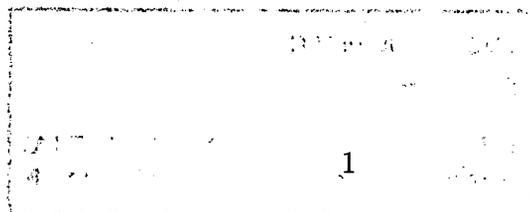


Hermite-Interpolation mit $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ auf
Klassen von Triangulierungen

Gero Hecklin

Nr. 270/2003



Hermite-Interpolation mit $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ auf Klassen von Triangulierungen

Gero Hecklin

Institut für Mathematik, Universität Mannheim
68131 Mannheim, März 2003

Zusammenfassung

Wir entwickeln eine Methode zur Hermite-Interpolation mit C^2 -Splines vom Grad 7 auf allgemeinen Klassen von Triangulierungen Δ . Solche Triangulierungen Δ sind charakterisiert durch zykelfreie Pfade von jedem inneren nichtsingulären Knoten zu Randknoten oder singulären Knoten. Zunächst bestimmen wir mit Hilfe von Bézier-Bernstein-Techniken die Dimension von $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$. Hierbei betrachten wir einzelne Zellen von Δ , die wir unter Verwendung von Pfaden durchlaufen. Darauf basierend konstruieren wir Hermite-Interpolationsmengen für obige Splineräume. Die interpolierenden Splines können effizient durch schrittweise Lösung kleiner Gleichungssysteme berechnet werden. Abschließend geben wir einem Algorithmus zur Behandlung beliebiger Triangulierungen an.

AMS Subject Classification: 65D05, 65D07, 41A63, 41A15

Keywords: Bivariate Splines, Triangulierungen, minimal bestimmende Mengen, Bézier-Bernstein-Techniken, Interpolation.

1. Einleitung

In dieser Arbeit betrachten wir den Raum der bivariaten C^r -Splines vom Grad q hinsichtlich Triangulierungen Δ eines Grundgebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$\mathcal{S}_q^r(\Delta) = \{s \in C^r(\Omega) : s|_T \in \mathcal{P}_q \text{ für alle } T \in \Delta\}.$$

Dabei ist $\mathcal{P}_q = \text{span}\{x^i y^j : i, j \geq 0, i + j \leq q\}$ der Raum der bivariaten Polynome vom totalen Grad q und $C^r(\Omega)$ die Menge aller r mal differenzierbaren Funktionen auf Ω . Grundlegende Probleme in der Theorie der bivariaten Splineinterpolation sind die Bestimmung der Dimension von $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ und die Konstruktion von Interpolationsmengen für diese Splineräume. Eine Menge $H = \{(z_i, d_i, \tilde{d}_i, \alpha_i, \beta_i), i = 1, \dots, m\}$, wobei $z_i \in \Omega$, $i = 1, \dots, m$, nicht

notwendigerweise verschiedene Punkte, $\{d_i, \tilde{d}_i\}$ linear unabhängige Einheitsvektoren des \mathbb{R}^2 , $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}_0$ und m die Dimension von $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ sind, heißt Hermite-Interpolationsmenge für den Splineräume $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$, falls zu jeder genügend oft differenzierbaren Funktion $f \in C(\Omega)$ genau ein Spline $s \in \mathcal{S}_q^r(\Delta)$ existiert, für den gilt:

$$s_{d_i^{\alpha_i} \tilde{d}_i^{\beta_i}}(z_i) = f_{d_i^{\alpha_i} \tilde{d}_i^{\beta_i}}(z_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

In der Literatur gibt es eine Reihe von Methoden zur Hermite-Interpolation mit Splines von hohem Grad auf beliebig vorgegebenen Triangulierungen Δ . So bestimmten beispielsweise Morgan und Scott [23] die Dimension und Hermite-Interpolationsmengen für die Splineräume $\mathcal{S}_5^1(\Delta)$. Diese Ergebnisse wurden von Alfeld, Piper und Schumaker [3], basierend auf Resultaten von Alfeld und Schumaker [2], für C^r -Splines vom Grad $q \geq 4r + 1$ verallgemeinert. Hong [20] untersuchte Splineräume vom Grad $q \geq 3r + 2$ und berechnete deren Dimension für beliebige Triangulierungen. Dieses Resultat wurde von Ibrahim und Schumaker [21] für sogenannte Supersplineräume verallgemeinert. Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [16] entwickelten kürzlich einen Algorithmus zur Konstruktion von lokalen Hermite-Interpolationsmengen mit optimaler Approximationsordnung für diese Räume.

Einer der grundlegenden Unterschiede zur univariaten Theorie ist, dass die Untersuchung bivariater Splines für niedrigeren Polynomgrad, d.h. $q \leq 3r + 1$, auf komplexe, bisher nicht vollständig gelöste Probleme führt. Ein Ansatz zur Interpolation mit solchen Splineräumen ist, einige oder alle Dreiecke von Δ zu unterteilen (siehe Clough und Tocher [12], Farin [17], Powell und Sabin [32], Nürnberger und Zeilfelder [27,31] und dortige Referenzen). Eine alternative Möglichkeit besteht darin, anstatt beliebige Triangulierungen Klassen von geeigneten Triangulierungen zu betrachten. Alfeld, Piper und Schumaker [1] bestimmten 1987 zwar die Dimension von $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$ für beliebige Triangulierungen Δ , ihre nichtlokalen Argumente der Graphentheorie lieferten jedoch i.A. keine Interpolationsmengen für diese Splineräume. Für Triangulierungen, bei denen jeder innere Knoten ungeraden Grad besitzt, konstruierte Gao [19] darauf aufbauend Mengen zur Hermite-Interpolation mit quartischen C^1 -Splines. Davydov und Nürnberger [15] konstruierten, ebenfalls für $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$, induktiv Interpolationsmengen auf der Klasse der beliebigen Triangulierungen Δ , bei denen in selten auftretenden Konstellationen von Kanten einige Dreiecke modifiziert werden müssen. Kürzlich entwickelten Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [14] Interpolationsmengen für kubische C^1 -Splines auf Nested Polygon-Triangulierungen, d.h. Triangulierungen ineinander geschachtelter geschlossener Polygonzüge. Für C^2 -Splines vom Grad $q \leq 7$, wobei kein Dreieck der Triangulierung unterteilt wird, ist derzeit wenig bekannt. Auf der Klasse der regelmäßigen Rechteckszerlegungen Δ^1 und Δ^2 mit einer bzw. zwei Diagonalen in jedem Rechteck, gaben Nürnberger und Riessinger [25] (s.a. Nürnberger und Zeilfelder [29]) Interpolationsmengen für $\mathcal{S}_q^2(\Delta)$, $q \geq 5$ an. Alfeld und Schumaker [4] konstruierten auf nichtdegenerierten Triangulierungen Δ , d.h. Triangulierungen, in denen weder degenerierten Kanten noch singuläre Knoten auftreten, Hermite-Interpolationsmengen für die Splineräume $\mathcal{S}_{3r+1}^r(\Delta)$, $r \geq 2$.

Ziel dieser Arbeit ist es, Hermite-Interpolationsmengen für C^2 -Splines vom Grad 7, auf allgemeinen Klassen von Triangulierungen Δ zu konstruieren, wobei kein Dreieck unterteilt wird. Solche Triangulierungen Δ , in denen sowohl degenerierte Kanten, als auch singuläre Knoten auftreten können, sind dadurch charakterisiert, dass für jeden inneren nichtsingulären Knoten zykliefreie Pfade zu Randknoten oder singulären Knoten existieren. Ein Pfad

ist dabei eine Menge aufeinanderfolgender Kanten, die im Endpunkt nichtdegeneriert sind. Zu dieser Klasse von Triangulierungen, die wir mit \mathcal{T}_g bezeichnen, gehören beispielsweise auch die Triangulierungen Δ^1 und Δ^2 . Mit Hilfe von Bézier-Bernstein-Techniken bestimmen wir zunächst die Dimension der Splineräume $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$. Dabei betrachten wir zuerst einzelne Zellen von Δ , d.h. Subtriangulierungen bestehend aus allen Dreiecken um einen gemeinsamen Knoten, und durchlaufen diese dann unter Verwendung von Pfaden. Dazu verwenden wir ein wohlbekanntes Resultat von de Boor [8] und Farin [18] über charakterisierende Bedingungen für die Bézier-Bernstein-Koeffizienten benachbarter Polynome mit C^2 -Eigenschaft über die gemeinsame Kante. Im Anschluss wählen wir geeignete Interpolationsbedingungen an eine genügend oft differenzierbare Funktion $f \in C(\Omega)$ in den Knoten von Δ , und beweisen, dass dadurch eindeutige Hermite-Interpolation mit $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ möglich ist. Die interpolierenden Splines werden dabei effizient durch schrittweise Lösung kleiner linearer Gleichungssysteme berechnet. Wir schließen die Arbeit mit einem zweistufigen Algorithmus, der aus einer gegebenen Triangulierung $\Delta \notin \mathcal{T}_g$ mit Hilfe von Clough-Tochter-Splits eine zur Interpolation mit C^2 -Splines vom Grad 7 geeignete Triangulierung $\tilde{\Delta}$ erzeugt.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut. In Abschnitt 2 erläutern wir einige Grundlagen über bivariate Polynome, Splines und Hermite-Interpolation mit Splineräumen. Die Klasse \mathcal{T}_g der für die Interpolation mit $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ geeigneten Triangulierungen Δ sowie die dafür notwendigen Pfade werden in Abschnitt 3 algorithmisch festgelegt. In Abschnitt 4 geben wir minimal bestimmende Mengen für $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ an, und bestimmen so die Dimension dieser Splineräume. Darauf basierend konstruieren wir in Abschnitt 5 geeignete Hermite-Interpolationsmengen für $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{T}_g$. Im letzten Abschnitt geben wir einem Algorithmus zur Behandlung beliebiger Triangulierungen an.

2. Grundlagen

In diesem Kapitel erläutern wir einige Grundlagen der Bézier-Bernstein-Techniken und der Interpolation mit bivariaten Splines, die auf Alfeld, Piper und Schumaker [1], de Boor [8], Farin [18], Nürnberger [24], Schumaker [33], u.a. zurückgehen. Wir stellen Triangulierungen Δ des betrachteten Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vor, darauf definierte stückweise Polynome und Splines, deren Bézier-Bernstein-Darstellung, Differenzierbarkeitseigenschaften benachbarter Polynome über gemeinsame Kanten von Δ , minimal bestimmende Mengen sowie Hermite-Interpolation mit Splineräumen.

Sei Ω , eine einfach zusammenhängende, nicht notwendigerweise konvexe, polygonförmige Teilmenge des \mathbb{R}^2 , zerlegt in Dreiecke T_1, \dots, T_N , sodass der Durchschnitt zweier verschiedener Dreiecke entweder leer, ein gemeinsamer Eckpunkt oder eine gemeinsame Kante ist. Dann bezeichnen wir mit $\Delta = \{T_1, \dots, T_N\}$ eine TRIANGULIERUNG VON Ω . Ist $\Delta' \subset \Delta$ eine Triangulierung einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $\Omega' \subset \Omega$, so heißt Δ' SUBTRIANGULIERUNG VON Δ .

Den Bezeichnungen von Alfeld, Piper und Schumaker [1] folgend setzen wir

$V_I(\Delta), V_B(\Delta), V(\Delta)$: Menge der inneren, der äußeren bzw. aller Knoten,
 $E_I(\Delta), E_B(\Delta), E(\Delta)$: Menge der inneren, der äußeren bzw. aller Kanten,
 $N(\Delta)$: Menge der Dreiecke, und
 $\sigma(\Delta)$: Menge der singulären Knoten

der Triangulierung Δ . Nach Euler gelten dabei folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 \#E_B(\Delta) &= \#V_B(\Delta) \\
 \#E_I(\Delta) &= 3 \cdot \#V_I(\Delta) + \#V_B(\Delta) - 3 \\
 \#N(\Delta) &= 2 \cdot \#V_I(\Delta) + \#V_B(\Delta) - 2.
 \end{aligned}$$

Eine Kante $e := [v_1, v_2] \in E(\Delta)$ heißt DEGENERIERT IM ENDPUNKT v_1 , falls die beiden benachbarten Kanten im Knoten v_1 gleiche Steigung besitzen. Ein Knoten $v \in V_I(\Delta)$ heißt SINGULÄR, falls es genau vier Kanten mit Endpunkt v gibt, und diese auf zwei Geraden liegen (vgl. Abbildung 1).

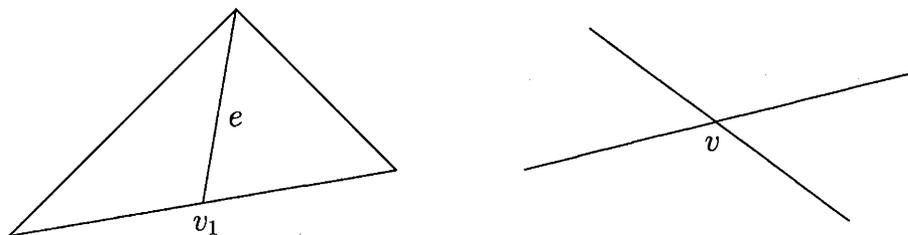


Abb. 1: In v_1 degenerierte Kante e , singulärer Knoten v .

Für einen Knoten $v \in V(\Delta)$ definiert $Grad(v)$ die Anzahl der Kanten in Δ mit Endpunkt v . Die Subtriangulierung $\Delta_v := \{T \in \Delta \mid v \in T\}$ von Δ , die alle Dreiecke mit Eckpunkt v enthält, bezeichnen wir als ZELLE VON v .

