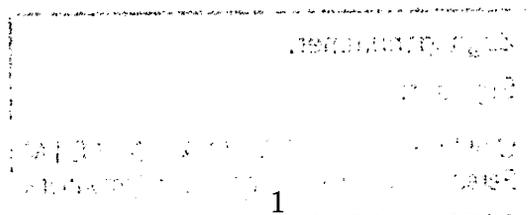


# Lokale Lagrange-Interpolation mit quartischen $C^1$ -Splines

Gero Hecklin

Nr. 271/2003



# Lokale Lagrange-Interpolation mit quartischen $C^1$ -Splines

Gero Hecklin

Institut für Mathematik, Universität Mannheim  
68131 Mannheim, April 2003

## Zusammenfassung

Wir entwickeln eine Methode zur lokalen Lagrange-Interpolation mit quartischen  $C^1$ -Splines auf beliebigen Triangulierungen  $\Delta$ . Solche Triangulierungen werden algorithmisch verfeinert, indem einige geeignete Dreiecke durch Clough-Tochter-Splits unterteilt werden. In der daraus resultierenden Triangulierung  $\tilde{\Delta}$  besitzen keine zwei benachbarten inneren Knoten geraden Grad. Darauf basierend konstruieren wir Lagrange-Interpolationspunkte für den Splineraum  $\mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$ . Wir beweisen, dass die zugehörigen dualen Basisfunktionen lokalen Träger besitzen, und die Approximationsordnung der Interpolationsmethode optimal ist.

*AMS Subject Classification:* 65D05, 65D07, 41A63, 41A15

*Keywords:* Bivariate Splines, Triangulierungen, Bézier-Bernstein-Techniken, Interpolation, optimale Approximationsordnung.

## 1. Einleitung

In dieser Arbeit betrachten wir den Raum der bivariaten  $C^r$ -Splines vom Grad  $q$  hinsichtlich Triangulierungen  $\Delta$  eines polygonalen Grundgebiets  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , gegeben durch

$$\mathcal{S}_q^r(\Delta) = \{s \in C^r(\Omega) : s|_T \in \mathcal{P}_q \text{ für alle } T \in \Delta\}.$$

Dabei ist  $\mathcal{P}_q = \text{span}\{x^i y^j : i, j \geq 0, i + j \leq q\}$  der Raum der bivariaten Polynome vom totalen Grad  $q$  und  $C^r(\Omega)$  die Menge aller  $r$  mal differenzierbaren Funktionen auf  $\Omega$ . Grundlegende Probleme in der Theorie der bivariaten Splineinterpolation sind die Bestimmung der Dimension von  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$  und die Konstruktion von Interpolationsmengen für diese Splineräume. Eine Menge  $L = \{z_1, \dots, z_m\}$ , wobei  $m$  die Dimension von  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$  ist, heißt

Lagrange-Interpolationsmenge für den Splineraum  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ , falls zu jeder Funktion  $f \in C(\Omega)$  genau ein Spline  $s \in \mathcal{S}_q^r(\Delta)$  mit

$$s(z_i) = f(z_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

existiert. Werden neben Funktionswerten auch partielle Ableitungen einer genügend oft differenzierbaren Funktion  $f$  interpoliert, und ist die Gesamtanzahl der Bedingungen gleich  $m$ , so sprechen wir von Hermite-Interpolation.

In der Literatur gibt es eine Reihe von Methoden zur Interpolation mit Splines von hohem Polynomgrad relativ zur Differenzierbarkeit. Morgan und Scott [23] bestimmten für beliebige Triangulierungen  $\Delta$  die Dimension und Hermite-Interpolationsmengen für die Splineräume  $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ ,  $q \geq 5$ . Diese Ergebnisse wurden von Alfeld, Piper und Schumaker [3], basierend auf Resultaten von Alfeld und Schumaker [2], für  $C^r$ -Splines vom Grad  $q \geq 4r+1$  verallgemeinert. Hong [19] untersuchte Splineräume vom Grad  $q \geq 3r+2$  und berechnete deren Dimension für beliebige Triangulierungen. Dieses Resultat wurde von Ibrahim und Schumaker [20] für sogenannte Supersplineräume verallgemeinert. Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [15] entwickelten einen Algorithmus zur Konstruktion von lokalen Hermite-Interpolationsmengen mit optimaler Approximationsordnung für diese Räume.

Für niedrigeren Polynomgrad, d.h.  $q < 3r+2$ , führt die Untersuchung bivariater Splines auf komplexe, bisher nicht vollständig gelöste Probleme. Alfeld, Piper und Schumaker [1] bestimmten zwar die Dimension von  $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$  für beliebige Triangulierungen  $\Delta$ , ihre nichtlokalen Argumente der Graphentheorie lieferten jedoch i.A. keine Interpolationsmengen für diese Splineräume. Chui und Hong [9,10] gaben darauf aufbauend zwei Algorithmen an, die auf beliebigen Triangulierungen  $\Delta$  mit geeigneten Clough-Tocher-Splits bzw. Diagonalenwechsel in konvexen Vierecken optimale Approximationsordnung der Quasi-Interpolation mit quartischen  $C^1$ -Splines ergeben. Später entwickelte Gao [18] eine Methode zur Hermite-Interpolation mit quartischen  $C^1$ -Splines auf Triangulierungen, bei denen jeder innere Knoten ungeraden Grad besitzt. Davydov und Nürnberger [14] konstruierten, ebenfalls für  $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$ , induktiv Interpolationsmengen auf der Klasse der beliebigen Triangulierungen  $\Delta$ , bei denen in Ausnahmefällen die Triangulierung modifiziert wird. Für die Klasse der regelmäßigen Rechteckszerlegungen  $\Delta^1$  und  $\Delta^2$ , mit einer bzw. zwei Diagonalen in jedem Rechteck, konstruierten Nürnberger [26] bzw. Nürnberger und Walz [28] Interpolationsmengen für  $C^1$ -Splines vom Grad 4, wobei sie unter Verwendung von Techniken der schwachen Interpolation die Approximationsordnung dieser Interpolationsmethode bestimmten. Nürnberger und Zeilfelder [31] entwickelten eine Methode zur lokalen Lagrange-Interpolation mit  $C^1$ -Splines vom Grad  $\geq 3$  auf beliebigen Triangulierungen, die optimale Approximationsordnung besitzt. Dabei werden etwa die Hälfte der Dreiecke der Triangulierung unterteilt. Wenig später konstruierte Kohlmüller [21] auf beliebigen Triangulierungen  $\Delta$  Interpolationsmengen für die Splineräume  $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ ,  $q \geq 3$ , mit fast optimaler Approximationsordnung, wobei i.A. nur etwa ein Viertel der Dreiecke von  $\Delta$  gesplittet werden.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine Methode zur lokalen Lagrange-Interpolation mit quartischen  $C^1$ -Splines auf beliebigen Triangulierungen  $\Delta$  zu entwickeln, wobei nur wenige Dreiecke von  $\Delta$  unterteilt werden, und die Approximationsordnung der Interpolation optimal ist. Zunächst werden für gegebene beliebige Triangulierungen einige geeignete Dreiecke mit Hilfe von Clough-Tocher-Splits unterteilt, so dass in der daraus resultierenden Triangulierung  $\tilde{\Delta}$  keine zwei benachbarten innere Knoten geraden Grad besitzen. Die

Anzahl der Unterteilungen ist dabei deutlich geringer als die bei dem von Nürnberger und Zeilfelder [31] entwickelten Verfahren. Darauf aufbauend konstruieren wir Lagrange-Interpolationspunkte für den Splineraum  $\mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$ . Hierbei verwenden wir eine Modifikation des von Nürnberger und Zeilfelder [31] entwickelten Kantenalgorithmus in Verbindung mit einer Verallgemeinerung der Methode von Alfeld, Piper und Schumaker [1] zur Konstruktion geeigneter Pfade. In der zentralen Aussage dieser Arbeit untersuchen wir dann die Träger der zur Interpolationsmenge gehörigen dualen Splines, und weisen so die Lokalität der Lagrange-Interpolation, d.h. die lokale Berechenbarkeit der interpolierenden Splines nach. Mit Hilfe der von Nürnberger [26] (s.a. Nürnberger und Walz [28], Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [12,15], Nürnberger und Zeilfelder [31]) entwickelten Techniken der schwachen Interpolation zeigen wir im Anschluss, dass die Lagrange-Interpolationsmethode mit  $\mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$  optimale Approximationsordnung besitzt.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert. In Abschnitt 2 erläutern wir einige Grundlagen über bivariate Polynome und Splines, Interpolation mit Splineräumen und schwache Interpolation. Ein Algorithmus zur Verfeinerung der gegebenen beliebigen Triangulierungen mit Hilfe von Clough-Tochter-Splits wird in Abschnitt 3 definiert. Darauf aufbauend konstruieren wir in Abschnitt 4 Lagrange-Interpolationsmengen für quartische  $C^1$ -Splines, und weisen die Lokalität der Interpolation nach. In letzten Abschnitt beweisen wir die Optimalität der Approximationsordnung dieser Interpolation.

## 2. Grundlagen

In diesem Kapitel erläutern wir einige Grundlagen über Triangulierungen, bivariate Polynome und Splines, Interpolation mit bivariaten Splines, Approximationsgüte und schwache Interpolation, die auf Alfeld, Piper und Schumaker [1], Nürnberger [26], Schumaker [33], Nürnberger und Zeilfelder [31] u.a. zurückgehen.

### Definition 2.1:

Sei  $\Omega$ , eine einfach zusammenhängende, nicht notwendigerweise konvexe, polygonförmige Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$ , zerlegt in Dreiecke  $T_1, \dots, T_N$ , sodass der Durchschnitt zweier verschiedener Dreiecke entweder leer, ein gemeinsamer Eckpunkt oder eine gemeinsame Kante ist. Dann heißt  $\Delta = \{T_1, \dots, T_N\}$  eine TRIANGULIERUNG VON  $\Omega$ . Ist  $\Delta' \subset \Delta$  eine Triangulierung einer einfach zusammenhängenden Teilmenge  $\Omega' \subset \Omega$ , so heißt  $\Delta'$  SUBTRIANGULIERUNG VON  $\Delta$ .

Im Folgenden setzen wir

$V_I(\Delta), V_B(\Delta), V(\Delta)$	:	Menge der inneren, der äußeren bzw. aller Knoten,
$E_I(\Delta), E_B(\Delta), E(\Delta)$	:	Menge der inneren, der äußeren bzw. aller Kanten,
$N(\Delta)$	:	Menge der Dreiecke
$\sigma(\Delta)$	:	Menge der singulären Knoten, und
$\text{diam}(\Delta)$	:	maximaler Aussenkreisradius der Dreiecke

der Triangulierung  $\Delta$ . Dabei gelten folgende wohlbekanntten Beziehungen:

$$\begin{aligned}\#E_B(\Delta) &= \#V_B(\Delta) \\ \#E_I(\Delta) &= 3 \cdot \#V_I(\Delta) + \#V_B(\Delta) - 3 \\ \#N(\Delta) &= 2 \cdot \#V_I(\Delta) + \#V_B(\Delta) - 2.\end{aligned}$$

Eine Kante  $e := [v_1, v_2] \in E(\Delta)$  heißt DEGENERIERT IM ENDPUNKT  $v_1$ , falls die beiden benachbarten Kanten im Knoten  $v_1$  gleiche Steigung besitzen. Ein Knoten  $v \in V_I(\Delta)$  heißt SINGULÄR, falls es genau vier Kanten mit Endpunkt  $v$  gibt, und diese auf zwei Geraden liegen (vgl. Abbildung 1).

