \{(i, d - \nu - i, \nu) : i = j, \dots, j + k - 1\}$ , dann gilt für  $\alpha \in I$ :

$$c_\alpha = \sum_{i=0}^{k-1} a_i D_z^\nu P(u_i) + \sum_{\substack{\alpha_3 \leq \nu \\ \alpha \notin I}} b_\alpha c_\alpha$$

mit geeigneten Koeffizienten  $a_i, b_\alpha$ .

Satz 1.2 und 1.3 sind für die Interpolation wichtig. Sie zeigen, dass man die Bernstein-Bézier-Koeffizienten direkt aus den Ableitungen in den Eckpunkten und an den Kanten berechnen kann. Die Abbildung 2 zeigt eine Situation, die für Hermite-Interpolanten typisch ist. Hier werden die mit  $\bullet$  bezeichneten Koeffizienten durch Ableitungen in den Eckpunkten nach Satz 1.2 bestimmt. Die mit  $*$  gekennzeichneten Koeffizienten ergeben sich anschließend nach Satz 1.3 aus Ableitungen über die Kanten.

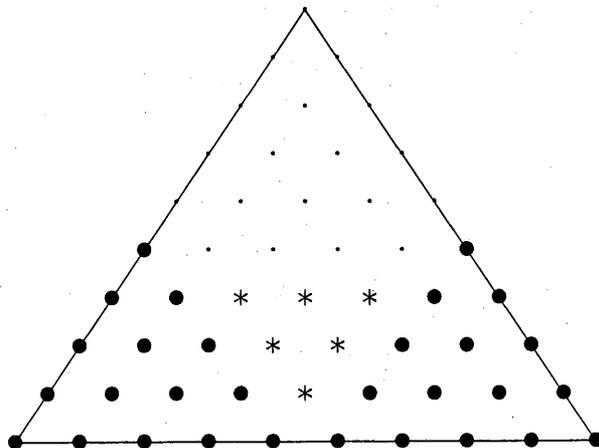


Abbildung 2: Interpolation in den Eckpunkten ( $\bullet$ ) und an den Kanten ( $*$ )

## 1.2 Bivariate Splinefunktionen auf Triangulierungen

Im folgenden sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Polygon und  $\Delta = \{T_1, \dots, T_N\}$  eine Triangulierung von  $\Omega$ . Wir bezeichnen mit

- $V_I, V_B, V$  : die Anzahl der inneren, äußeren, aller Eckpunkte
- $E_I, E_B, E$  : die Anzahl der inneren, äußeren, aller Kanten
- $N$  : die Anzahl der Dreiecke
- $S$  : die Anzahl der singulären Eckpunkte

von  $\Delta$ . Hierbei heißt ein innerer Eckpunkt singulär, wenn er von zwei sich kreuzenden Linien gebildet wird. Nach Euler gilt

$$\begin{aligned} E_B &= V_B \\ N &= V_B + 2V_I - 2 \\ E_I &= V_B + 3V_I - 3 \end{aligned} \tag{1}$$

Für eine Triangulierung  $\Delta$  von  $\Omega$  heißt

$$S_d^r(\Delta) := \left\{ s \in C^r(\Omega) : s|_{T_n} \in \tilde{\Pi}_d \right\}$$

der Raum der *bivariaten Splinefunktionen* vom Grad  $d$  auf  $\Delta$ . Seien  $v_1, \dots, v_V$  die Eckpunkte von  $\Delta$ , dann ist für  $\rho \geq r$  durch

$$S_d^{r,\rho}(\Delta) := \{s \in S_d^r(\Delta) : s \in C^\rho(v_i), i = 1, \dots, V\}$$

ein Unterraum von  $S_d^r(\Delta)$ , genannt *Super-Splinerraum* vom Grad  $d$  definiert.

Ist  $T_i \in \Delta$  ein Dreieck, dann ist  $s|_{T_i}$  ein Polynom und kann nach Abschnitt 1.1 eindeutig in der Bernstein-Bézier-Darstellung  $s|_{T_i}(v) = \sum_{|\alpha|=d} c_\alpha^i B_\alpha^d(\lambda_i(v))$  geschrieben werden. Wir können deshalb jeden Spline  $s$  durch die Menge der Bernstein-Bézier-Koeffizienten  $\{c_\alpha^i : |\alpha| = d, i = 1, \dots, N\}$  beschreiben. Analog zum vorherigen Abschnitt setzen wir

$$\mathcal{P} := \{P_\alpha^n : |\alpha| = d, n = 1, \dots, N\}$$

für die Menge aller Bernstein-Bézier-Punkte der Triangulierung  $\Delta = \{T_1, \dots, T_N\}$ . Mit dieser Bezeichnung können wir den Begriff der bestimmenden Menge einführen (vgl. Alfeld und Schumaker [4] und Ibrahim und Schumaker [17]).

**Definition 1.4.** Eine Menge  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$  heißt *bestimmende Menge* von  $S_d^{r,\rho}(\Delta)$  auf  $\mathcal{A}$ , wenn für alle  $s \in S_d^{r,\rho}(\Delta)$  gilt:

$$c_\alpha^i = 0 \quad \forall P_\alpha^i \in \mathcal{D} \implies c_\alpha^i = 0 \quad \forall P_\alpha^i \in \mathcal{A}$$

$\mathcal{D}$  heißt *minimale bestimmende Menge* von  $S_d^{r,\rho}(\Delta)$  auf  $\mathcal{A}$ , wenn es keine bestimmende Menge mit weniger Elementen gibt.

Die Koeffizienten  $c_\alpha$  der Punkte einer bestimmenden Menge  $\mathcal{D}$  legen also alle Koeffizienten der Punkte aus  $\mathcal{A}$  fest. Wie Alfeld und Schumaker [4] gezeigt haben gilt der folgende wichtige Zusammenhang zwischen der Anzahl einer bestimmenden Menge und der Dimension des zugehörigen Splineriums.

**Lemma 1.5.** *Ist  $\mathcal{D}$  eine bestimmende Menge von  $S_d^{r,\rho}(\Delta)$ , dann gilt  $\dim S_d^{r,\rho}(\Delta) \leq \#\mathcal{D}$  und  $\dim S_d^{r,\rho}(\Delta) = \#\mathcal{D}$ , falls  $\mathcal{D}$  minimal ist.*

Ist  $\mathcal{D}$  eine minimale bestimmende Menge von  $s \in S_d^{r,\rho}(\Delta)$ , dann definieren die Koeffizienten  $c_\alpha^i$  zu den Bernstein-Bézier-Punkten  $P_\alpha^i \in \mathcal{D}$  eindeutig einen Spline  $s \in S_d^{r,\rho}(\Delta)$ . Es genügt deshalb im folgenden, minimale bestimmende Mengen des Splineriums anzugeben. Mit Hilfe der Differenzierbarkeitsbedingungen nach Satz 1.1 kann in der Regel gezeigt werden, ob eine Menge  $\mathcal{D}$  eine bestimmende Menge ist. Die Minimalität einer bestimmenden Menge folgt nach Lemma 1.5, wenn die Dimension des Splineriums bekannt ist. Hierzu gibt es zwei wichtige Ergebnisse von Schumaker [28, 30], die wir nun zitieren.

**Satz 1.6.** *Sei  $v$  ein Eckpunkt der Dreiecke  $T_1, \dots, T_N$ ,  $E_n$  die gemeinsame Kante der Dreiecke  $T_n$  und  $T_{n+1}$  und  $\Delta_v := \{T_1, \dots, T_N\}$ . Weiter gelte  $2\rho + 1 \leq d$ .*

(i) Ist  $v$  ein äußerer Eckpunkt, dann gilt

$$\dim S_d^{r,\rho}(\Delta_v) = \binom{d+2}{2} + (N-1) \left[ \binom{d-r+1}{2} - 2 \binom{\rho-r+1}{2} \right]$$

(ii) Ist  $v$  ein innerer Eckpunkt und  $e$  die Anzahl der inneren Kanten mit unterschiedlicher Steigung, dann gilt

$$\dim S_d^{r,\rho}(\Delta_v) = \binom{\rho+2}{2} + N \left[ \binom{d-r+1}{2} - 2 \binom{\rho-r+1}{2} \right] + \sigma$$

mit

$$\sigma := \sum_{i=\rho-r+1}^{d-r} (r+i+1-ie)_+$$

Mit dem Ergebnis aus Satz 1.6 hat Schumaker [28, 30] eine untere Grenze für die Dimension des Splineraums  $S_d^{r,\rho}(\Delta)$  bestimmt.

**Satz 1.7.** Sei  $V_I$  die Anzahl der inneren Eckpunkte,  $E_I$  die Anzahl der inneren Kanten von  $\Delta$  und  $e_n$  die Anzahl der Kanten mit unterschiedlicher Steigung im Eckpunkt  $v_n$ . Dann gilt für  $2\rho+1 \leq d$

$$\begin{aligned} \dim S_d^{r,\rho}(\Delta) &\geq \binom{d+2}{2} - \left[ \binom{d+2}{2} - \binom{\rho+2}{2} \right] V_I \\ &\quad + \left[ \binom{d-r+1}{2} - 2 \binom{\rho-r+1}{2} \right] E_I + \sum_{n=1}^{V_I} \sigma_n \end{aligned}$$

mit

$$\sigma_n := \sum_{i=\rho-r+1}^{d-r} (r+i+1-ie_n)_+$$

## 2 Unterteilung von Triangulierungen

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Interpolation für den Clough-Tochter-Split. Wie Laghchim-Lahlou und Sablonnière [18] verwenden wir den Super-Splineraum  $S_d^{r,\rho}(\Delta)$  mit  $\rho := \lfloor \frac{3r}{2} \rfloor$  und  $d := 2\rho + 1$ . Da bei unserer Methode der Spline iterativ berechnet wird, können wir im Gegensatz zu den Methoden mit finiten Elementen nicht die gleichen Interpolationsbedingungen auf allen Dreiecken wählen. Die Bedingungen auf einem Dreieck  $T_i$  hängen vielmehr von der Anzahl der gemeinsamen Kanten mit der Teiltriangulierung  $\Delta_{i-1} := \{T_1, \dots, T_{i-1}\}$  ab. Hat das Dreieck mindestens zwei gemeinsame Kanten mit der Teiltriangulierung  $\Delta_i$ , so muss dieses Dreieck unterteilt werden. Andernfalls würde man nach Farin [16] in dem Eckpunkt der beiden Kanten eine  $C^{2r}$ -Bedingung und somit einen Polynomgrad von  $d \geq 4r + 1$  benötigen. Andererseits zeigen die folgenden Aussagen, dass

keine Unterteilung nötig ist, wenn das Dreieck  $T_i$  maximal eine Kante mit der Teiltriangulierung  $\Delta_{i-1}$  gemeinsam hat.

Im folgenden bezeichne  $\Delta = \{T_1, \dots, T_N\}$  eine Triangulierung eines zusammenhängenden Gebiets  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  ohne Löcher. Wir setzen

$$\begin{aligned}\theta_i &:= |\{j : e_j \text{ ist gemeinsame Kante von } T_i \text{ mit } \Delta_{i-1}\}| \\ \Theta_k &:= |\{T_i \in \Delta : \theta_i = k\}|\end{aligned}$$

Wir wollen weiter annehmen, dass die Eckpunkte eines Dreiecks  $T_i = \Delta(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})$  so nummeriert sind, dass das benachbarte Dreieck mit dem niedrigsten Index die gemeinsame Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$  besitzt. Falls vorhanden soll das Dreieck mit dem nächst höheren Index an der Kante  $\overline{v_{i,2}v_{i,3}}$  liegen. Weiter seien die drei Mikro-Dreiecke des Clough-Tocher-Splits durch  $T_{i,1} := \Delta(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,4})$ ,  $T_{i,2} := \Delta(v_{i,2}, v_{i,3}, v_{i,4})$  und  $T_{i,3} := \Delta(v_{i,3}, v_{i,1}, v_{i,4})$  definiert, wobei  $v_{i,4} := (v_{i,1} + v_{i,2} + v_{i,3})/3$  das Baryzentrum von  $T_i$  bezeichnet. Zu  $\Delta_i$  erhalten wir nun die Triangulierung

$$\tilde{\Delta}_i := \bigcup_{\substack{j=1 \\ \theta_j \leq 1}}^i T_j \cup \bigcup_{\substack{j=1 \\ \theta_j \geq 2}}^i \{T_{j,1}, T_{j,2}, T_{j,3}\}$$

$\tilde{\Delta}_i$  entsteht also aus  $\Delta_i$ , indem jedes Dreieck  $T_j$  mit  $\theta_j \geq 2$  durch einen Clough-Tocher-Split ersetzt wird. Mit  $\tilde{\Delta} := \tilde{\Delta}_N$  bezeichnen wir die gesamte Triangulierung, die wir durch die Unterteilung der Dreiecke erhalten.

## 2.1 Bestimmende Mengen für $S_d^{\tau, \rho}(\tilde{\Delta})$

In diesem Abschnitt werden wir für die Triangulierung  $\tilde{\Delta}$  zunächst eine bestimmende Menge angeben. Aus dieser bestimmenden Menge wird anschließend ein Hermite-Interpolant abgeleitet.

**Lemma 2.1.** *Sei  $T_i \in \Delta$ ,  $\theta_i \leq 1$ ,  $\mathcal{D}_{i-1}$  eine bestimmende Menge von  $\tilde{\Delta}_{i-1}$  und*

$$\mathcal{D}_i := \begin{cases} \{P_\alpha^i : |\alpha| = d\} & \text{falls } \theta_i = 0 \\ \{P_\alpha^i : |\alpha| = d; \alpha_1, \alpha_2 < d - \rho; \alpha_3 > r\} & \text{falls } \theta_i = 1 \end{cases}$$

*Dann ist  $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{i-1} \cup \mathcal{D}_i$  eine bestimmende Menge von  $S_d^{\tau, \rho}(\tilde{\Delta}_i)$ .*

**Beweis:** Die Behauptung für  $\theta_i = 0$  folgt unmittelbar, da alle Bernstein-Bézier-Punkte von  $T_i$  in  $\mathcal{D}_i$  enthalten sind. Sei nun  $\theta_i = 1$  und alle Koeffizienten der Bernstein-Bézier-Punkte aus  $\mathcal{D}$  gleich 0. Da  $\mathcal{D}_{i-1}$  eine bestimmende Menge von  $\tilde{\Delta}_{i-1}$  ist, sind alle Koeffizienten  $c_\alpha^j$  der Bernstein-Bézier-Punkte aus  $\tilde{\Delta}_{i-1}$  gleich 0. Nach Voraussetzung ist  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$  eine gemeinsame Kante von  $T_i$  und  $\tilde{\Delta}_{i-1}$ . Für  $P_\alpha^i \notin \mathcal{D}_i$  gilt nun  $\alpha_1 \geq d - \rho$ ,  $\alpha_2 \geq d - \rho$  oder  $\alpha_3 \leq r$ . Da  $v_{i,1}$  und  $v_{i,2}$  Eckpunkte der Teiltriangulierung  $\tilde{\Delta}_{i-1}$  sind, folgt für die ersten beiden Fällen  $c_\alpha^i = 0$  nach Satz 1.1 (ii). Im dritten Fall folgt dies aus der  $C^r$ -Bedingung über die Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$  nach Satz 1.1 (iii).  $\square$

Für den Fall  $\theta_i \geq 2$  benötigen wir noch die beiden folgenden Aussagen. Das erste Lemma wurde in ähnlicher Form auch von Ibrahim und Schumaker [17] sowie Laghchim-Lahlou und Sablonnière [18, 19] bewiesen.

**Lemma 2.2.** *Es seien  $T_1 = \Delta(v_1, v_2, v_3)$  und  $T_2 = \Delta(v_1, v_2, v_4)$  zwei Dreiecke, so dass  $\overline{v_i v_3}$  und  $\overline{v_i v_4}$ ,  $i = 1, 2$  nicht kollinear sind. Weiter seien  $k = \lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor$ ,  $\rho < m \leq d$  und  $I = \{r - 2k + 1, \dots, r - k\}$ . Dann ist*

$$\mathcal{D} := \{P_\alpha^i : \alpha_1 \neq 0 \text{ oder } \alpha_3 \notin I, i = 1, 2\}$$

eine bestimmende Menge von  $S_m^r(\{T_1, T_2\})$ . Seien  $\lambda_1$  die baryzentrischen Koordinaten von  $v_4$  bezüglich  $T_1$  und  $\lambda_2$  die baryzentrischen Koordinaten von  $v_3$  bezüglich  $T_2$ , dann gilt für  $|\alpha| = d$  und  $j = 1, 2$ :

$$|c_\alpha^j| \leq K \max \{|c_\alpha^i| : P_\alpha^i \in \mathcal{D}, i = 1, 2\} \left( \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right)^{r+1}$$

mit

$$\lambda_{\max} := \max \{|\lambda_{i,j}| : i = 1, 2; j = 1, 2, 3\}$$

$$\lambda_{\min} := \min \{|\lambda_{i,j}| : i = 1, 2; j = 1, 2, 3\}$$

wobei die Konstante  $K$  nur von  $r$  abhängt.

