Charakterisierung stark eindeutig bester Approximationen im Raum der periodischen Splinefunktionen

Frank Zeilfelder *

Reihe Mathematik — Nr. 190, März 1995

*Lehrstuhl Mathematik IV, Universität Mannheim, D-68131 Mannheim, Germany, Tel.0621/2922959, Email: zeilfeld@euklid.math.uni-mannheim.de

Charakterisierung stark eindeutig bester Approximationen im Raum der periodischen Splinefunktionen

Zusammenfassung

Das vorliegende Manuskript behandelt die Aufgabe der Charakterisierung stark eindeutig bester Approximation in periodischen Splineräumen. Diese klärt sich durch Unterscheidung in schwach-tschebyscheffsche, periodische Splineräume und solche, die diese Struktur nicht haben.
Es werden die wesentlichen Überlegungen der Charakterisierung bester Approximation dargestellt und zur Motivation der Untersuchung stark eindeutig bester Approximation verwendet werden.

Wir bezeichnen für eine gegebene Knotenmenge

$$K_n := \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}; n \in I\!N ,$$

die wir in natürlicher Weise durch $x_{\nu+\mu n} := x_\nu + \mu((x_n - x_0)); \nu = 1 \ldots n; \mu \in Z\!\!Z$ auf ganz $I\!R$ fortsetzen, mit

$$P_m(K_n) := \{p \in C^{(m-1)}(I\!R) : p|_{[x_i,x_{i+1}]} \in \prod\nolimits_m; i = 0 \ldots n-1 \\ \text{und } p(x) = p(x + (x_n - x_0)); \forall x \in I\!R\}$$

für $m \in I\!N$ den Raum der periodischen Splinefunktionen der Ordnung $m+1$ zur Knotenmenge K_n. Aus der Literatur (vgl. [5], [9])ist bekannt, daß $P_m(K_n)$ ein n-dimensionaler Unterraum des $n+m$ dimensionalen (Standard-) Splineraums

$$S_m(x_1 \ldots x_{n-1}) := \{s \in C^{(m-1)}(I\!R) : s|_{[x_i,x_{i+1}]} \in \prod\nolimits_m; i = 0 \ldots n-1\}$$

ist. Wir bezeichnen im folgenden mit $B_i; i = 1 \ldots n$ denjenigen B-Spline mit Träger $]x_i, x_{i+m+1}[$ und stellen uns diesen periodisch fortgesetzt auf die reelle Achse vor, dann gilt

$$P_m(K_n) = span\{B_1, \ldots, B_n\}.$$

Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit ist es, die Frage nach bester Approximation darzustellen und, davon ausgehend, die Charakterisierung stark eindeutig bester Approximation in $P_m(K_n)$ zu klären, das heißt für vorgegebenes

$$f \in C_{(x_n - x_0)} := \{g \in C(I\!R) : g(x) = g(x + (x_n - x_0)); \forall x \in I\!R\}$$

ein $p_f \in P_m(K_n)$ zu finden, so daß

$$\|f - p_f\|_\infty \leq \|f - p\|_\infty; \forall p \in P_m(K_n)$$

(beste Approximation), beziehungsweise

$$\|f - p_f\|_\infty + K_f\|p - p_f\|_\infty \leq \|f - p\|_\infty; \forall p \in P_m(K_n)$$

für eine Konstante $K_f > 0$ (stark eindeutig beste Approximation).
Es wird sich zeigen, daß bei der Untersuchung dieser Probleme Eigenschaften und Lagen von Alternanten eine Rolle spielen.
Eine Punktmenge $x_0 \leq t_1 < \ldots < t_r (< t_1 + (x_n - x_0)); r \in I\!N$ heißt Alternante der Länge r einer gegebenen Funktion $g \in C_{(x_n - x_0)}$, falls für ein $\sigma \in \{-1, +1\}$ die Bedingung

$$(-1)^j \sigma g(t_j) = \|g\|_\infty; j = 1 \ldots r$$

erfüllt ist. Die Punkte $t_j; j = 1 \ldots r$ sind somit Elemente der Extremalpunktmenge von g:

$$E_g := \{x \in [x_0, x_n] : |g(x)| = \|g\|_\infty\}.$$

Wir sprechen im folgenden von Alternanten der genauen Länge r, falls eine Punktmenge $x_0 \leq t_1 < \ldots < t_r (< t_1 + (x_n - x_0))$ existiert, welche Alternante von g ist, aber keine Punktmenge $x_0 \leq \tilde{t}_1 < \ldots < \tilde{t}_s (< \tilde{t}_1 + (x_n - x_0))$ existiert, die Alternante von g ist und $s > r$ erfüllt.
Wir geben zunächst im Fall schwach-tschebyscheffscher, periodischer Splineräume einen neuen Beweis der Charakterisierung bester Approximationen in $P_m(K_n); n = 2l + 1; l \in I\!N_0$ an. Dieser beruht auf der Grundidee den Charakterisierungssatz in $P_m(K_n)$ ähnlich wie in (vgl.[5], p.132, Theorem 4.2) die, ursprünglich von Rice und Schumaker (vgl. [6], [8]) stammende, Charakterisierung bester Approximationen in $S_m(x_1 \ldots x_{n-1})$ bewiesen wird, herzuleiten.
Hierbei gelangt man, aufgrund der schwach-tschebyscheffschen Eigenschaft, mit der gemäß (vgl. [4]) konstruierten, besten Approximation, durch Verwendung eines starken Eindeutigkeitsarguments zum Ziel.
Danach wird der Fall nicht schwach-tschebyscheffscher, periodischer Splineräume $n = 2l; l \in I\!N$ im Sinne von (vgl. [3]) zusammengefaßt. Dies dient, neben Vollständigkeitsgründen, der Motivation der Untersuchungen des zweiten Paragraphen, indem die Charakterisierung stark eindeutig bester Approximationen in $P_m(K_n)$ angegeben und in den dabei auftretenden, verschiedenen Fällen, bewiesen wird.

1 Charakterisierung bester Approximationen $P_m(K_n)$

In diesem Paragraphen werden beste Approximationen in $P_m(K_n)$ untersucht. Hierbei benötigt man die folgende Aussage über die Anzahl der Vorzeichenwechsel einer periodischen Splinefunktion in deren Periodizitätsintervall $[x_0, x_n[$. Sie besagt, daß im Fall n ungerade $P_m(K_n)$ ein schwach-tschebyscheffscher Raum ist und im anderen Fall maximal $dim(P_m(K_n)) = n$ Vorzeichenwechsel auftreten können. Dies bedeutet, daß bei gerader Knotenintervallanzahl der periodische Splineraum im Gegensatz zum (Standard-) Splineraum (vgl. [5], p.95, Theorem 1.19) einen wesentlichen Strukturverlust aufweist.

Satz 1 (vgl. Schumaker, L. [9], p.300, Theorem 8.4) *Es seien $p \in P_m(K_n)$ und $Z(p)$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel von p in $[x_0, x_n[$. Dann gilt :*

$$Z(p) \leq \begin{cases} n \text{ , falls } n \text{ gerade} \\ n-1 \text{ , falls } n \text{ ungerade} \end{cases} .$$

Den Beweis von Satz 1 führt man per Induktion nach $m \in I\!N$, indem man zunächst den (einfachen) Fall $m = 1$ klärt und dann für $m \geq 2$ zeigt, daß für $p \in P_m(K_n)$ die Abschätzung $Z(p) \leq Z(p^{(1)})$ gilt.

Wir behandeln nun zunächst den Fall schwach-tschebyscheffscher, periodischer Splineräume, das heißt nach Satz 1, daß n ungerade ist. Die Charakterisierungsaussage wurde bereits von O.V. Davydov (vgl. [3]) gefunden. Wir geben an dieser Stelle einen neuen Beweis der Charakterisierung bester Approximationen in $P_m(K_n); n = 2l + 1; l \in I\!N_0$ an, welche auf dem folgenden Satz beruht.

Satz 2 (Jones, R.C. & Karlovitz, L.A.,vgl. [4], [5],S.88) *Es sei $G \subseteq C([a, b])$ ein n-dimensionaler Unterraum. G ist genau dann schwach-tschebyscheffsch, wenn jede Funktion $f \in C([a, b])$ eine beste Approximation $g_f \in G$ besitzt, derart, daß die Fehlerfunktion $(f - g_f)$ eine Alternante der Länge $n + 1$ auf $[a, b]$ hat.*

Beim Beweis der Charakterisierung bester Approximationen in $P_m(K_n)$ benutzen wir, wie eingangs angedeutet, ein Argument über stark eindeutig beste Approximationen. Diesem liegt der nächste Satz zugrunde.

Satz 3 (vgl. [5],S.91) *Es sei $G = span\{g_1 \dots g_n\}$ ein n-dimensionaler, schwach-tschebyscheffscher Unterraum von $C([a, b])$. Weiterhin seien $f \in C([a, b])$ und $g_f \in G$. Dann folgt aus der Existenz einer Alternante $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} \leq b$ der Länge $n + 1$ von $(f - g_f)$, mit der Eigenschaft*

$$D\begin{pmatrix} g_1 & \dots & g_n \\ t_1 \dots t_{i-1} t_{i+1} & \dots & t_{n+1} \end{pmatrix} \neq 0; i = 1 \dots n+1,$$

daß g_f stark eindeutig beste Approximation an f ist.

Der Beweis von Satz 3 verwendet Satz 12 und Satz 16 (siehe unten).

Der nächste Satz beschreibt die Charakterisierung bester Approximationen für schwach-tschebyscheffsche, periodische Splineräume.

Satz 4 (vgl.[3]) *Es seien $n \in \mathbb{N}; n = 2l+1; l \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}$. Weiterhin seien $f \in C_{(x_n - x_0)}$ und $p_f \in P_m(K_n)$. Dann ist p_f genau dann beste Approximation an f, falls ein Intervall $[x_p, x_{p+q}]$; $p \in \{0 \dots n-1\}$; $q \in \{1 \dots n\}$ existiert, so daß $(f - p_f)$ eine Alternante der Länge $d+1$ in $[x_p, x_{p+q}]$ besitzt, wobei*

$$d = dim(P_m(K_n)|_{[x_p, x_{p+q}]})$$

gilt.

Beweis von Satz 4 :

Für $\Leftarrow$ sei $t_1 < \dots < t_{d+1} (< t_1 + (x_n - x_0))$ die Alternante von $(f - p_f)$ der Länge $d+1$ in $[x_p, x_{p+q}]$. Angenommen es gibt $\tilde{p} \in P_m(K_n)$, so daß

$$\|f - \tilde{p}\|_\infty < \|f - p_f\|_\infty,$$

so folgt für ein $\sigma \in \{-1, +1\}$

$$(-1)^j \sigma (f - \tilde{p})(t_j) \le \|f - \tilde{p}\|_\infty < \|f - p_f\|_\infty = (-1)^j \sigma (f - p_f)(t_j); j = 1 \dots d+1,$$

und somit

$$(-1)^j \sigma (p_f - \tilde{p})(t_j) < 0; j = 1 \dots d+1.$$

Das heißt $(p_f - \tilde{p}) \in P_m(K_n)$ hat d Vorzeichenwechsel in $[x_p, x_{p+q}]$. Ist nun $d = n$, also insbesondere $q \in \{n - m \dots n\}$, so ist dies ein Widerspruch zu Satz 1. Für $d = m + q$ und $q \in \{1 \dots n - m - 1\}$ hat man

$$(p_f - \tilde{p})|_{[x_p, x_{p+q}]} \in P_m(K_n)|_{[x_p, x_{p+q}]} = S_m(x_{p+1} \dots x_{p+q-1}).$$

Da $S_m(x_{p+1} \dots x_{p+q-1})$ nach (vgl. [5], p.95, Theorem 1.19.) für $q \in \{1 \dots n-m-1\}$ ein $d = m+q$-dimensionaler, schwach-tschebyscheffscher Raum ist, kann $(p_f - \tilde{p})$ auch in diesem Fall keine d Vorzeichenwechsel in $[x_p, x_{p+q}]$ besitzen - ein Widerspruch.

Für $\Rightarrow$ erhält man zunächst aus der schwach-tschebyscheff Eigenschaft von $P_m(K_n); n = 2l+1; l \in \mathbb{N}_0$ (Satz 1) mit Hilfe von Satz 2 die Existenz eines $p_0 \in P_m(K_n)$, beste Approximation an $f \in C_{(x_n - x_0)}$, mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß $(f - p_0)$ eine Alternante der Länge $n+1$ in $[x_0, x_n]$ besitzt. Es sei nun $[x_p, x_{p+q}]; p \in \{0 \dots n-1\}$; $q \in \{1 \dots n\}$ so gewählt, daß $(f - p_0)$ in $[x_p, x_{p+q}]$ die Alternante

$$T = \{t_1 < \dots < t_{d+1} (< t_1 + (x_n - x_0))\}$$

besitzt und zusätzlich kein (echtes) Teilintervall $[x_{\hat{p}}, x_{\hat{p}+\hat{q}}] \subset [x_p, x_{p+q}]$ existiert, welches eine $(\hat{d}+1)$-elementige Teilmenge von T enthält. Hierbei soll $d = dim(P_m(K_n)|_{[x_p, x_{p+q}]})$ und $\hat{d} = dim(P_m(K_n)|_{[x_{\hat{p}}, x_{\hat{p}+\hat{q}}]})$ gelten. Wir zeigen im folgenden, daß $p_0|_{[x_p, x_{p+q}]}$ stark eindeutig beste Approximation an f bezüglich dem Raum $P_m(K_n)|_{[x_p,x_{p+q}]}$ ist. Hierzu unterscheidet man nach der Dimension $d = dim(P_m(K_n)|_{[x_p,x_{p+q}]})$ und wendet Satz 3 an. Ist $d = n$, das heißt $q \in \{n-m\dots n\}$, so nehmen wir an, daß

$$D\begin{pmatrix} g_1 & \dots & g_n \\ t_1 \dots t_{j-1} t_{j+1} \dots t_{n+1} \end{pmatrix} = 0$$

für ein $j \in \{1\dots n+1\}$ gilt. Aufgrund von (vgl. [9], p.302, Theorem 8.8) folgt, daß es ein Intervall $]x_i, x_{i+m+k}[; i \in \{0\dots n-1\}; k \in \{1\dots n-m-1\}$ gibt, welches maximal $(k-1)$ Punkte aus $T \setminus \{t_j\}$ enthält. Man erhält, daß ein Intervall $[x_{\tilde{p}}, x_{\tilde{p}+\tilde{q}}]; \tilde{p} \in \{0\dots n-1\}$; $\tilde{q} \in \{1\dots n-m-1\}$ existiert, welches mindestens $m+\tilde{q}+1$ Punkte aus $T\setminus\{t_j\}$ enthält. Damit enthält

$$[x_{\hat{p}}, x_{\hat{p}+\hat{q}}] := [x_{\tilde{p}}, x_{\tilde{p}+\tilde{q}}] \cap [x_p, x_{p+q}]$$

mindestens $m+\tilde{q}+1(\geq m+\hat{q}+1 = dim(P_m(K_n)|_{[x_{\hat{p}},x_{\hat{p}+\hat{q}}]})+1)$ Punkte aus $T\setminus\{t_j\}$ und somit mindestens $m+\hat{q}+1 = \hat{d}+1$ Punkte aus T - ein Widerspruch zur Wahl von $[x_p, x_{p+q}]$.