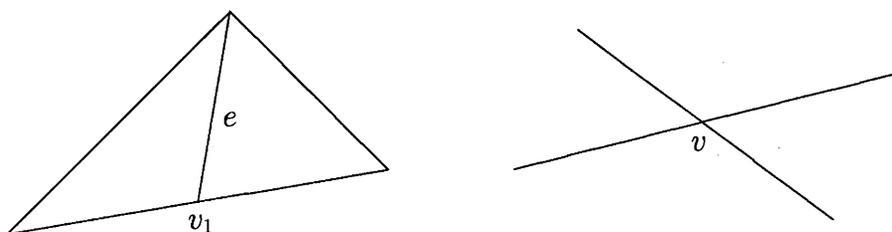


Abb. 1: In  $v_1$  degenerierte Kante  $e$ , singulärer Knoten  $v$ .

Für einen Knoten  $v \in V(\Delta)$  definiert  $Grad(v)$  die Anzahl der Kanten in  $\Delta$  mit Endpunkt  $v$ . Die Subtriangulierung  $\Delta_v := \{T \in \Delta \mid v \in T\}$  von  $\Delta$ , die alle Dreiecke mit Eckpunkt  $v$  enthält, bezeichnen wir als ZELLE VON  $v$ . Wir setzen  $st(v) = \cup\{T \mid T \in \Delta_v\}$  und definieren für  $n \geq 2$  induktiv  $st^n(v) = \cup\{T \in \Delta \mid T \cap st^{n-1}(v) \neq \emptyset\} \subset \Omega$ .

**Definition 2.2:**

Seien  $r, q \in \mathbb{N}_0$  mit  $0 \leq r < q$  und eine Triangulierung  $\Delta$  gegeben. Dann heißt

$$\mathcal{S}_q^r(\Delta) = \{s \in C^r(\Delta) : s|_T \in \mathcal{P}_q \text{ für alle } T \in \Delta\}$$

der SPLINERAUM der  $r$  mal differenzierbaren Funktionen vom Grad  $q$ . Dabei ist

$$\mathcal{P}_q = \text{span}\{x^i y^j : i, j \geq 0, i + j \leq q\}$$

der  $\binom{q+2}{2}$  dimensionale Raum der BIVARIATEN POLYNOME vom totalen Grad  $\leq q$ .

Funktionen aus  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$  sind also stückweise Polynome vom Grad  $q$ , die  $r$  mal stetig differenzierbar über den Kanten von  $\Delta$  verknüpft sind.

Ein grundlegendes Problem der bivariaten Splinetheorie ist neben der Bestimmung der Dimension von  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$  die Konstruktion von Interpolationsmengen für diese Splineräume. Eine Menge  $L = \{z_1, \dots, z_m\}$ , wobei  $m$  die Dimension von  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$  ist, heißt Lagrange-Interpolationsmenge für den Splineraum  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ , falls zu jeder Funktion  $f \in C(\Omega)$  genau ein Spline  $s \in \mathcal{S}_q^r(\Delta)$  mit

$$s(z_i) = f(z_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

existiert. Werden neben Funktionswerten auch partielle Ableitungen einer genügend oft differenzierbaren Funktion  $f$  interpoliert, und ist die Gesamtanzahl der Bedingungen gleich  $m$ , so sprechen wir von Hermiteinterpolation.

**Definition 2.3:**

Sei  $d = \dim(\mathcal{S}_q^r(\Delta))$  und  $L = \{z_i, i = 1, \dots, d\}$  eine Lagrangeinterpolationsmenge des Splineraums  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ . Dann heißt der Spline  $s_i \in \mathcal{S}_q^r(\Delta)$  mit der Eigenschaft

$$s_i(z_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

FUNDAMENTALSPLINE bzgl.  $L$ . Die Menge  $\{s_i, i = 1, \dots, d\}$  bildet offensichtlich eine Basis von  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ , genannt die DUALE BASIS bzgl.  $L$ .

Nach Alfeld, Piper und Schumaker [1] ist für beliebige Triangulierungen  $\Delta$  die Dimension des Splineraums  $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$  bekannt. Es gilt

$$\dim(\mathcal{S}_4^1(\Delta)) = 4 \cdot \#V_B + 3 \cdot \#V_I + \sigma + \#E = 6 \cdot \#V + \sigma - 3.$$

Für einen Einheitsvektor  $d \in \mathbb{R}^2$  und eine genügend oft differenzierbare Funktion  $f$  bezeichnen wir mit  $f_d(z)$  die partielle Ableitung von  $f$  im Punkt  $z$  in Richtung  $d$ . Sind  $d_1$  und  $d_2$  linear unabhängige Einheitsvektoren, so heißt

$$D^w f(z) = (f_{d_1^w}(z), f_{d_1^{w-1}d_2}(z), \dots, f_{d_1d_2^{w-1}}(z), f_{d_2^w}(z))$$

der GEORDNETE VEKTOR DER PARTIELLEN ABLEITUNGEN vom Grad  $w$ .

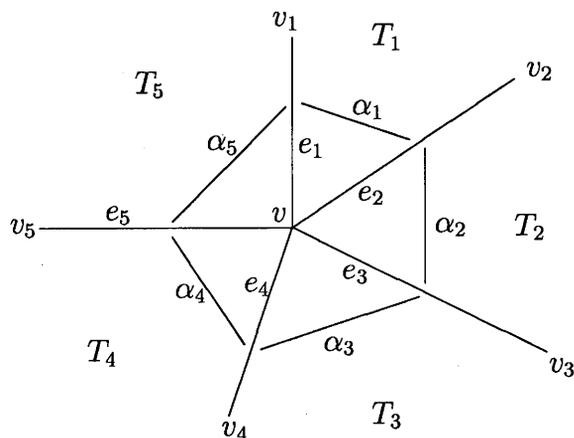


Abb. 2: Beispiel eines Knotens vom Grad 5.

Im Folgenden beweisen wir eine wichtige Eigenschaft bivariater  $C^1$ -Splines in Knoten ungeraden Grades. Sei  $v \in V_I(\Delta)$  ein Knoten ungeraden Grades  $n \in \mathbb{N}$ , im Uhrzeigersinn verbunden mit Knoten  $v_i, i = 1, \dots, n$  durch Kanten  $e_i := [v, v_i]$ . Ferner sei  $d_i$  für  $i = 1, \dots, n$  ein Einheitsvektor entlang der Kante  $e_i$ ,  $\Delta_v := \{T_i = \Delta(v, v_i, v_{i+1}), i = 1, \dots, n\}$  die Zelle von  $v$ ,  $\alpha_i$  für  $i = 1, \dots, n$  der von  $e_i$  und  $e_{i+1}$  eingeschlossene Winkel (vgl. Abbildung 2) und der Spline  $s \in \mathcal{S}_4^1(\Delta_v)$  gegeben durch  $s|_{T_i} \equiv p^{[T_i]}$ .

**Lemma 2.4:**

Aus  $p_{d_i^2}^{[T_i]}(v) = 0$  für  $i = 1, \dots, n$  folgt  $p_{d_i, d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = 0$  für  $i = 1, \dots, n$ .

**Beweis:**

Sind alle Kanten  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  in  $v$  nichtdegeneriert, so gilt

$$\sin(\alpha_i + \alpha_{i+1})p_{d_i^2}^{[T_i]} = \sin(\alpha_i)p_{d_{i+1}d_{i+2}}^{[T_{i+1}]} + \sin(\alpha_{i+1})p_{d_i d_{i+1}}^{[T_i]}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Wir setzen  $a_i := \sin(\alpha_i)$  für  $i = 1, \dots, n$ . Durch die  $C^1$ -Stetigkeit über den inneren Kanten von  $\Delta_v$  läßt sich damit folgendes lineare Gleichungssystem aufstellen.

$$\begin{pmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ a_2 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{d_1 d_2}^{[T_1]} \\ p_{d_2 d_3}^{[T_2]} \\ \vdots \\ p_{d_{n-1} d_n}^{[T_{n-1}]} \\ p_{d_n d_1}^{[T_n]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Determinante  $D$  der Koeffizientenmatrix lautet

$$D = \prod_{i=1}^n a_i + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^n a_i = 2 \prod_{i=1}^n a_i.$$

Ist eine Kante  $e_j$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$  in  $v$  degeneriert, so gilt  $p_{d_{j-1}d_j}^{[T_{j-1}]} = -p_{d_j d_{j+1}}^{[T_j]}$ , und damit

$$\begin{pmatrix} a_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ a_2 & a_1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{d_1 d_2}^{[T_1]} \\ \vdots \\ p_{d_{j-1} d_j}^{[T_{j-1}]} \\ p_{d_j d_{j+1}}^{[T_j]} \\ \vdots \\ p_{d_n d_1}^{[T_n]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit  $\sin(\alpha_{j-1}) = \sin(\pi - \alpha_j) = \sin(\alpha_j)$  folgt dann

$$D = \prod_{i=1, i \neq j}^n a_i + (-1)^{n+1} \prod_{i=1, i \neq j}^n a_i = 2 \prod_{i=1, i \neq j}^n a_i.$$

Aus  $\alpha_i \in (0, \pi)$  für  $i = 1, \dots, n$  folgt  $D > 0$  und damit die Behauptung.

#

Für die Interpolation einer gegebenen Funktion  $f \in C^{q+1}(\Omega)$  ist es wichtig, dass der Interpolant  $s \in \mathcal{S}_q^r(\Delta)$  die Funktion  $f$  nicht nur in den Interpolationspunkten, sondern auf dem ganzen Gebiet  $\Omega$  gut darstellt, d.h. die maximale Abweichung

$$\|f - s\| := \max_{x \in \Omega} |(f - s)(x)|$$

möglichst schnell gegen 0 geht, wenn die Anzahl der Interpolationspunkte steigt. Dies wird durch die sogenannte Approximationsordnung beschrieben.

**Definition 2.5:**

Sei  $h = \text{diam}(\Delta)$  und  $\alpha$  der kleinste Winkel der Triangulierung  $\Delta$ . Dann heißt die größte Zahl  $k \in \mathbb{N}$ , für die es eine nur von  $f$  und  $\alpha$  aber nicht von  $h$  abhängige Konstante  $K > 0$  gibt, sodass

$$\text{dist}(f, \mathcal{S}_q^r(\Delta)) := \inf_{s \in \mathcal{S}_q^r(\Delta)} \|f - s\| \leq K \cdot h^k,$$

die APPROXIMATIONSORDNUNG von  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ .

Es ist wohlbekannt, dass  $k = q + 1$  die optimale Approximationsordnung darstellt. Untersuchungen von de Boor und Jia [8] zeigten jedoch, dass i.A. nicht jeder interpolierende Spliner Raum diese besitzt. Wesentliche Faktoren sind dabei der Polynomgrad der Splines in Abhängigkeit der Differenzierbarkeitsklasse, sowie die Geometrie der Triangulierung (s.a. de Boor und Höllig [6], Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [15]).

Eine Möglichkeit die Approximationsordnung interpolierender Spliner Räume zu bestimmen, ist die Technik der schwachen Interpolation, die von Nürnberger [26] (s.a. Nürnberger und Walz [28], Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [12,15]) entwickelt wurde.