**Beweis:** Zunächst ist zu beachten, dass  $\lambda_{2,3} = 1/\lambda_{1,3}$  gilt, so dass  $\lambda_{\max} \geq 1$  und  $\lambda_{\min} \leq 1$  folgt. Aus der  $C^r$ -Bedingung über die Kante  $\overline{v_1 v_2}$  folgt nach Satz 1.1 für  $j = r - k + 1, \dots, r$  und  $\alpha = (0, m - j, j)$ :

$$c_\alpha^2 = \sum_{|\beta|=\alpha_3} c_{(\alpha_1, \alpha_2, 0)+\beta}^1 \frac{a_3!}{\beta_1! \beta_2! \beta_3} \lambda_{1,1}^{\beta_1} \lambda_{1,2}^{\beta_2} \lambda_{1,3}^{\beta_3}$$

Setzt man

$$B := \begin{pmatrix} \binom{r-k+1}{r-2k+1} \lambda_{1,2}^k \lambda_{1,3}^{r-2k+1} & \dots & \binom{r-k+1}{r-k} \lambda_{1,2} \lambda_{1,3}^{r-k} \\ \vdots & & \vdots \\ \binom{r}{r-2k+1} \lambda_{1,2}^{2k-1} \lambda_{1,3}^{r-2k+1} & \dots & \binom{r}{r-k} \lambda_{1,2}^k \lambda_{1,3}^{r-k} \end{pmatrix}$$

$$c := \left( c_{0, m-(r-2k+1), r-2k+1}^1, \dots, c_{0, m-(r-k), r-k}^1 \right)$$

$$\gamma := (\gamma_{r-k+1}, \dots, \gamma_r)$$

mit

$$\gamma_j := c_{0, m-j, j}^2 - \sum_{\substack{|\beta|=j \\ \beta_3 \notin I \text{ oder } \beta_1 \neq 0}} c_{(0, m-j, 0)+\beta}^1 \frac{j!}{\beta_1! \beta_2! \beta_3} \lambda_{1,1}^{\beta_1} \lambda_{1,2}^{\beta_2} \lambda_{1,3}^{\beta_3}$$

dann gilt also  $Bc = \gamma$ . Sei

$$C := \det \begin{pmatrix} \binom{r}{r-2k+1} & \cdots & \binom{r}{r-k} \\ \vdots & & \vdots \\ \binom{r-k+1}{r-2k+1} & \cdots & \binom{r-k+1}{r-k} \end{pmatrix}$$

dann ist  $C \neq 0$  eine Konstante, die nur von  $r$  abhängt und es gilt

$$\det B = C \prod_{\nu=1}^k \lambda_{1,2}^\nu \prod_{\nu=0}^{k-1} \lambda_{1,2}^\nu \prod_{\nu=r+1-2k}^{r-k} \lambda_{1,3}^\nu = C \lambda_{1,2}^{k^2} \lambda_{1,3}^{\frac{(r-k+1)(r-k)}{2}}$$

Da  $\overline{v_1 v_3}$  und  $\overline{v_1 v_4}$  nicht kollinear sind, gilt  $\lambda_{1,2}, \lambda_{1,3} \neq 0$ , so dass  $\det B \neq 0$  folgt. Also ist  $\mathcal{D}$  eine bestimmende Menge. Sei nun  $B_{ij}$  die Matrix, die man durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte aus  $B$  erhält und  $C_{ij}$  definiert durch

$$C_{ij} := \det \begin{pmatrix} \binom{r}{r-2k+1} & \cdots & \binom{r}{r-2k+j-1} & \binom{r}{r-2k+j+1} & \cdots & \binom{r}{r-k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{r-i+1}{r-2k+1} & \cdots & \binom{r-i+1}{r-2k+j-1} & \binom{r-i+1}{r-2k+j+1} & \cdots & \binom{r-i+1}{r-k} \\ \binom{r-i-1}{r-2k+1} & \cdots & \binom{r-i-1}{r-2k+j-1} & \binom{r-i-1}{r-2k+j+1} & \cdots & \binom{r-i-1}{r-k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{r-k+1}{r-2k+1} & \cdots & \binom{r-k+1}{r-2k+j-1} & \binom{r-k+1}{r-2k+j+1} & \cdots & \binom{r-k+1}{r-k} \end{pmatrix}$$

dann folgt analog

$$\det B_{ij} = C_{ij} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k+1-i}}^k \lambda_{1,2}^\nu \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k-j}}^{k-1} \lambda_{1,2}^\nu \prod_{\substack{\nu=r+1-2k \\ \nu \neq j}}^{r-k} \lambda_{1,3}^\nu = C_{ij} \lambda_{1,2}^{k^2 - (2k+1-i-j)} \lambda_{1,3}^{\frac{(r-k+1)(r-k)}{2} - j}$$

Für die Einträge  $b_{ij}$  von  $B^{-1}$  gilt somit:

$$|b_{ij}| = \frac{|\det B_{ji}|}{|\det B|} = \frac{|C_{ji}|}{|C| |\lambda_{1,2}|^{2k+1-i-j} |\lambda_{1,3}|^j} \leq \frac{K_{ij}}{\min\{|\lambda_{1,2}|, |\lambda_{1,3}|\}^{2k+1-i}} \leq \frac{K_{ij}}{\lambda_{\min}^{r+1}}$$

wobei  $K_{ij} := |C_{ji}|/|C|$  nur von  $r$  abhängt. Weiter gilt

$$\begin{aligned} |\gamma_j| &\leq |c_{0,m-j,j}^2| + \sum_{\substack{|\beta|=j \\ \beta_3 \notin I \text{ oder } \beta_1 \neq 0}} |c_{(0,m-j,0)+\beta}^1| \frac{j!}{\beta_1! \beta_2! \beta_3} |\lambda_{1,1}|^{\beta_1} |\lambda_{1,2}|^{\beta_2} |\lambda_{1,3}|^{\beta_3} \\ &\leq \max\{|c_\alpha^i| : P_\alpha^i \in \mathcal{D}\} \left(1 + 3^j \max\{|\lambda_{1,1}|, |\lambda_{1,2}|, |\lambda_{1,3}|\}^j\right) \\ &\leq \max\{|c_\alpha^i| : P_\alpha^i \in \mathcal{D}\} (1 + 3^r) \lambda_{\max}^{r+1} \end{aligned}$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} |c_\alpha^1| &\leq k \max\{|\gamma_j|\} \max\{|b_{ij}|\} \\ &\leq k (1 + 3^r) \max\{K_{ij}\} \max\{|c_\alpha^i| : P_\alpha^i \in \mathcal{D}\} \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\right)^{r+1} \end{aligned}$$

mit  $K := k (1 + 3^r) \max\{K_{ij}\}$ . Analog zeigt man dies für die Koeffizienten  $c_\alpha^2$ .  $\square$

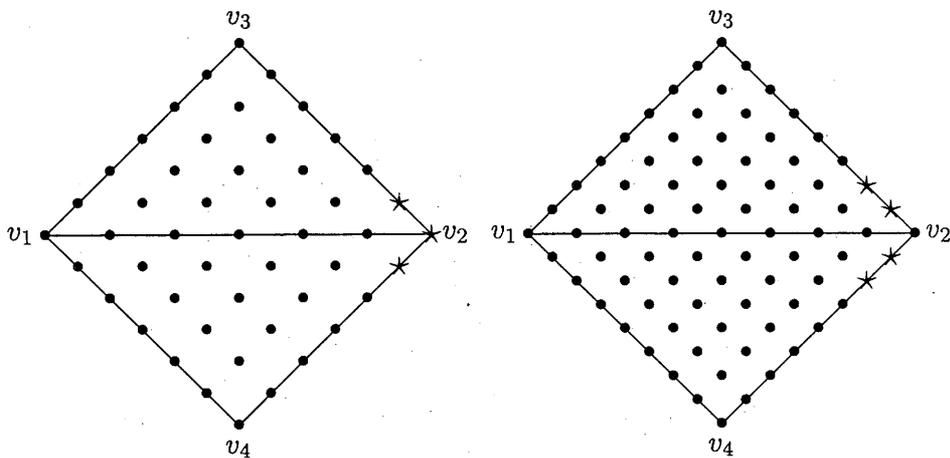


Abbildung 3: Bestimmende Menge von  $S_6^3(\{T_1, T_2\})$  und  $S_8^4(\{T_1, T_2\})$

Für den Fall  $r$  gerade wird noch eine Aussage über die Bernstein-Bézier-Koeffizienten in der Scheibe  $D_\rho(v_{i,4})$  um den mittleren Eckpunkt eines Clough-Tocher-Elements benötigt.

**Lemma 2.3.** *Es seien  $r$  gerade,  $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$ ,  $v_4 \in T$  mit den baryzentrischen Koordinaten  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  und  $T_j = \Delta(v_j, v_{j+1}, v_4)$ <sup>1</sup>. Dann ist*

$$\mathcal{D} := \left\{ P_\alpha^i : \alpha_3 < \frac{r}{2}; i = 1, 2, 3 \right\} \cup \{v_4\}$$

eine bestimmende Menge von  $S_\rho^r(\{T_1, T_2, T_3\})$  und es gilt  $S_\rho^r(\{T_1, T_2, T_3\}) = \tilde{\Pi}_\rho$ . Sei  $s \in S_\rho^r(\{T_1, T_2, T_3\})$  und  $\sum_{|\alpha|=\rho} c_\alpha B_\alpha^\rho(\mu)$  die Bernstein-Bézier-Darstellung von  $s$  bezüglich dem Dreieck  $T$ , dann gilt:

$$|c_\alpha| \leq K \max \{ |c_\alpha^i| : P_\alpha^i \in \mathcal{D} \} \lambda_{\max}^\rho$$

mit

$$\lambda_{\max} := \max \left\{ \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3} \right\}$$

wobei  $K$  nur von  $r$  abhängt.

**Beweis:** Zunächst gilt nach Satz 1.6

$$\dim S_\rho^r(\{T_1, T_2, T_3\}) = \binom{\rho+2}{2} = \dim \tilde{\Pi}_\rho$$

und somit  $S_\rho^r(\{T_1, T_2, T_3\}) = \tilde{\Pi}_\rho$ . Sei  $s \in S_\rho^r(\{T_1, T_2, T_3\})$  und  $c_\alpha^i = 0$  für  $P_\alpha^i \in \mathcal{D}$ . Nach Satz 1.3 gilt somit  $D_z^\nu(v) = 0$ ,  $\nu = 0, \dots, \frac{r}{2} - 1$  für alle  $v \in \bar{v}_i v_{i+1}$  und alle Richtungsvektoren  $z$ . Sind  $l_i(v) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  die Geradengleichungen der Kanten von  $T$ , dann folgt

<sup>1</sup> $j+1$  modulo 3

wegen  $s \in \tilde{\Pi}_\rho$

$$s(v) = q(v) (l_1(v)l_2(v)l_3(v))^{\frac{r}{2}}$$

mit  $q \in \tilde{\Pi}_0$ . Nun gilt

$$0 = s(v_4) = q(v_4) (l_1(v_4)l_2(v_4)l_3(v_4))^{\frac{r}{2}}$$

Da  $v_4$  auf keiner Kante von  $T$  liegt, gilt  $l_i(v_4) \neq 0$ , so dass  $q(v_4) = 0$  und somit  $s = 0$  folgt. Also ist  $\mathcal{D}$  eine bestimmende Menge.

Sei nun  $\sum_{|\alpha|=\rho} c_\alpha B_\alpha^\rho(\mu)$  die Bernstein-Bézier-Darstellung von  $s$ , dann gilt nach Satz 1.3 für einen Richtungsvektor  $z$  nicht parallel zur Kante  $\overline{v_1 v_2}$  und  $v = \mu v_1 + (1 - \mu)v_2$ :

$$\begin{aligned} D_z^\nu s(v) &= \frac{\rho!}{(\rho - \nu)!} \sum_{\substack{|\alpha|=\rho-\nu \\ \alpha_3=0}} \sum_{|\beta|=\nu} c_{\alpha+\beta} B_\beta^\nu(\zeta) B_\alpha^{\rho-\nu}((\mu, 1 - \mu, 0)) \\ &= \frac{\rho!}{(\rho - \nu)!} \sum_{\substack{|\alpha|=\rho-\nu \\ \alpha_3=0}} \sum_{|\beta|=\nu} c_{\alpha+\beta}^1 B_\beta^\nu(\tilde{\zeta}) B_\alpha^{\rho-\nu}((\mu, 1 - \mu, 0)) \end{aligned} \quad (2)$$

wobei  $\zeta$  und  $\tilde{\zeta}$  die baryzentrischen Richtungsvektoren von  $z$  bezüglich  $T$  bzw.  $T_1$  bezeichnen. Wir beweisen nun durch Induktion nach  $\nu = 0, \dots, \frac{r}{2} - 1$ , dass für alle  $c_\alpha$  mit  $\alpha_3 \leq \nu$  die Ungleichung

$$|c_\alpha| \leq K_\nu \max \{ |c_\alpha^1| : \alpha_3 \leq \nu \} \frac{1}{\lambda_3^\nu} \quad (3)$$

gilt, wobei die Konstante  $K_\nu$  nur von  $r$  abhängt. Für  $\nu = 0$  ergibt sich aus (2)

$$\sum_{\substack{|\alpha|=\rho-\nu \\ \alpha_3=0}} c_\alpha B_\alpha^\rho((\mu, 1 - \mu, 0)) = \sum_{\substack{|\alpha|=\rho-\nu \\ \alpha_3=0}} c_\alpha^1 B_\alpha^\rho((\mu, 1 - \mu, 0))$$

mit  $\mu \in [0, 1]$ . Somit gilt also  $c_\alpha = c_\alpha^1$ , so dass (3) mit  $K_0 = 1$  erfüllt ist. Die Behauptung gelte nun für  $k = 0, \dots, \nu - 1$ . Seien  $\mu_0, \dots, \mu_{\rho-\nu} \in [0, 1]$  paarweise verschieden und  $\gamma_0, \dots, \gamma_{\rho-\nu}$  definiert durch

$$\begin{aligned} \gamma_i &:= \sum_{\substack{|\alpha|=\rho-\nu \\ \alpha_3=0}} \sum_{|\beta|=\nu} c_{\alpha+\beta}^1 B_\beta^\nu(\tilde{\zeta}) B_\alpha^{\rho-\nu}((\mu_i, 1 - \mu_i, 0)) \\ &\quad - \sum_{\substack{|\alpha|=\rho-\nu \\ \alpha_3=0}} \sum_{\substack{|\beta|=\nu \\ \beta_3 < \nu}} c_{\alpha+\beta} B_\beta^\nu(\zeta) B_\alpha^{\rho-\nu}((\mu_i, 1 - \mu_i, 0)) \end{aligned}$$

dann folgt aus (2) das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \binom{\rho-\nu}{\rho-\nu} \mu_0^{\rho-\nu} (1 - \mu_0)^0 \zeta_3^\nu & \dots & \binom{\rho-\nu}{0} \mu_0^0 (1 - \mu_0)^{\rho-\nu} \zeta_3^\nu \\ \vdots & & \vdots \\ \binom{\rho-\nu}{\rho-\nu} \mu_{\rho-\nu}^{\rho-\nu} (1 - \mu_{\rho-\nu})^0 \zeta_3^\nu & \dots & \binom{\rho-\nu}{0} \mu_{\rho-\nu}^0 (1 - \mu_{\rho-\nu})^{\rho-\nu} \zeta_3^\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\rho-\nu, 0, \nu} \\ \vdots \\ c_{0, \rho-\nu, \nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{\rho-\nu} \end{pmatrix}$$

Bezeichnet man mit  $B$  die Koeffizientenmatrix und mit  $b_{ij}$  die Elemente der Inverse  $B^{-1}$ , dann ergibt sich analog zum Beweis aus Lemma 2.2

$$|b_{ij}| \leq \frac{C}{\zeta_3}$$

mit einer Konstante  $C$ , die nur von  $r$  abhängt. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Konstante  $K_{\nu-1}$  mit

$$\max \{|c_\alpha| : \alpha_3 < \nu\} \leq K_{\nu-1} \max \{|c_\alpha^1| : \alpha_3 < \nu\} \frac{1}{\lambda_3^{\nu-1}}$$

Da (2) für jeden Vektor  $\zeta$  mit  $\zeta_3 \neq 0$  gilt, können wir  $\zeta := (-\zeta_1, -\zeta_2, 1)$  mit  $\zeta_1, \zeta_2 \geq 0$  und  $\zeta_1 + \zeta_2 = 1$  setzen. Hieraus ergibt sich

$$\tilde{\zeta} = \left( -\frac{\zeta_1 \lambda_3 + \lambda_1}{\lambda_3}, -\frac{\zeta_2 \lambda_3 + \lambda_2}{\lambda_3}, \frac{1}{\lambda_3} \right)$$

so dass

$$\max \{|\tilde{\zeta}_i| : i = 1, 2, 3\} = \frac{1}{\lambda_3}$$

gilt. Wegen  $0 < \lambda_3 \leq 1$  folgt:

$$\begin{aligned} |\gamma_i| &\leq \sum_{\substack{|\alpha|=\rho-\nu \\ \alpha_3=0}} \sum_{|\beta|=\nu} |c_{\alpha+\beta}^1| \max \{|\tilde{\zeta}_i| : i = 1, 2, 3\}^\nu + \sum_{\substack{|\alpha|=\rho-\nu \\ \alpha_3=0}} \sum_{\substack{|\beta|=\nu \\ \beta_3 < \nu}} |c_{\alpha+\beta}| \\ &\leq (K_{\nu-1} + 1)(\rho - \nu + 1) \binom{\nu+2}{2} \max \{|c_\alpha^1| : \alpha_3 \leq \nu\} \frac{1}{\lambda_3^\nu} \end{aligned}$$

Setzt man

$$K_\nu := C(K_{\nu-1} + 1)(\rho - \nu + 1)^2 \binom{\nu+2}{2}$$

dann folgt (3). Analog zeigt man die Aussage für  $T_2$  und  $T_3$ , so dass

$$|c_\alpha| \leq K \max \{|c_\alpha^i| : P_\alpha^i \in \mathcal{D}\} \lambda_{\max}^{\frac{r}{2}-1}$$

für alle  $\alpha \neq (\frac{r}{2}, \frac{r}{2}, \frac{r}{2})$  gilt. Schließlich ergibt sich aus  $c_{00\rho}^i = s(\lambda) = \sum_{|\alpha|=\rho} c_\alpha B_\alpha^\rho(\lambda)$  mit (3):

$$|c_{\frac{r}{2}, \frac{r}{2}, \frac{r}{2}}^i| \leq |c_{00\rho}^i| \lambda_{\max}^\rho + \binom{\rho+2}{2} K_{\frac{r}{2}-1} \max \{|c_\alpha^i| : P_\alpha^i \in \mathcal{D}\} \lambda_{\max}^r$$

Mit  $K := 1 + \binom{\rho+2}{2} K_{\frac{r}{2}-1}$  erhält man

$$|c_\alpha| \leq \max \{|c_\alpha| : |\alpha| = \rho\} \leq K \max \{|c_\alpha^i| : P_\alpha^i \in \mathcal{D}\} \lambda_{\max}^\rho$$

wobei  $K$  nur von  $r$  abhängt. □

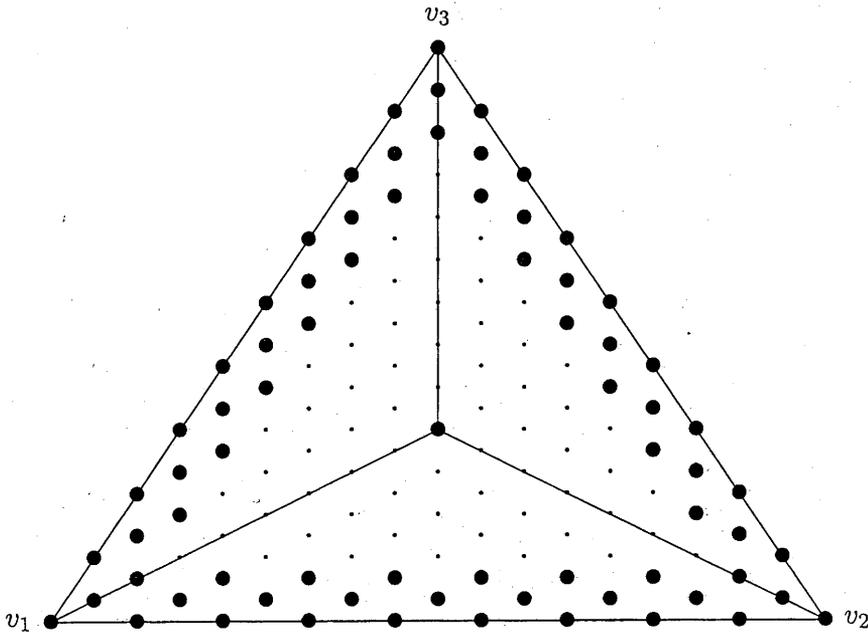


Abbildung 4: Bestimmende Menge von  $S_9^6(\{T_1, T_2, T_3\})$

Der Beweis von Lemma 2.3 zeigt noch eine Besonderheit des Clough-Tochter-Splits. Jeder Clough-Tochter-Punkt erfüllt nämlich automatisch eine  $C^\rho$ -Bedingung (vgl. Farin [16] und Laghchim-Lahlou und Sablonnière [18]). Es gilt also

$$\left\{ f \in S_d^r(\bar{\Delta}) : f \in C^\rho(v), v \in \Delta \right\} = S_d^{r,\rho}(\bar{\Delta})$$

Mit Hilfe von Lemma 2.2 und 2.3 kann nun eine bestimmende Menge für die Dreiecke  $T_i$  mit  $\theta_i \geq 2$  angegeben werden.