Seien $r, q \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq r < q$ und eine Triangulierung Δ gegeben. Dann heißt

$$S_q^r(\Delta) = \{s \in C^r(\Delta) : s|_T \in \mathcal{P}_q \text{ für alle } T \in \Delta\}$$

der SPLINERAUM der r mal differenzierbaren Funktionen vom Grad q . Dabei ist

$$\mathcal{P}_q = \text{span}\{x^i y^j : i, j \geq 0, i + j \leq q\}$$

der $\binom{q+2}{2}$ dimensionale Raum der BIVARIATEN POLYNOME vom totalen Grad $\leq q$. Funktionen aus $S_q^r(\Delta)$ sind also stückweise Polynome vom Grad q , die r mal stetig differenzierbar über den Kanten von Δ verknüpft sind.

Für einen Einheitsvektor $d \in \mathbb{R}^2$ und eine genügend oft differenzierbare Funktion f bezeichnen wir mit $f_d(z)$ die partielle Ableitung von f im Punkt z in Richtung d . Sind d_1 und d_2 linear unabhängige Einheitsvektoren, so heißt

$$D^w f(z) = (f_{d_1^w}(z), f_{d_1^{w-1} d_2}(z), \dots, f_{d_1 d_2^{w-1}}(z), f_{d_2^w}(z))$$

der GEORDNETE VEKTOR DER PARTIELLEN ABLEITUNGEN vom Grad w .

Ein grundlegendes Probleme der bivariaten Splineinterpolation ist neben der Bestimmung der Dimension von $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ die Konstruktion von Interpolationsmengen für diesen Spline-raum. Eine Menge $H = \{(z_i, d_i, \tilde{d}_i, \alpha_i, \beta_i), i = 1, \dots, m\}$, wobei $z_i \in \Omega$, $i = 1, \dots, m$, nicht notwendigerweise verschiedene Punkte, $\{d_i, \tilde{d}_i\}$ linear unabhängige Einheitsvektoren des \mathbb{R}^2 , $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \dots, m$, und m die Dimension von $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ sind, heißt HERMITE-INTERPOLATIONSMENGE für $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$, falls zu jeder genügend oft differenzierbaren Funktion $f \in C(\Omega)$ genau ein Spline $s \in \mathcal{S}_q^r(\Delta)$ existiert, für den gilt:

$$s_{d_i^{\alpha_i} \tilde{d}_i^{\beta_i}}(z_i) = f_{d_i^{\alpha_i} \tilde{d}_i^{\beta_i}}(z_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Nach Schumaker [33] existiert für beliebige Triangulierungen Δ eine untere Schranke für die Dimension des Splineraums $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$. Es gilt

$$\dim(\mathcal{S}_q^r(\Delta)) \geq lb_q^r(\Delta) = \binom{q+2}{2} + (q-r+1) \#E_I(\Delta) - \left[\binom{q+2}{2} - \binom{r+2}{2} \right] \#V_I(\Delta) + \sum_{i=1}^{\#V_I} \sigma_i.$$

Dabei ist $\sigma_i = \sum_{j=1}^{d-r} (r+j+1-j \cdot e_i)_+$ und e_i die Anzahl der Kanten der Triangulierung mit Endpunkt v_i , die paarweise verschiedene Steigung besitzen.

Sind zwei Polynome auf benachbarten Dreiecken C^2 -differenzierbar verknüpft, so gibt es für die partiellen Ableitungen eine wichtige Eigenschaft. Seien $e_i = [v, v_i]$, $i = 1, \dots, 3$ drei aufeinanderfolgende Kanten im gemeinsamen Endpunkt v mit paarweise verschiedenen Steigungen, α_i für $i = 1, \dots, 2$ der von e_i und e_{i+1} eingeschlossene Winkel sowie d_i für $i = 1, \dots, 3$ ein Einheitsvektor entlang der Kante e_i . Ferner seien für $q \geq 2$ die Polynome $p^{[T_i]} \in \mathcal{P}_q$, $i = 1, 2$ auf $T_i = \Delta(v, v_i, v_{i+1})$ zweimal stetig differenzierbar über der Kante e_2 verknüpft (vgl. Abbildung 2).

Lemma 2.1:

Aus $p_{d_1^2}^{[T_1]}(v)$, $p_{d_2^2}^{[T_1]}(v)$ und $p_{d_3^2}^{[T_2]}(v)$ lassen sich die partiellen Ableitungen $p_{d_1 d_2}^{[T_1]}(v)$ und $p_{d_2 d_3}^{[T_2]}(v)$ eindeutig berechnen.

Beweis:

Da e_2 in v nichtdegeneriert ist, gilt

$$\sin(\alpha_1 + \alpha_2) p_{d_2^2}^{[T_1]} = \sin(\alpha_1) p_{d_2 d_3}^{[T_2]} + \sin(\alpha_2) p_{d_1 d_2}^{[T_1]}.$$

Durch nochmaliges anwenden erhalten wir

$$\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2) p_{d_2^2}^{[T_1]} = \sin^2(\alpha_1) p_{d_3^2}^{[T_2]} + \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2) p_{d_1 d_3}^{[T_1]} + \sin^2(\alpha_2) p_{d_1^2}^{[T_1]}.$$

Mit $\sin(\alpha_i) = \sin(2\pi - \alpha_{i+1} + \alpha_{i+2}) = -\sin(\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2})$ lösen wir die gemischte partielle Ableitung auf. Es gilt

$$\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2) p_{d_2^2}^{[T_1]} = \sin^2(\alpha_1) p_{d_3^2}^{[T_2]} + 2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \sin(\alpha_2) p_{d_1 d_2}^{[T_1]} - \sin^2(\alpha_2) p_{d_1^2}^{[T_1]},$$

$$\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2) p_{d_2^2}^{[T_1]} = \sin^2(\alpha_2) p_{d_1^2}^{[T_1]} + 2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \sin(\alpha_1) p_{d_2 d_3}^{[T_2]} - \sin^2(\alpha_1) p_{d_3^2}^{[T_2]}.$$

Aus $\alpha_1 + \alpha_2 \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$ folgt die Behauptung.

#

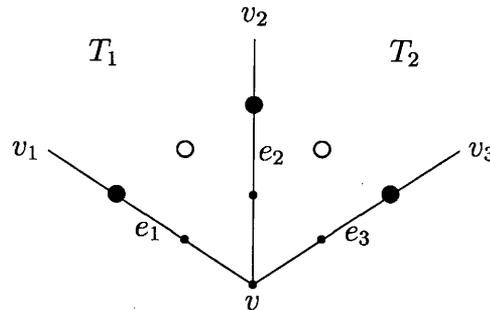


Abb. 2: Die gemischten Ableitungen \circ ergeben sich aus den Ableitungen \bullet .

Nun betrachten wir die partiellen Ableitungen C^2 -differenzierbar verknüpfter Polynome dreier benachbarter Dreiecke im gemeinsamen Eckpunkt. Seien $e_i = [v, v_i]$, $i = 1, \dots, 4$ vier aufeinanderfolgende Kanten im gemeinsamen Endpunkt v mit paarweise verschiedenen Steigungen, α_i für $i = 1, \dots, 3$ der von e_i und e_{i+1} eingeschlossene Winkel und d_i für $i = 1, \dots, 4$ ein Einheitsvektor entlang der Kante e_i . Ferner seien für $q \geq 3$ die Polynome $p^{[T_i]} \in \mathcal{P}_q$, $i = 1, \dots, 3$ auf $T_i = \Delta(v, v_i, v_{i+1})$ zweimal stetig differenzierbar über den Kanten e_i , $i = 2, 3$ verknüpft (vgl. Abbildung 3).

Lemma 2.2:

Aus $p_{d_1^2 d_2}^{[T_1]}(v)$, $p_{d_1 d_2^2}^{[T_1]}(v)$, $p_{d_3^2 d_4}^{[T_3]}(v)$ und $p_{d_3 d_4^2}^{[T_3]}(v)$ läßt sich der Vektor

$$\left(p_{d_2^2}^{[T_2]}(v), p_{d_2 d_3}^{[T_2]}(v), p_{d_2 d_3^2}^{[T_2]}(v), p_{d_3^3}^{[T_2]}(v) \right)$$

eindeutig berechnen.

Beweis:

Sei $x_i := p_{d_2^{3-i} d_3^i}^{[T_2]}(v)$ für $i = 0, \dots, 3$ und $a_i := \sin(\alpha_i)$ sowie $b_i := \sin(\alpha_i + \alpha_{i+1})$ für $i = 1, \dots, 3$, dann läßt sich durch die C^1 - und C^2 -Stetigkeit über den Kanten e_2 und e_3 nach Lemma 2.1 folgendes lineare Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{pmatrix} b_1^2 & 0 & -a_1^2 & 0 \\ 0 & -a_3^2 & 0 & b_2^2 \\ b_1 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_2 b_1 p_{d_1 d_2^2}^{[T_1]} - a_2^2 p_{d_1^2 d_2}^{[T_1]} \\ 2a_2 b_2 p_{d_3^2 d_4}^{[T_3]} - a_2^2 p_{d_3 d_4^2}^{[T_3]} \\ a_2 p_{d_1 d_2^2}^{[T_1]} \\ a_2 p_{d_3^2 d_4}^{[T_3]} \end{pmatrix}$$

Die Determinante D der dazugehörigen Koeffizientenmatrix lautet

$$D = a_1 a_3 b_1 b_2 (b_1 b_2 - a_1 a_3).$$

Da alle α_i , $\alpha_i + \alpha_j$, $i \neq j$ sowie $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ von π verschieden sind, gilt $D \neq 0$. Damit ist (x_1, x_2, x_3, x_4) eindeutig bestimmt.

#

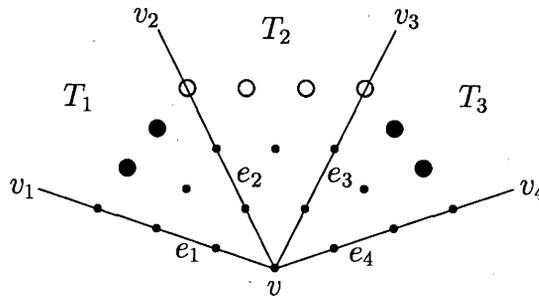


Abb. 3: Die partiellen Ableitungen \circ ergeben sich aus den Ableitungen \bullet .

Neben den kartesischen Koordinaten gibt es im \mathbb{R}^2 noch eine weitere Darstellungsweise, die sogenannten baryzentrischen Koordinaten. Dabei werden Punkte und Vektoren als Funktion der Eckpunkte eines Dreiecks dargestellt und sind somit invariant unter affinen Transformationen.

Sei $T = \Delta(z_1, z_2, z_3)$ ein Dreieck im \mathbb{R}^2 . Dann gibt es für alle $z \in \mathbb{R}^2$ eindeutig bestimmte sogenannte BARYZENTRISCHEN KOORDINATEN ϕ_1, \dots, ϕ_3 mit $\sum_{i=1}^3 \phi_i = 1$ und der Interpolationseigenschaft $\phi_i(z_j) = \delta_{ij}$, $i, j \in \{1, \dots, 3\}$, sodass sich z schreiben lässt als

$$z = \sum_{i=1}^3 \phi_i(z) \cdot z_i.$$

Diese Koordinaten sind lineare Polynome in z , die sich mit Hilfe der Formel

$$\phi_i(z) = \frac{\det(z_j - z \quad z_k - z)}{\det(z_j - z_i \quad z_k - z_i)}$$

für paarweise verschiedene $1 \leq i, j, k \leq 3$ explizit berechnen lassen.

Für ein Dreieck T und $(i, j, k) \in \mathbb{N}_0^3$ mit $i + j + k = q$ definiert $B_{i,j,k}^q \in \mathcal{P}_q$, gegeben durch

$$B_{i,j,k}^q(z) = \frac{q!}{i! \cdot j! \cdot k!} (\phi_1^i \phi_2^j \phi_3^k)(z),$$

das BERNSTEIN-POLYNOM vom Grad q bzgl. T .

Die Menge aller Bernstein-Polynome vom Grad q bildet eine Basis von \mathcal{P}_q . Jedes Polynom $p \in \mathcal{P}_q$ lässt sich somit in eindeutiger Weise schreiben als

$$p(z) = \sum_{i+j+k=q} a_{i,j,k}^{[T]} \cdot B_{i,j,k}^q(z),$$

genannt die BÉZIER-BERNSTEIN-DARSTELLUNG von p . Die reellen Koeffizienten

$$a_{i,j,k}^{[T]}, \quad i + j + k = q$$

heißen dabei BÉZIER-BERNSTEIN-KOEFFIZIENTEN. Sie bilden zusammen mit den gleichverteilten BÉZIER-BERNSTEIN-PUNKTEN

$$\left\{ P_{i,j,k}^{[T]} = \frac{iz_1 + jz_2 + kz_3}{q}, \quad i + j + k = q \right\}$$

das BÉZIER-BERNSTEIN-NETZ $\left\{ (P_{i,j,k}^{[T]}, a_{i,j,k}^{[T]}), \quad i + j + k = q \right\}$.