Seien  $T$  ein Dreieck mit  $h = \text{diam}(T)$ ,  $z_1, \dots, z_m$ ,  $m = \text{dim}(\mathcal{P}_q)$  (nicht notwendigerweise verschiedene) Punkte auf  $T$ . Für  $l = 1, \dots, m$  definieren wir  $i_l, j_l \in \mathbb{N}_0$  mit  $k_l = i_l + j_l$  sowie Einheitsvektoren  $d_{1,l}, d_{2,l}$  entlang der Kanten von  $T$ , wobei  $d_{1,l}$  und  $d_{2,l}$  für  $i_l, j_l > 0$  linear unabhängig seien. Ferner sei  $p \in \mathcal{P}_q$  für eine genügend oft differenzierbare Funktion  $f$  die eindeutige Lösung des Interpolationsproblems

$$p_{d_{1,l}^{i_l} d_{2,l}^{j_l}}(z_l) = f_{d_{1,l}^{i_l} d_{2,l}^{j_l}}(z_l), \quad l = 1, \dots, m.$$

**Lemma 2.6:**

Sei  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $q + 1$ -mal differenzierbare Funktion und  $\sigma \in \{\rho + 1, \dots, q + 1\}$ , wobei  $\rho = \max\{k_l, l = 1, \dots, m\}$ . Erfüllt  $p \in \mathcal{P}_q$  die Bedingungen

$$\left| (f - p)_{d_{1,l}^{i_l} d_{2,l}^{j_l}}(z_l) \right| \leq C \cdot h^{\sigma - k_l}, \quad l = 1, \dots, m,$$

für eine (nur von  $q, f$  und dem kleinsten Winkel in  $\Delta$  abhängige) Konstante  $C > 0$ , so gibt es eine Konstante  $K > 0$  (nur abhängig von  $q, f$  und dem kleinsten Winkel in  $\Delta$ ), sodass für alle  $w \in \{0, \dots, \sigma - 1\}$  gilt

$$\|D^w(f - p)\| \leq K \cdot h^{\sigma - w}.$$

Diese Aussage über bivariate Interpolation läßt sich auch auf den univariaten Fall reduzieren. Seien dazu  $e$  eine Kante der Triangulierung der Länge  $h$  und  $z_1, \dots, z_{q+1}$  (nicht notwendigerweise verschiedene) Punkte auf  $e$ . Für  $l = 1, \dots, q + 1$  definieren wir  $k_l \in \mathbb{N}_0$

und einen Einheitsvektor  $d$  entlang der Kante  $e$ . Ferner sei  $p \in \Pi_q$  die eindeutige Lösung des Interpolationsproblems

$$p_{d^{k_l}}(z_l) = f_{d^{k_l}}(z_l), \quad l = 1, \dots, q + 1.$$

**Lemma 2.7:**

Sei  $f : e \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $q + 1$ -mal differenzierbare Funktion und  $\sigma \in \{\rho + 1, \dots, q + 1\}$ , wobei  $\rho = \max\{k_l, l = 1, \dots, m\}$ . Erfüllt ein univariates Polynom  $p \in \Pi_q$  die Bedingungen

$$|(f - p)_{d^{k_l}}(z_l)| \leq C \cdot h^{\sigma - k_l}, \quad l = 1, \dots, q + 1,$$

für eine (nur von  $q, f$  und dem kleinsten Winkel in  $\Delta$  abhängige) Konstante  $C > 0$ , so gibt es eine Konstante  $K > 0$  (nur abhängig von  $q, f$  und dem kleinsten Winkel in  $\Delta$ ), sodass für alle  $w \in \{0, \dots, \sigma - 1\}$  gilt

$$\| (f - p)_{d^w} \| \leq K \cdot h^{\sigma - w}.$$

### 3. Verfeinerung von Triangulierungen

In diesem Abschnitt geben wir einen Algorithmus zur Verfeinerung gegebener Triangulierungen  $\Delta$  an. Hierbei unterteilen wir schrittweise geeignete Dreiecke von  $\Delta$  durch Clough-Tochter Splits, bis in der daraus resultierenden Triangulierung  $\tilde{\Delta}$  keine zwei benachbarten inneren Knoten geraden Grad besitzen. Die Anzahl der dazu notwendigen Unterteilungen ist deutlich niedriger als die bei dem von Nürnberger und Zeilfelder [31] entwickelten Verfahren.

**Lemma 3.1:**

Für jede beliebige Triangulierung  $\Delta$  gibt es eine daraus durch Clough-Tochter-Splits resultierende Triangulierung  $\tilde{\Delta}$ , in der keine zwei benachbarten inneren Knoten geraden Grad besitzen.

**Beweis:**

Sei  $\Delta$  beliebig gegeben, dann setzen wir  $V_g(\Delta) := \{v \in V_I(\Delta) \mid \text{degree}(v) \in 2\mathbb{N}\}$  und  $k(\Delta) := \#V_g(\Delta)$ . Da  $\Delta$  nur endlich viele Knoten besitzt, gilt  $k(\Delta) < \infty$ . Sei  $e = [v_i, v_j] \in E(\Delta)$  eine Kante, die zwei Knoten  $v_i, v_j \in V_g(\Delta)$  miteinander verbindet, dann unterteilen wir ein Dreieck  $T = \Delta(v_i, v_j, v_k) \in \Delta$ . Offensichtlich gilt für die dadurch entstehende Triangulierung  $\tilde{\Delta}$

$$k(\tilde{\Delta}) = k(\Delta) - \begin{cases} 1, & \text{falls } v_k \in V_I(\Delta) \text{ ungeraden Grad besitzt,} \\ 2, & \text{falls } v_k \text{ ein Randknoten ist,} \\ 3, & \text{falls } v_k \in V_I(\Delta) \text{ geraden Grad besitzt,} \end{cases}$$

und somit  $k(\tilde{\Delta}) < k(\Delta)$ . Nach maximal  $k(\Delta) - 1$  Unterteilungen hat damit die Triangulierung  $\tilde{\Delta}$  die gewünschte Eigenschaft.

#

Um die gegebene Triangulierung  $\Delta$  mit möglichst wenig Unterteilungen zu verfeinern, optimieren wir die Reihenfolge der Clough-Tocher-Splits algorithmisch. Sei dazu  $\hat{\Delta}$  die schrittweise verfeinerte Triangulierung im Verlauf von Algorithmus 3.2 und  $V_g(\hat{\Delta})$  jeweils die Menge aller inneren Knoten geraden Grades in  $\hat{\Delta}$ .

**Algorithmus 3.2:**

Sei  $\Delta$  beliebig gegeben. Dann unterteile ein Dreieck  $T = \Delta(v_1, v_2, v_3) \in \hat{\Delta}$  des niedrigst möglichen Falls, bis keiner der folgenden sechs Fälle mehr auftritt.

- 1.)  $v_1, v_2, v_3 \in V_g(\hat{\Delta})$ ,
- 2.)  $v_1, v_2 \in V_g(\hat{\Delta})$ ,  $v_3 \in V_B(\hat{\Delta})$ ,
- 3.)  $v_1, v_2 \in V_g(\hat{\Delta})$ ,  $v_3 \notin V_g(\hat{\Delta})$  und  $\exists \tilde{T} = \Delta(v_3, v_4, v_5) \in \hat{\Delta}$  mit  $v_4, v_5 \in V_g(\hat{\Delta})$ ,
- 4.)  $v_1, v_2 \in V_g(\hat{\Delta})$ ,  $v_3 \notin V_g(\hat{\Delta})$  und  $(V(\Delta_{v_3}) \setminus \{v_1, v_2\}) \cap V_g(\hat{\Delta}) = \emptyset$ ,
- 5.)  $v_1, v_2 \in V_g(\hat{\Delta})$ ,  $v_3 \notin V_g(\hat{\Delta})$ ,
- 6.)  $v_1 \in V_g(\hat{\Delta})$ ,  $v_2, v_3 \notin V_g(\hat{\Delta})$  und für das benachbarte Dreieck  $\tilde{T} = \Delta(v_2, v_3, v_4) \in \hat{\Delta}$  gilt  $v_4 \in V_g(\hat{\Delta})$ .

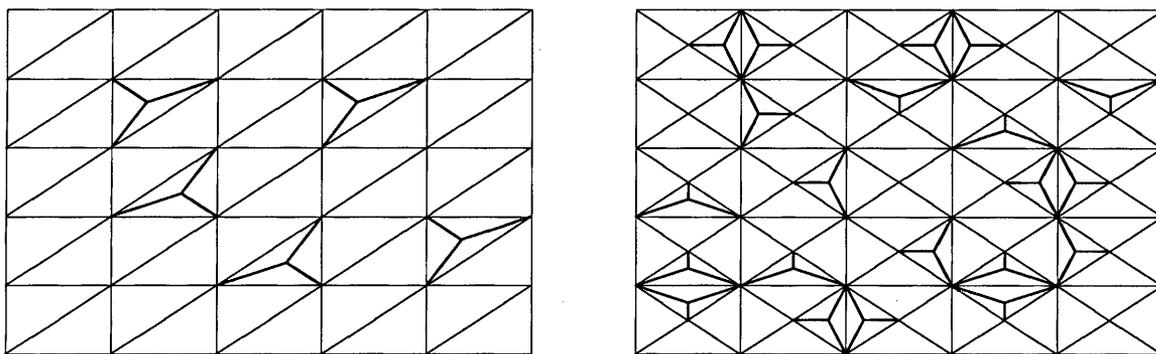


Abb. 3: Verfeinerungen  $\tilde{\Delta}^1$  und  $\tilde{\Delta}^2$  der regelmäßigen Rechteckstriangulierungen.

**Beispiele 3.2:**

- (i) Abbildung 3 zeigt die Verfeinerungen  $\tilde{\Delta}^1$  und  $\tilde{\Delta}^2$  der gleichmäßigen Rechteckstriangulierungen  $\Delta^1$  bzw.  $\Delta^2$ . In beiden Fällen sind alle inneren Knoten geraden Grades.

- (ii) Für Triangulierungen, bei denen jeder innere Knoten ungeraden Grad besitzt, gilt  $\tilde{\Delta} = \Delta$ .
- (iii) Abbildung 4 zeigt die Verfeinerung  $\tilde{\Delta}$  einer exemplarischen Triangulierung  $\Delta$ . Hier werden nur fünf der 69 Dreiecke unterteilt. Die Knoten von  $V_g(\Delta)$  sind mit  $\bullet$  markiert, die Knoten von  $V_g(\tilde{\Delta})$  mit  $\blacksquare$ .

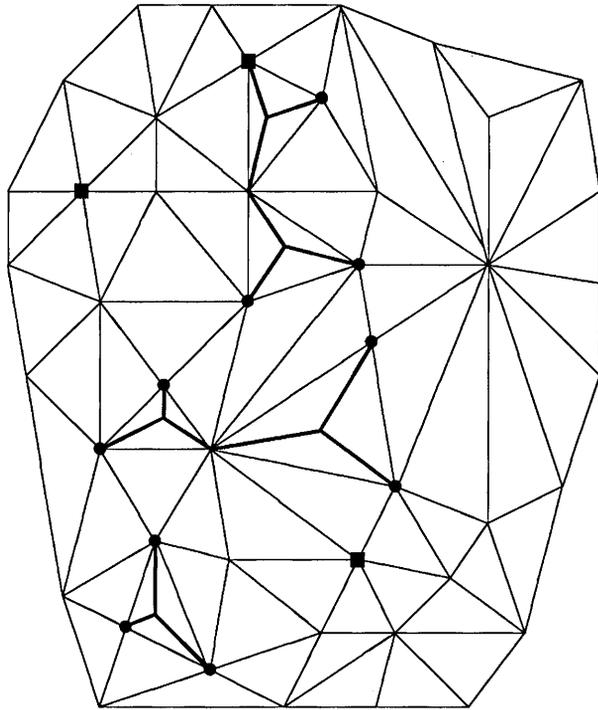


Abb. 4: Verfeinerung einer exemplarischen Triangulierung.