**Lemma 2.4.** *Es seien  $T_i \in \Delta$ ,  $\theta_i \geq 2$ ,  $\mathcal{D}_{i-1}$  eine bestimmende Menge von  $\bar{\Delta}_{i-1}$  und  $\mathcal{A}_j$ ,  $\mathcal{B}_j$ ,  $\mathcal{C}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  definiert durch*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_j &:= \left\{ P_\alpha^{i,j} : |\alpha| = d; \alpha_1, \alpha_2 < d - \rho; \alpha_3 \leq r \right\} \\ \mathcal{B}_j &:= \left\{ P_\alpha^{i,j} : |\alpha| = d; \alpha_1, \alpha_2 > \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor; \alpha_3 > r \right\} \\ \mathcal{C}_j &:= \left\{ P_\alpha^{i,j} : |\alpha| = d; \alpha_2 = 0; \rho + 1 \leq \alpha_3 \leq \rho + r \right\} \end{aligned}$$

$j = 1, 2, 3$ . Man setze

$$\mathcal{D}_i := \begin{cases} \bigcup_{j=1}^3 \mathcal{B}_j \cup \mathcal{A}_3 & \theta_i = 2 \text{ und } r \text{ ungerade} \\ \bigcup_{j=1}^3 \mathcal{B}_j & \theta_i = 3 \text{ und } r \text{ ungerade} \\ \bigcup_{j=1}^3 (\mathcal{B}_j \cup \mathcal{C}_j) \cup \{v_{i,4}\} \cup \mathcal{A}_3 & \theta_i = 2 \text{ und } r \text{ gerade} \\ \bigcup_{j=1}^3 (\mathcal{B}_j \cup \mathcal{C}_j) \cup \{v_{i,4}\} & \theta_i = 3 \text{ und } r \text{ gerade} \end{cases}$$

Dann ist  $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{i-1} \cup \mathcal{D}_i$  eine bestimmende Menge von  $S_d^{r,\rho}(\bar{\Delta}_i)$ .

**Beweis:** Es seien alle Koeffizienten der Bernstein-Bézier-Punkte aus  $\mathcal{D}$  gleich 0. Nach Voraussetzung gehören die Eckpunkte  $v_{i,1}$ ,  $v_{i,2}$  und  $v_{i,3}$  zur Teiltriangulierung  $\tilde{\Delta}_{i-1}$ . Somit folgt aus der  $C^\rho$ -Bedingung in jedem Eckpunkt, dass alle Koeffizienten der Bernstein-Bézier-Punkte aus  $D_\rho(v_{i,j})$ ,  $j = 1, 2, 3$  gleich 0 sind. Aus den  $C^r$ -Bedingungen über die Kanten  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$  und  $\overline{v_{i,2}v_{i,3}}$  folgt dies auch für die Koeffizienten der Punkte aus  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$ . Für  $\theta_i = 2$  gilt  $\mathcal{A}_3 \subseteq \mathcal{D}$  und somit sind nach Voraussetzung alle Koeffizienten der Punkte aus  $\mathcal{A}_3$  gleich 0. Für  $\theta_i = 3$  gehört die Kante  $\overline{v_{i,3}v_{i,1}}$  zur Teiltriangulierung  $\tilde{\Delta}_{i-1}$ , so dass sich in diesem Fall die Koeffizienten aus der  $C^r$ -Bedingung über die Kante berechnen. Somit sind alle Koeffizienten der Bernstein-Bézier-Punkte aus  $\bigcup_{j=1}^3 (D_\rho(v_{i,j}) \cup \mathcal{A}_j)$  gleich 0.

Die Koeffizienten  $c_\alpha^i$  mit  $\alpha_1, \alpha_2 \geq \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$  berechnen sich nun iterativ, indem man Lemma 2.2 für die Ringe  $D_m(v_{i,j})$ ,  $m = \rho+1, \dots, \rho+r$  anwendet. Ist  $r$  ungerade, dann lassen sich die verbleibenden Koeffizienten ebenfalls nach Lemma 2.2 mit  $m = \rho+r, \dots, d$  bestimmen. Ist  $r$  gerade, dann ergeben sich die Koeffizienten nach Lemma 2.3.  $\square$

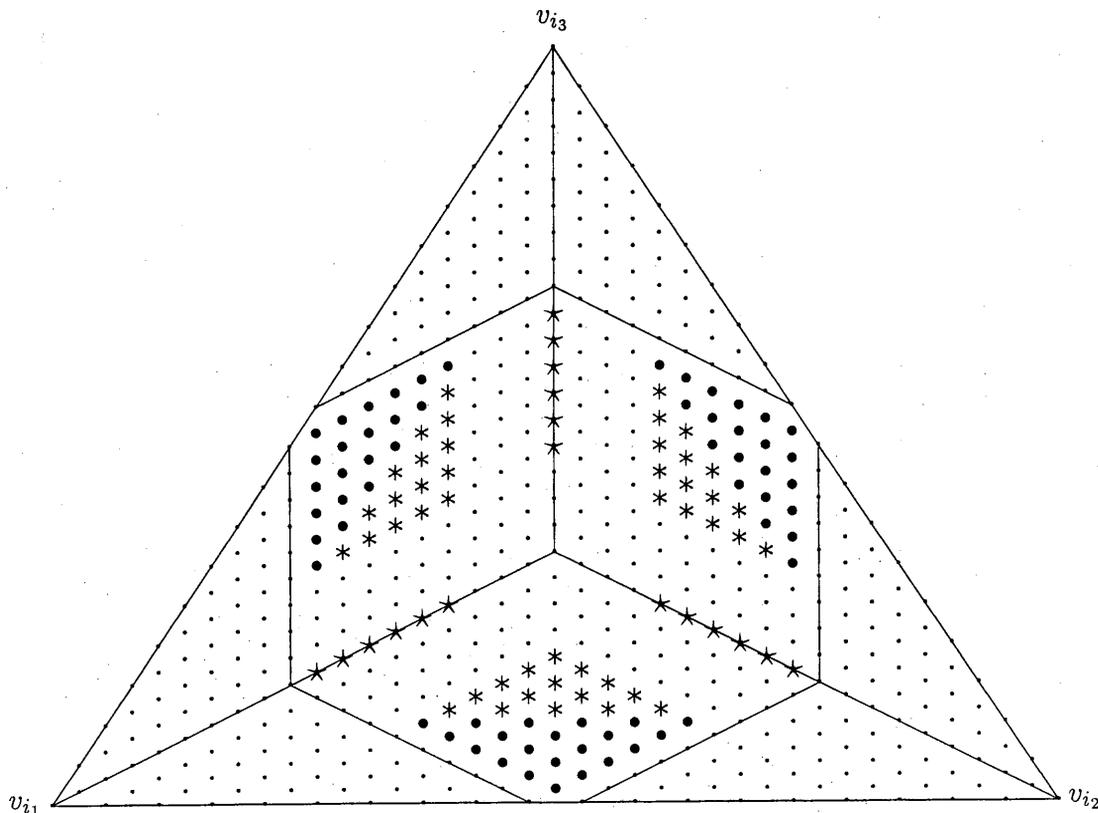


Abbildung 5: Mengen  $\mathcal{A}_j(\bullet)$ ,  $\mathcal{B}_j(\ast)$  und  $\mathcal{C}_j(\ast)$  für  $S_{19}^{6,9}$

## 2.2 Hermite-Interpolation und Approximationsgüte

Wir verwenden nun die bestimmenden Mengen aus Lemma 2.1 und 2.4 um einen Interpolanten für den Splineraum  $S_d^{r,\rho}(\tilde{\Delta})$  anzugeben.

**Satz 2.5.** Sei  $f \in C^{2r}(\Omega)$ , dann gibt es einen eindeutig bestimmten Spline  $s \in S_d^{r,\rho}(\tilde{\Delta})$ , der die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Für jeden Eckpunkt  $v_i \in \Delta$  und  $\mu + \nu \leq \rho$  gelte:

$$D_x^\mu D_y^\nu s(v_i) = D_x^\mu D_y^\nu f(v_i)$$

(ii) Für jedes Dreieck  $T_i = \Delta(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})$  sei  $e_{i,j} := \overline{v_{i,j}v_{i,j+1}}$ ,  $z_{i,j}$  ein Vektor, der nicht parallel zur Kante  $e_{i,j}$  verläuft und  $w_{i,j}^\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, r$  paarweise verschiedene Punkte auf  $e_{i,j}$ .

(a) Ist  $\theta_i = 0$ , dann gelte für  $1 \leq \mu \leq \nu \leq r$

$$D_{z_{i,1}}^\nu s(w_{i,1}^\mu) = D_{z_{i,1}}^\nu f(w_{i,1}^\mu)$$

(b) Ist  $\theta_i \in \{0, 1\}$ , dann gelte für  $\rho < \mu + \nu < d - r$  und  $\mu, \nu \geq \mu + \nu - \rho$

$$D_{v_{i,1}-v_{i,3}}^\mu D_{v_{i,2}-v_{i,3}}^\nu s(v_{i,3}) = D_{v_{i,1}-v_{i,3}}^\mu D_{v_{i,2}-v_{i,3}}^\nu f(v_{i,3})$$

(c) Ist  $\theta_i = 2$ , dann gelte für  $1 \leq \mu \leq \nu \leq r$

$$D_{z_{i,3}}^\nu s(w_{i,3}^\mu) = D_{z_{i,3}}^\nu f(w_{i,3}^\mu)$$

(d) Ist  $\theta_i \in \{2, 3\}$ , dann gelte für  $j = 1, 2, 3$ ,  $r + 1 \leq \nu \leq 2r - 1$  und  $1 \leq \mu \leq 2r - \nu$

$$D_{z_{i,j}}^\nu s(w_{i,j}^\mu) = D_{z_{i,j}}^\nu f(w_{i,j}^\mu)$$

(iii) Ist  $r$  gerade und  $T_i = \Delta(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})$  ein Dreieck mit  $\theta_i \geq 2$ , dann gelte für  $j = 1, 2, 3$  und  $\rho + 1 \leq \nu \leq \rho + r$

$$\begin{aligned} D_{v_{i,4}-v_{i,j}}^\nu s(v_{i,j}) &= D_{v_{i,4}-v_{i,j}}^\nu f(v_{i,j}) \\ s(v_{i,4}) &= f(v_{i,4}) \end{aligned}$$

wobei  $v_{i,4}$  das Baryzentrum von  $T_i$  bezeichne.

**Beweis:** Mit Satz 1.2 und 1.3 folgt unmittelbar, dass sich alle Koeffizienten  $c_\alpha^i$  der bestimmenden Mengen aus Lemma 2.1 und 2.4 berechnen lassen. Sei  $M$  die Anzahl der Bedingungen, dann gilt somit  $\dim S_d^{r,\rho}(\tilde{\Delta}) \leq M$ . Mit (1) folgt wegen  $E = 3\Theta_0 + 2\Theta_1 + \Theta_2$ :

$$\begin{aligned} \Theta_2 + 2\Theta_3 &= \Theta_2 + 2\Theta_3 + E - E \\ &= \Theta_2 + 2\Theta_3 + (3\Theta_0 + 2\Theta_1 + \Theta_2) - (E_B + E_I) \\ &= \Theta_0 + 2N - (2V_B + 3V_I - 3) \\ &= \Theta_0 + V_I - 1 \end{aligned}$$

Für  $r$  ungerade erhält man hieraus:

$$\begin{aligned}
M &= \binom{\rho+2}{2} V + \binom{\rho+1}{2} \Theta_0 + \left[ \binom{\rho+1}{2} - \binom{r+1}{2} \right] \Theta_1 \\
&+ \binom{r+1}{2} \Theta_2 + 3 \binom{r}{2} (\Theta_2 + \Theta_3) \\
&= \frac{7r^2 + 4r + 1}{4} V_B + \frac{15r^2 + 1}{8} (V_I + \Theta_2 + \Theta_3) + \frac{-3r^2 + 6r + 1}{4} \\
&= \binom{d+2}{2} - \left[ \binom{d+2}{2} - \binom{\rho+2}{2} \right] (V_I + \Theta_2 + \Theta_3) \\
&+ \left[ \binom{d-r+1}{2} - 2 \binom{\rho-r+1}{2} \right] (E_I + 3\Theta_2 + 3\Theta_3)
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich für  $r$  gerade:

$$\begin{aligned}
M &= \binom{\rho+2}{2} V + \binom{\rho+1}{2} \Theta_0 + \left[ \binom{\rho+1}{2} - \binom{r+1}{2} \right] \Theta_1 \\
&+ \binom{r+1}{2} \Theta_2 + 3 \binom{r}{2} (\Theta_2 + \Theta_3) + (3r+1) (\Theta_2 + \Theta_3) \\
&= \frac{7r^2 + 10r + 4}{4} V_B + \frac{15r^2 + 18r + 8}{8} (V_I + \Theta_2 + \Theta_3) - \frac{3}{4} r^2 \\
&= \binom{d+2}{2} - \left[ \binom{d+2}{2} - \binom{\rho+2}{2} \right] (V_I + \Theta_2 + \Theta_3) \\
&+ \left[ \binom{d-r+1}{2} - 2 \binom{\rho-r+1}{2} \right] (E_I + 3\Theta_2 + 3\Theta_3)
\end{aligned}$$

Nach Satz 1.7 folgt somit  $\dim S_d^{r,\rho}(\tilde{\Delta}) \geq M$ . □

Für die Ableitungen im Eckpunkt  $v_{i,3}$  nach (b) kann man auch Ableitungen über die Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$  verwenden. Der Interpolant lässt sich dann mit den Bedingungen

$$D_{z_{i,1}}^\nu s(w_{i,1}^\mu) = D_{z_{i,1}}^\nu f(w_{i,1}^\mu)$$

für  $r+1 \leq \nu \leq \rho$  und  $1 \leq \mu \leq \nu$  eindeutig bestimmen. Diese Lösung hat jedoch den Nachteil, dass die Koeffizienten  $c_\alpha$  mit  $\alpha_3 \leq 3$  in die Berechnung der Koeffizienten  $c_\alpha$  mit  $r+1 \leq \alpha_3 \leq \rho$  eingehen, so dass der Interpolant nicht lokal bestimmt werden kann. Mit dem Interpolationsschema aus Satz 2.5 lassen sich dagegen für gerades  $r$  alle Koeffizienten und für ungerades  $r$  alle bis auf den Koeffizienten  $c_{r,r,r}^i$  lokal berechnen.

Zum Beweis der Approximationsordnung verwenden wir einen Satz von Bramble und Hilbert [7, 8]. Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  eine offene Menge, die die strikte Kegeleigenschaft erfüllt,  $h := \text{diam}(\Omega)$  und  $L : C^{m+1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  ein lineares Funktional mit

- (i)  $L(p) = 0$  für alle  $p \in \tilde{\Pi}_m$  und
- (ii)  $|L(f)| \leq C \sum_{i=0}^m h^i \|f\|_i$  mit  $\|f\|_i := \sup \{ \|D_x^\nu D_y^\mu f\| : \nu + \mu = i \}$  und einer Konstante  $C$  unabhängig von  $h$  und  $f$ .

Dann gibt es eine Konstante  $K$  unabhängig von  $h$  und  $f$ , so dass

$$|L(f)| \leq Kh^{m+1} \|f\|_{m+1}$$

gilt. Wie Lai und Schumaker [22] bemerkt haben, reicht es zu zeigen, dass die Bernstein-Bézier-Koeffizienten  $c_\alpha^i$  des Interpolanten der Bedingung

$$|c_\alpha^i| \leq C \sum_{j=0}^m h^j \|f\|_j \quad (4)$$

genügen. Hierbei bezeichnet  $h$  die maximale Kantenlänge der Dreiecke von  $\Delta$ . Sei nun  $2r \leq m \leq d$ , dann folgt (4) für ein Dreieck  $T_i$  mit  $\theta_i = 0$  unmittelbar, da alle Koeffizienten nach Satz 1.2 und 1.3 direkt aus Ableitungen bis zur Ordnung  $2r$  berechnet werden. Für ein Dreieck  $T_i$  mit  $\theta_i = 2, 3$  verwenden wir die Unterteilung nach Clough-Tocher. Somit gilt  $\lambda_{\max} = 3$  und  $\lambda_{\min} = 1$  in Lemma 2.2. und 2.3, so dass (4) folgt, falls die Ungleichung für die Koeffizienten  $c_\alpha^i$  der Bernstein-Bézier-Punkte aus der bestimmenden Menge  $\mathcal{D}$  gilt. Diese berechnen sich entweder direkt aus Interpolationsbedingungen in den Eckpunkten oder an den Kanten oder sie ergeben sich aus den  $C^r$ -Bedingungen über die gemeinsame Kante mit einem benachbarten Dreieck  $T_j$  mit  $\theta_j \leq 1$ .