Ist $d < n$, das heißt $q \in \{1\dots n-m-1\}$, so nehmen wir an, daß

$$D\begin{pmatrix} g_1 & \dots & g_n \\ t_1 \dots t_{j-1} t_{j+1} \dots t_{d+1} \end{pmatrix} = 0$$

für ein $j \in \{1\dots d+1\}$ gilt. In diesem Fall ist

$$P_m(K_n)|_{[x_p,x_{p+q}]} = S_m(x_{p+1}\dots x_{p+q-1})$$

ein $(d = m+q)$-dimensionaler (üblicher) Splineraum. Aus obiger Annahme folgt mit Hilfe der klassischen Interpolationsaussage für Splinefunktionen (vgl. [5], p.109, Theorem 3.7), wenn wir

$$T\setminus\{t_j\} = \{u_1 < \dots < u_d\}$$

setzen, daß es ein $i \in \{1\dots q-1\}$ mit der Eigenschaft $u_i \geq x_{p+i}$ oder $u_{i+m+1} \leq x_{p+i}$ gibt. Man erhält hieraus, daß $I_1 := [x_{p+i}, x_{p+q}]$ die $(m+q-i+1)$ Punktmenge $\{u_i < \dots < u_d\}$ enthält, oder daß $I_2 := [x_p, x_{p+i}]$ die $(m+i+1)$ Punktmenge $\{u_1 < \dots < u_{i+m+1}\}$ enthält. Aufgrund von $dim(P_m(K_n)|_{I_1}) = m+q-i$, beziehungsweise $dim(P_m(K_n)|_{I_2}) = m+i$ ist dies in beiden Fällen ein Widerspruch zur Wahl von $[x_p, x_{p+q}]$. Offenbar ist $P_m(K_n)|_{[x_p,x_{p+q}]}$ in den beiden hier aufgetretenen Fällen ein schwach-tschebyscheffscher Raum, so daß mit Satz 3 folgt, daß $p_0|_{[x_p,x_{p+q}]}$ stark eindeutig beste Approximation aus $P_m(K_n)|_{[x_p,x_{p+q}]}$ an $f|_{[x_p,x_{p+q}]}$ ist. Man erhält

$$\|(f-p_f)|_{[x_p,x_{p+q}]}\|_\infty \leq \|f-p_f\|_\infty = \|f-p_0\|_\infty = \|(f-p_0)|_{[x_p,x_{p+q}]}\|_\infty,$$

und damit aus starken Eindeutigkeitsgründen

$$p_f(x) = p_0(x); \forall x \in [x_p, x_{p+q}],$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Wir bemerken an dieser Stelle, daß im Fall $n \leq m + 1$ der eingeschränkte Raum $P_m(K_n)|_{[x_p, x_{p+q}]}$ stets die volle Dimension n hat, und die, in Satz 4 angegebene, Charakterisierungsbedingung für beste Approximationen in diesem Fall die, aus dem Haarschen Satz bekannte, ist. In der Tat ist $P_m(K_n)$ dann ein tschebyscheffscher Raum.

Im folgenden wird nun die Charakterisierung bester Approximationen für den nicht schwach-tschebyscheffschen Fall periodischer Splinefunktionen ($n = 2l; l \in I\!N$) nach O.V.Davydov dargestellt. Dabei zeigt sich, daß neben den Alternantenbedingungen in den Fällen, in denen nicht mit der lokalen schwach-tschebyscheff Eigenschaft argumentiert werden kann, zusätzliche Determinantenbedingungen an die Alternante gestellt werden müssen. Wir geben hierzu zunächst das allgemeinste Kriterium zur Charakterisierung bester Approximationen in endlich-dimensionalen Räumen an.

Satz 5 (Rivlin und Shapiro, vgl.[7], p.74, Theorem 2.5) *Es seien G ein reeller Unterraum von $C([a,b])$ mit $dim(G) = n$ und $f \in C([a,b])$. $g_f \in G$ ist genau dann beste Approximation an f, wenn $r \leq n+1$ Punkte $y_j \in E_{f-g_f}; j = 1 \ldots r$ und geeignete $c_j > 0; j = 1 \ldots r$ existieren, so daß*

$$\sum_{j=1}^{r} c_j (f - g_f)(y_j) g(y_j) = 0; \forall g \in G.$$

Beim Beweis von Satz 5 werden der Satz von Caratheodory und der Satz von Hahn-Banach entscheidend verwendet.

Man erhält aus Satz 5 den folgenden Satz, durch welchen man erkennt, daß das Kolmogoroff-Kriterium (vgl. [5], p.32, Theorem 3.9.) zur Charakterisierung bester Approximationen für endlich dimensionale Unterräume auf einer (nur) endlichen Menge formuliert werden kann.

Satz 6 *Es seien $G \subsetneq C([a,b])$ ein n-dimensionaler, reeller Unterraum und $f \in C([a,b])$. $g_f \in G$ ist genau dann beste Approximation an f, wenn es $r \leq n+1$ Punkte $y_j \in E_{f-g_f}; j = 1 \ldots r$ gibt, so daß für kein $g \in G$ die Eigenschaft*

$$(f - g_f)(y_j) g(y_j) > 0; j = 1 \ldots r$$

erfüllt ist.

Der Beweis von Satz 6 erfolgt sofort aus Satz 5 und dem allgemeinen Kolmogoroff-Kriterium (vgl. [5], p.32, Theorem 3.9.).

Wir können uns also bei der Untersuchung auf beste Approximationen in $P_m(K_n)$ auf eine endliche Menge von Punkten (mit maximaler Anzahl $dim(P_m(K_n)) + 1 = n+1$), die dem Kolmogoroff-Kriterium genügen, beschränken. Das folgende Hilfslemma tritt, wie sich zeigen wird, bei der Behandlung von Alternanten, bei denen keine lokalen schwach-tschebyscheffschen Eigenschaften zugrundeliegen, auf. Sein Beweis beruht, ähnlich wie der ursprüngliche Beweis des Satzes von Rice und Schumaker (vgl. [6],[8]), auf der Idee schrittweise Knoten zu eliminieren. Zusätzlich wird hier die schwach-tschebyscheffsche Eigenschaft von $P_m(K_{2l+1}) \subset P_m(K_n); l \in \{0 \ldots \frac{n}{2} - 1\}$ im Zusammenhang mit (vgl. [9], p.302, Theorem 8.8) ausgenutzt.

Lemma 7 (Davydov,O.V., vgl. [3]) *Es sei* $n \in I\!N$ *gerade und* $T = \{t_j\}_{j=1}^{2l}$ *eine Menge von* $2l \leq n-1$ *Punkten,* $x_0 \leq t_1 < \ldots < t_{2l}(< t_1 + (x_n - x_0))$*, mit der Eigenschaft, daß jedes Intervall* $[x_i, x_{i+k}]; i \in \{0 \ldots n-1\}; k \in \{1 \ldots 2l - m + 1\}$ *maximal* $m + k - 1$ *Punkte aus* T *enthält. Dann gilt, daß ein* $p \in P_m(K_n)$ *mit den Eigenschaften*

$$p(t_j) = 0; j = 1 \ldots 2l \quad und \quad \forall t \in]t_j, t_{j+1}[: \; sgn(p(t)) = (-1)^j; j = 1 \ldots 2l$$

(wobei $t_{2l+1} := t_1 + (x_n - x_0)$*) existiert.*

Das nächste Lemma ist von technischer Natur. Es wird bei der Behandlung von Alternanten, bei denen lokal schwach-tschebyscheffsche Eigenschaften nicht ausgenutzt werden können, benötigt werden.

Lemma 8 (Davydov,O.V., vgl. [3]) *Es seien* $l \leq n$ *und* $\{t_j\}_{j=1}^{l}, \{\tilde{t}_j\}_{j=1}^{l}$ *Punkte aus* $[x_0, x_n[$ *mit der Lagebedingung* $t_j \leq \tilde{t}_j < t_{j+1}; j = 1 \ldots l$*, wobei* $(t_{l+1} := t_1 + (x_n - x_0))$*. Es gelte, daß jedes Intervall* $[x_i, x_{i+k}]; i \in \{0 \ldots n-1\}; k \in \{1 \ldots l - m\}$ *maximal* $m + k$ *Intervalle der Form* $[t_j, \tilde{t}_j]$ *anschneidet. Dann gibt es eine Punktmenge* $\hat{T} = \{\hat{t}_j\}_{j=1}^{l}$ *mit der Lagebedingung*

$$\tilde{t}_j < \hat{t}_j < t_{j+1}; j = 1 \ldots l$$

und der Eigenschaft, daß jedes Intervall $[x_i, x_{i+k}]; i \in \{0 \ldots n-1\}; k \in \{1 \ldots l - m + 1\}$ *maximal* $m + k - 1$ *Punkte aus* $\hat{T}$ *enthält.*

Schließlich benötigt man die folgenden beiden Aussagen, die einen Zusammenhang zwischen Interpolations- und Nichtinterpolationsmengen für periodische Splinefunktionen herstellen. Einen detaillierten Beweis der nächsten Aussage findet man an anderer Stelle.

Satz 9 *Es sei* $n \in I\!N$ *gerade und* $x_0 \leq t_1 < \ldots < t_n(< t_1 + (x_n - x_0))$ *eine Menge von Punkten, die die Schoenberg-Whitney am Kreis-Eigenschaft erfüllen, daß heißt jedes Intervall* $]x_i, x_{i+m+j}[; i \in \{0 \ldots n-1\}; j \in \{1 \ldots n-m\}$ *enthält mindestens* j *Punkte der Menge* $T = \{t_j\}_{j=1}^{n}$*. Falls nun*

$$D\begin{pmatrix} B_1 \ldots B_n \\ t_1 \ldots t_n \end{pmatrix} = 0$$

gilt, so erfüllt jede Punktmenge $\hat{T} = \{\hat{t}_j\}_{j=1}^{n}$ *mit der Eigenschaft* $t_j < \hat{t}_j < t_{j+1}$*;* $j = 1 \ldots n$*, wobei* $(t_{n+1} := t_1 + (x_n - x_0))$*, die Bedingung*

$$D\begin{pmatrix} B_1 \ldots B_n \\ \hat{t}_1 \ldots \hat{t}_n \end{pmatrix} \neq 0.$$

Der Beweis von Satz 9 erfolgt durch den Basisansatz

$$P_m(K_n) = span\{B_1 \ldots B_{n-1}, \hat{s}\},$$

wobei $\hat{s} \in P_m(K_n)$ die nichttriviale Lösungsfunktion des Nullproblems auf T ist. Die Annahme

$$D\begin{pmatrix} B_1 \dots B_n \\ \hat{t}_1 \dots \hat{t}_n \end{pmatrix} = 0$$

führt hierbei auf den Widerspruch, daß $\hat{s}$ maximal $n-2$ Vorzeichenwechsel besitzt. In der Tat folgt nämlich aus der Schoenberg-Whitney am Kreis-Eigenschaft von T, daß $\hat{s}$ sogar n Vorzeichenwechsel besitzt. ■

Lemma 10 *Es sei $n \in I\!N$ gerade und $x_0 \leq t_1 < \dots < t_n (< t_1 + (x_n - x_0))$ eine Menge von Punkten, die die Schoenberg-Whitney am Kreis-Eigenschaft erfüllt und es gelte*

$$D\begin{pmatrix} g_1 \dots g_n \\ t_1 \dots t_n \end{pmatrix} = 0,$$

wobei $\{g_1 \dots g_n\}$ eine Basis von $P_m(K_n)$ ist. Dann erfüllt jede Punktmenge

$$\tilde{T}_i := (\{t\} \cup \{t_j\}_{j=1}^n) \setminus \{t_i\}; i = 1 \dots n$$

mit der Eigenschaft $t \neq t_j; j = 1 \dots n$ die Bedingung

$$D\begin{pmatrix} g_1 & \dots & g_n \\ t_1 \dots t_{i-1} & t & t_{i+1} \dots t_n \end{pmatrix} \neq 0.$$

Beweis Lemma 10 :

Aus der Schoenberg-Whitney am Kreis-Eigenschaft von $T = \{t_k\}_{k=1}^n$ folgt wegen

$$D\begin{pmatrix} B_1 \dots B_n \\ t_1 \dots t_n \end{pmatrix} = 0,$$

daß jedes Intervall $]x_i, x_{i+m+j}[; i \in \{0 \dots n-1\}; j \in \{1 \dots n-m\}$ mindestens $j+1$ Punkte der Menge T enthält. Hieraus folgt, daß die Menge $T \setminus \{t_i\}$ Schoenberg-Whitney am Kreis bezüglich der Knotenmenge $K_n \setminus \{x_{n-1}\}$ liegt und die Menge $\tilde{T}_i$ Schoenberg-Whitney am Kreis bezüglich K_n liegt. Somit erhält man (vgl. [9], p.302, Theorem 8.8) für den schwach-tschebyscheffschen Teilraum

$$P_m(K_n \setminus \{x_{n-1}\}) = span\{B_1 \dots B_{n-1}\} \subset P_m(K_n)),$$

daß

$$D_i := D\begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_{n-1} \\ t_1 \dots t_{i-1} t_{i+1} \dots t_n \end{pmatrix} \neq 0; i = 1 \dots n$$

gilt. Ist $\hat{s} \in P_m(K_n)$ die nichttriviale Lösung des Nullproblems bezüglich T, so folgt nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz für $t \neq t_j; j = 1 \dots n$

$$\begin{aligned} D\begin{pmatrix} \hat{s}\ B_1 & \dots & B_{n-1} \\ t_1 \dots t_{i-1} & t & t_{i+1} \dots t_n \end{pmatrix} &= \sum_{k=1 k\neq i}^{n} (-1)^{k+1} \hat{s}(t_k) D_k + (-1)^{i+1} \hat{s}(t) D_i \\ &= (-1)^{i+1} \hat{s}(t) D_i \neq 0 \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. ∎

Wir formulieren und beweisen nun den Charakterisierungssatz für beste Approximationen in $P_m(K_n); n \in I\!N; n = 2l; l \in I\!N$ nach O.V.Davydov (vgl.[3]). Im Gegensatz zum schwach-tschebyscheffschen Fall periodischer Splinefunktionen treten bei der Charakterisierung bester Approximationen zusätzlich Alternanten der Länge $\geq n$ mit gewissen Determinantenbedingungen auf.

Satz 11 (Davydov,O.V., vgl. [3]) *Es seien $n \in I\!N; n = 2l; l \in I\!N$ und $f \in C_{(x_n - x_0)} \setminus P_m(K_n)$. $p_f \in P_m(K_n)$ ist genau dann beste Approximation an f, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist*
(a) es gibt ein Intervall $[x_p, x_{p+q}]; p \in \{0 \dots n-1\}; q \in \{1 \dots n-m\}$, so daß $(f - p_f)$ eine Alternante der Länge $d+1$ in $[x_p, x_{p+q}]$ besitzt, wobei $d = dim(P_m(K_n)|_{[x_p, x_{p+q}]})$ gilt,
(b) $(f - p_f)$ hat eine Alternante $x_0 \leq t_1 < \dots < t_n (< t_1 + (x_n - x_0))$ der Länge n in $[x_0, x_n[$ mit der Eigenschaft

$$D\begin{pmatrix} B_1 \dots B_n \\ t_1 \dots t_n \end{pmatrix} = 0$$

(c) $(f - p_f)$ hat eine Alternante $x_0 \leq t_1 < \dots < t_{n+1} (< t_1 + (x_n - x_0))$ der Länge $n+1$ in $[x_0, x_n[$ mit der Eigenschaft

$$D\begin{pmatrix} B_1 & \dots B_n \\ \tau & t_2 \dots t_n \end{pmatrix} = 0$$

für ein $\tau \in]t_{n+1}, t_1 + (x_n - x_0)[$.