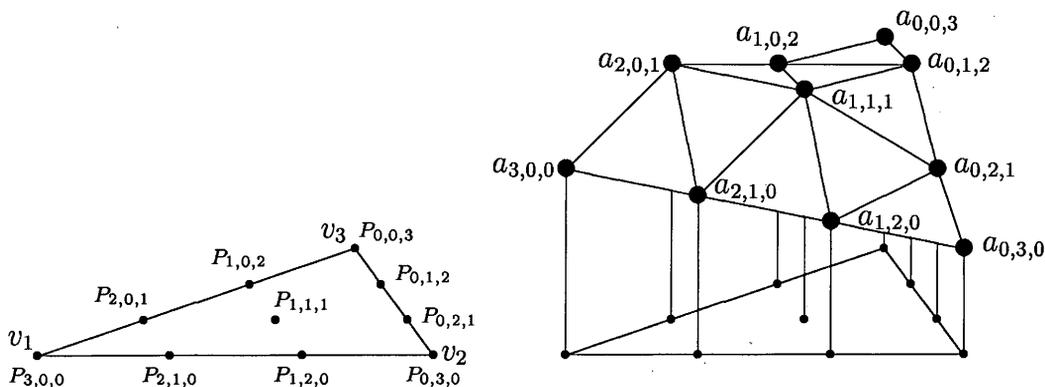


Abb. 4: Bézier-Bernstein-Punkte und Bézier-Bernstein-Netz für $q = 3$.

Mit $R_w(v) := \{P_{w,i,j}^{[T]} \mid w + i + j = q, T = \Delta(v, u_1, u_2) \in \Delta\}$ bezeichnen wir den RING der Bézier-Bernstein-Punkte mit Abstand w vom Knoten v . Die SCHEIBE MIT RADIUS w um den Knoten v ist dann definiert als

$$D_w(v) = \bigcup_{i=0}^w (R_w(v)).$$

Sei M_Δ die Menge aller Bézier-Bernstein-Punkte von Δ und für alle $i + j + k = q$ und alle Dreiecke $T \in \Delta$ das lineare Funktional

$$\lambda_{P_{i,j,k}^{[T]}} : S_q^r(\Delta) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{d.d.} \quad s \longrightarrow \lambda_{P_{i,j,k}^{[T]}}(s) = a_{i,j,k}^{[T]}$$

für alle $s \in S_q^r(\Delta)$, gegeben. Dann heißt $M \subset M_\Delta$ eine BESTIMMENDE MENGE für $S_q^r(\Delta)$, falls gilt

$$\lambda_P(s) = 0 \quad \forall P \in M \quad \implies \quad \lambda_P(s) = 0 \quad \forall P \in M_\Delta.$$

M heißt MINIMAL, falls es keine bestimmende Menge mit weniger Elementen gibt.

Nach Farin [18] (vgl. de Boor [8]) ist die Differenzierbarkeit benachbarter Polynome über eine gemeinsame Kante durch Bedingungen an die Koeffizienten ihrer Bézier-Bernstein-Darstellung charakterisiert. Seien $T_1 = \Delta(v_1, v_2, v_3)$ und $T_2 = \Delta(v_1, v_2, v_4)$ zwei Dreiecke

mit gemeinsamer Kante $[v_1, v_2]$ und $s \in \mathcal{S}_q^0(\{T_1, T_2\})$ definiert durch $s|_{T_m} \equiv p_m \in \mathcal{P}_q$ für $m = 1, 2$ auf T_m gegeben in seiner Bézier-Bernstein-Darstellung mit Koeffizienten $a_{i,j,k}^{[m]}$.

Lemma 2.3:

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $s \in C^r(\{T_1, T_2\})$

(ii) Für $\rho = 0, \dots, r$ und alle $i + j = q - \rho$ gilt

$$a_{i,j,\rho}^{[2]} = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=\rho} a_{i+\alpha,j+\beta,\gamma}^{[1]} \frac{\rho!}{\alpha!\beta!\gamma!} (\phi_1^\alpha \phi_2^\beta \phi_3^\gamma)(v_4).$$

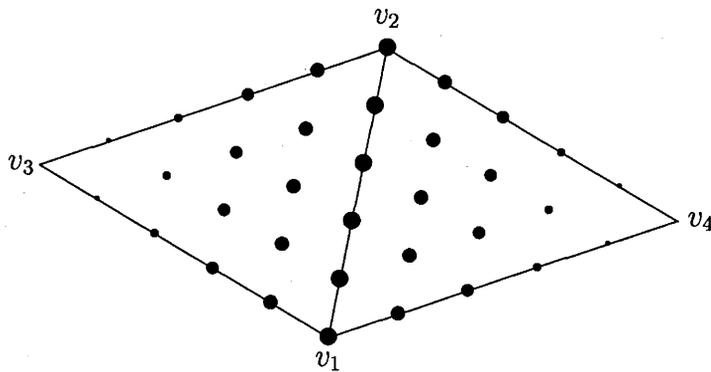


Abb. 5: Relevante Koeffizienten für C^r -Stetigkeit.

Für C^2 -differenzierbar verknüpfte Polynome gibt es eine wichtige Folgerung. Seien T_1, T_2, p_1, p_2 gegeben wie in Lemma 2.3, und es gelte $s \in \mathcal{S}_q^2(\{T_1, T_2\})$, $q \geq 2$ sowie $i + j = q - 2$.

Korollar 2.4:

Aus $b_{i,j,2}, a_{i+\alpha,j+\beta,\gamma}, \alpha + \beta + \gamma = 2$, mit $(\alpha + \beta + \gamma) \notin \{(0, 1, 1), (0, 2, 0)\}$ und entweder $a_{i,j+1,1}$ oder $a_{i,j+2,0}$ lassen sich alle Koeffizienten $a_{i+\alpha,j+\beta,\gamma}, b_{i+\alpha,j+\beta,\gamma}$ für $\alpha + \beta + \gamma = 2$ eindeutig berechnen.

Nach Farin [18] und de Boor [8] gilt:

Lemma 2.5:

Die r -te Richtungsableitung des Bézier-Bernstein-Polynoms $B_{i,j,k}^q$ entlang eines Einheitsvektors $\lambda \in \mathbb{R}^2$ ist für alle $z = (\phi_1(z), \phi_2(z), \phi_3(z))$ gegeben durch

$$(B_{i,j,k}^q)_{\lambda^r}(z) = \frac{q!}{(q-r)!} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=r} B_{\alpha,\beta,\gamma}^r(\lambda) \cdot B_{i-\alpha,j-\beta,k-\gamma}^{q-r}(z), \quad i + j + k = q.$$

Damit läßt sich ein wichtiger Zusammenhang zwischen den partiellen Ableitungen eines Polynoms und den Bézier-Bernstein-Koeffizienten seiner Darstellung herleiten (vgl. Nürnberger und Zeilfelder [28]). Sei $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$ und $p \in \mathcal{P}_q$ definiert durch

$$p(z) = \sum_{i+j+k=q} a_{i,j,k} \cdot B_{i,j,k}^q(z), \quad z \in T.$$

Ferner sei d_i für $i = 1, 2$ ein Einheitsvektor entlang der Kante $[v_1, v_{i+1}]$.

Lemma 2.6:

Für $\alpha + \beta + \gamma \leq q$ gilt

$$p_{d_1^\alpha d_2^\beta}(v_1) = \frac{q!}{(q - \alpha - \beta)!} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{k=0}^{\beta} \binom{\alpha}{j} \binom{\beta}{k} (\phi_1)_{d_1}^{\alpha-j} (\phi_1)_{d_2}^{\beta-k} (\phi_2)_{d_1}^j (\phi_3)_{d_2}^k \cdot a_{q-j-k,j,k}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} a_{q-\alpha-\beta,\alpha,\beta} &= \frac{(q-\alpha-\beta)!}{q! (\phi_2)_{d_1}^\alpha (\phi_3)_{d_2}^\beta} p_{d_1^\alpha d_2^\beta}(v_1) - \sum_{j=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{j} \left(\frac{(\phi_1)_{d_1}}{(\phi_2)_{d_1}} \right)^{\alpha-j} \cdot a_{q-j-\beta,j,\beta} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{k=0}^{\beta-1} \binom{\alpha}{j} \binom{\beta}{k} \left(\frac{(\phi_1)_{d_1}}{(\phi_2)_{d_1}} \right)^{\alpha-j} \left(\frac{(\phi_1)_{d_2}}{(\phi_3)_{d_2}} \right)^{\beta-k} \cdot a_{q-j-k,j,k}. \end{aligned}$$

Damit können die partiellen Ableitungen $p_{d_1^j d_2^k}(v_1)$ für $j = 0, \dots, \alpha$ und $k = 0, \dots, \beta$ in eindeutiger Weise aus den Bézier-Bernstein-Koeffizienten $a_{q-j-k,j,k}$ und umgekehrt die Bézier-Bernstein-Koeffizienten $a_{q-j-k,j,k}$ für $j = 0, \dots, \alpha$ und $k = 0, \dots, \beta$ in eindeutiger Weise aus den partiellen Ableitungen $p_{d_1^j d_2^k}(v_1)$ berechnet werden.

3. Festlegung der Klasse \mathcal{T}_g

In diesem Abschnitt definieren wir die Klasse \mathcal{T}_g der Triangulierungen, auf denen wir mit C^2 -Splines vom Grad 7 interpolieren werden. Dazu wählen wir für jeden inneren Knoten $v \in V_I(\Delta)$ geeignete Kanten in Δ , die nicht in v degeneriert sind und v mit einem Randknoten, singulären Knoten oder zuvor bereits behandelten Knoten verbinden. Diese Kanten, die nicht zyklisch verlaufen dürfen, bezeichnen wir als Pfad von v .

Sei M_Δ die Menge aller Bézier-Bernstein-Punkte der Triangulierung Δ , dann unterteilen wir zur Vereinfachung diese Menge in drei Bereiche (vgl. Abbildung 6):

- 1.) Die D_2 -Scheibe $D_2(v)$ für alle Knoten v der Triangulierung (mit \circ markiert),
- 2.) $R_{3,4}(v, u) := (R_3(v) \cup R_4(v)) \cap (R_3(u) \cup R_4(u))$ für alle $v \in V$ und alle $u \in V$, die mit v durch eine Kante verbunden sind (mit Δ markiert), und

- 3.) $R_{3,4}(v, T) := \{P_{4,1,2}^{[T]}, P_{4,2,1}^{[T]}, P_{3,2,2}^{[T]}\}$ für alle $v \in V$ und alle Dreiecke $T = \Delta(v, u, w)$ mit Eckpunkt v (mit \square markiert).

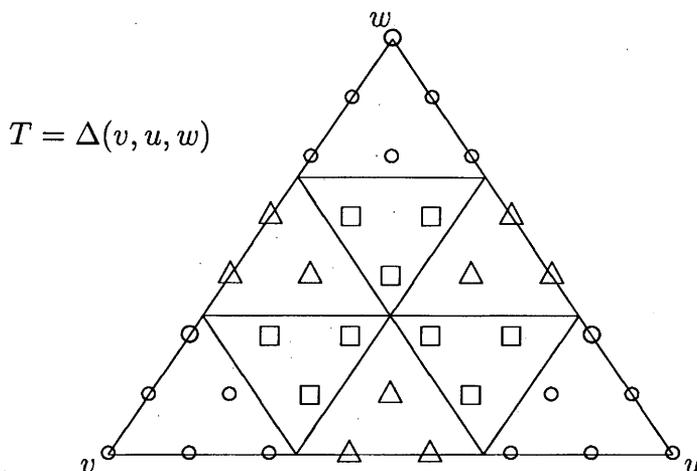


Abb. 6: Bézier-Bernstein-Punkte eines Dreiecks T .

Bemerkung 3.1:

Für die oben definierten Teilmengen von Bézier-Bernstein-Punkten der Triangulierung gilt offensichtlich

$$D_4(v) = D_2(v) \cup \left(\bigcup_{u \in V(\Delta)} R_{3,4}(v, u) \right) \cup \left(\bigcup_{T \in \Delta} R_{3,4}(v, T) \right)$$

und

$$M_\Delta = \bigcup_{v \in V(\Delta)} D_4(v).$$

Nach Schumaker [33] ist für eine beliebige Triangulierung Δ die Dimension des interpolierenden Splineraums $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ nach unten begrenzt. Es gilt

$$\dim(\mathcal{S}_7^2(\Delta)) \geq lb_7^2(\Delta) = 15 \cdot \#E(\Delta) - 30 \cdot \#V(\Delta) + 45 + \sigma(\Delta).$$

Dabei ist wie in Abschnitt 2 definiert $E(\Delta)$ die Menge der Kanten und $V(\Delta)$ die Menge der Knoten von Δ . Der Ausdruck $\sigma(\Delta)$ hängt von der exakten Lage der Knoten der Triangulierung ab. Hierzu folgende Definition:

Definition 3.2:

Für einen Knoten $v \in V(\Delta)$ sei e die Anzahl der Kanten der Triangulierung mit Endpunkt v , die paarweise verschiedene Steigungen besitzen. Dann heißt v DEFECT, falls $e = 3$, und NORMAL, falls $e \geq 4$ (vgl. Abbildung 7).

Damit läßt sich σ schreiben als $\sigma = \sum_{v_i \in V_I} \sigma_i$, wobei

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^5 (3 + j - j \cdot e_i)_+ = \begin{cases} 3, & \text{falls } v_i \text{ ein singulärer Knoten,} \\ 1, & \text{falls } v_i \text{ ein defekter Knoten, oder} \\ 0, & \text{falls } v_i \text{ ein normaler Knoten ist.} \end{cases}$$

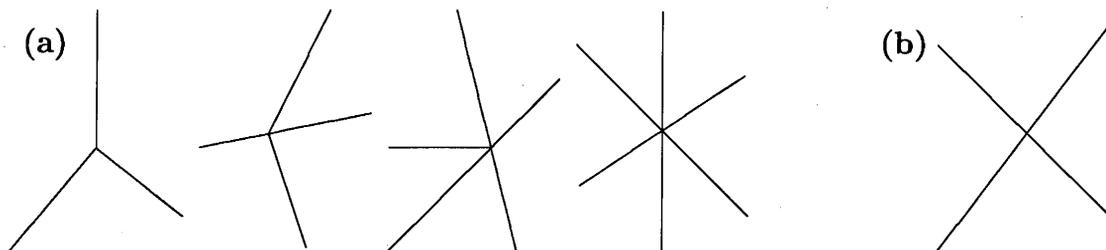


Abb. 7: (a) defekte Knoten vom Grad 3,4,5 und 6, (b) singulärer Knoten.