Für  $\theta_i = 1$  ergeben sich die Koeffizienten  $c_\alpha^i$  mit  $\alpha_1, \alpha_2 \geq d - \rho$  oder  $\alpha_3 > r$  aus den Interpolationsbedingungen. Die übrigen Koeffizienten berechnen sich nach Satz 1.1 wieder aus der  $C^r$ -Bedingung

$$c_\alpha^i = \sum_{|\beta|=\alpha_3} c_{(\alpha_1, \alpha_2, 0)+\beta}^{i_1} B_\beta^{\alpha_3}(\lambda) \quad (5)$$

über die gemeinsame Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$  mit einem benachbarten Dreieck  $T_{i_1}$ . Die Koeffizienten  $c_\alpha^i$  können jedoch aufgrund der  $C^r$ -Bedingung an den beiden anderen Kanten  $\overline{v_{i,2}v_{i,3}}$  und  $\overline{v_{i,1}v_{i,3}}$  auch auf die benachbarten Dreiecke  $T_{i_2}$  und  $T_{i_3}$  wirken. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\alpha_2, \alpha_3 \leq r$  (für die Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,3}}$ ) bzw.  $\alpha_1, \alpha_3 \leq r$  (für die Kante  $\overline{v_{i,2}v_{i,3}}$ ) gilt.

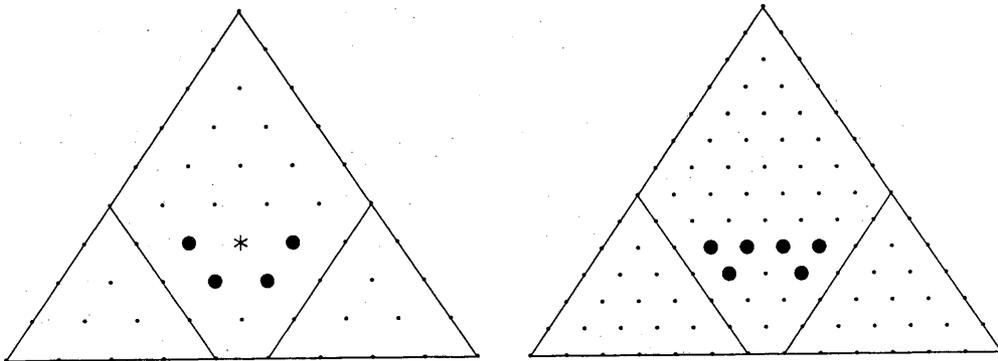


Abbildung 6: Bernstein-Bézier-Punkte mit  $\alpha_1, \alpha_3 \leq r$  bzw.  $\alpha_2, \alpha_3 \leq r$

Die Abbildung 6 zeigt die zugehörigen Bernstein-Bézier-Punkte ( $\bullet$ ) für den Fall  $r = 3, 4$ . Ist  $r$  gerade, so können wegen  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = d = 3r + 1$  nicht beide Bedingungen gleichzeitig gelten. Die beiden Menge sind deshalb getrennt, so dass die Berechnung lokal mit

Koeffizienten aus den Scheiben  $D_{2r}(v_{i,1})$  bzw.  $D_{2r}(v_{i,2})$  erfolgt. Ist  $r$  ungerade, dann gilt dies für alle Koeffizienten  $c_\alpha^i$  mit  $\alpha \neq (r, r, r)$ . Der Bernstein-Bézier-Punkt  $P_{r,r,r}^i$  (\*) wirkt über die  $C^r$ -Bedingung auf alle benachbarten Dreiecke. Die Gleichung (5) zeigt allerdings, dass er nur in die Berechnung der Koeffizienten  $c_{r,r,r}^{ij}$  eingeht. Alle anderen Koeffizienten der benachbarten Dreiecke ergeben sich wieder lokal aus Interpolationsbedingungen oder Koeffizienten in den Scheiben  $D_{2r}(v)$ .

Sei nun  $\{T_1, \dots, T_k\}$  eine Menge von Dreiecken mit  $\theta_i = 1$ , so dass  $T_i$  und  $T_{i+1}$  eine gemeinsame Kante haben. Die Eckpunkte seien so nummeriert, dass die Kanten  $\overline{v_{i,1}v_{i,3}}$  und  $\overline{v_{i+1,1}v_{i+1,2}}$  gleich sind. Mit  $\lambda_i$  werden die baryzentrischen Koordinaten von  $v_{i,3}$  bezüglich  $T_{i-1}$  bezeichnet. Die Koeffizienten  $c_\alpha^i$  sollen die Bedingung (4) erfüllen. Aus (5) erhält man für einen Bernstein-Bézier-Koeffizienten  $c_\alpha^i$  mit  $\alpha_1, \alpha_2 < d - \rho$  und  $\alpha_3 \leq r$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} |c_\alpha^i| &\leq \max \{ |c_\alpha^{i-1}| : |\alpha| = d \} \lambda_{i,\max}^{\alpha_3} \sum_{|\beta|=\alpha_3} \frac{\alpha_3!}{\beta_1! \beta_2! \beta_3!} \\ &= (3\lambda_{i,\max})^{\alpha_3} \max \{ |c_\alpha^{i-1}| : |\alpha| = d \} \end{aligned}$$

mit

$$\lambda_{i,\max} := \max \{ |\lambda_{i,1}|, |\lambda_{i,2}|, |\lambda_{i,3}| \}$$

Setzt man  $\lambda_{\max} := \max \{ \lambda_{i,\max} : i = 1, \dots, k \}$ , oBdA  $\lambda_{\max} \geq 1$ , dann ergibt sich für  $\alpha_2, \alpha_3 \leq r$  bzw.  $\alpha_1, \alpha_3 \leq r$  die Ungleichung:

$$|c_\alpha^i| \leq (3\lambda_{\max})^{kr} K \sum_{j=0}^m h^j \|f\|_j$$

Ist  $r$  gerade oder  $\alpha \neq (r, r, r)$ , dann erfolgt die Berechnung lokal aus Daten in der Scheibe  $D_{2r}(v_{i,1})$  bzw.  $D_{2r}(v_{i,2})$ . Somit ist  $k$  durch die maximale Anzahl der Dreiecke einer Zelle beschränkt. Diese Anzahl ist ebenso wie  $\lambda_{\max}$  durch den kleinsten Winkel der Triangulierung beschränkt. Somit ergibt sich

$$|c_\alpha^i| \leq \tilde{K} \sum_{j=0}^m h^j \|f\|_j$$

mit einer Konstante  $\tilde{K}$ , die nur vom kleinsten Winkel der Triangulierung abhängt. Mit dem Satz von Bramble und Hilbert [7, 8] erhält man sofort den folgenden Satz.

**Satz 2.6.** *Ist  $r$  gerade,  $f \in C^{m+1}(\Omega)$ ,  $2r \leq m \leq d$  und  $s$  der eindeutig bestimmte Interpolant aus Satz 2.5, dann gibt es eine Konstante  $K$ , die nur von  $r$  und dem kleinsten Winkel der Triangulierung abhängt, so dass*

$$\|f - s\| \leq K h^{m+1} \|f\|_{m+1}$$

*gilt. Insbesondere besitzt der Splineraum  $S_d^{r,\rho}(\tilde{\Delta})$  die volle Approximationsordnung  $d + 1$ .*

Im Fall  $r$  ungerade spielt der Koeffizient  $c_{r,r,r}$  eine besondere Rolle, da er über die  $C^r$ -Bedingung auf alle drei benachbarten Dreiecke wirkt. Die Berechnung ist also nicht mehr lokal auf eine Zelle beschränkt. Wegen der Beziehung  $|\lambda_{j,2} \dots \lambda_{k-1,2}| = \text{area}(T_k) / \text{area}(T_j)$  erhalten wir mit den gleichen Bezeichnungen wie oben:

$$\begin{aligned} |c_{r,r,r}^k| &\leq (3\lambda_{\max})^r (1 + |\lambda_{k-1,2}|^r + \dots + |\lambda_{1,2} \dots \lambda_{k-1,2}|^r) K \sum_{j=0}^m h^j \|f\|_j \\ &\leq (3\lambda_{\max})^r K \sum_{j=1}^k \left( \frac{\text{area}(T_k)}{\text{area}(T_j)} \right)^r \sum_{j=0}^m h^j \|f\|_j \\ &\leq kK (3\lambda_{\max})^r \max \left\{ \left( \frac{\text{area}(T_k)}{\text{area}(T_j)} \right)^r : j = 1, \dots, k \right\} \sum_{j=0}^m h^j \|f\|_j \end{aligned}$$

Setzt man

$$\tilde{K} := K (3\lambda_{\max})^r \max \left\{ \left( \frac{\text{area}(T_k)}{\text{area}(T_j)} \right)^r : j = 1, \dots, k \right\}$$

dann ist  $\tilde{K}$  nur von  $r$  und dem kleinsten Winkel der Triangulierung abhängig und es gilt:

$$|c_{r,r,r}^i| \leq \tilde{K} k \sum_{j=0}^m h^j \|f\|_j$$

Mit dem Satz von Bramble und Hilbert [7, 8] erhalten wir deshalb für ungerade  $r$  die folgende Aussage.

**Satz 2.7.** *Ist  $r$  ungerade,  $f \in C^{m+1}(\Omega)$ ,  $2r \leq m \leq d$  und  $s$  der eindeutig bestimmte Interpolant aus Satz 2.5. Weiter sei  $T_{i_1}, \dots, T_{i_k}$  die längste zusammenhängende Kette von Dreiecken mit  $i_j < i_{j+1}$  und  $\theta_{i_j} = 1$ . Dann gibt es eine Konstante  $K$ , die nur von  $r$  und dem kleinsten Winkel der Triangulierung abhängt, so dass*

$$\|f - s\| \leq K k h^{m+1} \|f\|_{m+1}$$

*gilt. Für  $k \in O(h^{-l})$  besitzt der Splineraum  $S_d^{r,p}(\tilde{\Delta})$  mindestens die Approximationsordnung  $d + 1 - l$ .*

Im allgemeinen kann man nicht erwarten, dass  $k$  konstant ist. Im ungünstigsten Fall kann  $k = N$  gelten, so dass  $k \in O(h^{-2})$  folgt. Für Triangulierungen aus zufällig verteilten Daten erhalten wir im allgemeinen  $k \in O(\sqrt{N})$ , so dass man eine Approximationsordnung von mindestens  $d$  für den Interpolanten erwarten sollte. Die numerischen Beispiele für  $S_3^1(\tilde{\Delta})$  zeigen sogar, dass der Interpolant das gleiche Approximationsverhalten besitzt wie der Interpolant für den vollständigen Clough-Tocher-Split nach Laghchim-Lahlou und Sablonnière [18], der die volle Approximationsordnung  $d + 1$  hat.

Der Interpolant aus Satz 2.5 benötigt sowohl Ableitungen in den Eckpunkten als auch an den Kanten der Triangulierung. Dies sichert das gute Approximationsverhalten des Interpolanten, da er exakt für  $\tilde{\Pi}_d$  ist. Oft sind jedoch nur Ableitungen in den Eckpunkten gegeben. Hier kann man einen reduzierten Interpolanten wie Laghchim-Lahlou und Sablonnière [18, 19] verwenden. Für diesen Interpolanten fordert man einen niedrigeren Polynomgrad für die Ableitungen über die Kanten der Dreiecke  $T_i$ .

**Satz 2.8.** Sei  $f \in C^\rho(\Omega)$ , dann gibt es einen eindeutig bestimmten Spline  $s \in S_d^{r,\rho}(\bar{\Delta})$ , der die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Für jeden Eckpunkt  $v_i \in \Delta$  und  $\mu + \nu \leq \rho$  gelte:

$$D_x^\mu D_y^\nu s(v_i) = D_x^\mu D_y^\nu f(v_i)$$

(ii) Für jedes Dreieck  $T_i = \Delta(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})$  sei  $e_{i,j} := \overline{v_{i,j}v_{i,j+1}}$  und  $z_{i,j}$  ein Vektor, der nicht parallel zur Kante  $e_{i,j}$  verläuft.

(a) Ist  $\theta_i = 0$ , dann gelte für  $1 \leq \nu \leq r$

$$D_{z_{i,1}}^\nu s|_{e_{i,1}} \in \Pi_{d-2\nu}$$

(b) Ist  $\theta_i \in \{0, 1\}$ , dann gelte für  $r+1 \leq \nu \leq \rho$

$$D_{z_{i,1}}^\nu s|_{e_{i,1}} \in \Pi_{d-2\nu}$$

(c) Ist  $\theta_i = 2$ , dann gelte für  $1 \leq \nu \leq r$

$$D_{z_{i,3}}^\nu s|_{e_{i,3}} \in \Pi_{d-2\nu}$$

(d) Ist  $\theta_i \in \{2, 3\}$ , dann gelte für  $r+1 \leq \nu \leq 2r-1$  und  $j = 1, 2, 3$

$$D_{z_{i,j}}^\nu s|_{e_{i,j}} \in \Pi_r$$

(iii) Ist  $r$  gerade und  $T_i = \Delta(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})$  ein Dreieck mit  $\theta_i \geq 2$ , dann gelte

$$s|_{T_i} \in C^{r+1}(T_i)$$

**Beweis:** Mit dem gleichen Beweis wie bei Laghchim-Lahlou und Sablonnière [18, 19] sieht man, dass sich aus den Bedingungen (i) - (iii) die Richtungsableitungen  $D_{z_{i,j}}^\nu s|_{e_{i,j}}$  eindeutig bestimmen lassen. Nach Satz 1.3 kann man hieraus die Bernstein-Bézier-Koeffizienten im Abstand  $\nu$  zur Kante  $e_{i,j}$  bestimmen. Somit erhält man alle Bernstein-Bézier-Koeffizienten, die in Satz 2.5 aus den Ableitungen nach (ii) berechnet wurden. Für  $r$  gerade ergeben sich die Koeffizienten auf den inneren Kanten der Clough-Tocher Elemente, die in Satz 2.5 aus den Ableitungen nach (iii) berechnet wurden, durch die höhere Differenzierbarkeitsordnung. Mit dem gleichen Beweis wie in Satz 2.5 folgt die Behauptung.  $\square$

Für die Dreiecke mit  $\theta_i \leq 1$  kann man die Koeffizienten  $c_\alpha^i$  außerhalb der Scheiben  $D_\rho(v)$  auch durch Gradanhebung berechnen (vgl. Farin [16]). In beiden Fällen reproduziert der reduzierte Interpolant nur Polynome bis zum Grad  $d-r$ , so dass man auch nur eine Approximationsordnung von  $d-r+1$  erwarten kann. Alternativ lassen sich die fehlenden Ableitungen an den Kanten durch Nährungsverfahren bestimmen. Hierdurch erhält man wieder einen Interpolanten, der für alle Polynome vom Grad  $d$  exakt ist. Allerdings sind solche Nährungsverfahren nicht immer numerisch stabil und erhöhen zudem den Berechnungsaufwand für den Interpolanten.

### 3 Optimale Unterteilungen

Im folgenden wird nun untersucht, wieviele Clough-Tochter-Elemente für eine beliebige Triangulierung benötigt werden. Ziel ist es, durch eine geeignete Nummerierung der Dreiecke von  $\Delta$  die Anzahl der benötigten Clough-Tochter Elemente zu minimieren. Der Beweis von Satz 2.5 lieferte die Beziehung

$$\Theta_2 + 2\Theta_3 = \Theta_0 + V_I - 1 \quad (6)$$

Die Anzahl der Clough-Tochter Elemente ist durch  $\Theta_2 + \Theta_3$  gegeben und wird somit minimal, wenn  $\Theta_0 = 1$  und  $\Theta_2 = 0$  gilt. Ist  $\Omega$  zusammenhängend, dann kann man immer eine Nummerierung der Dreiecke mit  $\Theta_0 = 1$  angeben. Für diesen Fall erhalten wir  $V_I = \Theta_2 + 2\Theta_3$ , so dass die Anzahl der Clough-Tochter Elemente zwischen  $V_I/2$  und  $V_I$  liegt. Nach (1) kann sich die Anzahl der Dreiecke durch die Unterteilung somit maximal verdoppeln. Im günstigsten Fall wächst sie sogar um weniger als die Hälfte. Im allgemeinen kann man aber nicht erwarten, dass jede Triangulierung eine Nummerierung der Dreiecke besitzt, die nur  $V_I/2$  Clough-Tochter Elemente benötigt. Offensichtlich muss hierfür  $V_I$  gerade sein. Die Abbildung 7 zeigt jedoch, dass diese Bedingung nicht hinreichend ist. Hier sind zwei Triangulierungen mit zwei inneren Eckpunkten abgebildet. Die erste Triangulierung besitzt eine Nummerierung mit nur einem Clough-Tochter Element. Die zweite Triangulierung hingegen benötigt zwei Clough-Tochter Elemente und somit die maximale Anzahl  $V_I$ .

#### 3.1 Charakterisierung einer optimalen Nummerierung

Wir werden nun beliebige Triangulierungen untersuchen und einen Zusammenhang zwischen einer optimalen Nummerierung der Dreiecke und einem maximalen Matching des, durch die inneren Eckpunkte von  $\Delta$  induzierten Graphs herleiten. Zunächst folgen die hierfür notwendigen Definitionen.

**Definition 3.1.** Sei  $\Delta = \{T_1, \dots, T_N\}$  und  $\pi : \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$  ein Permutation, dann setzen wir

$$\begin{aligned} \theta_i^\pi &:= |\{k : e_k \text{ ist gemeinsame Kante von } T_j \text{ und } T_i \text{ mit } \pi(j) < \pi(i)\}| \\ \Theta_k^\pi &:= |\{T_i \in \Delta : \theta_i^\pi = k\}| \end{aligned}$$

Ein Permutation  $\pi$  heißt *optimal*, wenn  $\Theta_2^\pi + \Theta_3^\pi \leq \Theta_2^\sigma + \Theta_3^\sigma$  für jede Permutation  $\sigma$  gilt und wir definieren mit

$$\Theta(\Delta) := \min \{\Theta_2^\sigma + \Theta_3^\sigma : \sigma \text{ ist Permutation von } \{1, \dots, N\}\}$$

die minimale Anzahl der Clough-Tochter Elemente für  $\Delta$ .