Beweis Satz 11 :

Man zeigt zunächst $\Leftarrow$. Falls (a) gilt, so argumentiert man wie in Satz 4 mit der schwach-tschebyscheff Eigenschaft von $S_m(x_{p+1} \dots x_{p+q-1})$. Ist nun $T = \{t_j\}_{j=1}^n$ eine Alternante der Länge n wie in (b), so können wir davon ausgehen, daß jedes Intervall $[x_i, x_{i+k}]; i \in \{0 \dots n-1\}; k \in \{1 \dots n-m\}$ maximal $m+k$ Punkte aus T enthält. Damit enthält jedes Intervall $]x_i, x_{i+j+m}[; i \in \{0 \dots n-1\}; j \in \{1 \dots n-m\}$ mindestens j Punkte aus T, das heißt die Punktmenge T liegt Schoenberg-Whitney am Kreis. Nehmen wir nun an $p_f \in P_m(K_n)$ ist nicht beste Approximation an f, so folgt aus Satz 6, daß für alle $r \leq n+1$-Punktmengen $y_j \in E_{f-p_f}; j = 1 \dots r$ ein $p \in P_m(K_n)$ existiert mit der Eigenschaft

$$(f - p_f)(y_j)p(y_j) > 0; j = 1 \dots r.$$

Wegen der Alternanteneigenschaft von T erhält man für ein $\sigma \in \{-1, +1\}$

$$(-1)^j \sigma (f - p_f)(t_j) = \|f - p_f\|_\infty; j = 1 \dots n,$$

und hieraus

$$sgn(p(t_j)) = (-1)^j \sigma; j = 1 \dots n.$$

Damit folgt die Existenz von $\hat{T} = \{\hat{t}_j\}_{j=1}^n$ mit $t_j < \hat{t}_j < t_{j+1}; j = 1 \ldots n$, wobei $(t_{n+1} := t_1 + (x_n - x_0))$, und $p(\hat{t}_j) = 0$. Dies ist ein Widerspruch zu Satz 9, denn T ist eine Schoenberg-Whitney am Kreis-Menge mit der Eigenschaft

$$D\begin{pmatrix} B_1 \ldots B_n \\ t_1 \ldots t_n \end{pmatrix} = 0.$$

Ist nun $x_0 \leq t_1 < \ldots < t_{n+1} (< t_1 + (x_n - x_0))$ eine Alternante der Länge $n+1$ von $(f - p_f)$ mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß jeweils $T_1 = \{t_j\}_{j=1}^n$ und $T_2 = \{t_j\}_{j=2}^{n+1}$ maximal $m + k$ Punkte in einem Intervall der Form $[x_i, x_{i+k}]; i \in \{0 \ldots n-1\}$; $k \in \{1 \ldots n - m\}$ besitzen und

$$D\begin{pmatrix} B_1 \ldots B_n \\ t_1 \ldots t_n \end{pmatrix} \neq 0 \text{ , sowie } D\begin{pmatrix} B_1 \ldots B_n \\ t_2 \ldots t_{n+1} \end{pmatrix} \neq 0,$$

so macht nach Lemma 10 die Vorausetzung

$$D\begin{pmatrix} B_1 & \ldots B_n \\ \tau & t_2 \ldots t_n \end{pmatrix} = 0$$

für ein $\tau \in]t_{n+1}, t_1 + (x_n - x_0)[$ Sinn und die Menge $\{\tau\} \cup \{t_j\}_{j=2}^n$ liegt Schoenberg-Whitney am Kreis. Man erhält dann analog den obigen Überlegungen aus der Annahme p_f wäre nicht beste Approximation einen Widerspruch zu Satz 9.

Wir zeigen nun $\Rightarrow$. Da $p_f \in P_m(K_n)$ beste Approximation an f ist folgt aus Satz 6 daß es $r \leq n+1$ Punkte $y_j \in E_{f-g_f}; j = 1 \ldots r$, $x_0 \leq y_1 < \ldots < y_r (< y_1 + (x_n - x_0))$ gibt, so daß für kein $p \in P_m(K_n)$ die Eigenschaft

$$(f - p_f)(y_j)p(y_j) > 0; \forall j \in \{1 \ldots r\}$$

erfüllt ist. Wegen $-1, 1 \in P_m(K_n)$ folgt, daß $k_0, k_1 \in \{1 \ldots r\}$ mit $k_0 \neq k_1$ existieren, so daß $sgn((f - p_f)(y_{k_0})) > 0$ und $sgn((f - p_f)(y_{k_1})) < 0$. Falls nun $sgn((f - p_f)(y_1)) \neq sgn((f - p_f)(y_r))$ gilt, so setzen wir

$$z_j := y_j; j = 1 \ldots r.$$

Sonst sei

$$sgn((f-p_f)(y_1)) = sgn((f-p_f)(y_r)) = \ldots = sgn((f-p_f)(y_{r-s+1})) \neq sgn((f-p_f)(y_{r-s}))$$

und man setzt

$$z_j := y_{r-s+j} - (x_n - x_0); j = 1 \ldots s \text{ und } z_{j+s} := y_j; j = 1 \ldots r - s.$$

Weiter wählen wir $i_0 := 0$, $i_{2l} := r$ und $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{2l-1} < r$, so daß für $j \in \{0 \ldots 2l - 1\}$ und $\sigma \in \{-1, +1\}$ die Vorzeichenbedingung

$$sgn((f - p_f)(z_i)) = (-1)^j \sigma; i = i_j + 1 \ldots i_{j+1} \tag{1}$$

gilt. Falls nun $p \in \{0 \dots n-1\}; q \in \{1 \dots n-m\}$ existieren, so daß das Intervall $[x_p, x_{p+q}]$ die $m+q+1$ Punkte

$$t_1 := z_{i_s}; t_j := z_{i_{s+j-1}+1}; j = 2 \dots m+q+1$$

für ein $s \in I\!N$ enthält, so bildet $\{t_j\}_{j=1}^{m+q+1}$ wegen $dim(P_m(K_n)|_{[x_p,x_{p+q}]}) = m+q$ eine wie in (a) gewünschte Alternante von $(f-p_f)$ in $[x_p, x_{p+q}]$ der Länge $m+q+1$. Ist dies aber nicht der Fall so enthält jedes Intervall $[x_i, x_{i+k}]; i \in \{0 \dots n-1\}; k \in \{1 \dots n-m\}$ maximal $j \leq m+k$ Punkte der Form

$$z_{i_s} < z_{i_s+1} < \dots < z_{i_{s+j-1}+1}$$

für jedes $s \in I\!N$. Setzt man $t_j := z_{i_{j-1}+1}$ und $\tilde{t}_j := z_{i_j}; j = 1 \dots 2l$ so gilt

$$t_j \leq \tilde{t}_j < t_{j+1}; j = 1 \dots 2l,$$

wobei $t_{2l+1} = t_1 + (x_n - x_0)$, und die Intervalle $[t_j, \tilde{t}_j]; j = 1 \dots 2l$ erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 8 und es folgt die Existenz einer Punktmenge $\hat{T} = \{\hat{t}_j\}_{j=1}^{2l}$ mit

$$z_{i_j} < \hat{t}_j < z_{i_j+1}; j = 1 \dots 2l \ (z_{i_{2l}+1} := z_1 + (x_n - x_0))$$

und der Eigenschaft, daß jedes Intervall $[x_i, x_{i+k}]; i \in \{0 \dots n-1\}; k \in \{1 \dots 2l-m+1\}$ maximal $m+k-1$ Punkte aus $\hat{T}$ enthält. Nimmt man nun an, daß $2l \leq n-1$ gilt, so folgt aus Lemma 8 daß ein $p \in P_m(K_n)$ existiert mit den Eigenschaften $p(\hat{t}_j) = 0$; $j = 0 \dots 2l-1$ und

$$\forall t \in]\hat{t}_j, \hat{t}_{j+1}[: \ sgn(p(t)) = (-1)^j \sigma; j = 0 \dots 2l-1 \ (\hat{t}_0 := \hat{t}_{2l} - (x_n - x_0)).$$

Es folgt

$$sgn(p(z_i)) = (-1)^j \sigma; i = i_j + 1 \dots i_{j+1}; j = 0 \dots 2l-1$$

woraus man mit (1) den Widerspruch

$$(f - p_f)(z_i) p(z_i) > 0; i = i_j + 1 \dots i_{j+1}; j = 0 \dots 2l-1$$

zu Satz 6 erhält.

Damit muß $2l = n$ sein und es folgt $r \in \{n, n+1\}$. Ist nun $r = n$, so gilt $z_{i_j+1} = z_{i_{j+1}}; j = 0 \dots n-1$ und man definiert $t_j := z_{i_j}; j = 1 \dots n$. Dann ist $T = \{t_j\}_{j=1}^n$ eine Alternante von $(f-p_f)$ der Länge n in $[x_0, x_n[$, welche die Eigenschaft hat, daß in jedem Intervall $]x_i, x_{i+k+m}[; i \in \{0 \dots n-1\}; k \in \{1 \dots n-m\}$ mindestens k Punkte aus T liegen, das heißt T hat die Schoenberg-Whitney am Kreis-Eigenschaft. Deshalb macht die Annahme

$$D \begin{pmatrix} B_1 \dots B_n \\ t_1 \dots t_n \end{pmatrix} \neq 0$$

zunächst Sinn. Es folgt jedoch die (eindeutige) Existenz von $p \in P_m(K_n)$ mit der Eigenschaft $p(t_j) = (-1)^{j-1}\sigma; j = 1 \dots n$. Aufgrund von (1) gilt aber

$$sgn((f - p_f)(t_j)) = (-1)^{j-1}\sigma; j = 1 \dots n,$$

so daß man einen Widerspruch zu Satz 6 erhält.

Ist $r = n+1$, so gibt es genau ein $j_0 \in \{0\dots n-1\}$ mit $i_{j_0}+1 < i_{j_0+1}$ und für alle $j \in \{0\dots n-1\}\setminus\{j_0\}$ gilt $z_{i_j+1} = z_{i_{j+1}}$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $j_0 = 0$ an. Offenbar gilt dann $i_j = j+1; j = 0\dots n$ und man definiert

$$t_j := z_{j+1}; j = 1\dots n; \text{ und } t_{n+1} := z_1 + (x_n - x_0).$$

Setzt man $\tilde{t}_j := t_j; j = 1\dots n$ und $t_j^* := t_{j+1}; j = 1\dots n$, so folgt aus Lemma 8 die Existenz einer Punktmenge $\hat{T} = \{\hat{t}_j\}_{j=1}^n$ mit $\tilde{t}_j < \hat{t}_j < t_j^*; j = 1\dots n$, das heißt $t_j < \hat{t}_j < t_{j+1}; j = 1\dots n$ und der Bedingung, daß in jedem Intervall $[x_i, x_{i+k}]; i \in \{0\dots n-1\}$; $k \in \{1\dots n-m+1\}$ maximal $m+k-1$ Punkte aus $\hat{T}$ enthalten sind. Man definiert nun

$$\varphi_j(t) := \begin{cases} t_j + 2t(\hat{t}_j - t_j)\ ;\ t \in [0, \frac{1}{2}] \\ t_{j+1} + 2(1-t)(\hat{t}_j - t_{j+1})\ ;\ t \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases} ; j = 1\dots n$$

und betrachtet die stetige Determinante

$$F(t) := D\begin{pmatrix} B_1 & \dots B_n \\ \varphi_1(t) & \dots \varphi_n(t) \end{pmatrix}; t \in [0,1].$$

Ist nun $F(0) = 0$ oder $F(1) = 0$ so liegt der Fall (b) vor, man kann also im folgenden davon ausgehen, daß $F(0)F(1) \neq 0$ ist. Nimmt man $F(0)F(1) < 0$ an, so erhält man $\gamma_0 \in]0,1[$, so daß $F(\gamma_0) = 0$, das heißt es existiert eine Punktmenge $\tilde{T} = \{\tilde{t}_j\}_{j=1}^n$ mit der Lagebedingung

$$(\hat{t}_{j-1} <) t_j < \tilde{t}_j \leq \hat{t}_j (< t_{j+1}); j = 1\dots n$$

oder

$$(t_j <) \hat{t}_j < \tilde{t}_j < t_{j+1} (< \hat{t}_{j+1}); j = 1\dots n$$

und der Eigenschaft

$$D\begin{pmatrix} B_1 \dots B_n \\ \tilde{t}_1 \dots \tilde{t}_n \end{pmatrix} = 0.$$

Wegen der Intervalleigenschaft von $\hat{T}$ folgt, daß in jedem Intervall $[x_i, x_{i+k}]$; $i \in \{0\dots n-1\}; k \in \{1\dots n-m\}$ maximal $m+k$ Punkte aus $\tilde{T}$ enthalten sind, woraus man die Schoenberg-Whitney am Kreis-Eigenschaft für $\tilde{T}$ erhält. Hieraus folgt, daß ein $p \in P_m(K_n)$ existiert mit den Eigenschaften $p(\tilde{t}_j) = 0; j = 0\dots n$ und

$$\forall t \in]\tilde{t}_j, \tilde{t}_{j+1}[: \ sgn(p(t)) = (-1)^j\sigma; j = 0\dots n \ (\tilde{t}_{n+1} := \tilde{t}_1 + (x_n - x_0)).$$

Aufgrund von $t_j < \tilde{t}_j < t_{j+1}; j = 1\dots n$ erhält man einen Widerspruch zu Satz 6. Somit muß $F(0)F(1) > 0$ gelten. Betrachtet man nun $g \in P_m(K_n)$ definiert durch

$$g(t) := D\begin{pmatrix} B_1 & \dots B_n \\ t\ t_2 \dots & t_n \end{pmatrix}; \forall t \in [x_0, x_n],$$

so gelten $g(t_1 + (x_n - x_0)) = F(0)$ und $g(t_{n+1}) = (-1)F(1)$, und somit

$$g(t_1 + (x_n - x_0))g(t_{n+1}) < 0,$$

woraus man $\tau \in]t_{n+1}, t_1 + (x_n - x_0)[$ mit $g(\tau) = 0$ erhält. ■

Anhand des Beweises von Satz 11 erkennt man, daß sich die Bedingungen (b) und (c) äquivalent durch die Bedingung, daß $(f - p_f)$ eine Alternante $x_0 \leq t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} (\leq t_1 + (x_n - x_0))$ mit

$$D\begin{pmatrix} B_1 \ldots B_n \\ t_1 \ldots t_n \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} B_1 \ldots B_n \\ t_2 \ldots t_{n+1} \end{pmatrix} \geq 0$$

besitzt, ausdrücken läßt. Insbesondere sieht man, daß im Fall $t_{n+1} = t_1 + (x_n - x_0)$ diese verkürzte Schreibweise auf

$$D\begin{pmatrix} B_1 \ldots B_n \\ t_1 \ldots t_n \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} B_1 \ldots & & B_n \\ t_2 \ \ldots t_n & t_1 + (x_n & - x_0) \end{pmatrix} \geq 0,$$

das heißt

$$(-1)\left[D\begin{pmatrix} B_1 \ldots B_n \\ t_1 \ldots t_n \end{pmatrix}\right]^2 \geq 0$$

und somit auf

$$D\begin{pmatrix} B_1 \ldots B_n \\ t_1 \ldots t_n \end{pmatrix} = 0$$

führt.

Schließlich bemerken wir noch, daß obige Determinantenbedingung, welche die Bedingungen (b) und (c) aus Satz 11 vereint, nach (vgl. [2]) die Charakterisierungsbedingung für beste Approximationen in quasi-tschebyscheffschen, periodischen Räumen darstellt. Dies sind periodische Räume gerader Dimension k, die einen $k-1$-dimensionalen, tschebyscheffschen Unterraum enthalten und deren Elemente maximal k Nullstellen besitzen. In der Tat zeigt sich, daß in dem Fall, indem Bedingung (a) aus Satz 11 keine zusätzliche Möglichkeit darstellt ($n \leq m+1$), der Splineraum $P_m(K_n)$ eine solchen quasitschebyscheffschen, periodischen Raum bildet. Dies kann man anhand des Basisansatzes im Beweis von Satz 9 erkennen.

2 Charakterisierung stark eindeutig bester Approximationen in $P_m(K_n)$

In diesem Abschnitt soll die Frage der Charakterisierung stark eindeutig bester Approximationen im Raum der periodischen Splinefunktionen $P_m(K_n)$ untersucht werden. Das allgemeinste Kriterium zur Charakterisierung stark eindeutig bester Approximationen ist das folgende, von D.E.Wulbert (vgl. [10]), (siehe auch M.W.Bartelt und H.W.McLaughlin (vgl.[1])) stammende, *starke Kolmogoroff-Kriterium* für endlich dimensionale Unterräume.

Satz 12 (vgl.[5], p.38, Theorem 3.17.) *Es seien G ein endlich dimensionaler Unterraum von $C([a,b])$ und $f \in C([a,b])$. $g_f \in G$ ist genau dann stark eindeutig beste Approximation an f, wenn kein $g \in G \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft*

$$(f - g_f)(t)g(t) \geq 0; \forall t \in E_{f-g_f}$$

existiert.

Es liegt auf der Hand, daß bei der Anwendung dieses Kriteriums Nullstellen- und Vorzeicheneigenschaften der approximierenden Elemente aus G benötigt werden. Wir geben deshalb an dieser Stelle zunächst einige Hilfsaussagen für den, hier untersuchten, Fall $G = P_m(K_n)$ an.