## 4. Lokale Lagrangeinterpolation

Im Folgenden konstruieren wir Punktmenge zur lokalen Lagrange-Interpolation mit quartischen  $C^1$ -Splines auf den in Abschnitt 3 definierten Verfeinerungen  $\tilde{\Delta}$  beliebig gegebener Triangulierungen. Dazu markieren wir zunächst in der Zelle jedes inneren Knotens geraden Grades von  $\tilde{\Delta}$  genau ein geeignetes Dreieck, und für jeden nichtsingulären inneren Eckpunkt  $v$  dieser Dreiecke je genau eine in  $v$  nichtdegenerierte Kante. Im Anschluß wählen wir geeignete Punkte auf den Dreiecken und Kanten von  $\tilde{\Delta}$ , die eine eindeutige Interpolation mit  $\mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$  erlauben. Von großer Bedeutung für die Lokalität der Interpolation ist dabei, auf welche Kanten von  $\tilde{\Delta}$  Punkte gelegt werden.

Sei  $V_g(\tilde{\Delta}) = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Dann markiere für  $i = 1, \dots, n$  genau ein Dreieck  $T_i \in \Delta_{v_i}$  und für jeden nichtsingulären inneren Eckpunkt  $v$  von  $T_i$  genau eine in  $v$  nichtdegenerierte Kante, sodass gilt (vgl. Abbildung 5):

- Keine Zelle in  $\tilde{\Delta}$  enthält mehr als ein markiertes Dreieck.
- Keine markierte Kante verbindet zwei markierte Dreiecke.

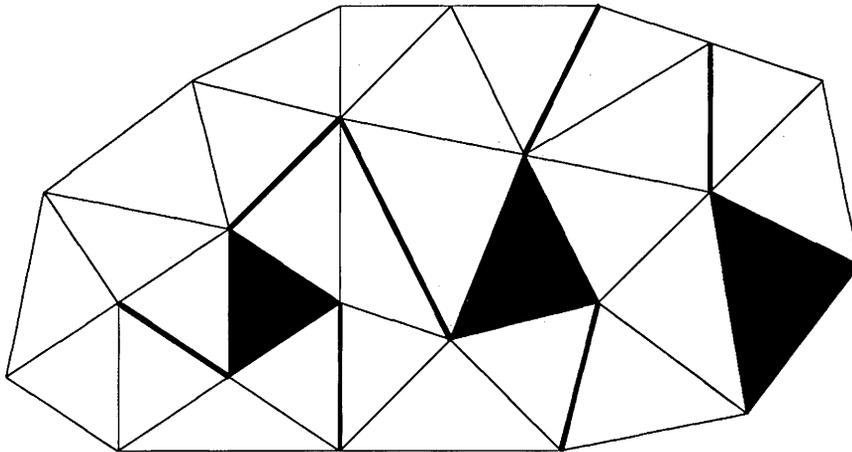


Abb. 5: Mögliche markierte Dreiecke und Kanten einer Triangulierung  $\tilde{\Delta}$ .

Wir setzen:

$V_1 =$  Menge aller Eckpunkte der markierten Dreiecke,

$V_2 = \{v \in V(\tilde{\Delta}) \mid \exists v_1 \in V_1, e = [v, v_1] \in E(\tilde{\Delta})\}$ ,

$V_3 = V(\tilde{\Delta}) \setminus (V_1 \cup V_2)$ , und

$V_4 = V_B(\tilde{\Delta}) \setminus V_1$ .

Für jeden Knoten  $v_i \in V_2$ ,  $i = 1, \dots, l$  bezeichnen wir mit  $e_{i,1}, \dots, e_{i,j_i}$ ,  $j_i \geq 1$  zuerst die unmarkierten, dann die markierten Kanten der Triangulierung, die  $v_i$  mit einem Knoten in  $V_1$  verbinden und paarweise verschiedene Steigungen besitzen. Existieren benachbarte Knoten  $v_1, v_2 \in V_2 \cap V_B(\Delta_v)$  eines Knotens  $v \in V_1$  mit  $j_1 = j_2 = 1$  so setzen wir  $e_{1,2} = e_{2,2} = [v_1, v_2]$ . Für einzelne  $v_i \in V_2 \cap V_B(\Delta_v)$  mit  $j_i = 1$  setzen wir  $e_{i,2}$  eine Kante zu einem benachbarten Knoten in  $V_B(\Delta_v)$  (vgl. Abbildung 6).

Für die Knoten in  $V_3$  ordnen wir einigen Dreiecken von  $\tilde{\Delta}$  Typ 1 bis Typ 3 zu. Seien alle Knoten von  $V_3$  unmarkiert. Für  $i = 1, \dots, 3$  gibt es folgenden Schritt:

**Schritt  $i$ :** Wähle ein Dreieck  $T \in \tilde{\Delta}$ , das genau  $4 - i$  Eckpunkte in  $V_3$  besitzt. Markiere die in  $V_3$  liegenden Eckpunkte von  $T$  und ordne  $T$  Typ  $i$  zu.

Führe so oft wie möglich Schritt 1 durch, dann so oft wie möglich Schritt 2. Für die verbleibenden unmarkierten Knoten in  $V_3$  führe zuletzt Schritt 3 durch.

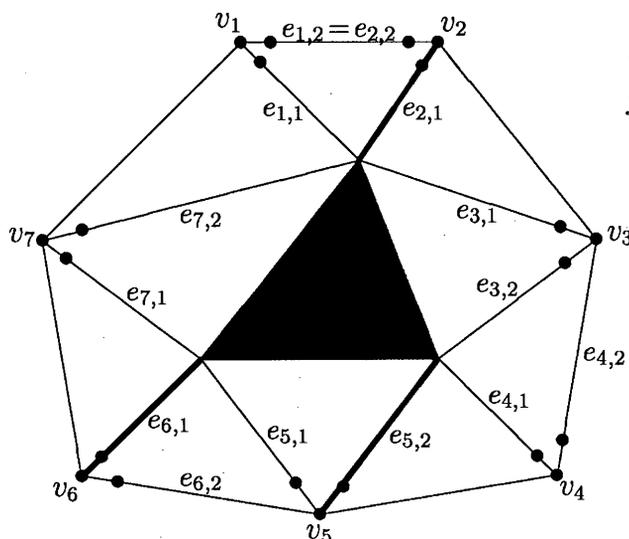
Für die Knoten in  $V_4$  ordnen wir einigen Dreiecken von  $\tilde{\Delta}$  Typ 4 oder Typ 5 zu. Dabei können einige dieser Dreiecke auch bereits vom Typ  $i$ ,  $i \in \{1, \dots, 3\}$  sein. Seien alle Knoten von  $V_4$  wieder unmarkiert, dann gibt es folgende Schritte  $i = 1, 2$ :

**Schritt  $i$ :** Wähle ein Dreieck  $T \in \tilde{\Delta}$ , das genau  $3 - i$  Eckpunkte in  $V_4$  besitzt. Markiere die in  $V_4$  liegenden Eckpunkte von  $T$  und ordne  $T$  Typ  $i + 3$  zu.

Führe so oft wie möglich Schritt 1 durch. Für die verbleibenden unmarkierten Knoten in  $V_4$  führe dann Schritt 2 durch.

Jetzt wählen wir folgende Interpolationspunkte:

- 1.) Lege fünf parallele Strecken  $g_1, \dots, g_5$  auf jedes markierte Dreieck  $T$ , wähle genau  $i$  Punkte auf  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ ,
- 2.) wähle genau einen Punkt im Innern jeder unmarkierten Kante der Triangulierung,
- 3.) wähle jeden Knoten  $v_i \in V_2$ , sowie jeweils einen Punkt im Innern von  $e_{i,1}$  und  $e_{i,2}$  (vgl. Abbildung 6),
- 4.) wähle die in  $V_3$  liegenden Eckpunkt in jedem Dreieck  $T$  mit zugeordnetem Typ 1 bis Typ 3, sowie für jeden dieser Eckpunkte im Innern der beiden anliegenden Kanten von  $T$  je genau einen zusätzlichen Punkt (vgl. Abbildung 7), und
- 5.) wähle für  $i = 1, 2$  genau  $i$  Punkte im Innern jedes Dreiecks von Typ  $i + 3$ .



$v_i \in V_2$ ,  $i = 1, \dots, 7$   
 $j_i = 1$ ,  $i = 1, 2, 4, 6$   
 $j_i = 2$ ,  $i = 3, 5, 7$

Abb. 6: Reihenfolge der Kanten und gewählte Punkte für die Knoten in  $V_2$ .

**Bemerkung 4.1:**

- 1.) Wichtig für die Lokalität der Interpolation ist, dass die gewählten Punkte für die Knoten in  $V_2$  zuerst auf unmarkierten Kanten zu Knoten in  $V_1$  liegen, dann erst auf markierte Kanten gelegt werden.

2.) Die Interpolationspunkte für die in  $V_3$  liegenden Knoten werden nach dem von Nürnberger und Zeilfelder [31] entwickelten Kantenalgorithmus gewählt.

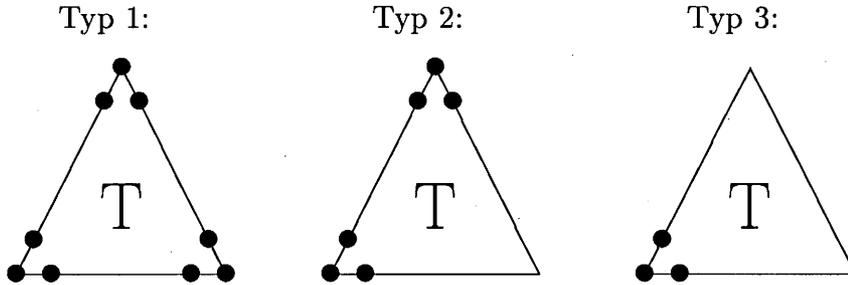


Abb. 7: Gewählte Punkte für die Knoten in  $V_3$ .

Sei  $\tilde{\Delta}$  die in Abschnitt 3 definierte Verfeinerung einer beliebig vorgegebenen Triangulierung und  $L$  die Menge aller auf den Dreiecken von  $\tilde{\Delta}$  gewählter Punkte.

**Theorem 4.2:**

$L$  ist eine Lagrangeinterpolationsmenge für den Splineraum  $\mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$ .

**Beweis:**

Nach Konstruktion gilt

$$\#L = 3 \cdot \#V + \#E + \#V_B + \sigma = \dim(\mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})).$$

Somit reicht es zu zeigen, dass das homogene Interpolationsproblem nur trivial lösbar ist. Sei also  $s \in \mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$  gegeben durch  $s|_T = p^{[T]} \in \mathcal{P}_4$  für alle Dreiecke  $T \in \tilde{\Delta}$  und es gelte  $s(z) = 0$  für alle  $z \in L$ . Auf jedem markierten Dreieck  $T$  implizieren die Interpolationsbedingungen  $s|_T \equiv 0$ . Wir betrachten nun die Knoten  $v$  der Triangulierung. Seien dazu  $v_j, j = 1, \dots, n$  die durch die Kanten  $e_j = [v, v_j]$  mit  $v$  verbundenen Knoten,  $d_j, j = 1, \dots, n$  Einheitsvektoren entlang der Kanten  $e_j$  und  $\Delta_v = \{T_j = \Delta(v, v_j, v_{j+1}), j = 1, \dots, n\}$  die Zelle von  $v$ . Für einen Randknoten entfalle das Dreieck  $T_n$ .