Nun sind wir in der Lage die Klasse \mathcal{T}_g von Triangulierungen festzulegen. Dazu benutzen wir einen Algorithmus, der für eine vorgegebene beliebige Triangulierung Δ aufgrund der Lage der Kanten an den inneren Knoten entscheidet, ob $\Delta \in \mathcal{T}_g$ oder $\Delta \notin \mathcal{T}_g$.

Algorithmus 3.3:

- 1.) Setze $\tilde{V} := \{v \in V_I(\Delta) \mid v \text{ ist nicht singulär}\}$ und $V_{ok} := V(\Delta) \setminus \tilde{V}$.
- 2.) Es gelte $\#\tilde{V} = n \in \mathbb{N}$, dann ordnen wir diese Knoten in folgender Reihe: Wähle v_n einen Knoten in \tilde{V} für den eine der beiden Bedingungen erfüllt ist:
 - (i) v_n ist ein normaler Knoten und es existieren vier aufeinanderfolgende Kanten a_1, \dots, a_4 in $E(\Delta)$ mit Endpunkt v_n , die paarweise verschiedene Steigungen besitzen, so dass a_2 und a_3 zu Knoten verlaufen, die in V_{ok} liegen.
 - (ii) v_n ist ein defekter Knoten und es gibt eine in v_n nichtdegenerierte Kante a , die zu einem Knoten verläuft, der in V_{ok} liegt.
- 3.) Markiere für den Knoten v_n die Kante a_2 bzw. a als einfachen Pfad und die Kante a_3 als zweifachen Pfad. Setze $\tilde{V} := \tilde{V} \setminus \{v_n\}$ und $V_{ok} := V_{ok} \cup \{v_n\}$ und fahre unter Punkt 2. mit der Auswahl von v_{n-1} fort.

Endet der Algorithmus im letzten Schritt mit $\tilde{V} = \emptyset$ und $V_{ok} = V$ so gilt $\Delta \in \mathcal{T}_g$. Gibt es jedoch eine Stelle im Algorithmus, an der $\#\tilde{V} > 0$ und kein Knoten in \tilde{V} die Bedingung (i) oder (ii) erfüllt, so gilt $\Delta \notin \mathcal{T}_g$.

Beispiele 3.4:

- Die Triangulierungen Δ^1 und Δ^2 liegen in der Klasse \mathcal{T}_g . Abbildung 9 zeigt für den regelmäßigen und den unregelmäßigen Fall eine mögliche Reihenfolge der Knoten in \tilde{V} mit dazugehörigen Pfaden. Die Methode von Alfeld und Schumaker [4] zur Bestimmung der Dimension von $\mathcal{S}_7^2(\Delta^2)$ kann hier nicht angewandt werden, da singuläre Knoten und damit degenerierte Kanten auftreten.
- Sei Δ eine Triangulierung bei der für alle inneren Knoten alle anliegenden Kanten paarweise verschiedene Steigungen besitzen. Dann können für jeden normalen Knoten von beliebigen vier aufeinanderfolgenden Kanten die mittleren beiden als Pfade gewählt werden, und für jeden defekten Knoten eine beliebige Kante als Pfad gewählt werden. Daher gilt $\Delta \in \mathcal{T}_g$.
- Abbildung 8 zeigt eine Triangulierung Δ , die nicht in \mathcal{T}_g liegt. Für keinen der sechs inneren Knoten (mit \square markiert) gibt es vier aufeinanderfolgenden Kanten paarweise verschiedener Steigung, von denen die mittleren beiden zu einem Randknoten, singulären Knoten oder bereits behandelten Knoten verlaufen.
- Eine exemplarische Triangulierung Δ mit singulären und defekten Knoten sowie degenerierten Kanten ist in Abbildung 10 zu sehen. Es gilt $\Delta \in \mathcal{T}_g$. Wir sehen eine mögliche Reihenfolge der Knoten von \tilde{V} mit dazugehörigen Pfaden.

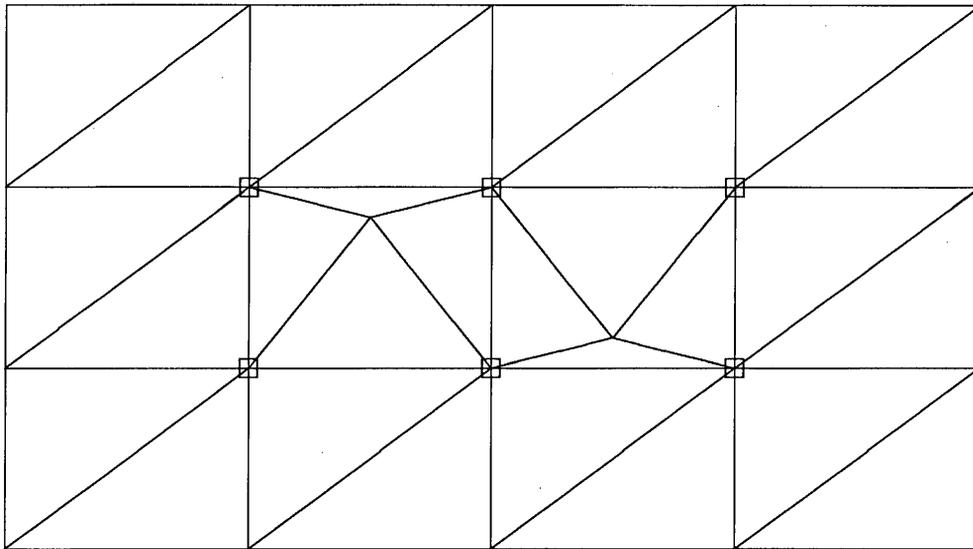
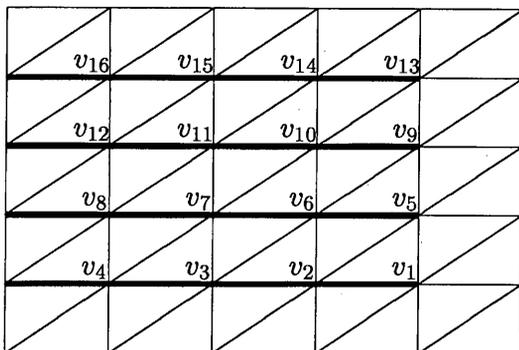
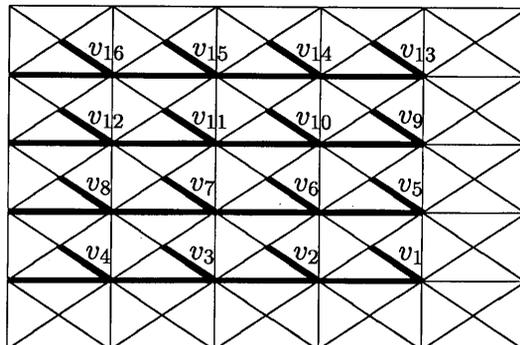


Abb. 8: Beispiel einer Triangulierung $\Delta \notin \mathcal{T}_g$.

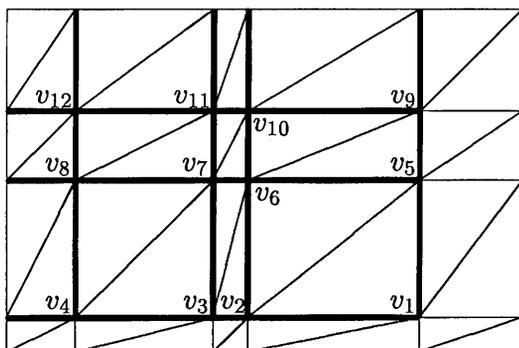
a) regelmäßige Δ^1 -Triangulierung



b) regelmäßige Δ^2 -Triangulierung



c) unregelmäßige Δ^1 -Triangulierung



d) unregelmäßige Δ^2 -Triangulierung

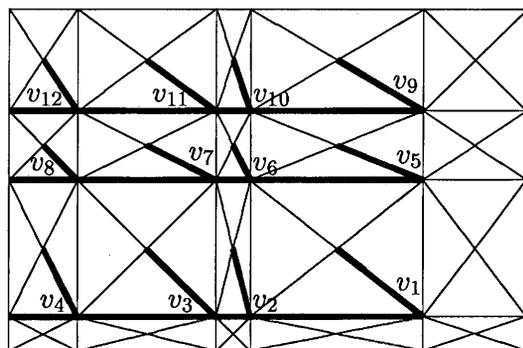


Abb. 9: Reihenfolge der Knoten in \tilde{V} mit dazugehörigen Pfaden.

4. Berechnung der Dimension

In diesem Abschnitt bestimmen wir für $\Delta \in \mathcal{T}_g$ die Dimension des Splineraums $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$. Zunächst untersuchen wir einzelne Zellen $\Delta_v \subset \Delta$, $v \in V(\Delta)$ und wählen Mengen von Bézier-Bernstein-Punkten $M_v \subset M_{\Delta_v}$, die $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ auf $D_4(v)$ festlegen. Dabei unterscheiden wir, ob v ein singulärer Knoten, defekter Knoten, normaler Knoten oder ein Randknoten ist. Anschließend durchlaufen wir unter Verwendung der definierten Pfade die Knoten der Triangulierung Δ und konstruieren eine minimal bestimmende Menge M für $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$.

Sei $\text{Grad}(v) = n \in \mathbb{N}$ und v im Uhrzeigersinn verbunden mit den Knoten v_i , $i = 1, \dots, n$ durch Kanten $e_i := [v, v_i]$. Ferner sei $\Delta_v = \{T_i = \Delta(v, v_i, v_{i+1}), i = 1, \dots, n\}$ die Zelle um v . Für einen Randknoten entfallt das Dreieck T_n .

Fall 1: v ist ein normaler Knoten;

Dann gibt es nach Algorithmus 3.3 vier aufeinanderfolgende Kanten a_1, \dots, a_4 in $\{e_i, i =$

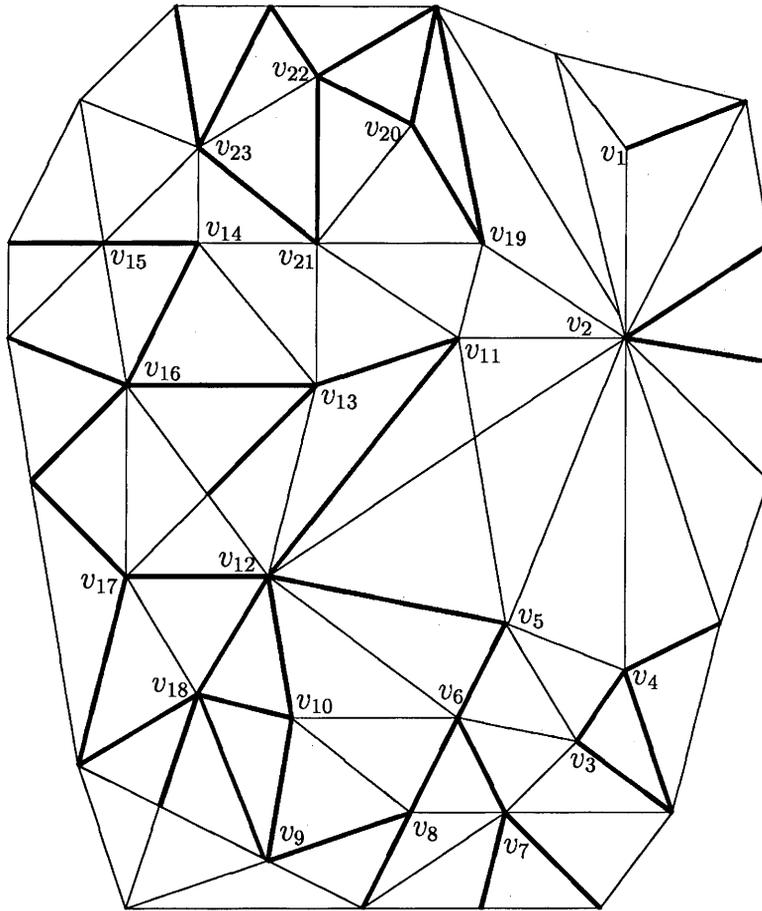


Abb. 10: Reihenfolge normaler und defekter Knoten einer exemplarischen Triangulierung.

$1, \dots, n\}$, die paarweise verschiedene Steigungen besitzen. Für M_v wählen wir folgende Bézier-Bernstein-Punkte (vgl. Abbildung 11):

- (i) genau 6 Punkte in $D_2(v)$, die $D_2(v)$ vollständig bestimmen,
- (ii) genau 3 Punkte in $R_{3,4}(v, v_i)$, die $R_{3,4}(v, v_i)$ vollständig bestimmen, für jede Kante $e_i \notin \{a_2, a_3\}$,
- (iii) genau 2 Punkte in $R_{3,4}(v, v_i)$ verschieden von $P_{4,3,0}^{[T_i]}$, die zusammen mit $P_{4,3,0}^{[T_i]}$ die Menge $R_{3,4}(v, v_i)$ vollständig bestimmen, für $e_i = a_3$
- (iv) den Punkt $P_{3,4,0}^{[T_i]}$, für die Kante $e_i = a_2$, und
- (v) $R_{3,4}(v, T_i)$ für ein T_i , das nicht von a_2 und a_3 begrenzt wird.