Lemma 13 *Es seien $p \in P_m(K_n)$ eine periodische Splinefunktion mit endlich vielen Nullstellen in $[x_0, x_n[$ und $N(p)$ die, nach deren Vielfachheit gezählte, Anzahl der Nullstellen von p. Dann gilt die Abschätzung*

$$N(p) \leq \begin{cases} n \text{ , falls } n \text{ gerade} \\ n-1 \text{ , falls } n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Beweis von Lemma 13 :

Der Fall $m = 1$ ist einfach, denn in jedem Knotenintervall $[x_i, x_{i+1}]; i = 0 \ldots n-1$ liegt, endlich viele Nullstellen vorausgesetzt, maximal eine Nullstelle der Vielfachheit 1. Aufgrund der Periodizität gilt, im Fall n ungerade, daß ein, in diesem Sinne maximales, $p \in P_1(K_n)$ in einem Knotenintervall $[x_i, x_{i+1}]$ konstant $(\neq 0)$ ist, und damit erhält man für $m = 1$ die Behauptung.

Ist nun $m \geq 2$, so sei $p \in P_m(K_n)$ mit genau den endlich vielen Nullstellen $x_0 \leq t_1 < \ldots < t_r (< t_1 + (x_n - x_0))$ der Vielfachheiten $m_i; i = 1 \ldots r$ gegeben, das heißt

$$N(p) = \sum_{i=1}^{r} m_i.$$

Es folgt, daß $p^{(1)} \in P_{m-1}(K_n)$ in $t_i; i = 1 \ldots r$ eine Nullstelle der Vielfachheit $(m_i - 1)$ und darüberhinaus r Nullstellen

$$\zeta_i \in]t_i, t_{i+1}[; i = 1 \ldots r \ (t_{r+1} := t_1 + (x_n - x_0))$$

besitzt, wobei man unter anderem die Periodizität ausnutzt. Es gilt nun, daß es $t_i^* \in]t_i, \zeta_i[$ und $\tilde{t}_i \in]\zeta_i, t_{i+1}[$ gibt, so daß $p^{(1)}(t_i^*) \neq 0$ und $p^{(1)}(\tilde{t}_i) \neq 0$. Weiterhin sind die Nullstellen t_i von $p^{(1)}$ mit $(m_i - 1) > 0$ so, daß für eine Umgebung $U(t_i)$

$$p^{(1)}(t) \neq 0; \forall t \in U(t_i) \setminus \{t_i\}$$

gilt. Insgesamt besitzt $p^{(1)}$ also mindestens $r + \sum_{i=1}^{r}(m_i - 1) = N(p)$ isolierte Nullstellen (vgl. [5], p.108, Definition 3.2). Ähnlich folgert man nun, daß $p^{(2)} \dots p^{(m-1)}$ mindestens $N(p)$ isolierte, nach deren Vielfachheit gezählte, Nullstellen in $[x_0, x_n[$ besitzen. Da $p^{(m-1)} \in P_1(K_n)$ im Fall n gerade (ungerade) maximal n, $(n-1)$ isolierte Nullstellen besitzt (dieser maximale Fall ist der oben geklärte) erhält man die gewünschte Abschätzung

$$N(p) \leq \begin{cases} n \text{ , falls } n \text{ gerade} \\ n-1 \text{ , falls } n \text{ ungerade} \end{cases} .$$

■

Das nächste Lemma benötigt man zur Untersuchung des, in Satz 12 formulierten, starken Kolmogoroff-Kriteriums.

Lemma 14 *Es sei $g \in C([a,b])$ eine Funktion mit endlich vielen Nullstellen in $[a,b[$. Weiter seien r_1 die Anzahl der Nullstellen von g in $[a,b[$ mit Vorzeichenwechsel, r_2 die Anzahl der Nullstellen in von g in $[a,b[$ ohne Vorzeichenwechsel und $\tilde{n} = r_1 + 2r_2$. Dann gilt für ein vorgegebens $\sigma \in \{-1,+1\}$*

$$\max\{l \in I\!N : \exists a \leq t_1 < \dots < t_l < b : (-1)^j \sigma g(t_j) \geq 0; j = 1 \dots l\} \leq \tilde{n} + 1.$$

Beweis von Lemma 14 :

Das die Aussage für $\tilde{n} = 1$ und $\tilde{n} = 2$ gilt ist klar. Es seien nun $g \in C([a,b]), r_1, r_2$ und $\tilde{n} \geq 3$ wie in der Formulierung des Lemmas. Wir setzen $y_0 := \max\{x \in [a,b[: \ g(x) = 0\}$ und betrachten alle $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft, daß

$$\forall x \in [a,b[\setminus\{y_0\} : \ g(x) = 0 \Rightarrow x < y_0 - \varepsilon.$$

Besitzt g in y_0 eine Nullstelle mit (ohne) Vorzeichenwechsel, so folgt aus der Induktionsannahme, angewandt auf $g_\varepsilon := g|_{[a, y_0 - \varepsilon]}$, für ein vorgegebens $\sigma \in \{-1,+1\}$

$$\max\{l \in I\!N : \exists a \leq t_1 < \dots < t_l < y_0 - \varepsilon : \ (-1)^j \sigma g(t_j) \geq 0; j = 1 \dots l\} \leq \begin{cases} \tilde{n} \\ (\tilde{n} - 1) \end{cases} .$$

Betrachtet man nun g in $[y_0, b[$ so erhält man durch Unterscheidung der Fälle y_0 ist Nullstelle mit (ohne) Vorzeichenwechsel die Behauptung. ■

Wir formulieren nun den folgenden, die Charakterisierung stark eindeutig bester Approximationen vorbereitenden, Satz.

Satz 15 *Es sei $p \in P_m(K_n)$ eine periodische Splinefunktion, die nur endlich vielen Nullstellen in $[x_0, x_n[$ besitzt. Dann gilt für ein vorgegebenes $\sigma \in \{-1,+1\}$*

$$\max\{l \in I\!N : \exists x_0 \leq t_1 < \ldots < t_l < x_n : \; (-1)^j \sigma p(t_j) \geq 0; j = 1 \ldots l\} \leq \begin{cases} n+1 \text{ , falls } n \text{ gerade} \\ n \text{ , falls } n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Beweis von Satz 15 :

Im Fall $m = 1$ ist die Aussage klar, denn die Nullstellen ohne Vorzeichenwechsel liegen dann auf Knotenpunkten.
Ist nun $m \geq 2$, so gilt $P_m(K_n) \subseteq C^{(1)}(I\!R)$. Besitzt $p \in P_m(K_n)$ die endlich vielen Nullstellen $t_i; i = 1 \ldots r$ der Vielfachheit $m_i; i = 1 \ldots r$, so wählen wir $\{j_1 \ldots j_s\} \subseteq \{1 \ldots r\}$ so, daß $m_{j_i}; i = 1 \ldots s$ gerade und $m_j; j \in \{1 \ldots r\} \setminus \{j_1 \ldots j_s\}$ ungerade ist, das heißt p hat genau s Nullstellen ohne Vorzeichenwechsel und $(r-s)$ Nullstellen mit Vorzeichenwechsel. Aus Lemma 14 und Lemma 13 folgt nun für ein vorgegebenes $\sigma \in \{-1,+1\}$

$$\max\{l \in I\!N : \exists x_0 \leq t_1 < \ldots < t_l < x_n : \; (-1)^j \sigma p(t_j) \geq 0; j = 1 \ldots l\}$$
$$\leq 2s + (r-s) + 1 \leq \sum_{i=1}^{r} m_i + 1 = N(p) + 1 \leq \begin{cases} n+1 \text{ , falls } n \text{ gerade} \\ n \text{ , falls } n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

■

Die nächste Aussage, die in schwach-tschebyscheffschen, endlich dimensionalen Unterräumen von $C([a,b])$ gültig ist, dient der Analyse derjenigen Funktionen, die im Sinne des starken Kolmogoroff-Kriteriums aus Satz 12 auf maximal Dimension Intervallen ihr Vorzeichen ändern und erlaubt es (siehe Satz 17) notwendige Kriterien für stark eindeutig beste Approximationen in $P_m(K_n)$ zu formulieren.

Satz 16 (vgl. [5], p.87, Corollary 1.7.) *Es seien $n \in I\!N$ und G ein n-dimensionaler, schwach-tschebyscheffscher Unterraum von $C([a,b])$. Weiter seien $m \in \{0 \ldots n-1\}$ und $T = \{t_j\}_{j=0}^{m+1}$ eine Punktmenge mit $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = b$. Dann gibt es eine nicht-triviale Funktion $g \in G \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft, daß für ein vorgegebenes $\sigma \in \{-1,+1\}$*

$$(-1)^j \sigma g(t) \geq 0; \forall t \in [t_{j-1}, t_j]; j = 1 \ldots m+1$$

gilt.

Wir beweisen nun zunächst das folgende, notwendige Kriterium für stark eindeutig beste Approximationen in periodischen Splineräumen.

Satz 17 *Es seien $f \in C_{(x_n-x_0)}$ und $n, m \in I\!N$ beliebig. Falls $p_f \in P_m(K_n)$ stark eindeutig beste Approximation an f ist, so gelten die folgenden Bedingungen :*
(a) jedes Intervall $]x_i, x_{i+m+j}[; i \in \{0 \dots n-1\}; j \in \{1 \dots n-m\}$ enthält mindestens $(j+1)$ alternierende Extremalpunkte von $(f - p_f)$ und
(b) für gerades (ungerades) n hat jede Alternante von $(f - p_f)$ auf $[x_0, x_n[$ mindestens die Länge n $(n+1)$.

Beweis von Satz 17 :

Wir beweisen zunächst die Bedingung (a). Angenommen es gibt $i \in \{0 \dots n-1\}$; $j \in \{1 \dots n-m\}$, so daß maximal $r \leq j$ alternierende Extremalpunkte von $(f - p_f)$ in $]x_i, x_{i+m+j}[$ liegen. Dann sei $t_1 < \dots < t_r (< t_1 + (x_n - x_0))$ eine solche r-Punktauswahl von alternierenden Extremalpunkten von $(f - p_f)$ aus $]x_i, x_{i+m+j}[$. Wir definieren nun $r+1$ Punkte $z_0 < z_1 < \dots < z_r$ durch $z_0 := x_i; z_r := x_{i+m+j}$ und

$$z_{k-1} := \min\{t \in]t_{k-1}, t_k] : \ (f - p_f)(t) = (f - p_f)(t_k)\}; k = 2 \dots r.$$

Ist nun $\sigma \in \{-1, +1\}$ so, daß

$$(-1)^k \sigma (f - p_f)(t_k) = \|(f - p_f)\|_\infty; k = 1 \dots r,$$

so folgt aufgrund von obiger Annahme und der Wahl von $\{z_k\}_{k=0}^r$

$$\forall t \in E_{f-p_f} \cap [z_{k-1}, z_k[: \ sgn((f - p_f)(t)) = (-1)^k \sigma; k = 1 \dots r.$$

Wir betrachten nun den Splineraum, welcher von den B-Splines, deren Träger ganz in $]x_i, x_{i+m+j}[$ liegen, aufgespannt wird :

$$S := span\{B_i \dots B_{i+j-1}\}.$$

S ist nach (vgl. [5], p.99, Theorem 2.8) ein j-dimensionaler, schwach-tschebyscheffscher Splineraum, so daß aufgrund von $r \leq j$ mit Hilfe von Satz 16 die Existenz von $s \in S \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft

$$\forall t \in [z_{k-1}, z_k] : \ (-1)^k \sigma s(t) \geq 0; k = 1 \dots r$$

folgt. Man erhält somit

$$(f - p_f)(t)s(t) \geq 0; \forall t \in E_{f-p_f} \cap]x_i, x_{i+m+j}[.$$

Definiert man nun p durch

$$p(t) := s(t); \forall t \in]x_i, x_{i+m+j}[\text{ und } p(t) := 0; \forall t \in [x_0, x_n[\setminus]x_i, x_{i+m+j}[,$$

so gilt offenbar $p \in P_m(K_n) \setminus \{0\}$ und es folgt

$$(f - p_f)(t)p(t) \geq 0; \forall t \in E_{f-p_f}.$$

Dies ist aufgrund von Satz 12 ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß $p_f \in P_m(K_n)$ stark eindeutig beste Approximation an f ist.

Wir beweisen nun Bedingung (b) und gehen dabei zunächst von ungeradem n aus. Angenommen $(f - p_f)$ besitze nur Alternanten der maximalen Länge $r \leq n$ auf $[x_0, x_n[$. Dann sei $T = \{t_k\}_{k=1}^r$ mit $t_1 < \ldots < t_r (< t_1 + (x_n - x_0))$ eine solche Alternante maximaler Länge $r \leq n$. Wir setzen nun $t_0 := x_0$, $t_{r+1} := x_n$ und definieren für $k = 1 \ldots r$

$$\begin{aligned} m_k &:= \min\{t \in [t_{k-1}, t_k] : \ (f - p_f)(t) = (f - p_f)(t_k)\} \\ M_k &:= \max\{t \in [t_k, t_{k+1}] : \ (f - p_f)(t) = (f - p_f)(t_k)\}. \end{aligned}$$

Weiter seien $z_0 := x_0$, $z_r := x_n$ und $z_k \in]M_k, m_{k+1}[; k = 1 \ldots r-1$ beliebig gewählt. Aufgrund der Wahl von $\{z_k\}_{k=1}^r$ und obiger Annahme folgt für ein $\sigma \in \{-1, +1\}$

$$\forall t \in E_{f-p_f} \cap [z_{k-1}, z_k] : \ sgn((f - p_f)(t)) = (-1)^k \sigma; k = 1 \ldots r.$$

Da $P_m(K_n)$ ein n-dimensionaler, schwach-tschebyscheffscher Raum ist (n ungerade) folgt mit Hilfe von Satz 16 die Existenz von $p \in P_m(K_n) \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft

$$\forall t \in [z_{k-1}, z_k] : \ (-1)^k \sigma p(t) \geq 0; k = 1 \ldots r,$$

und hieraus

$$(f - p_f)(t)p(t) \geq 0; \forall t \in E_{f-p_f}.$$

Dies ist aufgrund von Satz 12 ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß $p_f \in P_m(K_n)$ stark eindeutig beste Approximation an f ist.

Im Fall n gerade nehmen wir an, daß jede Alternante von $(f - p_f)$ auf $[x_0, x_n[$ die maximale Länge $r \leq n - 1$ hat. Wir setzen nun $K_{n-1} := \{x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-2} < x_n\}$, dann erhält man nach den obigen Untersuchungen für den schwach-tschebyscheffschen, periodischen Splineraum ein $\tilde{p} \in P_m(K_{n-1}) \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft

$$(f - p_f)(t)\tilde{p}(t) \geq 0; \forall t \in E_{f-p_f}.$$

Aufgrund von $P_m(K_{n-1}) \subseteq P_m(K_n)$ bekommt man hieraus mit Hilfe von Satz 12 ein Widerspruch zur starken Eindeutigkeit von $p_f \in P_m(K_n)$. ■

Bevor wir die Charakterisierung starker Eindeutigkeit im Fall schwach-tschebyscheffscher, periodischer Splineräume klären, geben wir das folgende, vorbereitende Lemma an.

Lemma 18 (vgl. [5], p.90, Lemma 1.11.) *Es seien $G = span\{g_1 \ldots g_n\} \subseteq C([a, b])$ ein n-dimensionaler, schwach-tschebyscheffscher Unterraum und $a \leq t_1 < \ldots < t_{n+1} \leq b$. Dann ist die Bedingung, daß kein $g \in G \setminus \{0\}$ existiert mit der Eigenschaft*

$$(-1)^j \sigma g(t_j) \geq 0; j = 1 \ldots n + 1$$

für ein vorgegebenes $\sigma \in \{-1, +1\}$ genau dann erfüllt, wenn alle Determinanten

$$D_j := D \begin{pmatrix} g_1 & \ldots & g_n \\ t_1 \ldots t_{j-1} t_{j+1} \ldots t_{n+1} \end{pmatrix} \neq 0; j = 1 \ldots n + 1$$

sind.