**Fall 1:**  $v \in V_I(\tilde{\Delta}) \cap V_1$  ist nichtsingulär;

Sei o.B.d.A.  $T_1$  das markierte Dreieck und  $e_r, r \notin \{1, 2\}$  der Pfad von  $v$ . Die Interpolationsbedingungen auf den Kanten von  $\tilde{\Delta}$  und die  $C^1$ -Stetigkeit in den Knoten implizieren  $p_{|e_j}^{[T_j]} \equiv 0$  für  $j = 1, \dots, n, j \neq r$ , also insbesondere  $p_{d_j^2}^{[T_j]}(v) = 0$ . Aus  $p_{d_1 d_2}^{[T_1]}(v) = 0$  und der  $C^1$ -Stetigkeit über den Kanten  $e_j, j = 1, \dots, n$  folgt  $p_{d_j d_{j+1}}^{[T_j]}(v) = 0$  für  $j = 2, \dots, n$  und schließlich  $p_{d_r^2}^{[T_r]}(v)$ . Damit gilt

$$D^w p^{[T_j]}(v) = 0, \quad j = 1, \dots, n, w = 0, \dots, 2.$$

**Fall 2:**  $v \in V_I(\tilde{\Delta}) \cap V_1$  ist singulär;

Sei o.B.d.A.  $T_1$  das markierte Dreieck. Wie in Fall 1 gilt  $p_{|e_j}^{[T_j]} \equiv 0$  für  $j = 1, \dots, 4$ , also

insbesondere  $p_{d_2^j}^{[T_j]}(v) = 0$ . Aus  $p_{d_1 d_2}^{[T_1]}(v) = 0$  und der  $C^1$ -Stetigkeit über den Kanten  $e_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$  folgt  $p_{d_j d_{j+1}}^{[T_j]}(v) = 0$  für  $j = 2, \dots, 4$ . Insgesamt gilt

$$D^w p^{[T_j]}(v) = 0, \quad j = 1, \dots, 4, w = 0, \dots, 2.$$

**Fall 3:**  $v \in V_I(\tilde{\Delta}) \setminus V_1$ ;

Die Interpolationsbedingungen auf den Kanten von  $\tilde{\Delta}$ , die 2. Ableitungen aus Fall 1 und Fall 2 sowie die  $C^1$ -Stetigkeit in den Knoten von  $\tilde{\Delta}$  implizieren  $s_{|e_j} \equiv 0$  für  $j = 1, \dots, n$ , und damit insbesondere  $p_{d_2^j}^{[T_j]}(v) = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Da  $n$  ungerade ist, folgt nach Lemma 2.4, dass  $p_{d_j d_{j+1}}^{[T_j]}(v) = 0$  für  $j = 1, \dots, n$ . Folglich gilt

$$D^w p^{[T_j]}(v) = 0, \quad j = 1, \dots, n, w = 0, \dots, 2.$$

**Fall 4:**  $v \in V_B(\tilde{\Delta}) \cap V_1$ ;

Sei o.B.d.A.  $T_1$  das markierte Dreieck. Aus  $s_{|e_j} \equiv 0$  für  $j = 1, \dots, n$  und  $p_{d_1 d_2}^{[T_1]}(v) = 0$  folgt mit der  $C^1$ -Stetigkeit über den Kanten  $e_j$ ,  $j = 2, \dots, n-1$ , dass  $p_{d_j d_{j+1}}^{[T_j]}(v) = 0$  für  $j = 2, \dots, n-1$ . Also gilt

$$D^w p^{[T_j]}(v) = 0, \quad j = 1, \dots, n-1, w = 0, \dots, 2.$$

**Fall 5:**  $v \in V_B(\tilde{\Delta}) \setminus V_1$ ;

In diesem Fall ist genau ein Dreieck  $T = \Delta(v, w_1, w_2)$  vom Typ 4 oder Typ 5. Ist  $T$  vom Typ 5, so ist  $w_1$  ein innerer Knoten und  $w_2$  ein Knoten wie  $v$  (oder umgekehrt), und mit den Interpolationsbedingungen auf den Kanten von  $T$ , sowie Fall 1 bis Fall 4 gibt es ein Polynom  $q^{[T]} \in \mathcal{P}_1$ , sodass sich  $p^{[T]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T]}(z) = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot q^{[T]}(z), \quad z \in T,$$

wobei  $l_j = (a_j x + b_j y + c_j)$ ,  $j = 1, \dots, 3$ , Geraden durch die Kanten von  $T$  sind. Die beiden Interpolationsbedingungen im Innern von  $T$  sowie  $D^2 p^{[T]}(w_1) \equiv 0$  implizieren dann  $q^{[T]} \equiv 0$  und damit  $p^{[T]} \equiv 0$ . Ist  $T$  vom Typ 4, so gilt  $D^w p^{[T]}(w_1) \equiv D^w p^{[T]}(w_2) \equiv 0$  für  $w = 0, \dots, 2$ , und mit den Interpolationsbedingungen auf den Kanten von  $T$  gibt es ein Polynom  $q^{[T]} \in \mathcal{P}_0$ , sodass sich  $p^{[T]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T]}(z) = l_1^2 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot q^{[T]}(z), \quad z \in T,$$

wobei  $l_1 = (a_1 x + b_1 y + c_1)$  eine Gerade durch die Kante  $[w_1, w_2]$  ist, und  $l_j = (a_j x + b_j y + c_j)$ ,  $j = 2, 3$ , Geraden durch die beiden anderen Kanten von  $T$  sind. Die Interpolationsbedingung im Innern von  $T$  impliziert dann  $q^{[T]} \equiv 0$  und damit  $p^{[T]} \equiv 0$ . In beiden Fällen verläuft der Rest des Beweises von Fall 5 analog Fall 4.

Insgesamt gilt  $D^w p^{[T]}(v) = 0$ ,  $w = 0, \dots, 2$  für jeden Knoten  $v \in V(\tilde{\Delta})$  und jedes Dreieck  $T$  mit Eckpunkt  $v$ . Dies impliziert  $s \equiv 0$ .

#

**Theorem 4.3:**

Sei  $d = \dim(\mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta}))$  und  $\{s_i, i = 1, \dots, d\}$  die duale Basis von  $\mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$  bzgl. einer Lagrange-Interpolationsmenge  $L$ . Dann gibt es für jedes  $i \in \{1, \dots, d\}$  einen Knoten  $v \in V(\tilde{\Delta})$ , sodass

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{star}^7(v).$$

**Beweis:**

Sei jetzt  $d_{i,j}$  einen Einheitsvektor entlang der Kante  $e_{i,j} := [v_i, v_j]$ . Dann unterscheiden wir für  $z_i \in L$  folgende Fälle:

**Fall 1:**  $z_i$  liegt auf einem markierten Dreieck;

Sei  $T$  dieses Dreieck, dann gilt  $s|_T \not\equiv 0$  und damit können Funktionswert und partielle Ableitungen von  $s$  in jedem Eckpunkt von  $T$  ungleich Null sein. Sei  $v_1$  solch ein Knoten und  $e_{1,2}$  die Kante zu einem Knoten  $v_2 \notin T$ , dann folgt  $s|_{e_{1,2}} \not\equiv 0$ .

**Fall 1.1:**  $e_{1,2}$  ist der Pfad von  $v_1$ ;

- a)  $v_2$  liegt in der Zelle eines Knotens  $v_3 \in V_1$ ,  $v_3 \notin T$ ,  $e_{2,3}$  ist nicht der Pfad von  $v_3$ ;  
Aus den drei homogene Interpolationsbedingungen auf  $e_{3,2}$  sowie der  $C^1$ -Stetigkeit in  $v_3$  folgt  $s|_{e_{2,3}} \equiv 0$ . Damit gilt

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}(v_1).$$

- b)  $v_2$  liegt in der Zelle eines Knotens  $v_3 \in V_1$ ,  $v_3 \notin T$ ,  $e_{2,3}$  ist der Pfad von  $v_3$ ;  
Die vier homogene Interpolationsbedingungen auf  $e_{2,3}$  und  $s_{d_{2,3}}(v_2) \neq 0$  implizieren  $s|_{d_{2,3}} \not\equiv 0$ . Da  $e_{2,3}$  der Pfad von  $v_3$  ist, folgt aus den homogenen Interpolationsbedingungen sowie die  $C^1$ -Stetigkeit in  $v_3$ , dass  $s|_e \equiv 0$  für alle anderen Kanten  $e$  mit Endpunkt  $v_3$ . Somit gilt (vgl. Abbildung 8):

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^2(v_1).$$

- c)  $v_2$  liegt nicht in der Zelle eines weiteren Eckpunkts in  $V_1$ .  
Dann gibt es nach Zuordnung von Typ 1 bis Typ 3 eventuell ein Dreieck  $T_1 = \Delta(v_2, v_3, v_j)$  des Typs 2. Jedes weitere Dreieck  $T_2 = \Delta(v_3, v_4, v_k)$  kann nur vom Typ 3 sein, sonst hätte  $T_2$  vor  $T_1$  Typ 1 zugeordnet werden müssen. Mit analogem Argument ist klar, dass es kein weiteres Dreieck  $T_3 = \Delta(v_4, v_5, v_l)$  des Typs 3 gibt. Insgesamt folgt mit den  $C^1$ -Bedingungen in den Knoten, dass  $s|_{e_{i,i+1}} \not\equiv 0$  für  $i = 2, 3$  sowie  $s|_e \equiv 0$  für alle Kanten  $e \neq e_{3,4}$  mit Endpunkt  $v_4$ . Insbesondere gilt  $s_{d_{4,3}^2}(v_4) \neq 0$ . Da  $v_4$  ungeraden Grad besitzt, folgt nach Lemma 2.4 daraus  $D^2s(v_4) \neq 0$ . Insgesamt gilt (vgl. Abbildung 8):