Fall 2: v ist ein defekter Knoten;

Dann gibt es nach Algorithmus 3.3 eine Kante $a \in \{e_j, j = 1, \dots, n\}$ die nicht im Knoten v degeneriert ist. Wir wählen für M_v (vgl. Abbildung 12):

- (i) genau 6 Punkte in $D_2(v)$, die $D_2(v)$ vollständig bestimmen,

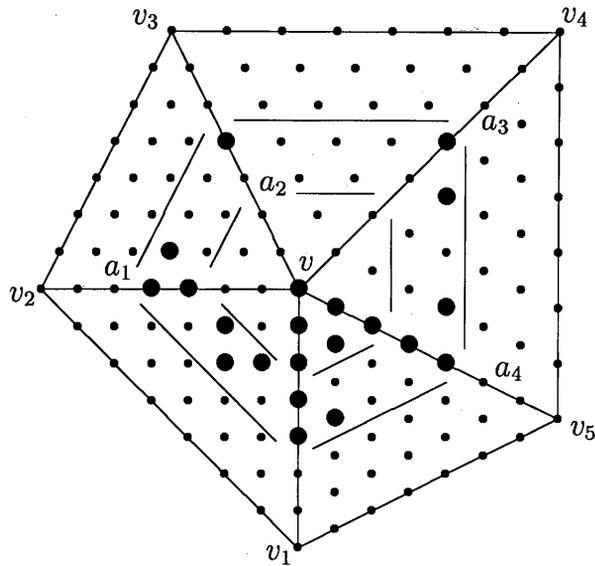


Abb. 11: M_v für einen normalen Knoten v .

- (ii) genau 3 Punkte in $R_{3,4}(v, v_i)$, die $R_{3,4}(v, v_i)$ vollständig bestimmen, für jede Kante $e_i \neq a$
- (iii) den Punkt $P_{3,4,0}^{[T_j]}$ für die Kante $e_j = a$, und
- (iv) $R_{3,4}(v, T_i)$ für ein beliebiges Dreieck T_i , $i \in \{1, \dots, n\}$.

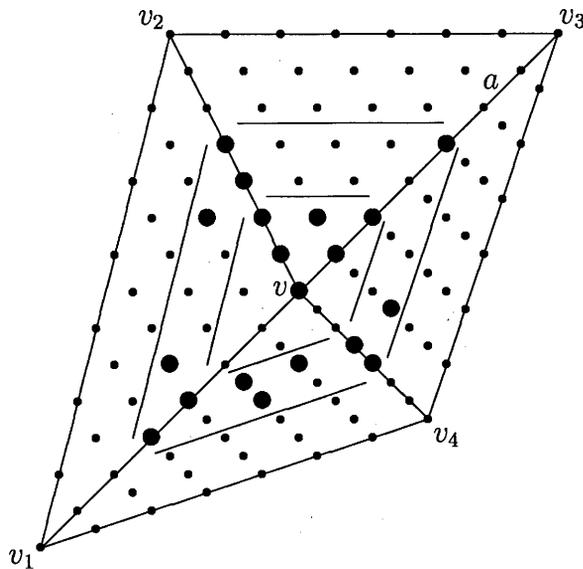


Abb. 12: M_v für einen defekten Knoten v .

Fall 3: v ist ein singulärer Knoten;

Dann gilt $Grad(v) = 4$, und wir wählen für M_v (vgl. Abbildung 13):

- (i) genau 6 Punkte in $D_2(v)$, die $D_2(v)$ vollständig bestimmen,

- (ii) genau 3 Punkte in $R_{3,4}(v, v_i)$, die $R_{3,4}(v, v_i)$ vollständig bestimmen, für jede Kante e_i , $i = 1, \dots, 4$ und
- (iii) $R_{3,4}(v, T_i)$ für ein beliebiges Dreieck T_i , $i \in \{1, \dots, 4\}$.

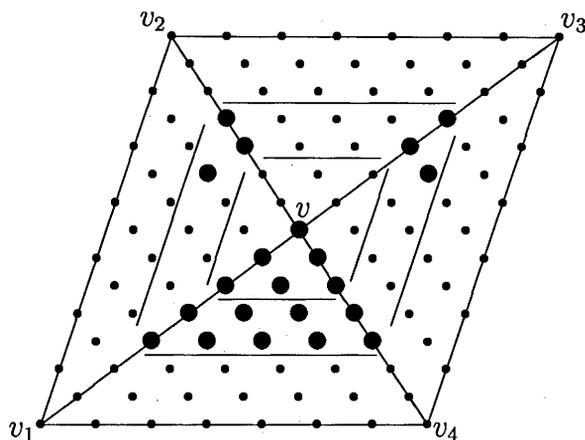


Abb. 13: M_v für einen singulären Knoten v .

Fall 4: v ist ein Randknoten;

Dann sei M_v die Menge bestehend aus folgenden Punkten (vgl. Abbildung 14):

- (i) genau 6 Punkte in $D_2(v)$, die $D_2(v)$ vollständig bestimmen,
- (ii) genau 3 Punkte in $R_{3,4}(v, v_i)$, die $R_{3,4}(v, v_i)$ vollständig bestimmen, für jede Kante e_i , $i = 1, \dots, n$, und
- (iii) $R_{3,4}(v, T_i)$ für ein beliebiges Dreieck T_i , $i \in \{1, \dots, n - 1\}$.

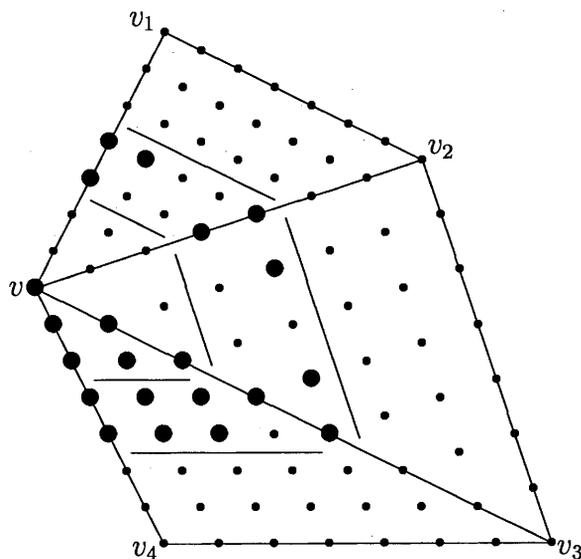


Abb. 14: M_v für einen Randknoten v .

Lemma 4.1:

Seien v, Δ_v und M_v wie oben. Dann ist M_v eine bestimmende Menge für $\mathcal{S}_7^2(\Delta_v)$ auf $D_4(v)$.

Beweis:

Für alle $(i, j, k) \in \mathbb{N}_0^3$ mit $i + j + k = 7$ und alle $T \in \Delta$ sei $a_{i,j,k}^{[T]}$ der zu $P_{i,j,k}^{[T]}$ gehörige Bézier-Bernstein-Koeffizient. Wir zeigen, dass das homogene Problem $a_{i,j,k}^{[T]} = 0$ für alle $P_{i,j,k}^{[T]}$ in M_v nur trivial lösbar ist, d.h. alle Bézier-Bernstein-Koeffizienten der Punkte von $D_4(v)$ verschwinden. Dabei unterscheiden wir die vier oben betrachteten Fälle. Sei also $a_{i,j,k}^{[T]} = 0$ für alle $P_{i,j,k}^{[T]}$ in M_v . Da nach Voraussetzung in allen Fällen die in (i) gewählten Bézier-Bernstein-Punkte $D_2(v)$ bestimmen, folgt nach Lemma 2.3, dass $a_{i,j,k}^{[T]} = 0$ für alle $P_{i,j,k}^{[T]} \in D_2(v)$. Es verbleiben die Koeffizienten der Bézier-Bernstein-Punkte in $D_4(v) \setminus D_2(v)$.

Fall 1: v ist ein normaler Knoten;

Sei T_j das Dreieck in Δ_v , das von den Kanten a_2 und a_3 begrenzt wird. Wegen der C^2 -Bedingungen über den inneren Kanten von Δ_v sind mit den gegebenen Koeffizienten entsprechend der Punkte von (ii) und (v) alle Koeffizienten der Punkte in $R_{3,4}(v, v_i)$ für alle i mit $e_i \notin \{a_2, a_3\}$ sowie $R_{3,4}(v, T_i)$ für alle $i \neq j$ gleich Null. Da die vier Kanten a_1, \dots, a_4 paarweise verschiedene Steigungen besitzen, verschwinden nach Lemma 2.6 und Lemma 2.2 die Koeffizienten $\{a_{4,i,3-i}^{[T_j]}, i = 0, \dots, 3\}$. Die gegebenen Koeffizienten entsprechend der Punkte von (iii) implizieren mit der C^2 -Bedingung über der Kante a_3 nach Lemma 2.3 daher $a_{3,3,1}^{[T_j]} = a_{3,2,2}^{[T_j]} = 0$. Die verbleibenden beiden Koeffizienten von $R_{3,4}(v, v_k)$, wobei $e_k = a_2$, verschwinden mit der C^2 -Bedingung über der Kante a_2 nach Korollar 2.4. Damit sind alle Koeffizienten der Bézier-Bernstein-Punkte von $D_4(v)$ gleich Null.

Fall 2: v ist ein defekter Knoten;

Sei $a = e_i$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ die in v nichtdegenerierte Kante. Mit den gegebenen Koeffizienten der Punkte von (ii) und (iv) und den C^2 -Bedingungen über den inneren Kanten von Δ_v sind nach Lemma 2.3 alle Koeffizienten der Punkte von $D_4(v) \setminus R_{3,4}(v, v_i)$ gleich Null. Da es keine vier aufeinanderfolgenden Kanten paarweise verschiedener Steigung gibt, ist der Koeffizient $a_{4,0,3}^{[T_i]}$ nicht überbestimmt. Die verbleibenden drei Koeffizienten von $R_{3,4}(v, v_i)$ verschwinden nach Korollar 2.4 mit dem Koeffizient entsprechend des Punkts $P_{3,4,0}^{[T_i]}$ in (iii). Damit sind alle Koeffizienten der Punkte von $D_4(v)$ gleich Null.

Fall 3: v ist ein singulärer Knoten;

Wegen der C^2 -Bedingungen über den inneren Kanten von Δ_v verschwinden mit den gegebenen Koeffizienten entsprechend der Punkte von (ii) nach Lemma 2.3 alle Koeffizienten der Punkte in $R_{3,4}(v, v_i)$, $i = 1, \dots, 4$. Die Degeneriertheit dieser Kanten in v impliziert, dass die verbleibenden Koeffizienten der Punkte in $R_{3,4}(v, T_i)$, $i = 1, \dots, 4$ mit der C^2 -Bedingung über den inneren Kanten von Δ_v und den gegebenen Koeffizienten in (iii) nach Lemma 2.3 ebenfalls gleich Null sind. Somit verschwinden alle Bézier-Bernstein-Koeffizienten der Punkte von $D_4(v)$.

Fall 4: v ist ein Randknoten;

Für einen Randknoten v sind mit den gegebenen Koeffizienten entsprechend der Punkte von (ii) und den C^2 -Bedingungen über den inneren Kanten von Δ_v nach Lemma 2.3 auch

die fehlenden Koeffizienten der Punkte in $R_{3,4}(v, v_i)$, $i = 1, \dots, n$ gleich Null. Zusammen mit den Koeffizienten entsprechend der Punkte in (iii) und den C^2 -Bedingungen über den Kanten folgt schließlich, dass alle Koeffizienten der Punkte von $R_{3,4}(v, T_i)$, $i = 1, \dots, n - 1$ verschwinden. Damit sind alle Koeffizienten der Bézier-Bernstein-Punkte von $D_4(v)$ gleich Null.

#

Jetzt sind wir in der Lage für $\Delta \in \mathcal{T}_g$ eine minimal bestimmende Menge für den Splineraum $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ zu konstruieren. Dazu wählen wir die folgende Menge von Bézier-Bernstein-Punkten $M \subset M_\Delta$:

- genau 6 Punkte in $D_2(v)$, die $D_2(v)$ vollständig bestimmen, für jeden Knoten v der Triangulierung,
- genau 3 Punkte in $R_{3,4}(v, T)$ für ein nach Lemma 4.1 geeignetes Dreieck $T \in \Delta_v$, für jeden Knoten v der Triangulierung,
- genau 3 Punkte in $R_{3,4}(v, u)$, die $R_{3,4}(v, u)$ vollständig bestimmen, für jede nichtmarkierte Kante $[v, u]$ der Triangulierung,
- genau einen Punkt nach Lemma 4.1 in $R_{3,4}(v, u)$, für jede einfach markierte Kante $[v, u]$ der Triangulierung,
- genau 2 Punkte nach Lemma 4.1 in $R_{3,4}(v, u)$, für jede zweifach markierte Kante $[v, u]$ der Triangulierung.