Zur Vereinfachung der Beschreibung werden wir im folgenden Teil des Kapitels ein Dreieck als *Flap* (vgl. Schumaker [28]) bezeichnen, wenn es höchstens eine gemeinsame Kante mit der Resttriangulierung hat. Weiter nennen wir eine innere Kante einen *Chord* (vgl. Dillencourt [14]), wenn sie zwei äußere Eckpunkte besitzt. Die Abbildung 8 zeigt eine Triangulierung mit zwei Flaps  $F_1$  und  $F_2$  und drei Chords  $e_1$ ,  $e_2$  und  $e_3$ . Die folgenden Aussagen zeigen, dass es genügt, Nummerierungen  $\pi$  mit  $\Theta_0^\pi = 1$  zu betrachten.

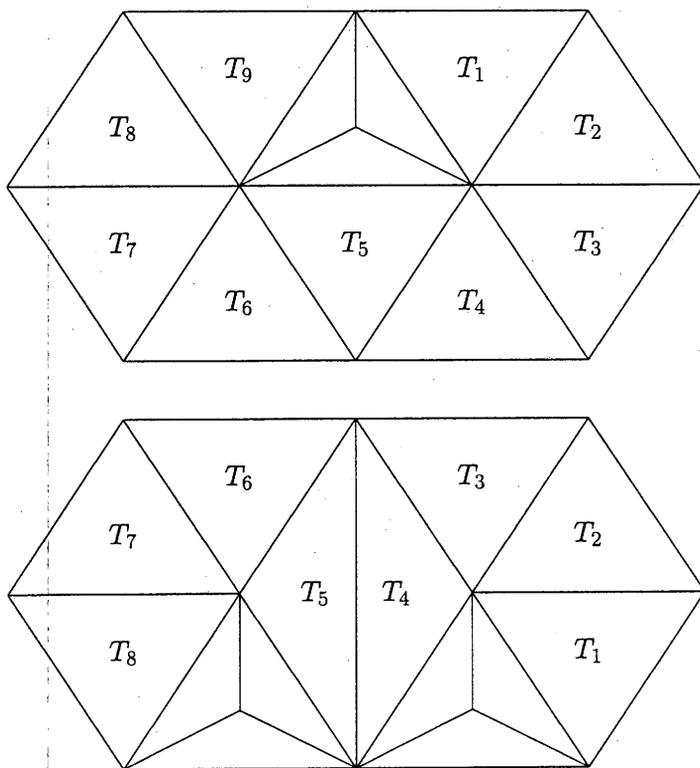


Abbildung 7: Clough-Tochter-Elemente für zwei innere Eckpunkte

**Lemma 3.2.** Sei  $\pi$  eine Permutation mit  $\Theta_0^\pi = 1$  und  $\Theta_2^\pi = \Theta_3^\pi = 0$ , dann gibt es für jedes  $T_i \in \Delta$  eine Permutation  $\pi_i$  mit  $\Theta_k^{\pi_i} = \Theta_k^\pi$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$  und  $\theta_i^{\pi_i} = 0$ .

**Beweis:** Wegen  $\Theta_0^\pi = 1$  muss  $\Delta$  zusammenhängend sein. Für ein beliebiges Dreieck  $T_i \in \Delta$  definieren wir  $\Delta_{i,n}$ ,  $n = 1, \dots, N$  und  $\pi$  induktiv. Für  $n = 1$  setzen wir  $\Delta_{i,1} := \{T_i\}$  und  $\pi(i) := 1$ . Sei nun  $n > 1$  und  $\Delta_{i,n-1}$  definiert. Da  $\Delta$  zusammenhängend ist, gibt es ein Dreieck  $T_j \in \Delta \setminus \Delta_{i,n-1}$ , das eine gemeinsame Kante mit einem Dreieck aus  $\Delta_{i,n-1}$  hat. Wir setzen  $\Delta_{i,n} := \Delta_{i,n-1} \cup \{T_j\}$  und  $\pi_i(j) := n$ .

Offensichtlich gilt  $\theta_i^{\pi_i} = 0$  und  $\theta_j^{\pi_i} \geq 1$  für  $j \neq i$ . Weiter sind alle Teiltriangulierungen  $\Delta_{i,n}$  zusammenhängend. Angenommen es gibt ein Dreieck  $T_j \in \Delta$  mit  $\theta_j^{\pi_i} \geq 2$ . Wir betrachten nun die kleinste Teiltriangulierung  $\Delta_{i,n}$ , die ein Dreieck  $T_j$  mit  $\theta_j^{\pi_i} \geq 2$  enthält. Dann gibt es zwei benachbarte Dreiecke  $T_{j_1}, T_{j_2} \in \Delta_{i,n-1}$  von  $T_j$ . Da  $\Delta_{i,n-1}$  zusammenhängend ist, gibt es eine Kette  $T_{j_1} =: T_{\nu_1}, T_{\nu_2}, \dots, T_{\nu_r} =: T_{j_2}$  von Dreiecken in  $\Delta_{i,n-1}$ . Also enthält  $T_j =: T_{\nu_0}, T_{\nu_1}, \dots, T_{\nu_r}$  einen geschlossenen Kreis. Sei  $\nu_\mu$  so gewählt, dass

$$\pi(\nu_\mu) = \max \{ \pi(\nu_0), \dots, \pi(\nu_r) \}$$

gilt, dann muss  $\theta_{\nu_\mu}^\pi \geq 2$  gelten. Dies steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung.  $\square$

Mit diesem Lemma können wir nun zeigen, dass es zu jeder Permutation  $\sigma$  eine Permutation  $\pi$  mit  $\Theta_0^\pi = 1$  gibt, die weniger Clough-Tochter Elemente enthält. Somit enthält die Menge  $\{ \pi : \Theta_0^\pi = 1 \}$  eine optimale Permutation.

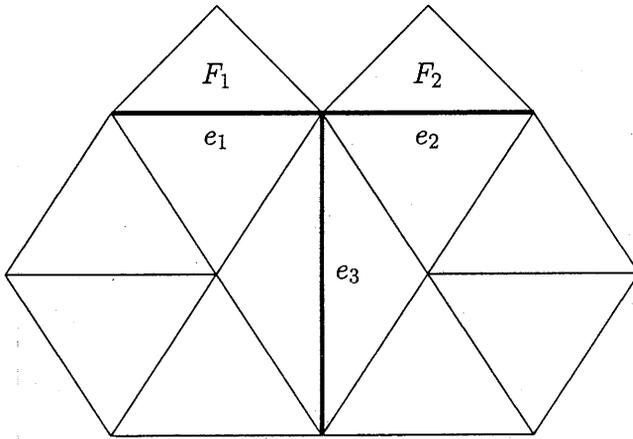


Abbildung 8: Triangulierung mit Flaps und Chords

**Lemma 3.3.** Sei  $\sigma$  eine Permutation, dann gibt es eine Permutation  $\pi$  mit  $\Theta_0^\pi = 1$  und  $\Theta_2^\pi + \Theta_3^\pi \leq \Theta_2^\sigma + \Theta_3^\sigma$ .

**Beweis:** Sei  $A := \{T_i : \theta_i^\sigma \leq 1\}$ ,  $B := \Delta \setminus A$  und  $A_1, A_2, \dots, A_m$  die zusammenhängenden Komponenten von  $A$ . Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach der Anzahl der Komponenten von  $A$ .

Sei  $m = 1$ , dann definieren wir für  $T_i \in A_1 = A$ :

$$\pi(i) := |\{j : \sigma(j) \leq \sigma(i); T_j \in A\}|$$

Somit gilt  $\theta_i^\pi \leq \theta_i^\sigma \leq 1$  für alle  $T_i \in A$ . Angenommen es gäbe zwei Dreiecke  $T_{i_1}, T_{i_2} \in A$  mit  $t_{i_1}^\pi = t_{i_2}^\pi = 0$ . Da  $A$  zusammenhängend ist, gibt es eine zusammenhängende Kette  $T_{i_1} =: T_{\nu_1}, T_{\nu_2}, \dots, T_{\nu_r} =: T_{i_2}$  von Dreiecken in  $A$ . Sei wieder  $\nu_\mu$  so gewählt, dass

$$\pi(\nu_\mu) = \max \{\pi(\nu_1), \dots, \pi(\nu_r)\}$$

gilt. Wegen  $\theta_{i_1}^\pi = \theta_{i_2}^\pi = 0$  folgt  $\mu \neq 1$  und  $\mu \neq r$  und somit  $2 \leq \theta_{\nu_\mu}^\pi \leq \theta_{\nu_\mu}^\sigma$ . Dies steht aber im Widerspruch zur Definition von  $A$ . Da  $\Delta$  zusammenhängend ist können wir nun  $\pi(i)$  für  $T_i \in B$  so definieren, dass  $\theta_i^\pi \geq 1$  gilt. Somit folgt  $\Theta_0^\pi = 1$  und  $\Theta_2^\pi + \Theta_3^\pi \leq |B| = \Theta_2^\sigma + \Theta_3^\sigma$ .

Sei nun  $m > 1$  und die Behauptung gelte für  $m - 1$ . Nach Voraussetzung können wir  $\Delta$  durch Entfernen der Dreiecke aus  $B$  in die Komponenten  $A_1, \dots, A_m$  zerlegen. Wir wählen eine minimale Menge  $B_m \subseteq B$ , so dass  $A_m$  eine Komponente in  $\Delta \setminus B_m$  ist und setzen  $\tilde{A} := \Delta \setminus (A_m \cup B_m)$ . Für  $T_i \in \tilde{A}$  definieren wir

$$\tilde{\sigma}(i) := \left| \left\{ j : \sigma(j) \leq \sigma(i); T_j \in \tilde{A} \right\} \right|$$

Somit gilt  $\theta_i^{\tilde{\sigma}} \leq \theta_i^\sigma$  und  $\Theta_2^{\tilde{\sigma}} + \Theta_3^{\tilde{\sigma}} \leq |B| - |B_m|$ . Da  $\tilde{A}$  genau  $m - 1$  Komponenten hat, gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Bijektion  $\tilde{\pi}$  mit  $\Theta_2^{\tilde{\pi}} = 1$  und  $\Theta_2^{\tilde{\pi}} + \Theta_3^{\tilde{\pi}} \leq \Theta_2^{\tilde{\sigma}} + \Theta_3^{\tilde{\sigma}} \leq |B| - |B_m|$ . Wir setzen nun  $\pi(i) := \tilde{\pi}(i)$  für alle  $T_i \in \tilde{A}$ . Da  $B_m$  minimal gewählt wurde, gibt es ein Dreieck  $T_\mu \in B_m$ , so dass  $\tilde{A} \cup \{T_\mu\} \cup A_m$  zusammenhängend ist. Sei  $T_\nu$  ein

benachbartes Dreieck von  $T_\mu$ , dann wählen wir für  $A_m$  eine Bijektion  $\pi_m$  mit  $\theta_\nu^{\pi_m} = 0$  nach Lemma 3.2 und setzen

$$\begin{aligned}\pi(\mu) &:= |\tilde{A}| + 1 \\ \pi(i) &:= |\tilde{A}| + 1 + \pi_m(i) \quad T_i \in A_m\end{aligned}$$

Mit Lemma 3.2 folgt  $\theta_i^\pi \geq 1$  für alle  $T_i \in A_m \cup \{T_\mu\}$ . Wir zeigen nun, dass es maximal ein Dreieck  $T_i \in A_m \cup \{T_\mu\}$  mit  $\theta_i^\pi \geq 2$  gibt. Hierzu unterscheiden wir zwei Fälle. Hat  $T_\mu$  nur eine gemeinsame Kante mit  $A_m$ , dann gilt  $\theta_i^\pi = 1$  für alle  $T_i \in A_m$  nach Lemma 3.2. Hat  $T_\mu$  zwei gemeinsame Kanten mit  $A_m$ , dann gibt es ein benachbartes Dreieck  $T_i \in A_m$  mit  $\theta_i^\pi = 2$ . In diesem Fall hat aber  $T_\mu$  nur eine gemeinsame Kante mit  $\tilde{A}$ , so dass  $\theta_\mu^\pi = 1$  folgt. Analog wie im Fall  $m = 1$  können wir nun  $\pi(i)$  für die Dreiecke  $T_i \in B_m \setminus \{T_\mu\}$  so definieren, dass  $\theta_i^\pi \geq 1$  gilt und erhalten

$$\Theta_2^\pi + \Theta_3^\pi \leq \Theta_2^{\tilde{\pi}} + \Theta_3^{\tilde{\pi}} + |B_m| \leq |B| = \Theta_2^\sigma + \Theta_3^\sigma$$

sowie  $\Theta_0^\pi = 1$ . □

Wir werden nun eine Charakterisierung für eine optimale Permutation  $\pi$  mit Hilfe des Matching-Problems der Graphentheorie liefern. Diese Charakterisierung werden wir anschließend für spezielle Klassen von Triangulierungen verwenden. Im folgenden sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit der Knotenmenge  $V$  und der Kantenmenge  $E$ . Für  $\tilde{V} \subseteq V$  bezeichnen wir mit  $G[\tilde{V}]$  den induzierten Teilgraphen mit der Knotenmenge  $\tilde{V}$  und allen Kanten aus  $E$ , die mit zwei Eckpunkten aus  $\tilde{V}$  inzidieren. Weiter schreiben wir  $G - \tilde{V}$  für  $G[V \setminus \tilde{V}]$ . Es folgt nun die Definition eines Matchings  $M$  für einen Graphen  $G$ .

**Definition 3.4.** Sei  $G$  ein Graph ohne Schlingen und mehrfache Kanten, dann heißt  $M \subseteq E$  ein *Matching* von  $G$ , falls es nur knotendisjunkte Kanten enthält.  $M$  heißt *maximales Matching*, falls es kein Matching  $M' \subseteq E$  mit mehr Elementen gibt.  $M$  heißt *perfektes Matching*, falls alle bis auf maximal ein Knoten mit einer Kante aus  $M$  inzidieren. Weiter setzen wir

$$\alpha(G) := \max \{|M| : M \text{ ist Matching von } G\}$$

Ein Matching  $M \subseteq E$  mit  $k$  Kanten enthält genau  $2k$  Knoten aus  $V$ . Somit kann es nur ein perfektes Matching mit allen Knoten geben, wenn die Anzahl gerade ist. Hier zeigt sich bereits ein Zusammenhang zwischen dem Unterteilungsproblem und dem Matching-Problem in Graphen. Für eine beliebige Triangulierung  $\Delta$  wollen wir im folgenden mit  $G_\Delta$  den, durch die Menge aller inneren Eckpunkte induzierten Teilgraphen von  $\Delta$  bezeichnen. Betrachten wir wieder die Triangulierungen aus Abbildung 7, dann hat der Graph im ersten Fall genau eine Kante mit den beiden inneren Eckpunkten. Somit gibt es ein perfektes Matching  $M = E$  von  $G_\Delta$  und es gilt  $|M| = \Theta_3$ . Im zweiten Fall gilt  $E = \emptyset$ , so dass ein maximales Matching keine Elemente enthält. Auch in diesem Fall gilt  $|M| = \Theta_3 = 0$ . Dies deutet darauf hin, dass ein Zusammenhang zwischen der Anzahl eines maximalen Matchings und  $\Theta_3$  besteht.

Wir können nun in natürlicher Weise jeder Permutation  $\pi$  ein Matching  $M$  zuordnen, indem wir jedes Clough-Tocher Element  $T_i$ , das zwei innere Eckpunkte  $v_{i_1}$  und  $v_{i_2}$  besitzt,

aus der Triangulierung entfernen und die Kante  $\overline{v_{i_1}v_{i_2}}$  dem Matching  $M$  hinzufügen. Bei dieser Vorgehensweise in allerdings weder  $M$  noch die Anzahl eines solchen Matchings  $M$  eindeutig bestimmt. Wegen Lemma 3.3 gibt es allerdings immer eine optimale Permutation  $\pi$  mit  $\Theta_0^\pi = 1$ , so dass wir uns auf diese Fälle beschränken können.

**Definition 3.5.** Sei  $M$  ein Matching von  $G_\Delta$  und  $\pi$  eine Permutation mit  $\Theta_0^\pi = 1$ , dann heißt  $M$  von  $\pi$  erzeugt, wenn  $\Theta_3^\pi = |M|$  gilt und jede Kante von  $M$  an genau einem Dreieck  $T_i$  mit  $\theta_i^\pi = 3$  liegt.

Das folgende Lemma sichert die Existenz eines, von  $\pi$  erzeugten Matchings  $M$ .

**Lemma 3.6.** Sei  $\pi$  eine Permutation mit  $\Theta_0^\pi = 1$ , dann gibt es ein von  $\pi$  erzeugtes Matching  $M$ .

**Beweis:** Wir betrachten die Menge  $\mathcal{T} := \{T_i : \theta_i^\pi = 3\}$  und werden zeigen, dass man die Clough-Tochter Elemente  $T_i \in \mathcal{T}$  so aus der Triangulierung entfernen kann, dass in jedem Schritt mindestens zwei innere Eckpunkte zu äußeren Eckpunkten werden. Diese Paare von inneren Eckpunkten liefern dann das gesuchte Matching  $M$ . Hierzu setzen wir  $\tilde{\mathcal{T}} := \emptyset$  und bestimmen ein Dreieck  $T_m \in \mathcal{T} \setminus \tilde{\mathcal{T}}$ , dass mit einem Dreieck  $T_i \in \tilde{\mathcal{T}}$  verbunden ist. Gibt es kein solches Dreieck, dann wählen wir ein beliebiges Dreieck  $T_m \in \mathcal{T} \setminus \tilde{\mathcal{T}}$ . In beiden Fällen wird  $T_m$  zu  $\tilde{\mathcal{T}}$  hinzugefügt und der Schritt solange wiederholt, bis  $\mathcal{T} \setminus \tilde{\mathcal{T}} = \emptyset$  gilt.