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^4(v_1).$$

**Fall 1.2:**  $e_{1,2}$  ist nicht der Pfad von  $v_1$ ;

- a)  $v_2$  liegt in der Zelle eines Knotens  $v_3 \in V_1$ ,  $v_3 \notin T$ ,  $e_{2,3}$  ist nicht der Pfad von  $v_3$ ;  
Mit der  $C^1$ -Stetigkeit im Knoten  $v_2$  kann  $s_{d_{2,3}}(v_2) \neq 0$  sein. Dann gilt  $s|_{e_{2,3}} \not\equiv 0$ , also

insbesondere  $s_{d_{3,2}^2}(v_3) \neq 0$ . Die  $C^1$ -Bedingung in  $v_3$  impliziert dann  $s_{d_{3,4}^2}(v_3) \neq 0$  für den Pfad  $e_{3,4}$  von  $v_3$ . Wie in Fall 1.1 gilt damit (vgl. Abbildung 8):

$$\text{supp}(s_i) \subset st^6(v_1).$$

- b)  $v_2$  liegt in der Zelle eines Knotens  $v_3 \in V_1$ ,  $v_3 \notin T$ ,  $e_{2,3}$  ist der Pfad von  $v_3$ ; Analog Fall 1.1 b) gilt dann

$$\text{supp}(s_i) \subset st^2(v_1).$$

- c)  $v_2$  liegt nicht in der Zelle eines Eckpunkts eines weiteren Eckpunkts in  $V_1$ ; Analog Fall 1.1 c) gilt dann

$$\text{supp}(s_i) \subset st^4(v_1).$$

Da diese Konstellationen für alle drei Eckpunkte des Dreiecks  $T$  auftreten können, gilt für einen Eckpunkt  $v$  von  $T$ :

$$\text{supp}(s_i) \subset st^7(v).$$

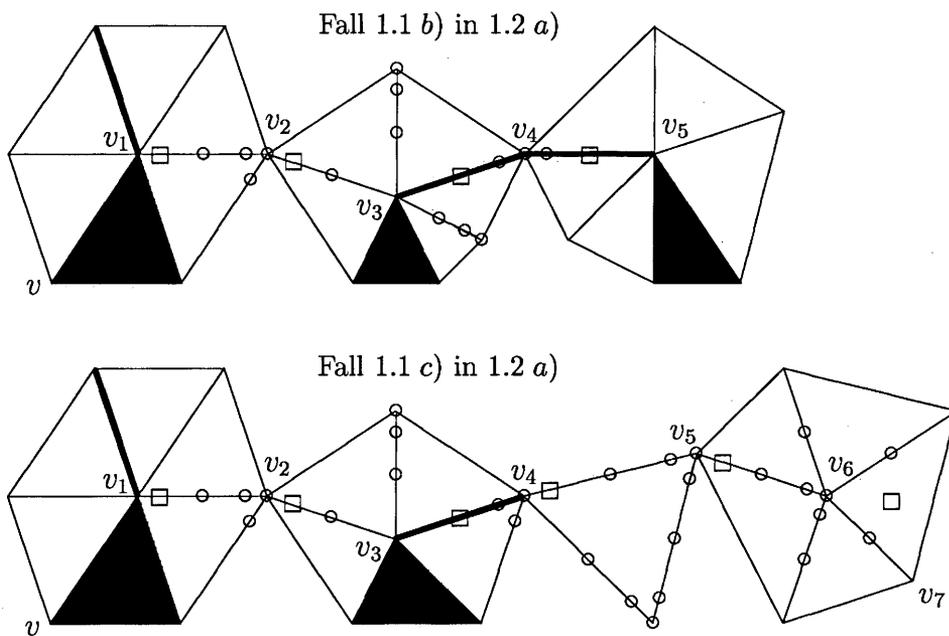


Abb. 8: Punkte in Fall 1: ○ Null gegeben, □ evtl. ungleich Null daraus berechnet.

**Fall 2:**  $z_i$  wurde nach 2.) im Innern einer Kante  $e = [v_0, v_1]$  gewählt;

**Fall 2.1:**  $v_1 \in V_1$ ;

Die Kante  $e$  ist nach Voraussetzung nicht der Pfad von  $v_1$ . Wegen  $s_{|e} \neq 0$  kann daher  $s_{d_{1,2}}(v_1) \neq 0$  für eine Kante  $e_{1,2}$  mit  $v_2 \in V_1$  gelten. Andererseits gilt  $s_{d_{1,2}^2}(v_0) \neq 0$  für den Pfad  $\tilde{e}_{0,1} = [v_0, \tilde{v}_1]$  von  $v_0$ . Wie in Fall 1.1 impliziert dies insgesamt (vgl. Abbildung 9):

$$\text{supp}(s_i) \subset st^5(v_1).$$

**Fall 2.2:**  $e \in E_B(\Delta_v)$ ,  $v \in V_1$ ;

Betrachten wir den Knoten  $v_1$  (für  $v_0$  gilt analoges). Für einen benachbarten Knoten  $v_2 \in V_B(\Delta_v)$  kann  $s_{|e_{1,2}} \neq 0$  sein. Ist  $v_1 \in V_B(\Delta_{v_3})$  oder  $v_2 \in V_B(\Delta_{v_3})$  für  $v_3 \in V_1$ , so folgt aus den Interpolationsbedingungen in 3.), dass  $s_{|e_{1,3}} \equiv 0$  bzw.  $s_{|e_{2,3}} \equiv 0$ , und es gilt

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^2(v_0).$$

Andernfalls ist  $v_3$  wie in Fall 1.1c), und es gilt (vgl. Abbildung 9):

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^5(v_0).$$

**Fall 2.3:**  $v_0 \in V_3$  oder  $v_1 \in V_3$  (vgl. Fall 1.1 c);

Liegt  $e$  auf einem Dreieck des Typs  $i$ ,  $i \in \{1, \dots, 3\}$ , so gibt es eventuell ein anhängendes Dreieck des Typs  $i + 1$ , falls  $i \leq 2$ , und eventuell ein daran anhängendes Dreieck des Typs  $i + 2$ , falls  $i = 1$ . Insgesamt gilt daher

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^4(v_0).$$

Liegt  $e$  auf keinem Dreieck vom Typ 1 bis Typ 3, so folgt

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}(v_0).$$

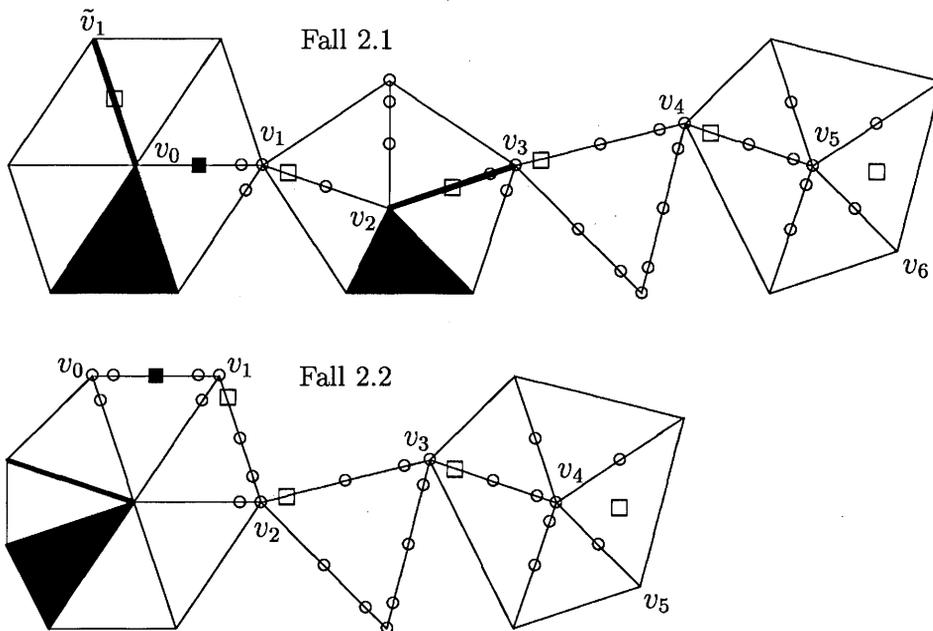


Abb. 9: Punkte in Fall 2: ■  $z_i$ , ○ Null gegeben, □ evtl. ungleich Null berechnet.

**Fall 3:**  $z_i \in [v_0, v_1]$  wurde nach 3.) oder 4.) gewählt;

**Fall 3.1:**  $v_0 \in V_2$ ;

Für  $v_1 \in V_1$  liegen die gleichen Situationen wie in Fall 1 vor (vgl. Abbildung 10). Ist  $v_2 \in V_2$ , so liegt die gleiche Situation wie in Fall 2.2 vor. Es gilt jeweils

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^4(v_0).$$

**Fall 3.2:**  $v_0, v_1 \in V_3$ ;

Dann gilt analog Fall 2.3 (vgl. Abbildung 10):

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^4(v_1).$$

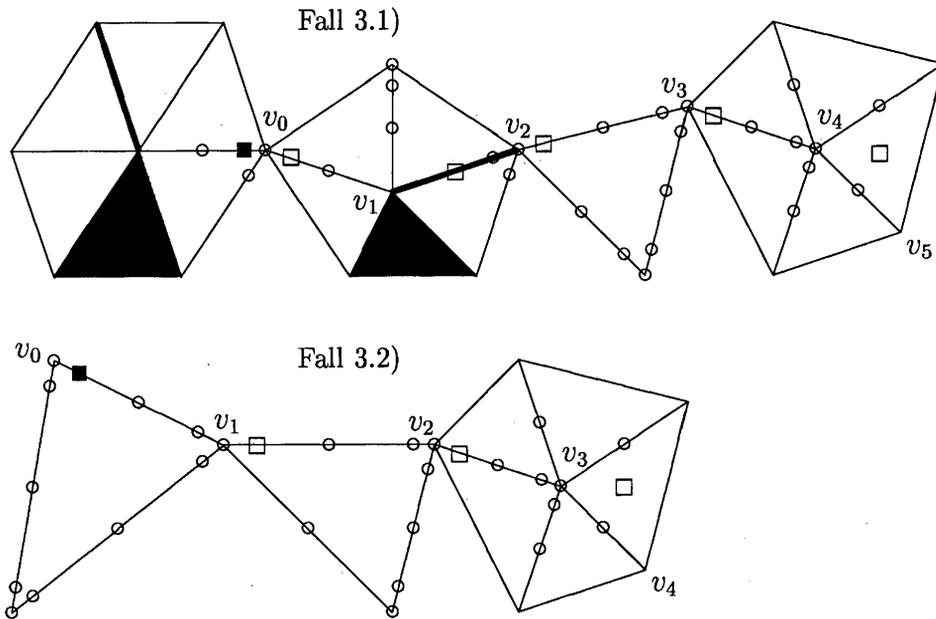


Abb. 10: Punkte in Fall 3: ■  $z_i$ , ○ Null gegeben, □ evtl. ungleich Null berechnet.

**Fall 4:**  $z_i$  liegt im Innern eines Dreiecks  $T$  vom Typ 4 oder Typ 5, gewählt für  $v_0, v_1 \in V_4$ ; Durch die gegebenen homogenen Interpolationsbedingungen folgt  $s|_e \equiv 0$  für alle Kanten  $e$  von  $T$ . Da  $z_i \in T$  folgt  $s|_T \not\equiv 0$  und damit  $s|_T \not\equiv 0$  für alle Dreiecke  $T$  mit Eckpunkt  $v_0$  oder  $v_1$ . Für alle anderen Dreiecke  $\tilde{T}$  folgt aus den homogenen Interpolationsbedingungen, dass  $s|_{\tilde{T}} \equiv 0$ . Insgesamt gilt daher

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^2(v_1).$$

#

**Bemerkung 4.4:**

- Aus  $\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^7(v)$  für die Fundamentalsplines von  $S_4^1(\tilde{\Delta})$  folgt nicht, dass  $s_i$  auf allen Dreiecken von  $\text{st}^7(v)$  verschieden von Null ist. Vielmehr ist es so, dass  $s_i$  nur auf kleinen Bereichen Funktionswerte ungleich Null annimmt.

- Die Fundamentalen Splines, die ein Hilfsmittel zum Beweis der Lokalität der Interpolation sind, spielen bei der Berechnung des Interpolanten  $s \in \mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$  keine Rolle. Der Spline  $s$  wird aus den gegebenen Interpolationsbedingungen schrittweise effizient durch Lösung kleiner linearer Gleichungssysteme bestimmt.