Theorem 4.2:

Seien M und Δ wie oben. Dann ist M eine minimal bestimmende Menge für den Splineraum $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ und es gilt

$$\dim(\mathcal{S}_7^2(\Delta)) = \#M = lb_7^2(\Delta).$$

Beweis:

Wir zeigen zuerst, dass $\#M = lb_7^2(\Delta)$. Sei dazu τ_3 die Anzahl der singulären und τ_1 die Anzahl der defekten Knoten der Triangulierung Δ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \#M &= 6\#V(\Delta) + 3\#V(\Delta) + 3(\#E(\Delta) - \#V_I(\Delta)) + \tau_1 + 3\tau_3 \\ &= 9\#V + 3(3\#V_I(\Delta) + 2\#V_B(\Delta) - 3 - \#V_I(\Delta)) + \tau_1 + 3\tau_3 \\ &= 15\#V_I(\Delta) + 15\#V_B(\Delta) - 9 + \tau_1 + 3\tau_3 \\ &= 15[3\#V_I(\Delta) + 2\#V_B(\Delta) - 3] - 30\#V_I(\Delta) - 15\#V_B(\Delta) + 36 + \tau_1 + 3\tau_3 \\ &= 15(\#E(\Delta) - \#E_B(\Delta)) - 30\#V_I(\Delta) + \tau_1 + 3\tau_3 \\ &= 15\#E_I(\Delta) - 30\#V_I(\Delta) + 36 + \tau_1 + 3\tau_3 \\ &= \binom{9}{2} + \binom{6}{2}\#E_I - [\binom{9}{2} - \binom{4}{2}]\#V_I(\Delta) + \tau_1 + 3\tau_3 \\ &= lb_7^2(\Delta). \end{aligned}$$

Also reicht es zu zeigen, dass M eine bestimmende Menge für $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ ist. Wir betrachten zunächst die inneren Knoten v_1, \dots, v_n , der Triangulierung, deren Reihenfolge durch die Konstruktion der Pfade nach Algorithmus 3.3 festgelegt ist.

Aus $M \cap M_{\Delta_{v_1}} = M_{v_1}$ folgt nach Lemma 4.1, dass $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ auf $D_4(v_1)$ bestimmt ist. Sei bereits gezeigt, dass $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ auf $D_4(v_i)$, $i = 1, \dots, k$, $k \leq n-1$ bestimmt ist, dann betrachten wir $D_4(v_{k+1})$. Es gilt

$$\left(M \cup \left(\bigcup_{i=1}^k D_4(v_i) \right) \right) \cap M_{\Delta_{v_{k+1}}} = M_{v_{k+1}}.$$

Daher ist $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ nach Lemma 4.1 auf $D_4(v_{k+1})$ bestimmt. Sei schließlich v ein singulärer Knoten oder ein Randknoten. Dann gilt

$$\left(M \cup \left(\bigcup_{i=1}^n D_4(v_i) \right) \right) \cap M_{\Delta_v} = M_v.$$

Also ist nach Lemma 4.1 der Splineraum $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ auf $D_4(v)$ bestimmt. Mit Bemerkung 3.1 folgt, dass M eine bestimmende Menge für $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ ist. Aus

$$\#M \geq \dim(\mathcal{S}_7^2(\Delta)) \geq lb_7^2(\Delta) = \#M$$

folgt die Behauptung.

#

5. Hermite-Interpolation

In diesem Abschnitt konstruieren wir Hermite-Interpolationsmengen für den Splineraum $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ auf Triangulierungen $\Delta \in \mathcal{T}_g$. Basierend auf den minimal bestimmenden Mengen dieser Splineräume betrachten wir zunächst einzelne Zellen von Δ , die wir dann mit Hilfe der Pfade durchlaufen. Dabei wählen wir geeignete Interpolationsbedingungen in den Knoten von Δ an eine genügend oft differenzierbare Funktion $f \in C(\Omega)$.

Sei $Grad(v) = n \in \mathbb{N}$, v im Uhrzeigersinn verbunden mit den Knoten v_i , $i = 1, \dots, n$ durch Kanten $e_i := [v, v_i]$ und $\Delta_v = \{T_i = \Delta(v, v_i, v_{i+1}), i = 1, \dots, n\}$ die Zelle um v . Für einen Randknoten entfallt das Dreieck T_n . Wir setzen d_i für $i = 1, \dots, n$ einen Einheitsvektor entlang der Kante e_i und α_i für $i = 1, \dots, n$ den von e_i und e_{i+1} eingeschlossenen Winkel (vgl. Abbildung 15).

Sei $\Delta \in \mathcal{T}_g$ und $s \in \mathcal{S}_7^2(\Delta)$ gegeben durch $s|_T \equiv p^{[T]} \in \mathcal{P}_7$ für alle $T \in \Delta$. Wir unterscheiden vier Fälle für den Knoten v , und wählen die Menge H_v folgender Interpolationsbedingungen in v .

Fall 1: v ist ein normaler Knoten;

Nach Algorithmus 3.3 gibt vier aufeinanderfolgende Kanten a_1, \dots, a_4 in $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$ mit paarweise verschiedenen Steigungen. Dann wähle

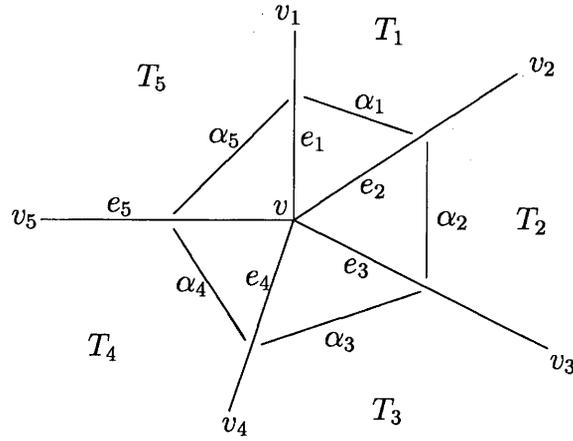


Abb. 15: Beispiel eines Knotens vom Grad 5.

- (i) $D^w p^{[T_1]}(v) = D^w f(v)$ für $w = 0, \dots, 2$,
- (ii) $p_{d_i^3}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^3}(v)$, $p_{d_i^3 d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^3 d_{i+1}}(v)$ und $p_{d_i^4}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^4}(v)$ für alle $e_i \notin \{a_2, a_3\}$,
- (iii) $p_{d_i^4}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^4}(v)$ für die Kante $e_i = a_2$,
- (iv) $p_{d_i^4}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^4}(v)$ und $p_{d_i^3 d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^3 d_{i+1}}(v)$ für die Kante $e_i = a_3$, sowie
- (v) $p_{d_i^2 d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^2 d_{i+1}}(v)$, $p_{d_i d_{i+1}^2}^{[T_i]}(v) = f_{d_i d_{i+1}^2}(v)$ und $p_{d_i^2 d_{i+1}^2}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^2 d_{i+1}^2}(v)$ für ein T_i , das nicht von a_2 und a_3 begrenzt wird.

Fall 2: v ist ein defekter Knoten;

Nach Algorithmus 3.3 gibt es eine Kante $a \in \{e_i, i = 1, \dots, n\}$ die nicht im Knoten v degeneriert ist. Dann wählen wir

- (i) $D^w p^{[T_1]}(v) = D^w f(v)$ für $w = 0, \dots, 2$,
- (ii) $p_{d_i^3}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^3}(v)$, $p_{d_i^3 d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^3 d_{i+1}}(v)$ und $p_{d_i^4}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^4}(v)$ für alle $e_i \neq a$,
- (iii) $p_{d_i^4}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^4}(v)$ für die Kante $e_i = a$, sowie
- (iv) $p_{d_i^2 d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^2 d_{i+1}}(v)$, $p_{d_i d_{i+1}^2}^{[T_i]}(v) = f_{d_i d_{i+1}^2}(v)$ und $p_{d_i^2 d_{i+1}^2}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^2 d_{i+1}^2}(v)$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$.

Fall 3: v ist ein singulärer Knoten;

Dann enthalte H_v die Bedingungen

- (i) $D^w p^{[T_1]}(v) = D^w f(v)$ für $w = 0, \dots, 2$,
- (ii) $p_{d_i^3}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^3}(v)$, $p_{d_i^3 d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^3 d_{i+1}}(v)$ und $p_{d_i^4}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^4}(v)$ für alle $i = 1, \dots, 4$, sowie

(iii) $p_{d_i^2 d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^2 d_{i+1}}(v)$, $p_{d_i d_{i+1}^2}^{[T_i]}(v) = f_{d_i d_{i+1}^2}(v)$ und $p_{d_i^2 d_{i+1}^2}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^2 d_{i+1}^2}(v)$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$.

Fall 4: v ist ein Randknoten;

Dann sei H_v die Menge bestehend aus den Bedingungen

(i) $D^w p^{[T_1]}(v) = D^w f(v)$ für $w = 0, \dots, 2$,

(ii) $p_{d_i^3}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^3}(v)$, $p_{d_i^2 d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^2 d_{i+1}}(v)$ und $p_{d_i d_{i+1}^2}^{[T_i]}(v) = f_{d_i d_{i+1}^2}(v)$ für alle $i = 1, \dots, n-1$,

(iii) $p_{d_n^3}^{[T_n]}(v) = f_{d_n^3}(v)$, $p_{d_n^2 d_{n-1}}^{[T_n]}(v) = f_{d_n^2 d_{n-1}}(v)$ und $p_{d_n d_{n-1}^2}^{[T_n]}(v) = f_{d_n d_{n-1}^2}(v)$, sowie

(iv) $p_{d_i^2 d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^2 d_{i+1}}(v)$, $p_{d_i d_{i+1}^2}^{[T_i]}(v) = f_{d_i d_{i+1}^2}(v)$ und $p_{d_i^2 d_{i+1}^2}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^2 d_{i+1}^2}(v)$ für ein $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Lemma 5.1:

Seien v, Δ_v und H_v wie oben. Dann sind durch die Bedingungen in H_v alle partiellen Ableitungen $D^w p^{[T]}(v)$, $i = 1, \dots, n$, $w = 0, \dots, 4$ eindeutig bestimmt.

Beweis:

Wir unterscheiden die vier betrachteten Fälle des Knotens v . In allen Fällen sind durch die in (i) gegebenen Interpolationsbedingungen nach Lemma 2.3 und Lemma 2.6 die partiellen Ableitungen $D^w s(v)$ für $w = 0, \dots, 2$ eindeutig bestimmt. Es verbleiben die Ableitungen dritter und vierter Ordnung.

Fall 1: v ist ein normaler Knoten;

Sei o.B.d.A. $a_i = e_i$ für $i = 1, \dots, 4$. Dann sind durch die Interpolationsbedingungen von (ii) und (v) nach Lemma 2.3 und Lemma 2.6 alle Ableitungen $D^w p^{[T_i]}(v)$, $w = 3, 4$, $i \geq 4$ eindeutig bestimmt. Mit der C^2 -Stetigkeit über den Kanten a_1 und a_4 sind nach Lemma 2.2 die vier partiellen Ableitungen $D^3 p^{[T_2]}(v)$ ebenfalls eindeutig festgelegt. Die C^2 -Stetigkeit über der Kante a_3 liefert zusammen mit den beiden Bedingungen von (iii) nach Lemma 2.3 und Lemma 2.6 die Eindeutigkeit von $D^w p^{[T_3]}(v)$, $w = 3, 4$. Die verbleibende Bedingung von (ii) impliziert mit der C^2 -Stetigkeit über der Kante a_2 nach Lemma 2.1 die Eindeutigkeit von $D^w p^{[T_1]}(v)$, $w = 3, 4$.

Fall 2: v ist ein defekter Knoten;

Seien o.B.d.A. T_1 und T_2 die beiden Dreiecke mit gemeinsamer Kante a . Durch die in (ii) und (iv) gegebenen Interpolationsbedingungen sind nach Lemma 2.3 und Lemma 2.6 alle Ableitungen $D^w p^{[T_i]}(v)$, $w = 3, 4$, $i \geq 3$ eindeutig bestimmt. Die C^2 -Stetigkeit über den drei Kanten e_i , $i = 1, \dots, 3$ liefert nach Lemma 2.3 und Lemma 2.6 und dann mit der verbleibenden Bedingung von (iii) nach Lemma 2.1 die Eindeutigkeit von $D^w p^{[T_j]}(v)$, $w = 3, 4$, $j = 1, 2$.

Fall 3: v ist ein singulärer Knoten;

Da alle Kanten e_i im Endpunkt v degeneriert sind, gilt $p_{d_i^j d_{i+1}^k}^{[T_i]}(v) = -p_{d_{i+1}^j d_{i+2}^k}^{[T_{i+1}]}(v)$, für

$i = 1, \dots, 4$ wobei $j = k = 2$ oder $j = 1, 2, k = 3 - j$. Somit sind durch die Interpolationsbedingungen von (ii) und (iii) mit der C^2 -Stetigkeit über den Kanten $e_i, i = 1, \dots, 4$ alle partiellen Ableitungen $D^w p^{[T_i]}(v), w = 3, 4, i = 1, \dots, 4$ eindeutig bestimmt.

Fall 4: v ist ein Randknoten;

Sei o.B.d.A. $i = 1$ in (iv). Die C^2 -Stetigkeit über der Kante e_2 impliziert mit den Interpolationsbedingungen in (ii) und (iv) nach Lemma 2.3 und Lemma 2.6, dass die Ableitungen $D^w p^{[T_2]}(v), w = 3, 4$ eindeutig bestimmt sind. Mit analogem Argument folgt die Eindeutigkeit von $D^w p^{[T_i]}(v), w = 3, 4, i = 3, \dots, n - 1$.

#

Im Folgenden leiten wir einen Zusammenhang zwischen den partiellen Ableitungen benachbarter Knoten her. Seien $T_1 = \Delta(v, v_1, v_2)$ und $T_2 = \Delta(v, v_2, v_3)$ zwei benachbarte Dreiecke mit gemeinsamer, nicht in v degenerierter Kante $e_2 = [v, v_2]$. Ferner seien $d_i, i = 1, \dots, 3$ Einheitsvektoren entlang der Kante $e_i = [v, v_i]$ und die Polynome $p^{[T_i]} \in \mathcal{P}_7, i = 1, 2$ auf $T_i = \Delta(v, v_i, v_{i+1})$ gegeben.