Zunächst kann jedes Dreieck  $T_m \in \mathcal{T}$  über maximal einen Eckpunkt mit einem anderen Dreieck  $T_i \in \mathcal{T}$  verbunden sein. Andernfalls hätten die beiden Dreiecke eine gemeinsame Kante, so dass  $\theta_m^\pi < 3$  oder  $\theta_i^\pi < 3$  gelten muss. Wir nehmen an, dass der Algorithmus ein Dreieck  $T_m \in \mathcal{T} \setminus \tilde{\mathcal{T}}$  bestimmt, dass mit zwei Dreiecken  $T_{i_1}, T_{i_2} \in \tilde{\mathcal{T}}$  verbunden ist. Da der Algorithmus zuerst alle zusammenhängenden Dreiecke auswählt, muss es eine Folge von Dreiecken  $T_{i_1} = T_{j_1}, T_{j_2}, \dots, T_{j_k} = T_{i_2} \in \tilde{\mathcal{T}}$  geben, so dass  $T_{j_\nu}$  und  $T_{j_{\nu+1}}$  einen gemeinsamen Eckpunkt haben. Also enthält  $T_m, T_{j_1}, \dots, T_{j_k}$  einen geschlossenen Kreis. Da alle Dreiecke in  $\mathcal{T}$  drei benachbarte Dreiecke besitzen, gibt es Dreiecke  $T_j \notin \mathcal{T}$  innerhalb und außerhalb des Kreises und somit mindestens zwei Dreiecke mit  $\theta_j^\pi = 0$ . Dies steht jedoch im Widerspruch zur Voraussetzung.  $\square$

Wir erhalten hieraus das folgende wichtige Ergebnis.

**Satz 3.7.** Für jede Triangulierung gilt  $\Theta(\Delta) \geq V_I - \alpha(G_\Delta)$  und die Gleichheit genau dann, wenn es ein maximales Matching  $M$  gibt, dass von einer Permutation  $\pi$  erzeugt ist.

**Beweis:** Ist  $M_\pi$  ein maximales Matching, dass von einer Permutation  $\pi$  erzeugt ist, dann gilt mit (6):

$$\Theta(\Delta) \leq \Theta_2^\pi + \Theta_3^\pi = V_I - |M_\pi| = V_I - \alpha(G_\Delta)$$

Sei nun  $\sigma$  eine beliebige Permutation, dann gibt es nach Lemma 3.3 eine Permutation  $\pi$  mit  $\Theta_0^\pi = 1$  und  $\Theta_2^\sigma + \Theta_3^\sigma \geq \Theta_2^\pi + \Theta_3^\pi$ . Nach Lemma 3.6 gibt es ein von  $\pi$  erzeugtes Matching  $M_\pi$ . Also folgt wieder mit (6):

$$\Theta_2^\sigma + \Theta_3^\sigma \geq \Theta_2^\pi + \Theta_3^\pi = V_I - \Theta_3^\pi = V_I - |M_\pi|$$

und somit  $\Theta(\Delta) \geq V_I - \alpha(G_\Delta)$  und  $\Theta(\Delta) > V_I - \alpha(G_\Delta)$ , falls  $|M_\pi| < \alpha(G_\Delta)$  für jedes, von einer Permutation  $\pi$  erzeugtes Matching  $M_\pi$  gilt.  $\square$

Eine optimale Lösung  $\pi$  enthält also mindestens  $V_I - \alpha(G_\Delta)$  Clough-Tocher Elemente. Im allgemeinen muss allerdings nicht die Gleichheit gelten. Der Graph  $G_\Delta$  der Triangulierung aus Abbildung 9 besitzt ein perfektes Matching mit den sechs gekennzeichneten Kanten. Man sieht aber leicht, dass es keine Permutation  $\pi$  für  $\Delta$  mit  $\Theta_0^\pi = 1$  und  $\Theta_3^\pi = 6 = V_i/2$  gibt. Die Abbildung zeigt eine optimale Lösung mit den Clough-Tocher Elementen  $C_1, \dots, C_7$ , für die  $\Theta_0^\pi = 1$ ,  $\Theta_2^\pi = 2$  und  $\Theta_3^\pi = 5$  gilt.

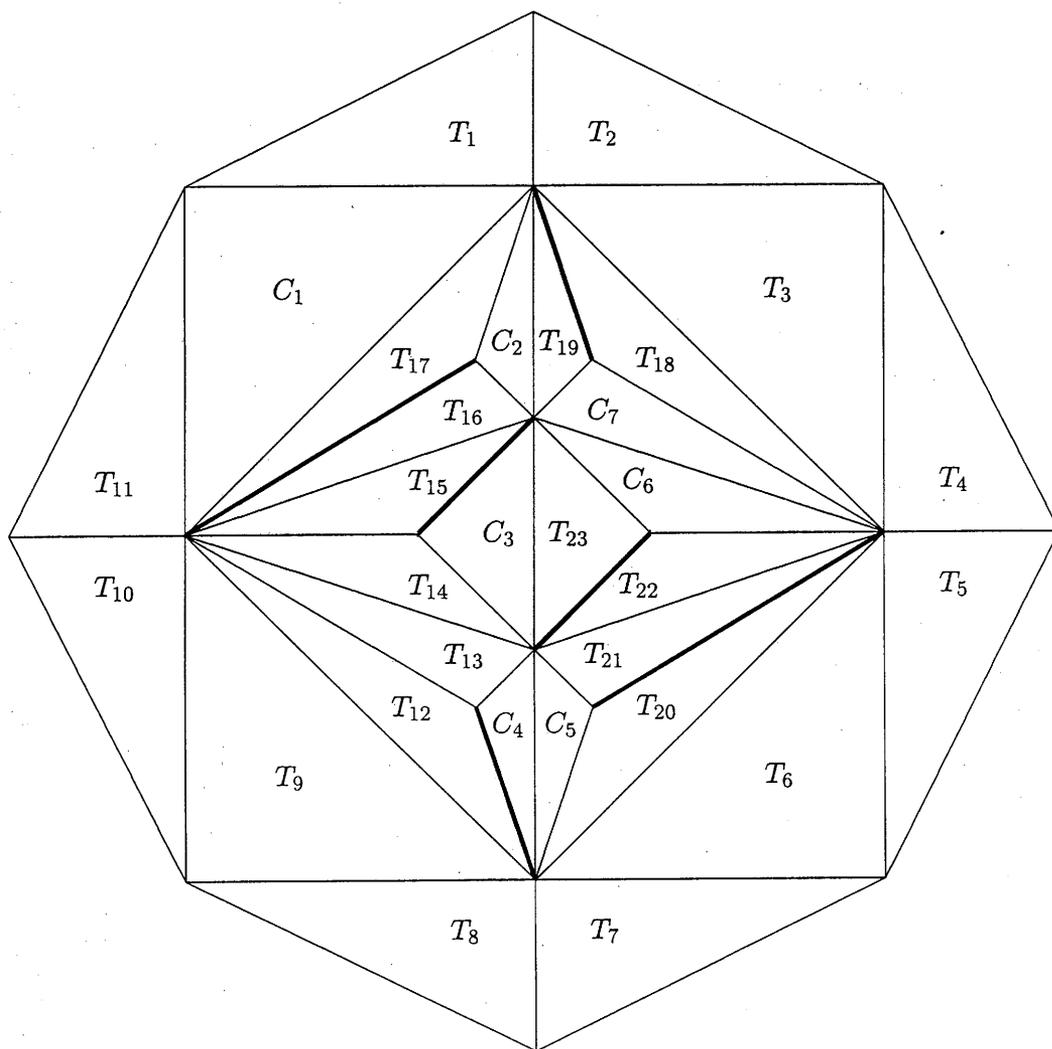


Abbildung 9: Triangulierung mit  $\Theta(\Delta) > V_I - \alpha(G_\Delta)$

Insofern kann man auch nicht erwarten, zu jedem Matching  $M$  eine Permutation  $\pi$  zu finden, die  $M$  erzeugt. Andernfalls müsste in Satz 3.7 immer die Gleichheit gelten. Ein solches Matching muss somit eine zusätzliche Eigenschaft erfüllen. Das folgende Lemma liefert eine Charakterisierung dafür, dass es zu einem Matching eine erzeugende Permutation gibt. Diese Charakterisierung werden wir im folgenden Abschnitt verwenden, um Aussagen über spezielle Triangulierungen herzuleiten.

**Lemma 3.8.** Sei  $M = \{e_1, \dots, e_k\}$  ein maximales Matching von  $G_\Delta$ . Gibt es eine Folge von Teilgraphen  $\emptyset = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_k \subseteq G_\Delta$ , so dass  $e_i$  eine äußere Kante von  $G_i$  ist, dann gilt  $\Theta(\Delta) = V_I - \alpha(G_\Delta)$ .

**Beweis:** Wir zeigen durch Induktion nach  $V_I$ , dass es eine Permutation  $\pi$  mit  $\Theta_0^\pi = 1$  und  $\Theta_3^\pi = |M|$  gibt. Für  $V_I \leq 1$  bestimmen wir  $\pi$  induktiv und definieren  $\Delta_N := \Delta$ . Sei nun  $\Delta_n$ ,  $n > 1$  definiert, dann wählen wir Dreieck  $T_i$  am Rand von  $\Delta_n$ , so dass  $\Delta_n \setminus \{T_i\}$  zusammenhängend ist und setzen  $\pi(i) := n$  und  $\Delta_{n-1} = \Delta_n \setminus \{T_i\}$ . Da  $\Delta_n$  für alle  $n$  zusammenhängend ist, gilt offensichtlich  $\Theta_0^\pi = 1$  und  $\Theta_3^\pi = 0 = |M|$ .

Sei nun  $V_I \geq 2$  und die Behauptung gelte für alle Triangulierungen mit weniger als  $V_I$  Eckpunkten. Gibt es einen Eckpunkt  $v_i$  von  $G_\Delta$  mit  $\deg(v_i) = 0$ , dann kann  $v_i$  in keinem Matching von  $G_\Delta$  enthalten sein. Also ist  $M$  ein maximales Matching von  $G_\Delta - \{v_i\}$ . Da die Zelle um  $v_i$  nur äußere Eckpunkte von  $\Delta$  enthält, gibt es ein Dreieck  $T_\mu := \Delta(v_i, v_j, v_k)$  mit einer äußeren Kante  $\overline{v_j v_k}$  von  $\Delta$ . Nach Induktionsvoraussetzung gibt es für  $\Delta \setminus \{T_\mu\}$  eine Bijektion  $\tilde{\pi}$  mit  $\Theta_0 = 1$  und  $\Theta_3 = |M|$ . Setzt man  $\pi(\nu) := \tilde{\pi}(\nu)$  für  $\nu \neq \mu$  und  $\pi(\mu) := N$ , dann folgt die Behauptung.

Enthält  $G_\Delta$  keinen Eckpunkt  $v_i$  mit  $\deg(v_i) = 0$ , aber eine äußere Kante  $\overline{v_i v_j} \in M$ , dann wählen wir ein Dreieck  $T_\mu := \Delta(v_i, v_j, v_k)$  mit einem äußeren Eckpunkt  $v_k$  von  $\Delta$ . Da  $M$  ein maximales Matching von  $G_\Delta$  ist, ist  $M \setminus \{\overline{v_i v_j}\}$  ein maximales Matching von  $G_\Delta - \{v_i, v_j\}$ . Nach Induktionsvoraussetzung gibt es für  $\Delta \setminus \{T_\mu\}$  eine Bijektion  $\tilde{\pi}$  mit  $\Theta_0 = 1$  und  $\Theta_3 = |M| - 1$ . Setzt man wieder  $\pi(\nu) := \tilde{\pi}(\nu)$  für  $\nu \neq \mu$  und  $\pi(\mu) := N$ , dann folgt  $\Theta_0 = 1$  und  $\Theta_3 = |M|$ .

Gibt es schließlich in  $G_\Delta$  keinen Eckpunkt  $v_i$  mit  $\deg(v_i) = 0$  und keine äußere Kante  $\overline{v_i v_j} \in M$ , dann muss es nach Voraussetzung einen äußeren Eckpunkt  $v_i$  von  $G_\Delta$  geben, der mit keiner Kante aus  $M$  inzidiert. Da  $M$  aber maximal ist, müssen umgekehrt alle benachbarten Eckpunkte  $v_j$  von  $v_i$  Eckpunkt einer Kante aus  $M$  sein. Andernfalls könnte man  $M$  durch Hinzunahme der Kante  $\overline{v_i v_j}$  vergrößern. Wir ersetzen deshalb eine Kante mit Eckpunkt  $v_j$  durch die Kante  $\overline{v_i v_j}$  und erhalten so ein maximales Matching  $\tilde{M}$  für  $G_\Delta$ . Mit dem gleichen Beweis wie oben folgt nun wieder die Behauptung.

Für  $\pi$  gilt somit  $\Theta_0^\pi = 1$  und  $\Theta_3^\pi = |M|$  und nach Lemma 3.6 gibt es ein von  $\pi$  erzeugtes Matching  $M'$ . Wegen  $|M'| = \Theta_3^\pi = |M|$  ist  $M'$  maximal, so dass  $\Theta(\Delta) = V_I - \alpha(G_\Delta)$  aus Satz 3.7 folgt.  $\square$

### 3.2 Spezielle Triangulierungen

In diesem Abschnitt werden wir verschiedene Klassen von Triangulierungen betrachten. Für Triangulierungen ohne separierende Dreiecke können wir zeigen, dass in Satz 3.7 immer die Gleichheit gilt. Hierbei heißt ein Dreieck  $T$  *separierend*, wenn  $\Delta$  Eckpunkte innerhalb und außerhalb von  $T$  besitzt. Mit den Ergebnissen für Triangulierungen ohne separierende Dreiecke erhalten wir auch Aussagen über optimale Lösungen für  $\Delta^1$ - und  $\Delta^2$ -Triangulierungen.

**Lemma 3.9.** Sei  $\Delta$  eine Triangulierung ohne separierende Dreiecke und ohne Flaps, dann gibt es ein maximales Matching  $M$  mit mindestens einer äußeren Kante.

**Beweis:** Seien  $v_1, \dots, v_n$  die äußeren Eckpunkte und  $M$  ein maximales Matching von  $\Delta$ . Besitzt  $\Delta$  keine Chords, dann gibt es nach Dillencourt [14] zu jeder äußeren Kante  $e$  einen Hamiltonkreis, der durch  $e$  geht. Also gibt es auch ein perfektes Matching, das  $e$  enthält.

Sei nun  $\Delta$  eine Triangulierung mit Chords und  $\overline{v_i v_j}$  ein Chord, so dass  $v_{i+1}, \dots, v_{j-1}$  keine Eckpunkte eines Chords sind. Wir zerlegen  $\Delta$  entlang der Kante  $\overline{v_i v_j}$  in die Teiltriangulierungen  $\Delta_1$  mit den äußeren Eckpunkten  $v_i, \dots, v_j$  und  $\Delta_2$  mit den äußeren Eckpunkten  $v_1, \dots, v_i, v_j, \dots, v_n$ . Nach Konstruktion enthält  $\Delta_1$  somit keinen Chord und  $\overline{v_i v_j}$  als äußere Kante. Wir bezeichnen nun mit  $M_2 \subseteq M$  die Kanten aus dem Matching  $M$ , bei denen beide Eckpunkte in der Teiltriangulierung  $\Delta_2$  enthalten sind und setzen  $M_1 := M \setminus M_2$ . Da  $\Delta_1$  keine separierenden Dreiecke und keine Chords enthält, gibt es nach Dillencourt [14] einen Hamiltonkreis  $e_1, \dots, e_k$ , der durch die drei äußeren Kanten  $e_1 = \overline{v_j v_i}$ ,  $e_2 = \overline{v_i v_{i+1}}$  und  $e_3 = \overline{v_{i+1} v_{i+2}}$  geht. Weiter gilt  $v_{i+2} \neq v_j$  und  $k \geq 4$  für  $k$  gerade bzw.  $k \geq 5$  für  $k$  ungerade. Es lassen sich nun die folgenden Fälle unterscheiden:

(i)  $M_2$  enthält keine Kante mit dem Eckpunkt  $v_i$  oder  $v_j$ . Wir setzen

$$\tilde{M}_1 := \begin{cases} \{e_1, e_3, \dots, e_{k-2}\} & k \text{ ungerade} \\ \{e_1, e_3, \dots, e_{k-1}\} & k \text{ gerade} \end{cases}$$

Dann gilt

$$|\tilde{M}_1| = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \geq |M_1|$$

(ii)  $M_2$  besitzt eine Kante mit dem Eckpunkt  $v_j$ , aber keine Kante mit dem Eckpunkt  $v_i$ . Wir setzen

$$\tilde{M}_1 := \begin{cases} \{e_2, e_4, \dots, e_{k-1}\} & k \text{ ungerade} \\ \{e_2, e_4, \dots, e_{k-2}\} & k \text{ gerade} \end{cases}$$

Dann gilt

$$|\tilde{M}_1| = \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor \geq |M_1|$$

(iii)  $M_2$  besitzt Kanten mit den Eckpunkten  $v_i$  und  $v_j$ . Wir setzen

$$\tilde{M}_1 := \begin{cases} \{e_3, e_5, \dots, e_{k-2}\} & k \text{ ungerade} \\ \{e_3, e_5, \dots, e_{k-1}\} & k \text{ gerade} \end{cases}$$

Dann gilt

$$|\tilde{M}_1| = \left\lfloor \frac{k-2}{2} \right\rfloor \geq |M_1|$$

In allen drei Fällen gilt  $\tilde{M}_1 \cap M_2 = \emptyset$  und wir erhalten mit  $\tilde{M} := \tilde{M}_1 \cup M_2$  eine Menge von knotendisjunkten Kanten. Also folgt:

$$|\tilde{M}| = |\tilde{M}_1| + |M_2| \geq |M_1| + |M_2| = |M|$$

so dass  $\tilde{M}$  ein maximales Matching ist. Dieses enthält mit  $e_2$  oder  $e_3$  eine äußere Kante von  $\Delta$ .  $\square$

Mit diesem Lemma können wir nun die Aussage aus Satz 3.7 für Triangulierungen ohne separierende Dreiecke verschärfen.

**Satz 3.10.** *Sei  $\Delta$  eine Triangulierung ohne separierende Dreiecke, dann gilt  $\Theta(\Delta) = V_I - \alpha(G_\Delta)$ .*

**Beweis:** Wir zeigen, dass es ein maximales Matching von  $G_\Delta$  mit der Eigenschaft aus Lemma 3.8 gibt. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach  $|V_I|$ . Für  $|V_I| \leq 1$  ist  $M = \emptyset$  offensichtlich ein maximales Matching, das die Bedingungen erfüllt.

Sei nun  $V_I \geq 2$  und die Behauptung gelte für alle Graphen  $G_\Delta$  mit weniger als  $V_I$  Knoten. Wir wählen ein maximales Matching  $M$  von  $G_\Delta$ . Gibt es einen Eckpunkt  $v_i$  mit  $\deg(v_i) = 0$ , dann kann  $v_i$  in keinem Matching enthalten sein. Also ist  $M$  ein maximales Matching von  $G_\Delta - \{v_i\}$ . Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein maximales Matching  $\tilde{M}$  von  $G_\Delta - \{v_i\}$  mit der Eigenschaft aus Lemma 3.8. Damit ist aber  $\tilde{M}$  auch ein maximales Matching für  $G_\Delta$ , das die Voraussetzungen aus Lemma 3.8 erfüllt.