Beweis von Lemma 18 :

Zum Beweis von $\Leftarrow$ nimmt man an, es gibt ein $g \in G \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $(-1)^j \sigma g(t_j) \geq 0; j = 1 \dots n+1$. Aufgrund von $g \equiv \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i$ erhält man mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz, daß

$$0 = D\begin{pmatrix} g\ g_1 \cdots g_n \\ t_1\ t_2 \dots t_{n+1} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j \sigma g(t_j) D_j.$$

Aus der schwach-tschebyscheff Eigenschaft von G und der Voraussetzung $D_j \neq 0; j = 1 \dots n+1$ folgt, daß alle Determinanten D_j dasselbe Vorzeichen ($\neq 0$) besitzen. Somit stellt g eine nicht-triviale Lösung des Nullproblems in G dar - ein Widerspruch.

Beim Beweis von $\Rightarrow$ nimmt man $D_j = 0$ für ein $j \in \{1 \dots n+1\}$ an und gelangt auf ein $g \in G \setminus \{0\}$, mit der Eigenschaft $g(t_i) = 0; i \in \{1 \dots n+1\} \setminus \{j\}$. Eventueller Übergang auf $(-g)$ ergibt dann einen Widerspruch. ■

Der nächste Satz charakterisiert stark eindeutig beste Approximationen im Fall schwach-tschebyscheffscher, periodischer Splineräume.

Satz 19 *Es seien $f \in C_{(x_n - x_0)}$ und $n \in I\!N; n = 2l+1; l \in I\!N_0$. $p_f \in P_m(K_n)$ ist genau dann stark eindeutig beste Approximation an f, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind :*
(a) jedes Intervall $]x_i, x_{i+m+j}[; i \in \{0 \dots n-1\}; j \in \{1 \dots n-m\}$ enthält mindestens $(j+1)$ alternierende Extremalpunkte von $(f - p_f)$.
(b) $(f - p_f)$ besitzt in $[x_0, x_n[$ eine Alternante in der Länge $n+1$.

Beweis von Satz 19 :

Beim Beweis von $\Rightarrow$ ist Eigenschaft (a) gerade Folgerung (a) aus Satz 17. Wegen $-1, +1 \in P_m(K_n)$ erhält man, daß es $t_1, t_2 \in E_{f-p_f}; t_1 \neq t_2$ gibt, so daß $(f-p_f)(t_1) > 0$ und $(f-p_f)(t_2) < 0$, und damit besitzt $(f-p_f)$ eine Alternante in $[x_0, x_n[$. Diese muß nach Satz 17 mindestens die Länge $n+1$ haben.

Zum Beweis von $\Leftarrow$ nehmen wir an, daß p_f nicht stark eindeutig beste Approximation an f ist. Dann folgt aus Satz 12, daß es ein $\tilde{p} \in P_m(K_n) \setminus \{0\}$ gibt, so daß

$$(f - p_f)(t)\tilde{p}(t) \geq 0; \forall t \in E_{f-p_f}. \tag{2}$$

Wir betrachten nun zunächst den Fall, daß $\tilde{p}$ unendlich viele Nullstellen besitzt, das heißt es gibt ein Intervall $I = [x_r, x_{r+1}]$, so daß $\tilde{p}|_I \equiv 0$. Dann wähle man ein Intervall $]x_i, x_{i+m+j}[; i \in \{0 \dots n-1\}; j \in \{1 \dots n-m-1\}$ so, daß $\tilde{p}$ in $]x_i, x_{i+m+j}[$ nur endlich viele Nullstellen besitzt und

$$\tilde{p}|_{[x_{i-1}, x_i] \cup [x_{i+m+j}, x_{i+m+j+1}]} \equiv 0$$

gültig ist. $\tilde{p}|_{[x_i, x_{i+m+j}]}$ ist ein Element des, nach (vgl. [5], p.99, Theorem 2.8), j-dimensionalen, schwach-tschebyscheffschen Raums

$$S := span\{B_i \dots B_{i+j-1}\}.$$

Aus (a) folgt, daß $(f - p_f)$ in $[x_i, x_{i+m+j}]$ mindestens $j+1$ alternierend Extremalpunkte besitzt. Es sei nun $[x_p, x_{p+q}] \subseteq [x_i, x_{i+m+j}]$, so daß $d+1$ alternierende Extremalpunkte $T = \{t_1 < \ldots < t_{d+1}\}$ von $(f - p_f)$ in $[x_p, x_{p+q}]$ liegen und kein Teilintervall $[x_{\hat{p}}, x_{\hat{p}+\hat{q}}] \subset [x_p, x_{p+q}]$ $(\hat{d}+1)$ Punkte der Menge T enthält. Hierbei soll $d = dim(S|_{[x_p,x_{p+q}]})$ und $\hat{d} = dim(S|_{[x_{\hat{p}},x_{\hat{p}+\hat{q}}]})$ gelten. Sind $l_1 \in \{0 \ldots m\}$ und $l_2 \in \{-1 \ldots m-1\}$ so gewählt, daß

$$S|_{[x_p,x_{p+q}]} = span\{B_{p-l_1} \ldots B_{p+q+l_2-m}\},$$

so gilt $d = q + l_2 + l_1 - m + 1$ und wir werden im folgenden die Gültigkeit von

$$D_l := D\begin{pmatrix} B_{p-l_1} & \ldots & B_{p+q+l_2-m} \\ & t_1 \ldots t_{l-1} t_{l+1} \ldots t_{d+1} & \end{pmatrix} \neq 0; l = 1 \ldots d+1$$

zeigen. Angenommen $D_l = 0$ für ein $l \in \{1 \ldots d+1\}$, dann folgt aus der Schoenberg-Whitney Interpolationseigenschaft für (übliche) Splineräume (vgl. [5], p.109, Theorem 3.7), daß es ein Intervall $]x_{i_1}, x_{i_1+m+j_1}[\subseteq]x_{p-l_1}, x_{p+q+l_2+1}[$ gibt mit der Eigenschaft, daß $]x_{i_1}, x_{i_1+m+j_1}[$ maximal $(j_1 - 1)$ Punkte aus $T \setminus \{t_l\}$ enthält. Dann gilt $[x_p, x_{p+q}] \setminus]x_{i_1}, x_{i_1+m+j_1}[\neq \emptyset$, denn sonst enthielte $[x_p, x_{p+q}]$ nur $j_1 - 1 \leq d - 1$ Punkte aus $T \setminus \{t_l\}$ und damit nur d Punkte aus T - ein Widerspruch. Weiterhin gilt $[x_p, x_{p+q}] \setminus]x_{i_1}, x_{i_1+m+j_1}[\neq \{x_{p+q}\}$, denn sonst gilt $j_1 - 1 = d - 1$ oder $j_1 - 1 = d$, woraus man wegen $j_1 \leq d$, also $j_1 = d$ und somit $i_1 = p - l_1$ erhält. Es folgt $i_1 + m + j_1 = p - l_1 + m + d = p + q + l_2 + 1 > p + q$ für $l_2 \geq 0$ und somit in diesem Fall einen Widerspruch zu $i_1 + m + j_1 = p + q$. Im Fall $l_2 = -1$ gilt jedoch $i + m + j = p + q$, das heißt wegen $x_{p+q} \notin T$ ein Widerspruch. Ebenso gilt $[x_p, x_{p+q}] \setminus]x_{i_1}, x_{i_1+m+j_1}[\neq \{x_p\}$, denn sonst wäre wie oben $j_1 = d$, das heißt $i_1 + m + j_1 = p + q + l_2 + 1$, woraus man für $l_1 \geq 1$ den Widerspruch $i_1 = p + q + l_2 - m + 1 - j_1 = p + d - l_1 - j_1 = p - l_1 < p$ erhält. Im Fall $l_1 = 0$ gilt $p = i$, das heißt wegen $x_p \notin T$ ebenfalls ein Widerspruch. Wir unterscheiden nun die folgenden drei Fälle :

1. Fall : $[x_p, x_{p+q}] \setminus]x_{i_1}, x_{i_1+m+j_1}[= [x_{i_1+m+j_1}, x_{p+q}]$, wobei $i_1 + m + j_1 < p + q$. Da

$$S|_{[x_{i_1+m+j_1},x_{p+q}]} = span\{B_{i_1+j_1} \ldots B_{p+q+l_2-m}\}$$

ein $p + q + l_2 - m - i_1 - j_1 + 1 = p + d - l_1 - i_1 - j_1 (\leq d - j_1)$-dimensionaler Raum ist, welcher mindestens $d - j_1 + 1$ Punkte aus $T \setminus \{t_l\}$ enthält, erhält man einen Widerspruch zur Wahl von $[x_p, x_{p+q}]$.

2. Fall : $[x_p, x_{p+q}] \setminus]x_{i_1}, x_{i_1+m+j_1}[= [x_p, x_{i_1}]$, wobei $i_1 > p$. Da

$$S|_{[x_p,x_{i_1}]} = span\{B_{p-l_1} \ldots B_{i_1-1}\}$$

ein $i_1 - 1 - p + l_1 + 1 = i_1 - p + l_1 (\leq p + q + l_2 + 1 - m - j_1 - p + l_1 = d - j_1)$-dimensionaler Raum ist, welcher mindestens $d - j_1 + 1$ Punkte aus $T \setminus \{t_l\}$ enthält, erhält man wie in Fall 1 einen Widerspruch.

3.Fall : $[x_p, x_{p+q}] \setminus]x_{i_1}, x_{i_1+m+j_1}[= [x_{i_1+m+j_1}, x_{p+q}] \cup [x_p, x_{i_1}]$, wobei $i_1 + m + j_1 < p + q$ oder $i_1 > p$. Falls nun $i_1 + m + j_1 < p + q$ und $i_1 > p$ gelten, so folgt ähnlich wie in Fall 2 wegen der speziellen Wahl von $[x_p, x_{p+q}]$, daß $[x_p, x_{i_1}]$ maximal $i_1 - p + l_1$ Punkte aus

$T \setminus \{t_l\}$ enthält. Damit folgt, daß $[x_p, x_{i_1+m+j_1}[$ maximal $i_1 - p + l_1 + j_1 - 1$ Punkte aus $T \setminus \{t_l\}$ enthält. Wie im Fall 1 erhält man nun

$$dim(S|_{[x_{i_1+m+j_1}, x_{p+q}]}) = p + d - l_1 - i_1 - j_1 \leq d - j_1,$$

woraus ein Widerspruch zur Wahl von $[x_p, x_{p+q}]$ folgt. Ist nun $i_1 = p$, dann muß $i_1 + m + j_1 < p + q$ sein und die Menge $\{x_p\} \cup [x_{i_1+m+j_1}, x_{p+q}]$ muß mindestens $d - j_1 + 1$ Punkte aus $T \setminus \{t_l\}$ enthalten. Falls $l_1 \geq 1$ gilt, so folgt

$$dim(S|_{[x_{i_1+m+j_1}, x_{p+q}]}) = d - l_1 - j_1 \leq d - j_1 - 1.$$

Da $[x_{i_1+m+j_1}, x_{p+q}]$ mindestens $d - j_1$ Punkte aus $T \setminus \{t_l\}$ enthält ist dies ein Widerspruch. Für $l_1 = 0$ gilt jedoch $i_1 = i = p$ und man erhält, daß $[x_{i_1+m+j_1}, x_{p+q}]$ mindestens $d - j_1 + 1$ Punkte aus $T \setminus \{t_l\}$ enthält - ein Widerspruch. Der Fall $i_1 + m + j_1 = p + q$ läßt sich dann analog behandeln.

Da T eine Menge von alternierenden Extremalpunkten von $(f - p_f)$ ist, folgt

$$(-1)^l \sigma (f - p_f)(t_l) = \|f - p_f\|_\infty; l = 1 \ldots d + 1$$

für ein $\sigma \in \{-1, +1\}$. Wegen (2) erhält man somit für $p^* := \tilde{p}|_{[x_p, x_{p+q}]} \in S|_{[x_p, x_{p+q}]}$

$$(-1)^l \sigma p^*(t_l) \geq 0; l = 1 \ldots d + 1.$$

Aufgrund von Lemma 13 und der, oben nachgewiesenen, Determinanteneigenschaft gelangt man auf $\tilde{p}|_{[x_p, x_{p+q}]} \equiv 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von $]x_i, x_{i+m+j}[$.

Besitzt $\tilde{p}$ nur endlich viele Nullstellen in $[x_0, x_n[$, so folgt aus Bedingung (b), daß $(f - p_f)$ in $[x_0, x_n[$ $n + 1$ Punkte $x_0 \leq t_1 < \ldots < t_{n+1} < x_n$ mit der Eigenschaft

$$(-1)^l \sigma (f - p_f)(t_l) = \|f - p_f\|_\infty; l = 1 \ldots n + 1$$

besitzt. Aus (2) und Satz 15 erhält man somit den Widerspruch

$$(-1)^l \sigma \tilde{p}(t_l) \geq 0; l = 1 \ldots n + 1.$$

■

Es sei erwähnt, daß aus Bedingung (b) von Satz 19 unter Verwendung von Satz 4 die Eigenschaft der besten Approximation verifiziert werden kann. Dies folgt natürlich auch, weil jede stark eindeutig beste Approximation trivialerweise beste Approximation ist.

Weiterhin sieht man, daß in dem Fall, in dem der zugrundeliegende Splineraum $P_m(K_n)$ tschebyscheffsch ist ($n \leq m + 1$), die Bedingungen aus Satz 19 gerade die Haarsche Bedingung zur Charakterisierung bester Approximationen ergeben. In der Tat stimmen in diesem Fall aufgrund des Haarschen Eindeutigkeitsatzes beste Approximationen mit stark eindeutig besten Approximationen überein.

Mit Hilfe von Satz 19 läßt sich nun die folgende, für allgemeine schwachtschebyscheffsche Räume ebenso gültige, Aussage (vgl. [5], p.91, Theorem 1.12.) direkt verifizieren.

Korollar 20 *Es seien $f \in C_{(x_n-x_0)}, p_f \in P_m(K_n)$ und $n \in I\!N; n = 2l+1; l \in I\!N_0$. Zudem gelte, daß $(f-p_f)$ genau $n+1$ Extremalpunkte besitzt. Dann gilt, daß $p_f \in P_m(K_n)$ genau dann stark eindeutig beste Approximation an f ist, wenn $(f-p_f)$ $n+1$ alternierende Extremalpunkte $t_1 < \ldots < t_{n+1}(< t_1 + (x_n - x_0))$ mit der Eigenschaft*

$$D_j := D\begin{pmatrix} B_1 & \ldots & B_n \\ t_1 \ldots t_{k-1} t_{k+1} & \ldots & t_{n+1} \end{pmatrix} \neq 0; k = 1 \ldots n+1$$

besitzt.

Beweis von Korollar 20 :

Wir beweisen zunächst $\Rightarrow$. Aus Satz 19 (b) und den hier gemachten Voraussetzungen folgt, daß $(f-p_f)$ eine Alternante $t_1 < \ldots < t_{n+1}(< t_1 + (x_n - x_0))$, die mit E_{f-p_f} übereinstimmt, besitzt. Somit erhält man aus Satz 19 (a), daß jedes Intervall $]x_i, x_{i+m+j}[; i \in \{0 \ldots n-1\}; j \in \{1 \ldots n-m\}$ mindestens $(j+1)$ der Punkte $T = \{t_j\}_{j=1}^{n+1}$ enthält. Damit enthält jedes Intervall $]x_i, x_{i+m+j}[; i \in \{0 \ldots n-1\}; j \in \{1 \ldots n-m\}$ mindestens j der Punkte $T = \{t_l\}_{l=1}^{n+1} \setminus \{t_k\}; k = 1 \ldots n+1$, woraus mit (vgl. [9], p.302, Theorem 8.8) die Behauptung folgt.