Lemma 5.2:

Aus $D^w p^{[T_1]}(v) \equiv D^w p^{[T_1]}(v_2) \equiv 0, w = 0, \dots, 2$ und $p_{d_2^j}^{[T_1]}(v) = 0, j = 3, 4$ folgt $p_{(-d_2)^i}^{[T_1]}(v_2) = 0$ für $i = 0, \dots, 4$. Gilt zusätzlich $p_{d_1(-d_2)^2}^{[T_1]}(v_2) = 0$ und $p_{d_1 d_2^j}^{[T_1]}(v) = 0$ für $j = 2, 3$, so folgt $p_{(-d_2)^i \tilde{d}}^{[T_1]}(v_2) = 0$ für $i = 0, \dots, 3$ und ein Einheitsvektor \tilde{d} entlang $[v_2, v_1]$.

Beweis:

Wegen der gegebenen Interpolationsbedingungen in v und v_2 besitzt das univariate Polynom $p_{|_{e_2}}^{[T_1]} \in \Pi_7$ mindestens 8 Nullstellen. Dies impliziert $p_{|_{e_2}}^{[T_1]} \equiv 0$. Mit den zusätzlichen Bedingungen existieren mindestens 7 Nullstellen für das univariate Polynom $(p_{d_1}^{[T_1]})_{|_{e_2}} \in \Pi_6$. Somit gilt $(p_{d_1}^{[T_1]})_{|_{e_2}} \equiv 0$. Daraus folgt die Behauptung.

#

Sei $\Delta \in \mathcal{T}_g$ gegeben. Mit Hilfe der Interpolationsbedingungen H_v auf den Zellen von Δ können wir nun eine Hermite-Interpolationsmenge für den Splineraum $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ angeben. Nach Konstruktion in Algorithmus 3.3 existieren $l \in \mathbb{N}$ disjunkte Pfade von normalen und defekten Knoten zu singulären Knoten oder Randknoten. Wir numerieren die Knoten $V(\Delta)$ der Triangulierung wie folgt:

- $V(\Delta)$ zerfällt in Mengen $M_1 = \{v_1, \dots, v_{m_1}\}$ und $M_j = \{v_{m_{j-1}+1}, \dots, v_{m_j}\}, j = 2, \dots, l$ sowie $M_r = \{v_{m_l+1}, \dots, v_m\}$, wobei M_j für $j = 1, \dots, l$ die Knoten des j -ten Pfades und M_r die restlichen Knoten sind.
- Für zwei Knoten $v_i, v_k \in M_j, j \in \{1, \dots, l\}$ gelte $i < k$, falls v_k auf dem Pfad zwischen v_i und einem Randknoten oder singulären Knoten dieses Pfades liegt.

Dann enthalte H die Bedingungen

- (i) $D^w p^{[T_1]}(v) = D^w f(v)$ für $w = 0, \dots, 2$ und alle $v \in V$,
- (ii) $p_{d_i^3}^{[T_i]}(v_j) = f_{d_i^3}(v_j)$, $p_{d_i^3 d_{i+1}}^{[T_i]}(v_j) = f_{d_i^3 d_{i+1}}(v_j)$ und $p_{d_i^4}^{[T_i]}(v_j) = f_{d_i^4}(v_j)$ für alle Knoten $v_j \in V(\Delta)$ und alle Kanten $e_i = [v_j, v_k]$ mit $j < k$, die nicht die Kante a, a_2 oder a_3 von v_j sind.
- (iii) $p_{d_i^4}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^4}(v)$ und $p_{d_i^3 d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^3 d_{i+1}}(v)$ für die Kante $e_i = a_3$, für jeden normalen Knoten $v \in V(\Delta)$,
- (iv) $p_{d_i^4}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^4}(v)$ für die Kante $e_i \in \{a, a_2\}$ für jeden defekten bzw. normalen Knoten $v \in V(\Delta)$, sowie
- (v) $p_{d_i^2 d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^2 d_{i+1}}(v)$, $p_{d_i d_{i+1}^2}^{[T_i]}(v) = f_{d_i d_{i+1}^2}(v)$ und $p_{d_i^2 d_{i+1}^2}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^2 d_{i+1}^2}(v)$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$, wobei $i \neq n$, falls v ein Randknoten ist, und T_i für jeden normalen Knoten v nicht das von a_2 und a_3 begrenzte Dreieck ist.

Theorem 5.3:

Sei $\Delta \in \mathcal{T}_g$. Dann ist H eine Hermite-Interpolationsmenge für $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$.

Beweis:

Nach Konstruktion gilt $\#H = \dim(\mathcal{S}_7^2(\Delta))$. Somit reicht es zu zeigen, dass das homogene Interpolationsproblem $f \equiv 0$ nur trivial lösbar ist. Wir zeigen zuerst induktiv, dass für alle Knoten v der Triangulierung $D^w p^{[T_i]}(v) = 0$ für $w = 0, \dots, 4$, $i = 1, \dots, \text{grad}(v)$ gilt. Betrachten wir den Knoten v_1 . Die Menge aller Interpolationsbedingungen in H im Knoten v_1 entspricht der Menge H_{v_1} . Somit ist s in v_1 bis zur vierten Ordnung eindeutig bestimmt, es gilt

$$D^w p^{[T_i]}(v_1) \equiv 0, \quad w = 0, \dots, 4, \quad i = 1, \dots, n_1.$$

Sei für die Knoten v_j , $j = 1, \dots, k$, $k \leq \#V(\Delta) - 1$ bereits gezeigt, dass $D^w p^{[T_i]}(v_j) = 0$ für $w = 0, \dots, 4$, $i = 1, \dots, n_j$, dann betrachten wir den Knoten v_{k+1} . Nach Lemma 5.2 sind mit den Interpolationsbedingungen in H im Knoten v_{k+1} und v_i für alle Kanten $e_i = [v_{k+1}, v_i]$ mit $k+1 > i$ die partiellen Ableitungen $p_{d_i^3}^{[T_i]}(v_j)$, $p_{d_i^4}^{[T_i]}(v_j)$, $p_{d_i^3 d_{i+1}}^{[T_i]}(v_j)$ und $p_{d_i^2 d_{i-1}}^{[T_i]}(v_j)$ gleich Null. Diese und die verbleibenden Bedingungen in H im Knoten v_{k+1} ergeben die Menge $H_{v_{k+1}}$. Dies impliziert

$$D^w p^{[T_i]}(v_{k+1}) \equiv 0, \quad w = 0, \dots, 4, \quad i = 1, \dots, n_{k+1}.$$

Sei $s \in \mathcal{S}_7^2(\Delta)$ definiert durch $s|_T \equiv p^{[T]} \in \mathcal{P}_7$ für alle $T \in \Delta$, gegeben in seiner Bézier-Bernstein-Darstellung. Aus $D^w p^{[T_i]}(v) \equiv 0$ für $w = 0, \dots, 4$, $i = 1, \dots, \text{grad}(v)$ folgt nach Lemma 2.6, dass alle Koeffizienten dieser Darstellung verschwinden. Damit gilt $s \equiv 0$.

#

6. Modifikation von Triangulierungen

In diesem Abschnitt formulieren wir einen Algorithmus, der aus einer gegebenen Triangulierung $\Delta \notin \mathcal{T}_g$ mit Hilfe von Clough-Tocher-Splits eine geeignete Triangulierung $\tilde{\Delta} \in \mathcal{T}_g$ konstruiert. Der Algorithmus verläuft in zwei Schritten. Zuerst werden alle defekten Knoten vom Grad ≥ 4 eliminiert, im zweiten Schritt dann zusätzliche Kanten definiert, um geeignete Pfade wählen zu können. Seien e_i und \tilde{e}_i die Anzahl der Kanten mit Endpunkt v_i die paarweise verschiedene Steigungen besitzen, vor bzw. nach der Unterteilung eines Dreiecks mit Eckpunkt v_i . Dann fordern wir: Wird ein Dreieck $T = \Delta(v_1, v_2, v_3) \in \Delta$ unterteilt, dann wähle dazu einen Punkt im Innern von T , sodass $\tilde{e}_i = e_i + 1$, $i = 1, \dots, 3$.

1. Schritt:

Für jeden defekten Knoten $v_i \in V_I(\Delta)$ mit $\text{Grad}(v_i) \geq 4$ wähle ein Dreieck $T = \Delta(v_i, v_j, v_k)$ in Δ_{v_i} , das nicht zur Zelle eines singulären Knotens gehört, und führe dort einen Clough-Tocher Split durch. Ist $\text{Grad}(v_i) = 6$, und gehört jedes Dreieck mit Eckpunkt v_i zu der Zelle eines singulären Knotens, so wähle einen benachbarten singulären Knoten v_j und unterteile die beiden Dreiecke mit gemeinsamer Kante $[v_i, v_j]$. Die so entstandene Triangulierung enthält keine defekten Knoten vom Grad ≥ 4 (vgl. Abbildung 16).

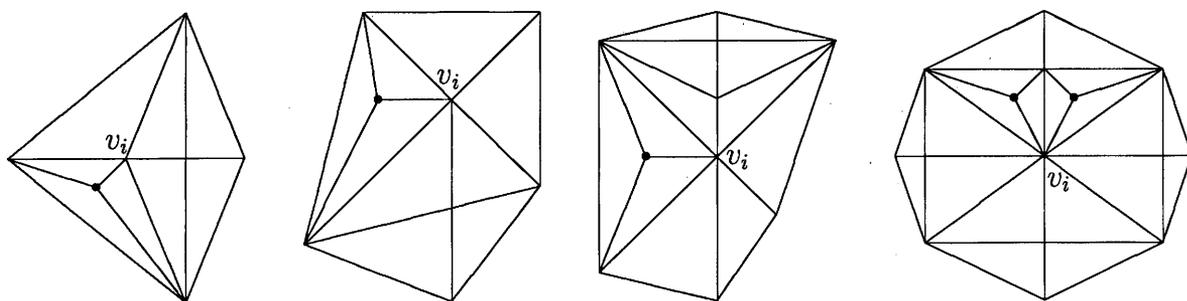


Abb. 16: Unterteilungen im 1. Schritt.

2. Schritt:

Im zweiten Schritt betrachten wir nun im Verlauf von Algorithmus 3.3 diejenigen Knoten v von \tilde{V} , bei denen keine Wahl von vier aufeinanderfolgenden Kanten a_1, \dots, a_4 paarweise verschiedener Steigung möglich ist, sodass a_2 und a_3 zu Knoten in V_{ok} verlaufen.

Seien $v \in \tilde{V}$ und v_1, \dots, v_4 vier im Uhrzeigersinn aufeinanderfolgende Knoten mit Endpunkt v . Ferner seien $v_2, v_3 \in V_{ok}$ und $[v, v_i]$, $i = 1, \dots, 4$ derart, dass mindestens zwei Kanten die gleiche Steigung besitzen. Da v_2 und v_3 nicht beide singulär oder vom Grad 3 sein können (dies zeigt ein einfaches Winkelargument), muß mindestens einer der beiden ein normaler Knoten sein. Dies sei o.B.d.A v_2 . Dann unterscheiden wir folgende drei Fälle (vgl. Abbildung 17):

1.) v_3 ist ein normaler Knoten.

a) In der Menge $\{[v, v_i], i = 1, \dots, 4\}$ gibt es drei Kanten paarweise verschiedener Steigung. Dann unterteile das Dreieck $\Delta(v, v_2, v_3)$ mit einem Knoten z , und füge

die Knoten z mit Pfad $a = [z, v_2]$ und v mit Pfaden $a_2 = [v, v_2]$ und $a_3 = [v, z]$ oder $a_2 = [v, z]$ und $a_3 = [v, v_3]$ zur Menge V_{ok} hinzu.

- b) Die Kanten $[v, v_1]$ und $[v, v_3]$ sowie $[v, v_2]$ und $[v, v_4]$ haben die gleiche Steigung. Dann unterteile das Dreieck $\Delta(v, v_2, v_3)$ mit einem Knoten z_1 und dann das Dreieck $\Delta(v, z_1, v_3)$ mit einem Knoten z_2 . Füge die Knoten z_2 mit Pfad $a = [z_2, v_3]$, z_1 mit Pfaden $a_2 = [z_1, v_3]$ und $a_3 = [z_1, z_2]$ und zuletzt v mit Pfaden $a_2 = [v, z_2]$ und $a_3 = [v, z_1]$ zur Menge V_{ok} hinzu.

2.) v_3 ist ein Knoten vom Grad 3.

- a) v_3 besitzt den Pfad $a = [v_3, v_2]$. Dann unterteile das Dreieck $\Delta(v, v_2, v_3)$ mit einem Knoten z und füge die Knoten z mit Pfad $a = [z, v_2]$, v_3 jetzt mit Pfaden $a_2 = [v_3, z]$ und $a_3 = [v_3, v_2]$ und zuletzt v mit Pfaden $a_2 = [v, v_2]$ und $a_3 = [v, z]$ zur Menge V_{ok} hinzu.
- b) v_3 besitzt den Pfad $a = [v_3, v_4]$ (also gilt $v_4 \in V_{ok}$). Dann unterteile das Dreieck $\Delta(v, v_3, v_4)$ mit einem Knoten z und füge die Knoten z mit Pfad $a = [z, v_4]$, v_3 jetzt mit Pfaden $a_2 = [v_3, v_4]$ und $a_3 = [v_3, z]$ und zuletzt v mit Pfaden $a_2 = [v, v_3]$ und $a_3 = [v, z]$ zur Menge V_{ok} hinzu.

3.) v_3 ist ein singulärer Knoten.