## 5. Approximationsgüte der Interpolation

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Approximationsgüte der Lagrange-Interpolation mit  $\mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$ . Dazu verwenden wir die von Nürnberger [26] (s.a. Nürnberger und Walz [28], Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [12,15]) entwickelte Technik der schwachen Interpolation. Sei  $h = \text{diam}(\Delta)$ ,  $\alpha$  der kleinste Winkel der Triangulierung, und  $\beta$  der am nächsten an  $\pi$  liegende Winkel von einerseits den Summen der beiden anliegenden Winkel aller markierten Kanten, und andererseits der zwischen den Kanten  $e_{i,1}$  und  $e_{i,2}$  eingeschlossene Winkel, für jeden Knoten  $v_i \in V_2$  der Triangulierung  $\tilde{\Delta}$ . Zunächst untersuchen wir den Interpolationsfehler in den  $C^1$ -Ringen der Knoten, in den  $C^2$ -Ringe der Knoten und auf den Kanten von  $\tilde{\Delta}$ . In der zentralen Aussage beweisen wir dann die Optimalität der Approximationsordnung dieser Interpolation mit quartischen  $C^1$ -Splines auf den verfeinerten Triangulierungen  $\tilde{\Delta}$ .

Sei  $f \in C^5(\Omega)$  gegeben,  $h = \text{diam}(\tilde{\Delta})$  und  $s \in \mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$  mit  $s|_T \equiv p^{[T]} \in \mathcal{P}_4$  für alle Dreiecke  $T \in \tilde{\Delta}$  das eindeutige Interpolationspolynom an  $f$  bzgl.  $L$ . Ferner seien  $v \in V(\tilde{\Delta})$  und  $d_i, d_j$  zwei linear unabhängige Einheitsvektoren.

### Lemma 5.1:

Existieren zwei (nur von  $f, \alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstanten  $C_i, C_j > 0$ , sodass

$$|(f - s)_{d_i}(v)| \leq C_i \cdot h^4 \quad \text{und} \quad |(f - s)_{d_j}(v)| \leq C_j \cdot h^4,$$

so gibt es eine (nur von  $f, \alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $K > 0$  mit

$$\|D^1(f - s)(v)\| \leq K \cdot h^q.$$

### Beweis:

Sei  $\text{degree}(v) = n$  und  $v$  im Uhrzeigersinn verbunden mit den Knoten  $v_l, l = 1, \dots, n$  durch Kanten  $e_l = [v, v_l]$ . Wir setzen  $d_l$  für  $l = 1, \dots, n$  einen Einheitsvektor entlang der Kante  $e_l$ . Sei o.B.d.A.  $i = 1$ . Für  $1 < k < j$  bezeichne  $\alpha_1$  den von  $e_1$  und  $e_k$ , bzw  $\alpha_k$  den von  $e_k$  und  $e_j$  eingeschlossenen Winkel. (Der Fall  $1 < j < k$  wird analog bewiesen.)

Dann gilt  $\sin(\alpha_1 + \alpha_k)e_k = \sin(\alpha_k)e_1 + \sin(\alpha_1)e_j$  für  $k = 2, \dots, n, k \neq j$  und damit

$$\begin{aligned} |(f - s)_{d_k}(v)| &\leq \left| \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_k)} (f - s)_{d_j}(v) \right| + \left| \frac{\sin(\alpha_k)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_k)} (f - s)_{d_1}(v) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_k)} \right| C_j \cdot h^4 + \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_k)} \right| C_1 \cdot h^4 \leq C_k \cdot h^4, \end{aligned}$$

mit einer (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängigen) Konstanten  $C_k = \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_k)} \right| (C_1 + C_j) > 0$ .  
 Aus  $K := \max\{C_l \mid l = 1, \dots, n\}$  folgt die Behauptung.

#

Sei  $f \in C^5(\Omega)$  gegeben,  $h = \text{diam}(\tilde{\Delta})$  und  $s \in S_4^1(\tilde{\Delta})$  mit  $p^{[T]} \equiv s|_T \in \mathcal{P}_4$  für alle Dreiecke  $T \in \tilde{\Delta}$  das eindeutige Interpolationspolynom an  $f$  bzgl.  $L$ . Für  $v \in V(\tilde{\Delta})$  mit  $\text{degree}(v) = n$  sei  $v$  im Uhrzeigersinn verbunden mit den Knoten  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  durch Kanten  $e_i = [v, v_i]$ . Ferner sei  $d_i$  für  $i = 1, \dots, n$  ein Einheitsvektor entlang der Kante  $e_i$  und  $\Delta_v = \{T_i = \Delta(v, v_i, v_{i+1}), i = 1, \dots, n\}$  die Zelle um  $v$ . Für einen Randknoten entfalle das Dreieck  $T_n$ .

**Lemma 5.2:**

Existieren (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstanten  $C_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sodass

$$\left| (f - p^{[T_i]})_{d_i^2}(v) \right| \leq C_i \cdot h^3,$$

(für jeden inneren, nichtsingulären Eckpunkt  $v$  eines markierten Dreiecks entfalle die Ungleichung für  $i = n$ ), sowie eine (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $C_{1,2} > 0$ , falls  $v$  ein singulärer Knoten, Randknoten oder Eckpunkt eines markierten Dreiecks ist, für die gilt:

$$\left| (f - p^{[T_1]})_{d_1 d_2}(v) \right| \leq C_{1,2} \cdot h^3,$$

so gibt es eine (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $K > 0$  mit

$$\| D^2(f - s)(v) \| \leq K \cdot h^3.$$

**Beweis:**

Sei  $\alpha_i$  für  $i = 1, \dots, n$  der von  $e_i$  und  $e_{i+1}$  eingeschlossene Winkel. Dann betrachten wir fünf Fälle. Die Konstante  $K$  ergibt sich letztlich als Maximum aller auftretenden Konstanten.

**Fall 1:**  $v \in V_I(\tilde{\Delta}) \cap V_1$  ist nicht singulär;

Falls  $e_3$  in  $v$  degeneriert ist, so folgt

$$\left| (f - p^{[T_2]})_{d_2 d_3}(v) \right| = \left| -(f - p^{[T_1]})_{d_2 d_1}(v) \right| \leq C_{1,2} \cdot h^3.$$

Andernfalls folgt aus  $\sin(\alpha_1)e_3 = \sin(\alpha_1 + \alpha_2)e_2 - \sin(\alpha_2)e_1$ , dass

$$\begin{aligned} \left| (f - p^{[T_2]})_{d_2 d_3}(v) \right| &\leq \left| \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} (f - p^{[T_1]})_{d_2^2}(v) \right| + \left| \frac{\sin(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} (f - p^{[T_1]})_{d_2 d_1}(v) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1)} \right| C_2 \cdot h^3 + \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1)} \right| C_{1,2} \cdot h^3 \leq C_{2,3} \cdot h^3 \end{aligned}$$

mit einer (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängigen) Konstanten  $C_{2,3} = \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1)} \right| (C_2 + C_{1,2}) > 0$ .

Mit analogem Argument existiert für  $l = 3, \dots, n - 1$  eine (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $C_{l,l+1} > 0$ , sodass

$$\left| (f - p^{[T_l]})_{d_l d_{l+1}}(v) \right| \leq C_{l,l+1} \cdot h^3.$$

Letztlich gilt  $\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)e_n = \sin(\alpha_n)e_{n-1} + \sin(\alpha_{n-1})e_1$ , und damit

$$\begin{aligned} |(f - p^{[T_n]})_{d_n^2}(v)| &\leq \left| \frac{\sin(\alpha_n)}{\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)} (f - p^{[T_1]})_{d_{n-1}d_n}(v) \right| + \left| \frac{\sin(\alpha_{n-1})}{\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)} (f - p^{[T_1]})_{d_n d_1}(v) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)} \right| C_{n-1,n} \cdot h^3 + \left| \frac{1}{\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)} \right| C_{n,1} \cdot h^3 \leq C_n \cdot h^3 \end{aligned}$$

mit einer (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängigen) Konstanten  $C_n = \left| \frac{1}{\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)} \right| (C_{n-1,n} + C_{n,1}) > 0$ .

**Fall 2:**  $v \in V_I(\tilde{\Delta}) \cap V_1$  ist singular;

Da alle Kanten  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  im Knoten  $v$  degeneriert sind, folgt

$$\begin{aligned} |(f - p^{[T_2]})_{d_2 d_3}(v)| &= |-(f - p^{[T_3]})_{d_3 d_4}(v)| = |(f - p^{[T_4]})_{d_4 d_1}(v)| \\ &= |-(f - p^{[T_1]})_{d_1 d_2}(v)| \leq C_{1,2} \cdot h^3. \end{aligned}$$

**Fall 3:**  $v \in V_I(\tilde{\Delta}) \setminus V_1$ ;

Zur Bestimmung der gemischten partiellen Ableitungen gibt es folgendes lineare Gleichungssystem (vgl. Lemma 2.4),

$$\begin{pmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (f - p)_{d_1 d_2}(v) \\ \vdots \\ (f - p)_{d_n d_1}(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n (f - p^{[T_1]})_{d_1^2}(v) \\ \vdots \\ b_1 (f - p^{[T_n]})_{d_n^2}(v) \end{pmatrix}$$

wobei  $a_i = \sin(\alpha_i)$  und  $b_i = \sin(\alpha_i + \alpha_{i+1})$  für  $i = 1, \dots, n$ .

Sei  $A$  jetzt die Koeffizientenmatrix auf der linken Seite der Gleichung und  $A_i$  die Matrix die daraus entsteht, in dem die  $i$ -te Spalte durch den Ergebnisvektor ersetzt wird. Nach der Cramerschen Regel folgt dann für  $i = 1, \dots, n$ : ( $\sigma_j = 1$ , falls  $i < j$ ,  $\sigma_j = 0$  sonst.)

$$\begin{aligned} |(f - p^{[T_i]})_{d_i d_{i+1}}(v)| &= \left| \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \right| = \left| \frac{\sin(\alpha_i) \left( \sum_{j=1}^n \left( \prod_{l \neq j-1, j}^n \sin(\alpha_l) \right) (-1)^{\sigma_j} \sin(\alpha_{j-1} + \alpha_j) (f - p^{[T_j]})_{d_j^2}(v) \right)}{2 \left( \prod_{j=1}^n \sin(\alpha_j) \right)} \right| \\ &\leq \left| \frac{\sum_{j=1}^n (f - p^{[T_j]})_{d_j^2}(v)}{2 \left( \prod_{j=1}^n \sin(\alpha_j) \right)} \right| \leq \frac{\sum_{j=1}^n C_j \cdot h^3}{2 \left( \prod_{j=1}^n \sin(\alpha_j) \right)} \leq C_{i,i+1} \cdot h^3 \end{aligned}$$

mit einer (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängigen) Konstanten

$$C_{i,i+1} = n \cdot \frac{\max\{C_j, j=1, \dots, n\}}{2 \left( \prod_{j=1}^n \sin(\alpha_j) \right)} > 0.$$

**Fall 4:**  $v \in V_B(\tilde{\Delta}) \cap V_1$ ;

Wie in Fall 1 folgt für  $l = 2, \dots, n-1$  die Existenz einer (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängigen) Konstanten  $C_{l,l+1} > 0$ , sodass

$$|(f - p^{[T_l]})_{d_l d_{l+1}}(v)| \leq C_{l,l+1} \cdot h^3.$$

**Fall 5:**  $v \in V_B(\tilde{\Delta}) \setminus V_1$ ;

Wegen der zusätzlich im Innern eines Dreiecks  $T_l \in \Delta_v$  gewählten Interpolationsbedingungen  $z_1, \dots, z_j$ ,  $j \in \{1, 2\}$  sind mit Lemma 5.2 für die Kanten von  $T$  sowie Fall 1 bis Fall 4 die Voraussetzungen von Lemma 2.6 mit  $\sigma = 5$  erfüllt. Es gibt daher eine (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $C_{l,l+1} > 0$ , sodass

$$|(f - p^{[T_l]})_{d_l d_{l+1}}(v)| \leq C_{l,l+1} \cdot h^3.$$

Der Rest des Beweises von Fall 5 verläuft wie in Fall 4.