Um $\Leftarrow$ zu beweisen nimmt man an, p_f sei nicht stark eindeutig beste Approximation an f, dann folgt aus Satz 19, daß entweder $(f-p_f)$ keine Alternante der Länge $n+1$ auf $[x_0, x_n[$ besitzt oder ein Intervall $]x_i, x_{i+m+j}[; i \in \{0 \ldots n-1\}; j \in \{1 \ldots n-m\}$ mit weniger als $j+1$ alternierenden Extremalpunkten von $(f-p_f)$ existiert. Ersteres ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Ist aber die zweite Bedingung erfüllt, so gibt es aufgrund von $T = \{t_l\}_{l=1}^{n+1} = E_{f-p_f}$ ein Intervall $]x_i, x_{i+m+j}[; i \in \{0 \ldots n-1\}; j \in \{1 \ldots n-m\}$, welches nur maximal $j-1$ Punkte aus $T = \{t_j\}_{j=1}^{n+1} \setminus \{t_k\}$ für ein $k \in \{1 \ldots n+1\}$ enthält. Nach (vgl. [9], p.302, Theorem 8.8) folgt hieraus $D_k = 0$. ∎

Im Verlauf der folgenden Untersuchungen des nicht schwach-tschebyscheffschen, Splineraums $P_m(K_n)$ werden wir sehen, daß zur Charakterisierung stark eindeutig bester Approximationen, selbst im Fall von genau $n+1$ alternierenden Extremalpunkten der Fehlerfunktion, weitere, über die im letzten Korollar hinausgehende, (Determinanten-) Bedingungen gefordert werden müssen. Im folgenden behandeln wir also den Fall n gerade, das heißt nach Satz 1, daß der zugrundeliegende, periodische Splineraum $P_m(K_n)$ nicht schwach-tschebyscheffsch ist. Wegen $-1, +1 \in P_m(K_n)$ ist (wie im Beweis von Satz 19) die Existenz von Alternanten klar und man erhält aus Satz 17, starke Eindeutigkeit einer Funktion $p_f \in P_m(K_n)$ vorausgesetzt, daß eine Alternante der (Mindest-)Länge n für $(f-p_f)$ existiert. Wir betrachten nun zunächst den Fall, daß diese Alternantenlänge $n+2$ ist. Dieser ist, wie sich herausstellt, im wesentlichen analog Satz 19 zu behandeln.

Satz 21 *Es seien $f \in C_{(x_n-x_0)}$, $p_f \in P_m(K_n)$, $n \in I\!N; n = 2l; l \in I\!N$ und es gelte, daß $(f-p_f)$ eine Alternante der Länge $n+2$ auf $[x_0, x_n[$ besitzt. Dann gilt, daß p_f genau dann beste Approximation an f ist, wenn jedes Intervall $]x_i, x_{i+m+j}[; i \in \{0 \ldots n-1\}$; $j \in \{1 \ldots n-m\}$ mindestens $j+1$ alternierenden Extremalpunkten von $(f-p_f)$ enthält.*

Beweis von Satz 21 :

$\Rightarrow$ wurde bereits durch Satz 17 bewiesen. Zum Beweis von $\Leftarrow$ nimmt man an, daß p_f nicht stark eindeutig beste Approximation an f ist. Dann folgt aus Satz 12, daß es ein $\tilde{p} \in P_m(K_n) \setminus \{0\}$ gibt, so daß

$$(f - p_f)(t)\tilde{p}(t) \geq 0; \forall t \in E_{f-p_f}. \tag{3}$$

Ist $\tilde{p}|_{[x_r,x_{r+1}]} \equiv 0$ für ein Knotenintervall $[x_r, x_{r+1}]$, so folgert man analog dem Beweis von Satz 19 unter Verwendung der Voraussetzung, daß jedes Intervall $]x_i, x_{i+m+j}[$; $i \in \{0 \ldots n-1\}; j \in \{1 \ldots n-m\}$ mindestens $j+1$ alternierenden Extremalpunkten von $(f - p_f)$ enthält, einen Widerspruch. Man kann also davon ausgehen, daß $\tilde{p}$ nur endlich viele Nullstellen in $[x_0, x_n[$ hat. Ist nun $x_0 \leq t_1 < \ldots < t_{n+2} (< t_1 + (x_n - x_0))$ die Alternante von $(f - p_f)$ der Länge $n+2$, so gilt für ein $\sigma \in \{-1, +1\}$

$$(-1)^l \sigma (f - p_f)(t_l) = \|f - p_f\|_\infty; l = 1 \ldots n+2.$$

Hieraus erhält man unter Verwendung von (3) die Bedingung

$$(-1)^l \sigma \tilde{p}(t_l) \geq 0; l = 1 \ldots n+2$$

- ein Widerspruch zu Satz 15. ■

Es sei erwähnt, daß aus der Existenz einer Alternante der Länge $n+2$, wie es in Satz 21 vorausgesetzt wurde, trivialerweise die Eigenschaft der besten Approximation folgt.

Wir untersuchen nun Alternanten der genauen Länge n. Das nächste Lemma motiviert die Tatsache, daß bei der Untersuchung auf starke Eindeutigkeit bester Approximationen im Fall nicht schwach-tschebyscheffscher, periodischer Splineräume Alternanten der genauen Länge n mit Alternanten der genauen Länge $n+1$ zusammenfallen. Die Ursache für dieses Phänomen liegt in der periodischen Struktur des zugrundeliegenden Raums $P_m(K_n)$ begründet.

Lemma 22 *Es seien $f \in C_{(x_n - x_0)} \setminus P_m(K_n), p \in P_m(K_n)$ und $n \in I\!N; n = 2l; l \in I\!N$. Weiterhin gelte, daß $(f - p_f)$ eine Alternante der genauen Länge n auf $[x_0, x_n[$ besitzt. Falls p_f stark eindeutig beste Approximation an f ist, so folgt, daß $(f - p_f)$ mindestens $n+1$ Extremalpunkte in $[x_0, x_n[$ hat.*

Beweis von Lemma 22 :

Angenommen $T = \{t_1 < \ldots < t_n\}$ ist die Alternante von $(f - p_f)$ der genauen Länge n und es gilt $T = E_{f-p_f}$. Nach Satz 17, Folgerung (a) gilt insbesondere, daß jedes Intervall $]x_i, x_{i+m+j}[; i \in \{0 \ldots n-1\}; j \in \{1 \ldots n-m\}$ mindestens j Punkte aus T besitzt, das heißt T liegt Schoenberg-Whitney am Kreis. Ist nun

$$D\begin{pmatrix} B_1 \ldots B_n \\ t_1 \ldots t_{n+1} \end{pmatrix} = 0,$$

so existiert ein $p \in P_m(K_n)\setminus\{0\}$ mit der Eigenschaft $p(t_j) = 0; j = 1 \dots n$. Da $T = E_{f-p_f}$ folgt

$$(f - p_f)(t)p(t) = 0 \geq 0; \forall t \in E_{f-p_f},$$

und damit aufgrund von Satz 12 ein Widerspruch zur starken Eindeutigkeit von p_f. Wegen der Schoenberg-Whitney am Kreis-Eigenschaft von T kann jedoch auch

$$D\begin{pmatrix} B_1 \dots B_n \\ t_1 \dots t_{n+1} \end{pmatrix} \neq 0$$

gelten. In diesem Fall existiert ein (sogar eindeutig bestimmtes) $p \in P_m(K_n)$ mit der Eigenschaft $p(t_j) = sgn((f - p_f)(t_j)); j = 1 \dots n$. Aufgrund von $f \in C_{(x_n - x_0)} \setminus P_m(K_n)$ folgt $\|f - p_f\|_\infty > 0$, so daß $p \not\equiv 0$ gilt. Offenbar hat man wegen $T = E_{f-p_f}$

$$(f - p_f)(t)p(t) \geq 0; \forall t \in E_{f-p_f},$$

und damit aufgrund von Satz 12 ebenfalls einen Widerspruch zur starken Eindeutigkeit von $p_f \in P_m(K_n)$. ■

Ist $t_1 < \dots < t_n (< t_1 + (x_n - x_0))$ eine Alternante von $(f - p_f)$ in $[x_0, x_n[$ der genauen Länge n so setzen wir, ähnlich wie im Beweis von Satz 17, für $k \in \{1 \dots n\}$

$$m_k := \min\{t \in]t_{k-1}, t_k] : \ (f - p_f)(t) = (f - p_f)(t_k)\}$$
$$M_k := \max\{t \in [t_k, t_{k+1}[: \ (f - p_f)(t) = (f - p_f)(t_k)\},$$

wobei $t_0 := t_n - (x_n - x_0)$ und $t_{n+1} := t_1 + (x_n - x_0)$ gelten soll. Die Alternationsmengen $\sigma_k := [m_k, M_k]; k = 1 \dots n$ enthalten dann alle hintereinander kommenden Extremalpunkte von $(f - p_f)$ gleichen Vorzeichens und es gilt

$$E_{f-p_f} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \sigma_k.$$

Aus Lemma 22 folgt, daß es ein $k_0 \in \{1 \dots n\}$ gibt, so daß $m_{k_0} < M_{k_0}$, das heißt mindestens eine der Mengen σ_k enthält 2 Extremalpunkte (mit dem selben Vorzeichen). Deshalb können wir eine Alternante der genauen Länge n im Sinne einer optimalen Zählung am Kreis als Alternante der Länge $n + 1$ auffassen. Betrachtet man nun den Fall, daß $(f - p_f)$ eine Alternante der genauen Länge $n + 1$ auf $[x_0, x_n[$ besitzt, so erkennt man, daß dieser, aufgrund der Periodizität, im Sinne der oben festgelegten Alternationsmengen σ_k, ebenso wie der Fall von Alternanten der genauen Länge n aufgefaßt werden kann. Es verbleibt also nach den obigen Untersuchungen (siehe Satz 17; Satz 21; Lemma 22) der Fall von Alternanten der genauen Länge n im Sinne der obigen Definition von σ_k zu klären.

Um stark eindeutig beste Approximationen in $P_m(K_n)$ für diesen Fall zu charakterisieren benötigt man, wie sich im Verlauf der nachfolgenden Untersuchungen zeigen wird, Aussagen über periodische Splinefunktionen mit doppelten Nullstellen. Deshalb betrachten wir an dieser Stelle zunächst das folgende, allgemeine Hermite-Interpolationsproblem für periodische Splinefunktionen.

Definition 23 (Hermite-Interpolationsproblem) *Es seien $P_m(K_n)$ der Raum der periodischen Splinefunktionen der Ordnung $m+1$ zur Knotenmenge K_n; $n \in I\!N$, $f \in C_{(x_n-x_0)}$ genügend oft differenzierbar und Punkte $t_1 \leq \ldots \leq t_n (< t_1 + (x_n - x_0))$ gegeben. Man definiert für $j \in \{1 \ldots n\}$: $d_j := \max\{i \in I\!N_0 : t_j = \ldots = t_{j-i}\}$ und nimmt dabei an, daß die Punkte $t_j; j = 1 \ldots n$ so gewählt sind, daß $d_j \leq m$, falls $t_j \notin K_n$ und $d_j \leq m-1$ falls $t_j \in K_n$. Die Hermite-Interpolationsaufgabe besteht dann darin ein $p \in P_m(K_n)$ mit den Bedingungen*

$$p^{(d_j)}(t_j) = f^{(d_j)}(t_j); j = 1 \ldots n$$

zu finden.

Bemerkung 24 *Im Fall $t_1 < \ldots < t_n (< t_1 + (x_n - x_0))$ gilt $d_j = 0; j = 1 \ldots n$ und es handelt sich um das übliche Lagrange-Interpolationsproblem.*

Um das Hermite-Interpolationsproblem 23 zu untersuchen betrachtet man die Determinante

$$D\begin{pmatrix} B_1 \ldots B_n \\ t_1 \ldots t_n \end{pmatrix} := D(B_i^{(d_j)}(t_j))_{\substack{j=1\ldots n \\ i=1\ldots n}}.$$

Wir geben zunächst eine notwendige Bedingung an, die bei eindeutiger Lösbarkeit des Hermite-Interpolationsproblems 23 gelten muß .

Lemma 25 *Falls das Hermite-Interpolationsproblem 23 stets eindeutig lösbar ist so folgt, daß jedes Intervall $]x_i, x_{i+m+j}[; i \in \{0 \ldots n-1\}; j \in \{1 \ldots n-m\}$ mindestens j Punkte der Menge $T = \{t_1 \leq \ldots \leq t_n\}$ enthält. Diese Bedingung nennen wir die Schoenberg-Whitney am Kreis mit Vielfachheiten, kurz SW-Kreis-Vfht.-Eigenschaft.*

Beweis von Lemma 25 :

Wir nehmen an, daß es ein Intervall $]x_i, x_{i+m+j}[; i \in \{0 \ldots n-1\}; j \in \{1 \ldots n-m\}$ mit maximal $j-1$ Punkten aus $T = \{t_1 \leq \ldots \leq t_n\}$ gibt, und betrachten in obiger Hermite-Interpolationsmatrix

$$D := D\begin{pmatrix} B_1 \ldots B_n \\ t_1 \ldots t_n \end{pmatrix} = D(B_i^{(d_j)}(t_j))_{\substack{j=1\ldots n \\ i=1\ldots n}}$$

die Spalten mit den Nummern $i, \ldots, i+j-1$. Jede $j \times j$-Untermatrix von D mit diesen Spaltennummern hat eine Determinante mit Wert 0, denn für eine beliebige j-Punktauswahl $\hat{t}_1 \leq \ldots \leq \hat{t}_j$ aus $t_1 \leq \ldots \leq t_n$ gilt per Annahme, daß mindestens ein Element außerhalb der Vereinigung der Träger der B-Splines $B_i, \ldots, B_{i+j-1}$ liegt, das heißt eine solche $j \times j$-Untermatrix von D enthält mindestens eine Nullzeile. Wendet man den Laplaceschen Entwicklungssatz gemäß den $j \times j$-Untermatrix von D mit Spaltenindizees $i, \ldots, i+j-1$ an, so erhält man $D = 0$ - ein Widerspruch. ■

Für den Fall schwach-tschebyscheffscher, periodischer Splineräume geben wir hier aus Vollständigkeitsgründen die folgende Aussage an.

Satz 26 (vgl. [9], p.302, Theorem 8.8) *Falls $n = 2l + 1; l \in I\!N_0$ gilt, so ist das Hermite-Interpolationsproblem 23 genau dann stets eindeutig lösbar wenn für die gegebene Interpolationsmenge $T = \{t_1 \leq \ldots \leq t_n\}$ die SW-Kreis-Vfht.-Eigenschaft gilt.*

Beweis von Satz 26 :

Zum Beweis von $\Leftarrow$ nehmen wir an, es existiert ein $p \in P_m(K_n) \setminus \{0\}$ mit der Bedingung $p^{(d_j)}(t_j) = 0; j = 1 \ldots n$. Gibt es nun ein Intervall $[x_r, x_{r+1}]$ mit der Eigenschaft $p|_{[x_r, x_{r+1}]} \equiv 0$, so wähle man $]x_i, x_{i+m+j}[; i \in \{0 \ldots n-1\}; j \in \{1 \ldots n-m\}$ so, daß p in $]x_i, x_{i+m+j}[$ nur endlich viele Nullstellen hat und

$$p|_{[x_{i-1}, x_i] \cup [x_{i+j+m}, x_{i+j+m+1}]} \equiv 0$$

gültig ist. Offenbar gilt dann, daß

$$p^* \in span\{B_i, \ldots, B_{i+j-1}\}$$

definiert durch $p^* := p|_{]x_i, x_{i+m+j}[}$ nach Voraussetzung mindestens j Nullstellen (gezählt nach deren Vielfachheit) in $]x_i, x_{i+m+j}[$ besitzt. Dies ist ein Widerspruch zu (vgl. [5], p.108, Theorem 3.3), somit kann p nur eine Funktion mit endlich vielen Nullstellen in $[x_0, x_n[$ sein. Offenbar folgt aus der obigen Annahme, daß für die Anzahl der Nullstellen von p gezählt nach deren Vielfachheit $N(p) \geq n$ gilt - dies ist aber ein Widerspruch zu Lemma 13. ■

Wir widmen uns nun dem, an dieser Stelle benötigten, Fall nicht schwach-tschebyscheffscher periodischer Splineräume.