Gibt es einen Eckpunkt  $v_i$  mit  $1 \leq \deg(v_i) \leq 2$ , dann sind alle Kanten mit dem Eckpunkt  $v_i$  äußere Kanten von  $G_\Delta$ . Enthält  $M$  eine Kante  $\overline{v_i v_j}$  mit dem Eckpunkt  $v_i$ , dann können wir nach Induktionsvoraussetzung für  $G_\Delta - \{v_i, v_j\}$  ein maximales Matching  $\tilde{M}$  mit der Eigenschaft aus Lemma 3.8 wählen. Da  $M \setminus \{\overline{v_i v_j}\}$  ein Matching von  $G_\Delta - \{v_i, v_j\}$  ist, muss  $|\tilde{M}| \geq |M| - 1$  gelten. Somit ist  $\tilde{M} \cup \{\overline{v_i v_j}\}$  ein maximales Matching für  $G_\Delta$  mit der Eigenschaft aus Lemma 3.8. Gibt es keine Kante mit Eckpunkt  $v_i$  in  $M$ , dann muss jeder benachbarte Eckpunkt  $v_j$  von  $v_i$  mit einer Kante aus  $M$  inzidieren. Andernfalls könnte man  $M$  durch Hinzufügen der Kante  $\overline{v_i v_j}$  vergrößern. Wir entfernen nun eine Kante mit Eckpunkt  $v_j$  aus  $M$  und fügen  $\overline{v_i v_j}$  hinzu. Das neue Matching hat die gleiche Ordnung und ist somit wieder maximal. Mit dem gleichen Beweis wie oben folgt die Behauptung.

Gibt es schließlich in  $G_\Delta$  keinen Eckpunkt  $v_i$  mit  $\deg(v_i) \leq 2$ , dann ist  $G_\Delta$  eine Triangulierung ohne separierende Dreiecke und ohne Flaps. Nach Lemma 3.9 gibt es ein maximales Matching  $M$  mit einer äußeren Kante  $\overline{v_i v_j}$ . Die Behauptung beweist man nun wieder wie im Fall  $1 \leq \deg(v_i) \leq 2$ .  $\square$

Triangulierungen ohne separierende Dreiecke sind beispielsweise gleichmäßige oder deformierte  $\Delta^1$  und  $\Delta^2$ -Triangulierungen (zur Definition von deformierten  $\Delta^1$ - und  $\Delta^2$ -Triangulierungen siehe Davydov, Nürnberger, Walz und Zeilfelder [9]). Mit Satz 3.10 erhalten wir für solche Triangulierungen die folgenden Aussagen.

**Korollar 3.11.** *Gegeben sei eine  $\Delta_{n,m}^1$ -Triangulierung mit  $n$  Spalten und  $m$  Zeilen. Dann gilt:*

$$\Theta(\Delta_{n,m}^1) = \left\lceil \frac{(n-1)(m-1)}{2} \right\rceil$$

**Beweis:** Seien  $Q_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  die Vierecke der Partition mit den Eckpunkten  $v_{i-1,j-1}$ ,  $v_{i,j-1}$ ,  $v_{i,j}$  und  $v_{i-1,j}$ . Dann sind  $v_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $j = 1, \dots, m-1$  die inneren Eckpunkte von  $\Delta$ . Ist  $n$  ungerade, dann erhält man mit

$$M := \left\{ \overline{v_{2i-1,j} v_{2i,j}} : i = 1, \dots, \frac{n-1}{2}, j = 1, \dots, m-1 \right\}$$

ein perfektes Matching für  $G_\Delta$ . Analog folgt dies für  $m$  ungerade. Sind  $n$  und  $m$  gerade, dann ist

$$M := \left\{ \overline{v_{2i-1,j}v_{2i,j}} : i = 1, \dots, \frac{n-2}{2}, j = 1, \dots, m-1 \right\} \\ \cup \left\{ \overline{v_{n-1,2j-1}v_{n-1,2j}} : j = 1, \dots, \frac{m-2}{2} \right\}$$

ein perfektes Matching. Also gilt  $\alpha(G_\Delta) = \lfloor \frac{(n-1)(m-1)}{2} \rfloor$  und es folgt

$$\Theta(\Delta_{n,m}^1) = V_I - \left\lfloor \frac{(n-1)(m-1)}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{(n-1)(m-1)}{2} \right\rceil$$

nach Satz 3.10. □

$T_{10}$ $T_9$	$T_{11}$ $T_{12}$	$T_{13}$ $T_{14}$	$T_{27}$ $T_{28}$	$T_{29}$ $T_{30}$
$T_8$ $T_7$	$C_4$ $T_{16}$	$T_{15}$ $T_{17}$	$C_8$ $T_{32}$	$T_{31}$ $T_{33}$
$T_6$ $T_5$	$C_3$ $T_{19}$	$T_{18}$ $T_{20}$	$C_7$ $T_{35}$	$T_{34}$ $T_{36}$
$T_4$ $T_3$	$C_2$ $T_{22}$	$T_{21}$ $T_{23}$	$C_6$ $T_{38}$	$T_{37}$ $T_{39}$
$T_2$ $T_1$	$C_1$ $T_{25}$	$T_{24}$ $T_{26}$	$C_5$ $T_{41}$	$T_{40}$ $T_{42}$

Abbildung 10: Perfektes Matching und optimale Nummerierung für  $\Delta_{5,5}^1$

Die Abbildung 10 zeigt ein perfektes Matching für  $n = m = 5$  und eine zugehörige optimale Permutation  $\pi$  mit den Clough-Tochter Elementen  $C_1, \dots, C_8$ .

Im Gegensatz zu einer  $\Delta^1$ -Triangulierung besitzt der Graph  $G_\Delta$  einer  $\Delta^2$ -Triangulierung kein perfektes Matching. Deshalb gilt hier immer  $\Theta(\Delta) > V_I/2$ .

**Korollar 3.12.** Gegeben sei eine  $\Delta_{n,m}^2$ -Triangulierung mit  $n$  Zeilen und  $m$  Spalten. Dann gilt:

$$\Theta(\Delta_{n,m}^2) = nm$$

**Beweis:** Seien wieder  $Q_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  die Vierecke der Partititon mit den Eckpunkten  $v_{i-1,j-1}$ ,  $v_{i,j-1}$ ,  $v_{i,j}$  und  $v_{i-1,j}$ . Weiter bezeichne  $w_{i,j}$  den singulären Eckpunkt im Viereck  $Q_{i,j}$ . Dann sind  $v_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $j = 1, \dots, m-1$  und  $w_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  die inneren Eckpunkte von  $\Delta_{n,m}^2$  und es gilt  $V_I = (n-1)(m-1) + nm$ . Wir erhalten nun mit

$$M := \{\overline{w_{i,j}v_{i,j}} : i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, m-1\} \quad (7)$$

ein Matching mit  $|M| = (n-1)(m-1)$ .

Wir zeigen durch Induktion nach  $n$ , dass jedes Matching von  $G_\Delta$  maximal die Ordnung  $(n-1)(m-1)$  hat. Für  $n=1$  besitzt  $\Delta_{n,m}^2$  nur die singulären Eckpunkte  $w_{1,j}$  als innere Eckpunkte und somit hat  $G_\Delta$  keine Kanten. Sei nun  $n > 1$  und die Behauptung gelte für  $n-1$ . Wir wählen ein Matching  $M$  und zerlegen dieses in die disjunkten Mengen  $M_1 := \{e \in M : e \text{ ist Kante von } G_{\Delta_{n-1,m}^2}\}$  und  $M_2 := M \setminus M_1$ . Ist nun  $e \in M_2$ , dann muss die Kante mindestens einen Eckpunkt  $v_{n-1,j}$  oder  $w_{n,j}$  besitzen. Da die singulären Eckpunkte  $w_{n,j}$  nur zu den Eckpunkten  $v_{n-1,j-1}$  und  $v_{n-1,j}$  benachbart sind, kann  $M_2$  maximal  $m-1$  Kanten enthalten.  $M_1$  ist nun ein Matching für  $G_{\Delta_{n-1,m}^2}$ , so dass nach Induktionsvoraussetzung  $|M_1| \leq (n-2)(m-1)$  gilt. Also folgt  $|M| \leq (n-1)(m-1)$  und somit ist das Matching aus (7) maximal. Mit Satz 3.10 erhalten wir wiederum  $\Theta(\Delta_{n,m}^2) = V_I - \alpha(G_\Delta) = nm$ .  $\square$

Die Abbildung 11 zeigt ein maximales Matching mit 9 Kanten für den Fall  $n = m = 4$ . Für eine optimale Permutation  $\pi$  gilt  $\Theta_3^\pi = 9$ ,  $\Theta_2^\pi = 7$  und man erhält somit 16 Clough-Tochter Elemente  $C_1, \dots, C_{16}$ . Für  $\Delta^2$ -Triangulierungen ist allerdings zu bemerken, dass der singuläre Eckpunkt in jedem Viereck im allgemeinen kein echter Eckpunkt der Triangulierung ist, sondern durch Einzeichnen der beiden Diagonalen konstruiert ist. In diesem Fall sind auch keine Interpolationsdaten an den singulären Eckpunkten gegeben. Man kann deshalb leicht einen Interpolanten ohne Unterteilung der Dreiecke angeben (vgl. Lai [20, 21] und Laghchim-Lahlou und Sablonnière [19]).

Eine weitere Klasse von Triangulierungen ohne separierende Dreiecke sind Nested-Polygon Triangulierungen (vgl. Nürnberger und Zeilfelder [26]). Auch für diese Klasse gilt somit die Gleichheit in Satz 3.10. Dagegen können in Delaunay-Triangulierungen separierende Dreiecke auftreten. Im allgemeinen wird es aber nur sehr wenige separierende Dreiecke in Delaunay-Triangulierungen geben. Dies ist darin begründet, dass die Winkel zweier benachbarter Dreiecke ein Bedingung erfüllen müssen. Ist  $\overline{v_1v_2}$  eine innere Kante,  $T_1 = \Delta(v_1, v_2, v_3)$  und  $T_2 = \Delta(v_1, v_2, v_4)$  die anliegenden Dreiecke und  $\alpha_1, \alpha_2$  der Winkel im Eckpunkt  $v_3$  bzw.  $v_4$ , dann muss in einer Delaunay-Triangulierung

$$\alpha_1 + \alpha_2 \leq 180^\circ$$

gelten (vgl. Dillencourt [15]). Da in einem separierenden Dreieck mindestens ein Winkel  $\alpha \geq 120^\circ$  existiert, besitzen Delaunay-Triangulierung im allgemeinen nur wenige separierende Dreiecke. Es ist deshalb zu vermuten, dass für viele Delaunay-Triangulierung in Satz 3.7 die Gleichheit gilt. Nach Dillencourt [15] besitzt aber jede Delaunay-Triangulierung ein perfektes Matching, so dass man für viele Delaunay-Triangulierung sogar eine optimale Lösung mit  $\left\lceil \frac{V_I}{2} \right\rceil$  Clough-Tochter Elementen erwarten kann. Es ist jedoch zu beachten,

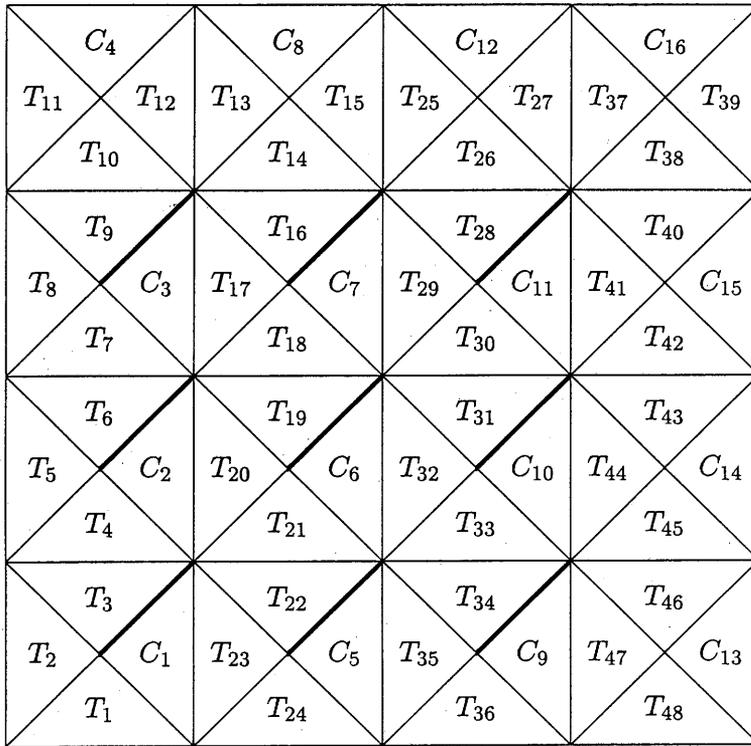


Abbildung 11: Maximales Matching und optimale Nummerierung für  $\Delta_{4,4}^2$

dass dies nicht zwingend aus dem Satz von Dillencourt folgt, da der Graph  $G_\Delta$  zu einer Delaunay-Triangulierung im allgemeinen keine konvexe Triangulierung und damit keine Delaunay-Triangulierung mehr ist. Der Graph kann sogar Eckpunkte mit  $\deg(v) = 1$  haben, so dass er nicht einmal eine Triangulierung ist.

Das Gegenbeispiel aus Abbildung 9 zeigt, dass man auch für Triangulierungen mit "wenigen" separierenden Dreiecken die Gültigkeit von Satz 3.10 erwarten kann. Für die Triangulierung aus der Abbildung gilt  $\Theta(\Delta) > V_I - \alpha(G_\Delta)$ , so dass sie nach Satz 3.10 separierende Dreiecke besitzen muss. In diesem Beispiel ist sogar jedes Dreieck von  $G_\Delta$  in einem separierenden Dreieck enthalten und es genügt bereits ein Kante zu tauschen (bspw. die Kante zwischen den Dreiecken  $T_{19}$  und  $C_2$ ), um eine Triangulierung mit den gleichen Eckpunkten zu erhalten, für die  $\Theta(\Delta) = 6 = V_I - \alpha(G_\Delta)$  gilt.

#### 4 Interpolation in $S_3^1(\tilde{\Delta})$

In diesem Abschnitt wollen wir den Splineraum  $S_3^1(\tilde{\Delta})$  ausführlich behandeln und zusätzlich zu den Hermite-Interpolanten aus Abschnitt 2.2 ein Lagrange-Interpolationsschema angeben. Aus Satz 2.5 und 2.8 erhält man für jede Funktion  $f \in C^1(\Omega)$  einen (reduzier-

ten) Hermite-Interpolanten  $s \in S_3^1(\tilde{\Delta})$ , der durch die folgenden Bedingungen eindeutig bestimmt ist.

(i) Für jeden Eckpunkt  $v_i \in \Delta$  gelte:

$$\begin{aligned} s(v_i) &= f(v_i) \\ D_x s(v_i) &= D_x f(v_i) \\ D_y s(v_i) &= D_y f(v_i) \end{aligned}$$

(ii) Für jedes Dreieck  $T_i = \Delta(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})$  mit  $\theta_i \in \{0, 2\}$  sei

$$e_i := \begin{cases} \overline{v_{i,1}v_{i,2}} & \text{für } \theta_i = 0 \\ \overline{v_{i,3}v_{i,1}} & \text{für } \theta_i = 2 \end{cases}$$

und  $z_i$  ein Vektor, der nicht parallel zur Kante  $e_i$  verläuft. Weiter sei  $w_i$  ein Punkt im Innern der Kante  $e_i$ . Dann gelte:

$$\begin{array}{ll} D_{z_i} s(w_i) = D_{z_i} f(w_i) & \text{für den vollständigen Interpolanten} \\ D_{z_i} s|_{e_i} \in \Pi_1 & \text{für den reduzierten Interpolanten} \end{array}$$

Für eine Nummerierung der Dreiecke mit  $\theta_0 = 1$  und  $\theta_2 = 0$  entspricht der vollständige Hermite-Interpolant im wesentlichen dem reduzierten Interpolanten. Lediglich im Dreieck  $T_1$  benötigt der vollständige Interpolant eine zusätzliche Ableitung. Wir können deshalb erwarten, dass der reduzierte Interpolant das gleiche Approximationsverhalten wie der vollständige Interpolant besitzt. Mit dem reduzierten Schema erhalten wir einen Interpolanten, der nur Funktionswert und erste partiellen Ableitungen in den Eckpunkten benötigt.

Wir behandeln nun die Lagrange-Interpolation in  $S_3^1(\tilde{\Delta})$ . Eine lokale Methode für die Lagrange-Interpolation mit kubischen Splines haben Nürnberger und Zeilfelder [24] beschrieben. Auch sie verwenden einen Clough-Tocher Split in einigen Dreiecken. Im allgemeinen benötigen sie aber für ihre Methode mehr Clough-Tocher Elemente als wir. Dafür ist ihr Interpolationsschema lokal und sichert somit ein optimales Approximationsverhalten.

Wir definieren nun eine Interpolationsmenge für  $S_3^1(\tilde{\Delta})$ . Wie wir in Abschnitt 3 bereits gezeigt haben, genügt es Nummerierungen mit  $\Theta_0 = 1$  zu betrachten und setzen dies im folgenden voraus. Für ein Dreieck  $T_i = \Delta(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})$  mit  $\theta_i = 0$  wählen wir nun sechs Punkte  $w_{i,1}, \dots, w_{i,6}$ , so dass  $v_{i,j}, w_{i,2j-1}, w_{i,2j}, v_{i,j+1}$  paarweise verschiedene Punkte auf der Kante  $\overline{v_{i,j}v_{i,j+1}}$  sind. Weiter wählen wir einen beliebigen Punkt  $w_{i,7}$  im Inneren von  $T_i$  und definieren

$$A_i := \{v_{i,1}, \dots, v_{i,3}, w_{i,1}, \dots, w_{i,7}\}$$

Gilt  $\theta_i = 1$ , dann lassen sich zwei Fälle unterscheiden. Enthält die Teiltriangulierung  $\Delta_{i-1}$  bereits alle drei Eckpunkte  $v_{i,j}$  von  $T_i$ , dann setzen wir  $A_i = \emptyset$ . Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn  $T_i$  Nachbar eines Dreiecks  $T_j$  mit  $\theta_j = 3$  ist und alle anderen Nachbarn von  $T_j$  einen niedrigeren Index haben. Sind dagegen nur die beiden Eckpunkte  $v_{i,1}$  und

$v_{i,2}$  in  $\Delta_{i-1}$  enthalten, dann wählen wir jeweils einen inneren Punkt  $w_{i,j}$ ,  $j = 1, 2$  auf den beiden Kanten  $\overline{v_{i,j}v_{i,3}}$  und setzen

$$A_i := \{v_{i,3}, w_{i,1}, w_{i,2}\}$$

Für  $\theta_i = 2$  wählen wir einen Punkt  $w_i \in T_{i,3} \setminus \overline{v_{i,1}v_{i,3}}$  und setzen  $A_i := \{w_i\}$ . Schließlich definieren wir  $A_i := \emptyset$  für  $\theta_i = 3$ .