#

Wir betrachten nun den univariaten Fall für eine Kante von  $\tilde{\Delta}$ . Sei  $f \in C^5(\Omega)$  gegeben,  $s \in \mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$  das eindeutige Interpolationspolynom an  $f$  bzgl. einer Lagrange-Interpolationsmenge  $L$  und  $e = [u, v]$  eine Kante der Triangulierung der Länge  $h$ . Für  $m \in \{2, \dots, 5\}$  seien  $z_1 = u, z_2 = v$  und  $z_3, \dots, z_m$ , falls  $m \geq 3$  die auf  $e$  gewählten Interpolationspunkte,  $d_1, d_2$  Einheitsvektoren von  $u$  nach  $v$  bzw. von  $v$  nach  $u$ , sowie  $l_1, l_2 \in \{0, \dots, 2\}$  mit  $l_1 + l_2 \leq 3$  derart, dass  $m + l_1 + l_2 = 5$ .

**Lemma 5.3:**

Existieren zwei (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstanten  $C_1, C_2 > 0$ , sodass

$$|(f - s)_{d_1^{k_1}}(u)| \leq C_1 \cdot h^{5-k_1} \quad \text{und} \quad |(f - s)_{d_2^{k_2}}(v)| \leq C_2 \cdot h^{5-k_2}$$

für  $k_i = 0, \dots, l_i$ ,  $i = 1, 2$ , so gibt es eine Konstante  $K_e > 0$  (nur abhängig von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ ), sodass für alle  $w \in \{0, \dots, 4\}$  und  $i = 1, 2$  gilt

$$\|((f - s)|_e)_{d_i^w}\| \leq K_e \cdot h^{5-w}.$$

**Beweis:**

Da  $s \in \mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$  die gegebene Funktion  $f$  interpoliert, gilt

$$(f - s)(z_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Mit den gegebenen Ungleichungen in  $u$  und  $v$  sind daher die Voraussetzungen von Lemma 2.7 mit  $\sigma = 5$  erfüllt. Es gibt also eine Konstante  $K_e > 0$  (nur abhängig von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ ), sodass für  $w \in \{0, \dots, 4\}$  und  $i = 1, 2$  gilt

$$\|((f - s)|_e)_{d_i^w}\| \leq K_e \cdot h^{5-w}.$$

#

Sei  $f \in C^5(\Omega)$  gegeben und  $s \in \mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$  die eindeutige Interpolationsfunktion an  $f$  bzgl. einer Lagrange-Interpolationsmenge  $L$ .

**Theorem 5.4:**

Es existiert eine (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $K > 0$ , sodass für alle  $w \in \{0, \dots, 4\}$  gilt:

$$\| D^w(f - s) \| \leq K \cdot h^{5-w}.$$

**Beweis:**

Um dieses Theorem zu beweisen zeigen wir, dass auf jedem Dreieck  $T \in \tilde{\Delta}$  für die Interpolationsfunktion  $p^{[T]} \equiv s|_T$  die Voraussetzungen von Lemma 2.6 mit  $\sigma = 5$  erfüllt sind. Da die Interpolation lokal ist, müssen nur endlich viele Dreiecke in der Umgebung von  $T$  und daher nur endlich viele Fälle betrachtet werden. Letztlich erhalten wir die Konstante  $K$  unabhängig von  $h$  als das Maximum der in den verschiedenen Fällen auftretenden Konstanten. Wir betrachten folgende zwei Fälle:

**Fall 1:** Interpolation auf markierten Dreiecken;

Sei  $T$  ein markiertes Dreieck und  $L_T$  die Menge der Interpolationspunkte von  $L$  auf  $T$ . Dann gilt

$$|(f - p^{[T]})(z)| = 0, \quad z \in L_T.$$

Nach Lemma 2.6 gibt es daher eine Konstante  $K_1 > 0$  (nur abhängig von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ ), sodass für  $w \in \{0, \dots, 4\}$  gilt:

$$\| D^w(f - p^{[T]}) \| \leq K_1 \cdot h^{5-w}.$$

**Fall 2:** Interpolation auf unmarkierten Dreiecken;

Sei  $T$  ein unmarkiertes Dreieck. Dann gibt es nach Lemma 5.3 eine Konstante  $K_e > 0$  (nur abhängig von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ ), sodass für  $w \in \{0, \dots, 4\}$

$$\| D^w(f - s)|_e \| \leq K_e \cdot h^{5-w}$$

für die Kanten des Dreiecks  $T$ . In den Eckpunkten  $v_1, \dots, v_3$  von  $T$  impliziert Lemma 5.2 die Existenz von Konstanten  $C_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, 3$  (nur abhängig von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ ), sodass

$$\| D^2(f - s)(v_i) \| \leq C_i \cdot h^3.$$

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 5.2 mit  $\sigma = 5$  erfüllt, und es gibt eine Konstante  $K_2 > 0$  (nur abhängig von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ ), sodass für  $w \in \{0, \dots, 4\}$  gilt:

$$\| D^w(f - p^{[T]}) \| \leq K_2 \cdot h^{5-w}.$$

#

**Korollar 5.5:**

Für jede Funktion  $f \in C^5(\Omega)$  gibt es eine (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $K > 0$ , sodass

$$\text{dist}(f, \mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})) \leq K \cdot h^5.$$

### Bemerkung 5.6:

Es ist bekannt, dass fast-degenerierte Kanten und fast-singuläre Knoten bei der Berechnung des Interpolaten zu numerischen Instabilitäten führen können (vgl. Lai und Schumaker [21]). Solche Konstellationen werden hier durch den Winkel  $\beta$  beschrieben. In Anwendungsgebieten werden daher für  $\beta \in [\pi - \epsilon, \pi + \epsilon]$ , für geeignetes  $\epsilon > 0$ , die entsprechenden Kanten als parallel interpretiert, und dann die markierten Kanten, bzw. Interpolationspunkte anders gelegt.

## Literaturverzeichnis

- [1] P. Alfeld, B. Piper, L.L.Schumaker: An explicit basis for  $C^1$  quartic bivariate splines, *SIAM Journal of Numerical Analysis* **24** (1987) 891-911.
- [2] P. Alfeld, L.L. Schumaker: The Dimension of bivariate spline spaces of smoothness  $r$  and Grad  $d \geq 4r + 1$ , *Constructive Approximation* **3** (1987) 189-197.
- [3] P. Alfeld, B. Piper, L.L.Schumaker: Minimally supported bases for spaces of bivariate piecewise polynomials of smoothness  $r$  and degree  $d \geq 4r + 1$ , *Computer Aided Geometric Design* **4** (1987) 105-123.
- [4] P. Alfeld, L.L. Schumaker: Non-existence of star-supported spline bases, *SIAM J. Math. Anal.* **31** (2000) 1482-1501.
- [5] C. de Boor: A practical guide to splines, Springer Verlag, New York 1978.
- [6] C. de Boor, K. Höllig: Approximation order from bivariate  $C^1$  cubics: a counterexample, *Proceedings of the American Mathematical Society* **87** (1983) 649-655.
- [7] C. de Boor: B-Form basics, in: G. Farin, (Ed.): *Geometric Modeling*, SIAM, Philadelphia 1987, 131-148.
- [8] C. de Boor and Q. Jia: A sharp upper bound on the approximation order of smooth bivariate pp functions, *J. Approx. Theory* **72** (1993) 24-33.
- [9] C.K. Chui, D. Hong: Construction of local  $C^1$  quartic spline elements for optimal-order approximation, *Mathematics of Computation* **65** (1996) 85-98.
- [10] C.K. Chui, D. Hong: Swapping edges of arbitrary triangulations to achieve the optimal order of approximation, *SIAM Journal of Numerical Analysis* **34** (1997) 1472-1482.
- [11] R.W. Clough and J.L. Tocher: Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending, in: *Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright Patterson A.F.B., Ohio 1965.

- [12] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Approximation order of bivariate spline interpolation for arbitrary smoothness, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **90** (1998) 117-134.
- [13] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Cubic spline interpolation on nested polygon triangulations, in: A. Cohen, C. Rabut, L.L. Schumaker (Eds.): *Curve and Surface Fitting*, St. Malo 1999, Vanderbilt Univ. Press, Nashville 2000, 161-170.
- [14] O. Davydov, G. Nürnberger: Interpolation by  $C^1$  splines of degree  $q \geq 4$  on triangulations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **126** (2001) 159-183.
- [15] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Bivariate spline interpolation with optimal approximation order, *Constr. Approx.* **17** (2000) 181-208.
- [16] G. Farin: A modified Clough-Tocher interpolant, *CAGD* **2** (1985) 19-27.
- [17] G. Farin: Triangular Bernstein-Bézier Patches, *CAGD* **3** (1986) 83-127.
- [18] J. Gao: Interpolation by  $C^1$  quartic bivariate splines, *Journal of Mathematical Research Expo.* **11** (1991) 433-442.
- [19] D. Hong: Spaces of bivariate spline functions over triangulations, *Approximation Theory and its Applications* **7** (1991) 56-75.
- [20] A. Ibrahim, L.L. Schumaker: Super spline spaces of smoothness  $r$  and degree  $d \geq 3r + 2$ , *Constructive Approximation* **7** (1991) 401-423.
- [21] N. Kohlmüller: Lagrange und Hermite Interpolation mit Splineräumen auf Triangulierungen, Doktorarbeit, Universität Mannheim 2001.
- [22] M.-J. Lai, L.L. Schumaker: On the approximation power of bivariate splines, *Advances in Computational Mathematics* **9** (1998) 251-279.
- [23] J. Morgan, R. Scott: A nodal basis for  $C^1$  piecewise polynomials of degree  $n \geq 5$ , *Mathematics of Computation* **29** (1975) 736-740.
- [24] G. Nürnberger: *Approximation by Spline Functions*, Springer Verlag, Berlin 1989.
- [25] G. Nürnberger, Th. Riessinger: Lagrange and Hermite interpolation by bivariate splines, *Numer. Funct. Anal. Optim.* **13** (1992) 75-96.
- [26] G. Nürnberger: Approximation order of bivariate spline interpolation: *Journal of Approximation Theory* **87** (1996) 117-136.
- [27] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Lagrange interpolation by splines on triangulations, in: R.H. Wang (Ed.): *Proceedings of the Morningside Institute*, Peking 1998.
- [28] G. Nürnberger, G. Walz: Error analysis in interpolation by bivariate  $C^1$ -splines, *IMA J. Numer. Anal.* **18** (1998) 485-508.

- [29] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Interpolation by spline spaces on classes of triangulations, *J. Comput. Appl. Math.* **119** (2000) 347-376.
- [30] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Developments in bivariate spline interpolation, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **121** (2000), 125-152.
- [31] G. Nürnberger, L.L. Schumaker, F. Zeilfelder: Local Lagrange interpolation by bivariate  $C^1$  cubic splines, in: T. Lyche and L.L. Schumaker (Eds.), *Mathematical Methods in CAGD: Oslo 2000*, Vanderbilt Univ. Press, Nashville 2001, 393-404.
- [32] L.L. Schumaker: Bounds on the dimension of spaces of multivariate piecewise polynomials, *Rocky Mountain Journal of Mathematics* **14** (1984) 251-264.
- [33] L.L. Schumaker: Dual bases for spline spaces on a cell, *Computer Aided Geometric Design* **5** (1987) 277-284.