Satz 27 *Es seien $n \in I\!N; n = 2l; l \in I\!N$ und $t_1 \leq \ldots \leq t_n (< t_1 + (x_n - x_0))$ eine Punktmenge mit der SW-Kreis-Vfht.-Eigenschaft. Weiter seien $m_j \in I\!N; j = 1 \ldots r$ mit $m_j \leq m+1$, beziehungsweise $m_j \leq m$ so daß*

$$t_1 = \ldots = t_{m_1} < t_{m_1+1} = \ldots = t_{m_1+m_2} < \ldots < t_{\sum_{j=1}^{r-1} m_j + 1} = \ldots = t_{\sum_{j=1}^{r} m_j}.$$

Das Hermite-Interpolationsproblem 23 ist genau dann stets eindeutig lösbar, wenn entweder für ein $p \in P_m(K_n)$ mit $p^{(d_j)}(t_j) = 0; j = 1 \ldots n$ schon $p|_I \equiv 0$ für ein Knotenintervall $I = [x_r, x_{r+1}]$ gilt oder keine Funktion $p \in P_m(K_n)$ mit $p^{(d_j)}(t_j) = 0; j = 1 \ldots n$ und der Vorzeicheneigenschaft

$$\forall t \in]t_{\sum_{j=1}^{k} m_j}, t_{\sum_{j=1}^{k} m_j + 1}[: \; sgn(p(t)) = (-1)^{\sum_{j=1}^{k} m_j} \sigma; k = 1 \ldots r$$

für ein $\sigma \in \{-1, +1\}$ (wobei $t_{\sum_{j=1}^{r} m_j + 1} := t_1 + (x_n - x_0)$) existiert.

Beweis von Satz 27 :

Wir beweisen nur $\Leftarrow$, denn $\Rightarrow$ ist klar. Hierzu nehmen wir an es gibt ein $p \in P_m(K_n) \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $p^{(d_j)}(t_j) = 0; j = 1 \ldots n$. Den Fall $p|_I \equiv 0$ kann man analog dem Beweis von Satz 26 ausschliesen. Besitzt aber p nur endlich viele

Nullstellen, so folgt aus Lemma 13, daß deren Anzahl, gezählt nach Vielfachheiten, $N(p)$, maximal den Wert n hat. Wegen $\sum_{j=1}^{l} m_j = n$ besitzt p außer den Nullstellen $t_1 \leq \ldots \leq t_n (< t_1 + (x_n - x_0))$ keine weiteren Nullstellen in $[x_0, x_n[$, und es folgt, daß p eine Funktion mit dem, in der Voraussetzung ausgeschlossenen, Vorzeichenverhalten ist. ∎

Wir bemerken an dieser Stelle, daß sich aus Sicht der (Hermite-) Interpolationstheorie die folgende, interessante Aussage ergibt.

Korollar 28 *Es seien $n \in I\!N; n = 2l; l \in I\!N$ und $T = \{t_1 \leq \ldots \leq t_n\}$ eine SW-Kreis-Vfht.-Menge. Falls es ein Intervall $[x_i, x_{i+k}]; i \in \{0 \ldots n-1\}; k \in \{1 \ldots n-m\}$ gibt, so daß $m+k$ Punkte der Punktmenge T in $[x_i, x_{i+k}]$ liegen, so ist das Hermite-Interpolationsproblem 23 stets eindeutig lösbar.*

Der Beweis von Korollar 28 ergibt sich aus der Tatsache, daß

$$S := P_m(K_n)|_{[x_i, x_{i+k}]}; k = 1 \ldots n-m$$

ein $(m+k)$-dimensionaler (üblicher) Splineraum ist, unter Verwendung von Satz 27 und (vgl. [5]; p.109; Theorem 3.7). ∎

Bei der nachfolgenden Charakterisierung stark eindeutig bester Approximationen im Sinne der oben definierten Alternationsengen $\sigma_k; k = 1 \ldots n$ werden wir feststellen, daß der Fall $m = 1$ aufgrund von $P_m(K_n) \not\subseteq C^{(1)}_{(x_n - x_0)}$ eine gewisse Sonderrolle einnimmt. Zur Behandlung dieses Spezialfalls benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 29 *Es seien $s \in S_1(x_1)$ und $y_1; y_2 \in I\!R$ mit $sgn(y_1) = sgn(y_2) \neq 0$, so daß $s(x_0) = y_1; s(x_2) = y_2$ und es gelte $s(x_1) = 0$. Weiterhin seien $m_0 \in [x_0, x_1[$ und $m_1 \in]x_1, x_2]$. Dann gilt, daß ein $\tilde{s} \in S_1(x_1)$ mit $\tilde{s}(x_0) = y_1$, $\tilde{s}(x_2) = y_2$ und den Eigenschaften $\tilde{s}(v_1) = \tilde{s}(v_2) = 0$ existiert, wobei $v_1 \in]x_0 + m_0, x_1[$ und $v_2 \in]x_1, x_1 + m_1[$ gelten.*

Beweis von Lemma 29 :

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit gelte $sgn(y_1) = sgn(y_2) = 1$ und $y_1 \leq y_2$. Man setze für ein $\varepsilon > 0$, mit der Eigenschaft $\varepsilon < \min\{(x_1 - m_0), (m_1 - x_1)\frac{(x_1 - x_0)}{(x_2 - x_1)}\}$

$$g_1(x) := \frac{y_1}{x_0 - x_1 + \varepsilon}(x - x_1 + \varepsilon); \forall x \in [x_0, x_1]$$

und

$$g_2(x) := \frac{1}{x_2 - x_1}((y_1 \frac{\varepsilon}{x_1 - x_0 - \varepsilon} + y_2)(x - x_2) + y_2(x_2 - x_1)); \forall x \in [x_1, x_2].$$

Dann gelten $g_1(x_0) = y_1$, $g_2(x_2) = y_2$ und $g_1(x_1) = y_1 \frac{\varepsilon}{x_0 - x_1 + \varepsilon} = g_2(x_1)$. Weiterhin folgt $g_1(v_1 = x_1 - \varepsilon) = g_2(v_2) = 0$, wobei

$$v_2 = x_2 - \frac{y_2(x_2 - x_1)}{y_1 \frac{\varepsilon}{x_1 - x_0 - \varepsilon} + y_2} = \frac{y_1(x_2 - x_1)\frac{\varepsilon}{x_1 - x_0 - \varepsilon}}{y_1 \frac{\varepsilon}{x_1 - x_0 - \varepsilon} + y_2} + x_1.$$

Es gilt $x_1 - \varepsilon > m_0$ und aufgrund von

$$\frac{y_1(x_2 - x_1)\frac{\varepsilon}{x_1 - x_0 - \varepsilon}}{y_1\frac{\varepsilon}{x_1 - x_0 - \varepsilon} + y_2} > 0$$

erhält man $v_2 > x_1$. Wegen $y_1 \leq y_2$ gilt

$$y_1\frac{\varepsilon}{x_1 - x_0 - \varepsilon} + y_2 \geq y_1\frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0 - \varepsilon},$$

woraus man $v_2 \leq x_1 + \varepsilon\frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0} < m_1$ erhält. Definiert man nun $\tilde{s}$, so daß

$$\tilde{s}(t) = g_1(t); \forall t \in [x_0, x_1] \text{ und } \tilde{s}(t) = g_2(t); \forall t \in [x_1, x_2],$$

so folgt $\tilde{s} \in S_1(x_1)$ und damit aus den obigen Eigenschaften von g_1 und g_2 die Behauptung. ■

Wir formulieren nun die, oben angekündigte, Charakterisierung stark eindeutig bester Approximationen in dem verbleibenden Fall, der durch die, oben definierten, Alternationsmengen $\sigma_k; k = 1 \ldots n$ dargestellt werden kann.

Satz 30 *Es seien $f \in C_{(x_n - x_0)}$ und $p_f \in P_m(K_n)$; $n \in I\!N; n = 2l; l \in I\!N$. Es gelte, daß $(f - p_f)$ genau n Alternationsmengen $\sigma_k; k = 1 \ldots n$ besitzt. Dann gilt : p_f ist genau dann stark eindeutig beste Approximation an f, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind*
(a) jedes Intervall $]x_i, x_{i+m+j}[; i \in \{0 \ldots n-1\}; j \in \{1 \ldots n-m\}$ enthält mindestens $j+1$ alternierende Extremalpunkte von $(f - p_f)$
(b) für alle $z_1 \leq \ldots \leq z_n$ mit $z_j \in [M_j, m_{j+1}]; j = 1 \ldots n$ $(m_{n+1} := m_1 + (x_n - x_0))$ ist

$$D\begin{pmatrix} B_1 \ldots B_n \\ z_1 \ldots z_n \end{pmatrix} \neq 0, \text{ falls } m \geq 2$$

für alle $z_1 < \ldots < z_n$ mit $z_j \in [M_j, m_{j+1}]; j = 1 \ldots n$ $(m_{n+1} := m_1 + (x_n - x_0))$ ist

$$D\begin{pmatrix} B_1 \ldots B_n \\ z_1 \ldots z_n \end{pmatrix} \neq 0, \text{ falls } m = 1.$$

Beweis von Satz 30 :

Wir zeigen zunächst $\Rightarrow$. Aus Satz 17, Folgerung (a) erhält man (neben (a)), daß jedes Intervall $]x_i, x_{i+m+j}[; i \in \{0 \ldots n-1\}; j \in \{1 \ldots n-m\}$ mindestens $j+1$ der Mengen $\sigma_k; k = 1 \ldots n$ anschneidet. Eine Punktmenge $Z = \{z_1 \leq \ldots \leq z_n\}$ mit $z_k \in [M_k, m_{k+1}]; k = 1 \ldots n$ $(m_{n+1} := m_1 + (x_n - x_0))$ hat somit die Eigenschaft, daß jedes Intervall $]x_i, x_{i+m+j}[; i \in \{0 \ldots n-1\}; j \in \{1 \ldots n-m\}$ mindestens j Punkte aus Z enthält, das heißt eine solche Punktmenge Z hat die SW-Kreis-Vfht.-Eigenschaft.

Wir betrachten nun zunächst den Fall $z_{k-1} < z_k; k = 1 \dots n$ $(z_0 := z_n - (x_n - x_0))$. Angenommen

$$D := D\begin{pmatrix} B_1 \dots B_n \\ z_1 \dots z_n \end{pmatrix} = D(B_i(z_k))_{\substack{k=1\dots n \\ i=1\dots n}} = 0,$$

dann folgt aus der Schoenberg-Whitney am Kreis-Eigenschaft von Z die Existenz von $p \in P_m(K_n) \setminus \{0\}$ mit $p(z_k) = 0; k = 1 \dots n$, wobei

$$\forall t \in]z_{k-1}, z_k[: \ sgn(p(t)) = (-1)^k \sigma; k = 1 \dots n,$$

wenn wir von

$$\forall t \in E_{f-p_f} \cap \sigma_k : \ sgn((f - p_f)(t)) = (-1)^k \sigma; k = 1 \dots n$$

für ein $\sigma \in \{-1, +1\}$ ausgehen. Insbesondere gilt

$$\forall t \in [z_{k-1}, z_k] : \ (-1)^k \sigma p(t) \geq 0; k = 1 \dots n,$$

und man erhält wegen $E_{f-p_f} \cap \sigma_k \subseteq [z_{k-1}, z_k]$ die Bedingung

$$\forall t \in E_{f-p_f} \cap \sigma_k : \ (f - p_f)(t) p(t) \geq 0; k = 1 \dots n.$$

Aufgrund von

$$E_{f-p_f} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \sigma_k$$

folgt hieraus

$$(f - p_f)(t) p(t) \geq 0; \forall t \in E_{f-p_f}.$$

Dies ist nach Satz 12 ein Widerspruch zur starken Eindeutigkeit von p_f.

Für $m \geq 2$ untersuchen wir nun noch den Fall der Existenz von $\{j_1 < \dots < j_s\} \subseteq \{1 \dots n\}$, $s \in \{1 \dots \frac{n}{2}\}$ mit

$$z_{j_k} = m_{j_k+1} = M_{j_k+1} = z_{j_k+1}; k = 1 \dots s,$$

das heißt für $k \in \{1 \dots s\}$ gelten die Bedingungen

$$\sigma_{j_k+1} = \{m_{j_k+1}\} = \{M_{j_k+1}\} \ \text{ und } \ z_{j_k-1} \neq z_{j_k} \ z_{j_k+1} \neq z_{j_k+2}.$$

Aus der SW-Kreis-Vfht.-Eigenschaft von Z und der Annahme

$$D := D\begin{pmatrix} B_1 \dots B_n \\ t_1 \dots t_n \end{pmatrix} = D(B_i^{(d_j)}(t_j))_{\substack{j=1\dots n \\ i=1\dots n}} = 0$$

folgt mit Hilfe von Satz 27, daß es ein $p \in P_m(K_n) \setminus \{0\}$ mit genau den endlich vielen Nullstellen $z_1 \leq \dots \leq z_n$ gibt, so daß genau alle z_k mit $k \notin (\{j_1 \dots j_s\} \cup \{j_1 + 1 \dots j_s + 1\})$ einfache Nullstellen von p sind und es gilt

$$\forall t \in]z_{k-1}, z_k[: \ sgn(p(t)) = (-1)^k; k = 1 \dots n,$$

wobei dies für Indizees mit der Eigenschaft $k \in \{j_1+1 \dots j_s+1\}$ wegen $z_{k-1} = z_k$ eine leere Vorzeichenaussage ist. Nehmen wir

$$\forall t \in E_{f-p_f} \cap \sigma_k : \ sgn((f-p_f)(t)) = (-1)^k \sigma; k = 1 \dots n$$

für ein $\sigma \in \{-1, +1\}$ an, so erhalten wir durch eventuellen Übergang auf $(-p)$

$$\forall t \in [z_{k-1}, z_k] : \ (-1)^k \sigma p(t) \geq 0; k = 1 \dots n,$$

und somit wie im oben behandelten Fall mit Satz 12 einen Widerspruch zur starken Eindeutigkeit von p_f.

Wir zeigen nun $\Leftarrow$. Angenommen p_f ist nicht stark eindeutig beste Approximation an f. Dann folgt aus Satz 12 die Existenz von $p \in P_m(K_n) \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft

$$(f-p_f)(t)p(t) \geq 0; \forall t \in E_{f-p_f}.$$

Nimmt man nun an, p besitze ein Knotenintervall $I = [x_r, x_{r+1}]$ mit der Eigenschaft $p|_I \equiv 0$, so gelangt man wie im Beweis von Satz 19, die Bedingung (a) verwendend, auf einen Widerspruch. Wir können also im folgenden davon ausgehen, daß p nur endlich viele Nullstellen in $[x_0, x_n[$ besitzt. Aus obiger Annahme folgt, wenn wir

$$\forall t \in E_{f-p_f} \cap \sigma_k : \ sgn((f-p_f)(t)) = (-1)^k \sigma; k = 1 \dots n$$

für ein $\sigma \in \{-1, +1\}$ setzen, daß für $k \in \{1 \dots n\}$

$$(-1)^k \sigma p(t) \geq 0; \forall t \in E_{f-p_f} \cap \sigma_k$$

gilt. Wegen der Lage von m_k, beziehungsweise $M_k; k = 1 \dots n$ folgt insbesondere, daß $(-1)^k \sigma p(m_k) \geq 0$ und $(-1)^k \sigma p(M_k) \geq 0$, woraus man die Existenz von $z_k \in [M_k, m_{k+1}]; k = 1 \dots n$ mit $p(z_k) = 0$ erhält. Wegen Bedingung (a) schneiden mindestens $j+1$ der Mengen $\sigma_k; k = 1 \dots n$ ein Intervall der Form $]x_i, x_{i+m+j}[; i \in \{0 \dots n-1\}$; $j \in \{1 \dots n-m\}$ an und man erhält somit, daß die Menge $Z = \{z_1 \leq \dots \leq z_n\}$ die SW-Kreis-Vfht.-Eigenschaft hat. Gilt nun $z_k < z_{k+1}; k = 1 \dots n$ $(z_{n+1} := z_1 + (x_n - x_0))$, so erhält man den Widerspruch

$$D\begin{pmatrix} B_1 \dots B_n \\ z_1 \dots z_n \end{pmatrix} = D(B_i(z_k))_{\substack{k=1\dots n \\ i=1\dots n}} = 0.$$