- a) v_1 ist nicht singulär. Ist v_1 vom Grad 3 und $[v_2, v_1]$ ein Pfad von v_2 , so gehe nach Fall 3b) vor. Ansonsten unterteile das Dreieck $\Delta(v, v_1, v_2)$ mit einem Knoten z und füge die Knoten z mit Pfad $a = [z, v_2]$ und v mit Pfaden $a_2 = [v, v_2]$ und $a_3 = [v, z]$ zur Menge V_{ok} hinzu. In dem Fall, dass v_1 vor der Unterteilung vom Grad 3 war, so füge ihn jetzt (eventuell neu) mit den Pfaden $a_2 = [v_1, v_2]$ und $a_3 = [v_1, z]$ zur Menge V_{ok} hinzu.
- b) v_1 ist ein singulärer Knoten. In diesem Fall liegen v_1, v_2 und v_3 in V_{ok} . Von v_2 aus kann nicht ein Pfad sowohl nach v_1 als auch nach v_3 verlaufen. Sei o.B.d.A. die Kante $[v_2, v_3]$ kein Pfad von v_2 . Dann unterteile das Dreieck $\Delta(v, v_2, v_3)$ mit einem Knoten z_1 und anschließend das Dreieck $\Delta(z_1, v_2, v_3)$ mit einem Knoten z_2 . Jetzt gilt $v_3 \notin V_{ok}$, da der Knoten v_3 nicht länger singulär ist. Füge die Knoten z_2 mit Pfad $a = [z_2, v_3]$, z_1 mit Pfaden $a_2 = [z_1, v_2]$ und $a_3 = [z_1, z_2]$, dann v_3 mit Pfaden $a_2 = [v_3, z_1]$ und $a_3 = [v_3, z_2]$, und zuletzt v mit Pfaden $a_2 = [v, z_1]$ und $a_3 = [v, v_3]$ zur Menge V_{ok} hinzu.

Für eine gegebene Triangulierung $\Delta \notin \mathcal{T}_g$ bezeichnen wir die durch die beiden Schritte der Modifikation entstandene Triangulierung mit $\tilde{\Delta}$. Nach Konstruktion gilt $\tilde{\Delta} \in \mathcal{T}_g$. Damit ist Hermite-Interpolation mit $\mathcal{S}_7^2(\tilde{\Delta})$ möglich.

Beispiel 6.1:

Die Triangulierung Δ aus Abbildung 8 liegt nicht in der Klasse \mathcal{T}_g . Der 1. Schritt der Modifikation entfällt, da Δ keine defekten Knoten vom Grad ≥ 4 enthält. Im zweiten Schritt reicht es z.B. aus, nur ein geeignetes Dreieck zu unterteilen. Abbildung 18 zeigt die modifizierte Triangulierung $\tilde{\Delta}$ mit Reihenfolge der inneren Knoten und dazugehörigen Pfaden.

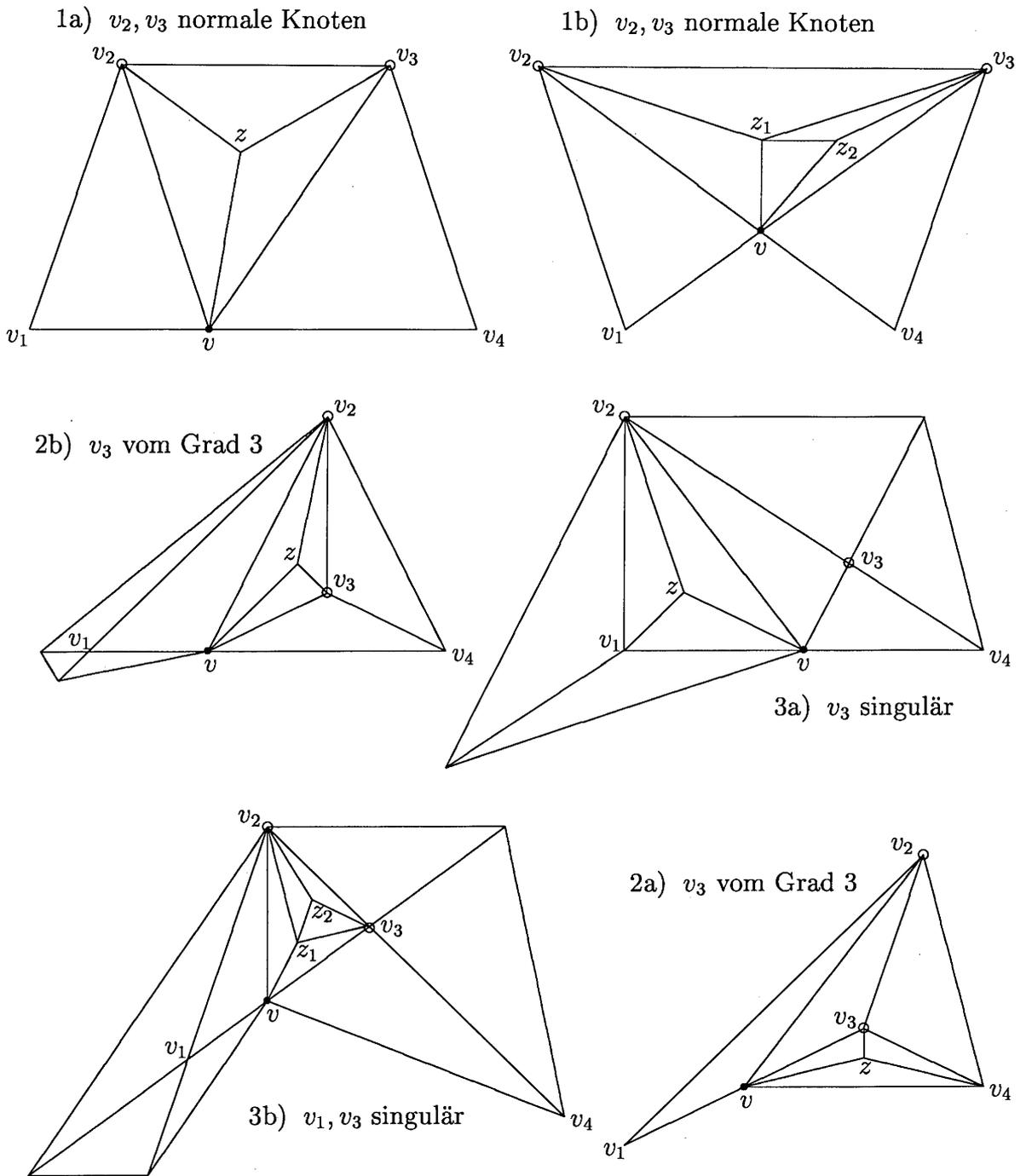


Abb. 17: Unterteilungen im 2. Schritt.

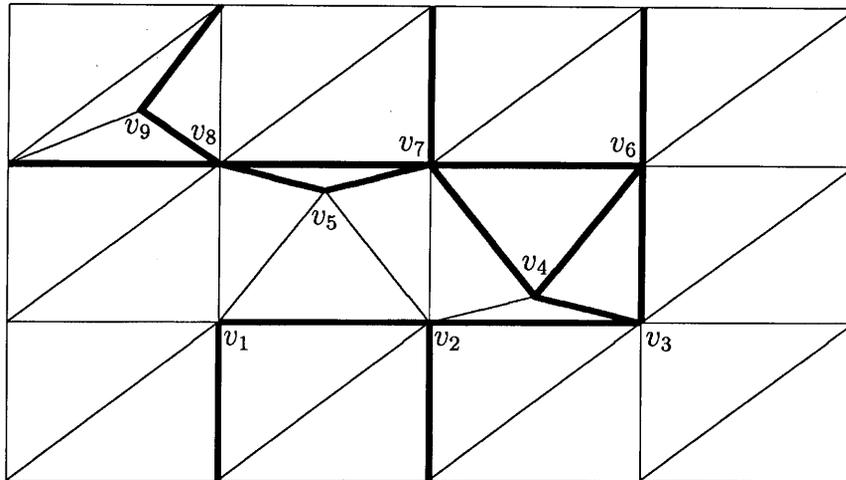


Abb. 18: Beispiel einer Modifikation.

Literaturverzeichnis

- [1] P. Alfeld, B. Piper, L.L.Schumaker: An explicit basis for C^1 quartic bivariate splines, SIAM Journal of Numerical Analysis **24** (1987) 891-911.
- [2] P. Alfeld, L.L. Schumaker: The Dimension of bivariate spline spaces of smoothness r and Grad $d \geq 4r + 1$, Constructive Approximation **3** (1987) 189-197.
- [3] P. Alfeld, B. Piper, L.L.Schumaker: Minimally supported bases for spaces of bivariate piecewise polynomials of smoothness r and degree $d \geq 4r + 1$, Computer Aided Geometric Design **4** (1987) 105-123.
- [4] P. Alfeld, L.L. Schumaker, On the dimension of bivariate spline spaces of smoothness r and degree $d = 3r + 1$, Numer. Math. **57** (1990) 651-661.
- [5] P. Alfeld, L.L. Schumaker: Non-existence of star-supported spline bases, SIAM J. Math. Anal. **31** (2000) 1482-1501.
- [6] C. de Boor: A practical guide to splines, Springer Verlag, New York 1978.
- [7] C. de Boor, K. Höllig: Approximation order from bivariate C^1 cubics: a counterexample, Proceedings of the American Mathematical Society **87** (1983) 649-655.
- [8] C. de Boor: B-Form basics, in: G. Farin, (Ed.): Geometric Modeling, SIAM, Philadelphia 1987, 131-148.

- [9] C. de Boor and Q. Jia: A sharp upper bound on the approximation order of smooth bivariate pp functions, *J. Approx. Theory* **72** (1993) 24-33.
- [10] C.K. Chui, D. Hong: Construction of local C^1 quartic spline elements for optimal-order approximation, *Mathematics of Computation* **65** (1996) 85-98.
- [11] C.K. Chui, D. Hong: Swapping edges of arbitrary triangulations to achieve the optimal order of approximation, *SIAM Journal of Numerical Analysis* **34** (1997) 1472-1482.
- [12] R.W. Clough and J.L. Tocher: Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending, in: *Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright Patterson A.F.B., Ohio 1965.
- [13] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Approximation order of bivariate spline interpolation for arbitrary smoothness, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **90** (1998) 117-134.
- [14] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Cubic spline interpolation on nested polygon triangulations, in: A. Cohen, C. Rabut, L.L. Schumaker (Eds.): *Curve and Surface Fitting*, St. Malo 1999, Vanderbilt Univ. Press, Nashville 2000, 161-170.
- [15] O. Davydov, G. Nürnberger: Interpolation by C^1 splines of degree $q \geq 4$ on triangulations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **126** (2001) 159-183.
- [16] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Bivariate spline interpolation with optimal approximation order, *Constr. Approx.* **17** (2000) 181-208.
- [17] G. Farin: A modified Clough-Tocher interpolant, *CAGD* **2** (1985) 19-27.
- [18] G. Farin: Triangular Bernstein-Bézier Patches, *CAGD* **3** (1986) 83-127.
- [19] J. Gao: Interpolation by C^1 quartic bivariate splines, *Journal of Mathematical Research Expo.* **11** (1991) 433-442.
- [20] D. Hong: Spaces of bivariate spline functions over triangulations, *Approximation Theory and its Applications* **7** (1991) 56-75.
- [21] A. Ibrahim, L.L. Schumaker: Super spline spaces of smoothness r and degree $d \geq 3r + 2$, *Constructive Approximation* **7** (1991) 401-423.
- [22] M.-J. Lai, L.L. Schumaker: Scattered data interpolation using C^2 supersplines of degree six, *SIAM J. Numer. Anal.* **34** (1997) 905-921.
- [23] J. Morgan, R. Scott: A nodal basis for C^1 piecewise polynomials of degree $n \geq 5$, *Mathematics of Computation* **29** (1975) 736-740.
- [24] G. Nürnberger: *Approximation by Spline Functions*, Springer Verlag, Berlin 1989.
- [25] G. Nürnberger, Th. Riessinger: Lagrange and Hermite interpolation by bivariate splines, *Numer. Funct. Anal. Optim.* **13** (1992) 75-96.

- [26] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Lagrange interpolation by splines on triangulations, in: R.H. Wang (Ed.): Proceedings of the Morningside Institute, Peking 1998.
- [27] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Spline interpolation on convex quadrangulations, in: C.K. Chui, L.L. Schumaker (Eds.): Approximation Theory IX, Vanderbilt University Press, Nashville 1998, 259-266.
- [28] G. Nürnberger, G. Walz: Error analysis in interpolation by bivariate C^1 -splines, IMA J. Numer. Anal. **18** (1998) 485-508.
- [29] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Interpolation by spline spaces on classes of triangulations, J. Comput. Appl. Math. **119** (2000) 347-376.
- [30] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Developments in bivariate spline interpolation, Journal of Computational and Applied Mathematics **121** (2000), 125-152.
- [31] G. Nürnberger, L.L. Schumaker, F. Zeilfelder: Local Lagrange interpolation by bivariate C^1 cubic splines, in: T. Lyche and L.L. Schumaker (Eds.), Mathematical Methods in CAGD: Oslo 2000, Vanderbilt Univ. Press, Nashville 2001, 393-404.
- [32] M.J.D. Powell, M.A. Sabin: Piecewise quadratic approximation on triangles, ACM Transactions on Mathematical Software **3** (1977) 316-325.
- [33] L.L. Schumaker: Bounds on the dimension of spaces of multivariate piecewise polynomials, Rocky Mountain Journal of Mathematics **14** (1984) 251-264.
- [34] L.L. Schumaker: Dual bases for spline spaces on a cell, Computer Aided Geometric Design **5** (1987) 277-284.