**Satz 4.1.** *Seien  $A_i$  wie oben definiert und  $A := \bigcup_{i=1}^N A_i$ , dann gibt es einen eindeutig bestimmten Spline  $s \in S_3^1(\Delta)$ , so dass  $s(v) = f(v)$  für alle  $v \in A$  gilt.*

**Beweis:** Gilt  $\theta_i = 0$ , dann enthält  $A$  für jede Kante  $e_{i,j}$  von  $T_i$  vier Punkte auf  $e_{i,j}$ . Diese bestimmen das univariate Polynom entlang dieser Kante und somit alle vier Bernstein-Bézier-Koeffizienten auf  $e_{i,j}$ . Weiter enthält  $A$  einen Punkt  $w_{i,7}$  im Inneren von  $T_i$ , so dass  $\lambda_j > 0$  für die baryzentrischen Koordinaten  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  von  $w_{i,7}$  gilt. Aus Satz 1.1 folgt

$$c_{111}^i = \frac{f(w_{i,7}) - \sum_{\alpha \neq (1,1,1)} c_{\alpha}^i B_{\alpha}^d(\lambda)}{6\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$$

Für  $\theta_i = 1$  werden die Koeffizienten  $c_{\alpha}^i$  mit  $\alpha_3 \leq 1$  durch die  $C^1$ -Bedingung an der Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$  bestimmt. Ist der Eckpunkt  $v_{i,3}$  in der Teiltriangulierung  $\Delta_{i-1}$  enthalten, dann berechnen sich die verbleibenden drei Koeffizienten  $c_{\alpha}^i$  mit  $\alpha_3 \geq 2$  aus der  $C^1$ -Bedingung im Eckpunkt  $v_{i,3}$ . Im anderen Fall erhält man  $c_{003}^i = s(v_{i,3}) = f(v_{i,3})$  nach Satz 1.2. Weiter enthält  $A$  einen Punkt  $w_{i,1}$  im Inneren der Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,3}}$ . Seien  $(1 - \lambda, 0, \lambda)$  mit  $0 < \lambda < 1$  die baryzentrischen Koordinaten von  $w_{i,1}$ , dann folgt

$$c_{102}^i = \frac{f(w_{i,1}) - (1 - \lambda)^3 c_{300}^i - 3\lambda(1 - \lambda)^3 c_{201}^i - \lambda^3 c_{003}^i}{3\lambda^2(1 - \lambda)}$$

Analog berechnet sich  $c_{012}^i$ , so dass alle Bernstein-Bézier-Koeffizienten auf  $T_i$  bestimmt werden können.

Gilt nun  $\theta_i = 2$ , dann ergeben sich alle Koeffizienten  $c_{\alpha}^i$  mit  $\alpha_3 \leq 1$  bis auf  $c_{111}^{i3}$  aus den  $C^1$ -Bedingungen über die Kanten und in den Eckpunkten von  $T_i$ . Nun enthält  $A$  einen Punkt  $w_i$  in  $T_{i,3}$ , der nicht auf der Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,3}}$  liegt. Seien  $\lambda$  die baryzentrischen Koordinaten von  $w_i$  bezüglich  $T_{i,3}$ , dann ergibt sich aus der Interpolationbedingung und den  $C^1$ -Bedingungen an den inneren Kanten des Clough-Tocher Elements das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ \lambda_3^3 & 3\lambda_1\lambda_3^2 & 3\lambda_2\lambda_3^2 & 6\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{003}^{i3} \\ c_{102}^{i3} \\ c_{012}^{i3} \\ c_{111}^{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix}$$

mit geeigneten Werten  $\gamma_i \in \mathbb{R}$ . Für die Koeffizientenmatrix  $A$  erhält man wegen  $\lambda_i \geq 0$  und  $\lambda_3 \neq 0$

$$\det A = 162\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 27\lambda_1\lambda_3^2 + 27\lambda_2\lambda_3^2 + 6\lambda_3^3 > 0$$

Also sind die vier Koeffizienten  $c_{003}^{i3}, c_{102}^{i3}, c_{012}^{i3}, c_{111}^{i3}$  eindeutig bestimmt und aus den  $C^1$ -Bedingungen ergeben sich nun die verbleibenden Koeffizienten in  $T_{i,1}$  und  $T_{i,2}$ .

Für den Fall  $\theta_i = 3$  erhält man nach Satz 2.5 alle Koeffizienten direkt aus den  $C^1$ -Bedingungen. Also lassen sich alle Bernstein-Bézier-Koeffizienten von  $s$  aus den Interpolationsbedingungen berechnen, und analog zum Beweis aus Satz 2.5 folgt:

$$\dim S_3^1(\tilde{\Delta}) \leq 10 + 3(\Theta_1 - \Theta_3) + \Theta_2 = 3(\Theta_1 - \Theta_3 + 3) + \Theta_2 + 1 = 3V + \Theta_2 + 1$$

Andererseits gilt nach Satz 1.7 mit (6):

$$\dim S_3^1(\tilde{\Delta}) \geq 3V_B + 2(V_I + \Theta_2 + \Theta_3) + 1 = 3V + \Theta_2 + 1$$

so dass  $s$  eindeutig bestimmt ist. □

Im Gegensatz zum Hermite-Interpolanten aus Satz 2.5 lassen sich für den Lagrange-Interpolanten nur die Koeffizienten in den Eckpunkten lokal aus den Interpolationswerten berechnen. Insofern kann man nicht erwarten, dass der Interpolant für alle Interpolationsmengen ein vergleichbares Approximationsverhalten besitzt.

## 5 Numerische Ergebnisse

In diesem Abschnitt liefern wir numerische Ergebnisse für unsere Interpolationsmethode. Für kubische  $C^1$ -Splines haben wir den Hermite-Interpolanten berechnet und mit dem vollständigen Clough-Tocher Split nach Laghchim-Lahlou und Sablonnière [18] verglichen. Für die Berechnungen wurden Delaunay-Triangulierungen aus zufällig verteilten Punkten verwendet. Die Unterteilung haben wir nach dem folgenden Algorithmus bestimmt.

**Algorithmus 5.1.** Bestimmung einer Permutation  $\pi$  mit  $\Theta_0^\pi = 1$ .

*Eingabe:* Liste  $\Delta$  von Dreiecken

*Ausgabe:* Liste  $\pi$  von Integer

Initialisiere zwei leere Warteschlangen  $Q$  und  $Q_2$

markiere Dreieck  $T_1$  und füge 1 in  $Q$  ein

$n := 1$

**Solange**  $Q$  oder  $Q_2$  nicht leer ist

**Falls**  $Q$  nicht leer ist

        hole nächsten Wert  $m$  von  $Q$

**Falls**  $T_m$  zwei markierte Nachbarn hat

            füge  $m$  in  $Q_2$  ein und gehe zum Anfang der Schleife

**Sonst**

        hole nächsten Wert  $m$  von  $Q_2$

$\pi(m) := n, n := n + 1$

**Für alle** unmarkierten Nachbarn  $T_i$  von  $T_m$

        markiere Dreieck  $T_i$

        füge  $i$  in  $Q$  ein

Der Algorithmus berechnet im allgemeinen keine optimale Lösung. Für die verwendeten Triangulierungen erhielten wir aber gute Lösungen mit weniger als  $0.6V_I$  Clough-Tochter Elementen. Die folgende Tabelle zeigt die Parameter der einzelnen Triangulierungen.

	$N$	$V_I$	$\Theta(\Delta)$	$h_i$
$\Delta_1$	56	19	12	5.57 e-1
$\Delta_2$	175	67	39	3.10 e-1
$\Delta_3$	609	242	141	1.66 e-1
$\Delta_4$	2263	921	533	1.06 e-1
$\Delta_5$	8816	3879	2185	6.70 e-2
$\Delta_6$	31933	15005	8365	3.20 e-2
$\Delta_7$	118021	53721	30176	1.80 e-2

Tabelle 1: Parameter der Triangulierungen

Hierbei bezeichnet  $\Theta(\Delta)$  die Anzahl der Clough-Tochter Elemente für die Nummerierung nach Algorithmus 5.1 und  $h_i$  die maximale Kantenlänge der Triangulierung  $\Delta_i$ . In allen Beispielen haben wir Franke's-Testfunktion

$$f(x, y) = \frac{3}{4} \exp\left(-\frac{(9x-2)^2 + (9y-2)^2}{4}\right) + \frac{3}{4} \exp\left(-\frac{(9x+1)^2}{49} - \frac{9y+1}{10}\right) + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{(9x-7)^2 + (9y-3)^2}{4}\right) - \frac{1}{5} \exp(-(9x-4)^2 - (9y-7)^2)$$

auf dem Rechteck  $\Omega := [0, 1] \times [0, 1]$  interpoliert. Für unsere Unterteilung  $\tilde{\Delta}$  und den vollständigen Clough-Tochter Split  $\Delta_{CT}$  erhielten wir die folgenden Ergebnisse.

	$S_3^1(\tilde{\Delta})$			$S_3^1(\Delta_{CT})$		
	Dim.	$\epsilon_i$	$\delta_i$	Dim.	$\epsilon_i$	$\delta_i$
$\Delta_1$	123	3.42 e-1	3.19	211	1.26 e-1	2.24
$\Delta_2$	342	4.97 e-2	2.16	614	3.25 e-2	1.48
$\Delta_3$	1148	1.29 e-2	4.26	2084	1.29 e-2	5.68
$\Delta_4$	4178	1.91 e-3	4.40	7638	1.01 e-3	3.40
$\Delta_5$	15309	2.48 e-4	3.62	28571	2.09 e-4	4.06
$\Delta_6$	52516	1.67 e-5	3.73	99652	1.02 e-5	3.52
$\Delta_7$	199538	2.19 e-6		375228	1.50 e-6	

Tabelle 2: Interpolation mit Clough-Tochter Split

wobei wir mit

$$\delta_i := \frac{\log \epsilon_i - \log \epsilon_{i+1}}{\log h_i - \log h_{i+1}}$$

den Decay-Exponenten von  $\Delta_i$  und  $\Delta_{i+1}$  bezeichnen. Der durchschnittliche Wert für  $\delta_i$  liegt in beiden Fälle zwischen drei und vier. Dies bestätigt die analytischen Aussagen über die Approximationsordnung unseres Interpolanten. Auch der absolute Interpolationsfehler

ist nicht deutlich höher als bei dem Interpolanten für den vollständigen Clough-Tochter-Split. In der Berechnung ist unser Interpolant ca. 25% schneller. In beiden Fällen wurden allerdings die Ableitungen an den Kanten direkt berechnet. Müsste man diese durch Nähungsverfahren bestimmen, dann ist die Berechnung unseres Interpolanten wesentlich schneller als die Berechnung für den vollständigen Clough-Tochter-Split, da wir die orthogonalen Ableitungen nur an wenigen Kanten benötigen.

Die Unterteilungsmethode in dieser Arbeit haben wir ausführlich für den Clough-Tochter Split behandelt. Sie lässt sich aber grundsätzlich auf jede andere Unterteilung, die keine zusätzlichen Hilfspunkte auf den Kanten erzeugt, übertragen. So kann man beispielsweise die Unterteilungen von Alfeld [1] und Wang [33] für  $S_5^2(\Delta)$  verwenden. Ebenso lässt sich die Methode auf beliebige Quadrangulierungen anwenden. Unser Verfahren ist hier besonders effizient, wenn wir für konvexe Vierecke die Unterteilung nach Fraeijs de Veubeke und Sander (vgl. Laghchim-Lahlou und Sablonnière [19]) verwenden. Im günstigsten Fall benötigen wir nur  $V_I/3$  FVS-Elemente für eine Quadrangulierung. Die Anzahl der Dreiecke wächst somit um weniger als ein Drittel, so dass die Methode deutlich effizienter ist als die Unterteilung mit Clough-Tochter Elementen.

## Literatur

- [1] P. Alfeld: A bivariate  $C^2$  Clough-Tochter Scheme, Computer Aided Geometric Design 1 (1984): 257-267.
- [2] P. Alfeld, B. Piper, L. L. Schumaker: Minimally supported bases for spaces of bivariate piecewise polynomials of smoothness  $r$  and degree  $d \geq 4r + 1$ , Computer Aided Geometric Design 4 (1987): 105-123.
- [3] P. Alfeld, B. Piper, L. L. Schumaker: An explicit Basis for  $C^1$  quartic bivariate splines, SIAM Journal on Numerical Analysis 24 (1987): 891-911.
- [4] P. Alfeld, L. L. Schumaker: The dimension of bivariate spline spaces of smoothness  $r$  for degree  $d \geq 4r + 1$ , Constructive Approximation 3 (1987): 189-197.
- [5] P. Alfeld, L. L. Schumaker: On the dimension of bivariate spline spaces of smoothness  $r$  and degree  $d = 3r + 1$ , Numerische Mathematik 57 (1990): 651-661.
- [6] C. de Boor: B-Form Basics, in Geometric Modeling (ed. G. Farin), SIAM Publication, Philadelphia, 1987: 131-148.
- [7] J. H. Bramble, S. R. Hilbert: Estimation of linear functionals on Sobolev spaces with applications to Fourier transforms and spline interpolation, SIAM Journal on Numerical Analysis 7 (1970): 112-124.
- [8] J. H. Bramble, S. R. Hilbert: Bounds for a Class of Linear Functionals with Applications to Hermite Interpolation, Numerische Mathematik 16 (1971): 362-369.
- [9] O. Davydov, G. Nürnberger, G. Walz, F. Zeilfelder: Bivariate Splines on Crosscut Partitions, in Multivariate Approximation, (ed. G. Nürnberger, J. W. Schmidt, G. Walz), Birkhäuser, Basel, 1997: 189-203.

- [10] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Interpolation by cubic splines on triangulations, in *Approximation Theory*, (ed. C. K. Chui, L. L. Schumaker), Vanderbilt University Press, Nashville, 1998: 17-24.
- [11] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Interpolation by splines on triangulations, in *Approximation Theory*, (ed. M. Buhmann, M. W. Müller), ISMN, Dortmund, 1998.
- [12] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Bivariate spline interpolation with optimal approximation order, *Constructive Approximation*.
- [13] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Interpolation by cubic splines on nested polygon triangulations, in *Vorbereitung*.
- [14] M. B. Dillencourt: Hamiltonian Cycles in Planar Triangulations with no Separating Triangles, *Journal of Graph Theory* 14 (1990): 31-49.
- [15] M. B. Dillencourt: Toughness and Delaunay Triangulations, *Discrete & Computational Geometry* 5 (1990): 575-601.
- [16] G. Farin: Triangular Bernstein-Bézier patches, *Computer Aided Geometric Design* 3 (1986): 83-127.
- [17] A. Kh. Ibrahim, L. L. Schumaker: Super Spline Spaces of Smoothness  $r$  and Degree  $d \geq 3r + 2$ , *Constructive Approximation* 7 (1991): 401-423.
- [18] M. Laghchim-Lahlou, P. Sablonnière: Triangular finite elements of HCT type and class  $C^p$ , *Advances in Computational Mathematics* 2 (1994): 101-122.
- [19] M. Laghchim-Lahlou, P. Sablonnière: Quadrilateral finite elements of FVS type and class  $C^p$ , *Numerische Mathematik* 70 (1995): 229-243.
- [20] M.-J. Lai: Approximation order from bivariate  $C^1$ -cubics on a four directional mesh is full, *Computer Aided Geometric Design* 11 (1994): 215-223.
- [21] M.-J. Lai: Scattered data interpolation and approximation using bivariate  $C^1$  piecewise cubic polynomials, *Computer Aided Geometric Design* 13 (1996): 81-88.
- [22] M.-J. Lai, L. L. Schumaker: Scattered Data Interpolation Using  $C^2$ -Supersplines of Degree Six, *SIAM Journal on numerical Analysis* 34 (1997): 905-921.
- [23] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Spline interpolation on convex quadrangulations, in *Approximation Theory IX* (ed. C. K. Chui, L. L. Schumaker) Vanderbilt University Press, Nashville, 1998: 259-266.
- [24] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Lagrange interpolation by splines on triangulations, in *Proceedings on the Morningside Institute* (ed. R. H. Wang), Peking, 1998.
- [25] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Bivariate spline spaces, in *Advances in Multivariate Approximation* (ed. W. Haußmann, K. Jetter, M. Reimer), Dortmund, 1999.
- [26] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Interpolation by spline spaces on classes of triangulations, erscheint in *Journal of Computational and Applied Mathematics*.

- [27] P. Sablonnière: Composite finite elements of class  $C^k$ , Journal of computational and applied Mathematics 12 & 13 (1985): 541-550.
- [28] L. L. Schumaker: On the dimension of spaces of piecewise polynomials in two variables, in Multivariate Approximation Theory (ed. W. Schempp und K. Zeller), Birkhäuser, Basel, 1979: 396-412.
- [29] L. L. Schumaker: Bounds on the Dimension of Spaces of multivariate piecewise polynomials, Rocky Mountain Journal of Mathematics 14 (1984): 251-264.
- [30] L. L. Schumaker: Dual bases for spline spaces on cells, Computer Aided Geometric Design 5 (1988): 277-284.
- [31] L. L. Schumaker: On super splines and finite elements, SIAM Journal on Numerical Analysis 26 (1989): 997-1005.
- [32] G. Strang, G. Fix: An analysis of the finite element method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1973.
- [33] T. Wang: A  $C^2$ -quintic spline interpolation scheme on triangulations, Computer Aided Geometric Design 9 (1992): 379-386.
- [34] T. Whelan: A representation of a  $C^2$  interpolant over triangles, Computer Aided Geometric Design 3 (1986): 53-66.