Ist andernfalls $\{j_1 < \dots < j_s\} \subseteq \{1 \dots n\}$, $s \in \{1 \dots \frac{n}{2}\}$, so daß

$$z_{j_k} = m_{j_k+1} = M_{j_k+1} = z_{j_k+1}; k = 1 \dots s,$$

dann gelten für $k \in \{1 \dots s\}$ die Bedingungen

$$\sigma_{j_k+1} = \{m_{j_k+1}\} = \{M_{j_k+1}\} \quad \text{und} \quad z_{j_k-1} \neq z_{j_k} \ z_{j_k+1} \neq z_{j_k+2},$$

und man erhält im Fall $m \geq 2$ mit Hilfe von Satz 27, daß

$$D\begin{pmatrix} B_1 \dots B_n \\ z_1 \dots z_n \end{pmatrix} = D(B_i^{(d_j)}(z_j))_{\substack{j=1\dots n \\ i=1\dots n}} = 0$$

- ein Widerspruch. Im Fall $m = 1$ gilt für jedes $k \in \{1 \dots s\}$ $z_{j_k} = z_{j_k+1} = x_{i_k}$ für ein $i_k \in \{0 \dots n-1\}$, denn sonst hätte p ein Nullstellenintervall. Ist nun ε so gewählt, daß $\forall k \in \{1 \dots s\}$

$$0 < \varepsilon < \min(\{(x_{i_k} - M_{j_k}); (m_{j_k+2} - x_{i_k})\frac{(x_{i_k} - x_{i_k-1})}{(x_{i_k+1} - x_{i_k})}\}),$$

so kann man mit Hilfe von Lemma 29 einen Spline $\hat{p} \in P_1(K_n) \setminus \{0\}$ konstruieren, so daß

$$\hat{p}|_{[x_0,x_n[\setminus \bigcup_{k=1}^{s}]x_{i_k-1},x_{i_k+1}[} \equiv p$$

und $\hat{p}(v_{i_k}^{(1)}) = \hat{p}(v_{i_k}^{(2)}) = 0; k = 1 \dots s$ gelten, wobei $v_{i_k}^{(1)} \in]M_{j_k}, x_{i_k}[$ und $v_{i_k}^{(2)} \in]x_{i_k}, m_{j_k+2}[$ erfüllt sind. Es folgt, daß es eine Punktmenge

$$\hat{z}_k < \hat{z}_{k+1}; k = 1 \dots n \ (\hat{z}_{n+1} := \hat{z}_1 + (x_n - x_0))$$

mit der Lagebedingung $\hat{z}_k \in [M_k, m_{k+1}]; k = 1 \dots n$ und der Eigenschaft

$$D\begin{pmatrix} B_1 \dots B_n \\ \hat{z}_1 \dots \hat{z}_n \end{pmatrix} = D(B_i(\hat{z}_k))_{\substack{k=1\dots n\\ i=1\dots n}} = 0$$

gibt - ein Widerspruch. ■

Wir stellen nun fest, daß die Charakterisierung stark eindeutig bester Approximationen für nicht schwach-tschebyscheffsche, periodische Splinefunktionen durch Kombination von Satz 21 und Satz 30 in der folgenden, kompakten Form beschrieben werden kann. Vergleicht man die Aussage des nachfolgenden Charakterisierungssatz mit jener aus Satz 19 und (vgl. [5], p.134, Theorem 4.4), so kann man erkennen, daß aufgrund des Verlusts der schwach-tschebyscheff Struktur, ähnlich wie in Satz 11, zusätzliche Phänomene bei der Charakterisierung stark eindeutig bester Approximationen auftreten.

Satz 31 (Charakterisierungssatz) *Es seien $f \in C_{(x_n-x_0)}$ und $p_f \in P_m(K_n)$; $n \in \mathbb{N}; n = 2l; l \in \mathbb{N}_0$. p_f ist genau dann stark eindeutig beste Approximation an f, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind :*
(a) jedes Intervall $]x_i, x_{i+m+j}[; i \in \{0 \dots n-1\}; j \in \{1 \dots n-m\}$ enthält mindestens $j+1$ alternierende Extremalpunkte von $(f - p_f)$
(b) $(f - p_f)$ besitzt eine, bezüglich der zyklischen Ordnung optimal gezählte, Alternante der Länge $n+1$
(c) falls $(f - p_f)$ genau n Alternationsmengen besitzt, so gilt für je n Punkte $z_1 \lesseqqgtr \dots \lesseqqgtr z_n$ in den abgeschlossenen Intervallen zwischen den Alternationsmengen die Determinantenbedingung

$$D\begin{pmatrix} B_1 \dots B_n \\ z_1 \dots z_n \end{pmatrix} \neq 0.$$

Es sei bemerkt, daß man aus den Bedingungen (b) und (c) von Satz 31, ohne höhere Argumente zu benutzen, die Eigenschaft der besten Approximation verifizieren kann. Besitzt die Fehlerfunktion genau n Alternationsmengen, so nimmt man hierzu

$$D\begin{pmatrix} B_1 \dots B_n \\ t_1 \dots t_n \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} B_1 \dots B_n \\ t_2 \dots t_{n+1} \end{pmatrix} < 0$$

für sämtliche Alternanten $T = \{t_j\}_{j=1}^{n+1}$ der Länge $n+1$, welche aus der Punktmenge $\{m_k; k = 1 \dots n\} \cup \{M_k; k = 1 \dots n\}$ generiert werden können, an. Man erhält dann nach n Übergangs- bzw. Vertauschungsoperationen, daß

$$D\begin{pmatrix} B_1 \dots B_n \\ M_1 \dots M_n \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} B_1 \dots B_n \\ m_1 \dots m_n \end{pmatrix} > 0$$

gilt. Definiert man

$$F(t) := D\begin{pmatrix} B_1 \dots B_n \\ \varphi_1(t) \dots \varphi_n(t) \end{pmatrix}; t \in [0,1],$$

wobei $\varphi_k(t) := M_k + t(m_{k+1} - M_k); k = 1 \dots n$, so folgt

$$F(0)F(1) = D\begin{pmatrix} B_1 \dots B_n \\ M_1 \dots M_n \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} B_1 \dots \ B_n \\ m_2 \dots m_n m_1 \end{pmatrix} < 0$$

und damit besitzt F zwischen den Alternationsmengen eine Nullstelle - ein Widerspruch zu Vorausetzung (c) in Satz 31.

Das nächste Lemma hilft bei der nachfolgenden, vereinfachenden Formulierung der in Satz 31 angegebenen Determinantenbedingungen.

Lemma 32 *Es seien $\sigma = \{\sigma_k = [m_k, M_k]\}_{k=1}^n; m_k \le M_k < m_{k+1}$ ein Menge von Mengen mit der Eigenschaft, daß jedes Intervall $]x_i, x_{i+m+j}[; i = 0 \dots n-1; j = 1 \dots n-m$ mindestens $j+1$ Mengen aus σ anschneidet. Dann gibt es eine Menge $T^* = \{t_k^*\}_{k=1}^n$ mit $t_k^* \in \sigma_k; k = 1 \dots n$, welche die Schoenberg-Whitney am Kreis Eigenschaft besitzt, so daß alle Mengen $T = \{t_k\}_{k=1}^n$ mit $m_k \le t_k \le t_k^*; k = 1 \dots n$ und alle Mengen $\tilde{T} = \{\tilde{t}_k\}_{k=1}^n$ mit $t_k^* \le \tilde{t}_k \le M_k; k = 1 \dots n$ die Schoenberg-Whitney am Kreis Eigenschaft erfüllen. Für σ_k mit $m_k < M_k$ gilt hierbei $t_k^* \in]m_k, M_k[$.*

Beweis Lemma 32 :

Wir beschreiben zunächst wie die Punktmenge $T^* = \{t_k^*\}_{k=1}^n$ liegen soll. Falls $m_j = M_j$ oder kein Knoten $x_i \in \sigma_j$ ist, so sei $t_j^* := \frac{(m_j + M_j)}{2} \in \sigma_j$. Gilt nun

$$\sigma_j \cap K_n = \{x_{i_1} < \dots < x_{i_2}\}$$

so unterscheiden wir die folgenden Fälle.

(1) Falls $\forall i \in \{i_1 < \dots < i_2\} \forall j_1 \in \{1 \dots n-m\} \ ]x_i, x_{i+m+j_1}[$ mindestens j_1 der Mengen aus σ vollständig enthält und $\forall i \in \{x_{i_1} < \dots < x_{i_2}\} \forall j_2 \in \{1 \dots n-m\} \ ]x_{i-m-j_2}, x_i[$ mindestens j_2 der Mengen aus σ vollständig enthält, so sei $t_j^* \in]m_j, M_j[$ beliebig gewählt.

(2) Falls $i \in \{i_1 < \ldots < i_2\}$ und $j_1 \in \{1 \ldots n - m\}$ existieren, so daß $]x_i, x_{i+m+j_1}[$ genau $j_1 - 1$ der Mengen aus σ vollständig enthält und $\forall i \in \{x_{i_1} < \ldots < x_{i_2}\} \forall j_2 \in \{1 \ldots n - m\}$ $]x_{i-m-j_2}, x_i[$ mindestens j_2 der Mengen aus σ vollständig enthält, so sei

$$i_0 := \max\{i \in \{i_1 < \ldots < i_2\} \exists j_1 \in \{1 \ldots n - m\} :]x_i, x_{i+m+j_1}[\text{ enthält genau } j_1 - 1 \text{ Mengen aus } \sigma \text{ vollständig}\}.$$

Ist nun $i_0 < i_2$, so sei $t_j^* \in]x_{i_0}, x_{i_0+1}[$, und für $i_0 = i_2$ sei $t_j^* \in]x_{i_2}, M_j[$ gewählt. Offenbar gilt $M_j > x_{i_0}$, denn $]x_{i_0}, x_{i_0+m+j_1}[$ schneidet mindestens $j_1 + 1$ Mengen aus σ an.

(3) Falls $\forall i \in \{i_1 < \ldots < i_2\} \forall j_1 \in \{1 \ldots n - m\}$ $]x_i, x_{i+m+j_1}[$ mindestens j_1 der Mengen aus σ vollständig enthält und $i \in \{i_1 < \ldots < i_2\}$ sowie $j_2 \in \{1 \ldots n - m\}$ existieren, so daß $]x_{i-m-j_2}, x_i[$ genau $j_2 - 1$ der Mengen aus σ vollständig enthält, so sei

$$\tilde{i}_0 := \min\{i \in \{i_1 < \ldots < i_2\} \exists j_2 \in \{1 \ldots n - m\} :]x_{i-m-j_2}, x_i[\text{ enthält genau } j_2 - 1 \text{ Mengen aus } \sigma \text{ vollständig}\}.$$

Ist nun $\tilde{i}_0 > i_1$, so sei $t_j^* \in]x_{\tilde{i}_0-1}, x_{\tilde{i}_0}[$, und für $\tilde{i}_0 = i_1$ sei $t_j^* \in]m_j, x_{i_1}[$ gewählt. Offenbar gilt $m_j < x_{i_1}$.

(4) Falls $i \in \{i_1 < \ldots < i_2\}$ und $j_1 \in \{1 \ldots n - m\}$ existieren, so daß $]x_i, x_{i+m+j_1}[$ genau $j_1 - 1$ der Mengen aus σ vollständig enthält und $\tilde{i} \in \{i_1 < \ldots < i_2\}$ sowie $j_2 \in \{1 \ldots n - m\}$ existieren, so daß $]x_{\tilde{i}-m-j_2}, x_{\tilde{i}}[$ genau $j_2 - 1$ der Mengen aus σ vollständig enthält, so seien i_0 wie in Fall (2) und $\tilde{i}_0$ wie in Fall (3) definiert. Es folgt, daß $]x_{\tilde{i}_0-m-j_2}, x_{i_0+m+j_1}[$ genau $j_1 + j_2 + 1$ Mengen aus σ anschneidet. Andererseits gilt per Vorausetzung, daß

$$]x_{\tilde{i}_0-m-j_2}, x_{i_0+m+j_1=\tilde{i}_0-m-j_2+m+i_0-\tilde{i}_0+m+j_1+j_2}[$$

mindestens $i_0 - \tilde{i}_0 + m + j_1 + j_2 + 1$ Mengen aus σ anschneidet und somit erhält man

$$i_0 - \tilde{i}_0 + m + j_1 + j_2 + 1 \leq j_1 + j_2 + 1,$$

das heißt $\tilde{i}_0 - i_0 \geq m$. Da zudem jedes Intervall $]x_i, x_{i+m+1}[$ mindestens 2 Mengen aus σ anschneidet und $x_{i_0}, x_{\tilde{i}_0} \in \sigma_j$ gilt, folgt $\tilde{i}_0 = i_0 + m$. In diesem Fall setzen wir $t_j^* \in]x_{i_0}, x_{\tilde{i}_0}[$.

Wir zeigen nun zunächst, daß die so konstruierte Menge T^* der Schoenberg-Whitney am Kreis Bedingung genügt. Angenommen es gibt ein Intervall $I =]x_i, x_{i+m+j}[$ mit weniger als j Punkten aus T^*. Da I mindestens $j - 1$ Mengen aus σ vollständig enthält, folgt, daß genau $j - 1$ Punkte aus T^* in I liegen. Diese nennen wir $t_1^*, \ldots, t_{j-1}^*$ und bezeichnen die zugehörigen Mengen aus σ mit $\sigma_1, \ldots, \sigma_{j-1}$. Aufgrund der Voraussetzung und der Annahme schneiden genau 2 weitere Mengen aus σ das Intervall I an, ohne allerdings vollständig in I zu liegen : σ_0, σ_j. Offenbar gilt $x_i \in \sigma_0$ und I enthält genau $j - 1$ Mengen aus σ vollständig, woraus man, Fall (2) oder Fall (4) betrachtend, stets $t_0^* > x_i$ erhält - ein Widerspruch.

Wir zeigen nun, daß eine Punktmenge $T = \{t_k\}_{k=1}^n$ mit $t_k \in [m_k, t_k^*]; k = 1 \dots n$ stets die Schoenberg-Whitney am Kreis Eigenschaft hat. Angenommen es gibt ein Intervall $I =]x_i, x_{i+m+j}[$ mit genau $j-1$ Punkten aus T (I enthält $j-1$ Mengen aus σ vollständig). Analog der obigen Vorgehensweise bezeichnen wir die, zu den Punkten $t_1, \dots, t_{j-1}$ gehörigen, Mengen aus σ mit $\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}$ und es folgt die Existenz von Mengen σ_0, σ_j wie oben. Offenbar gilt $x_{i+m+j} \in \sigma_j$. Betrachten wir Fall (3), beziehungsweise Fall (4) der obigen Festlegung der Punktmenge T^*, so folgt in beiden Fällen

$$m_j \leq t_j \leq t_j^* < x_{\bar{i}_0} \leq x_{i+m+j}$$

und damit ein Widerspruch zur Annahme.

Ist schließlich eine Punktmenge $\tilde{T} = \{\tilde{t}_k\}_{k=1}^n$ mit $\tilde{t}_k \in [t_k^*, M_k]; k = 1 \dots n$ gegeben und nimmt man an, ein Intervall $I =]x_i, x_{i+m+j}[$ enthält genau $j-1$ Punkten aus $\tilde{T}$, so erhält man analog den obigen Untersuchungen mit den entsprechenden Bezeichnungen, aus den Festlegungen in Fall (2), beziehungsweise Fall (4) den Widerspruch

$$x_i \leq x_{i_0} < t_0^* \leq \tilde{t}_0 \leq M_0.$$

■

Übertragen nun wir die Ideen von O.V. Davydov (siehe Satz 11, vgl. [2]) auf die Charakterisierung stark eindeutig bester Approximationen mit Alternanten der genauen Länge n, so können wir die in Satz 30 auftretenden Determinantenbedingungen wiefolgt in dessen Kontext formulieren.

Lemma 33 *Es seien $f \in C_{(x_n - x_0)}$ und $p_f \in P_m(K_n)$; $n \in I\!N; n = 2l; l \in I\!N_0$. p_f sei die stark eindeutig beste Approximation an f und es gelte, daß $(f - p_f)$ genau n Alternationsmengen $\sigma_k; k = 1 \dots n$ besitzt. Dann gilt: die Determinantenbedingung (b) aus Satz 30 ist äquivalent zu den folgenden beiden Bedingungen*
(b1) für alle $z_1 \substack{\leq \\ <} \dots \substack{\leq \\ <} z_n$ mit $z_j \in [M_j, m_{j+1}]; j = 1 \dots n$ ($m_{n+1} := m_1 + (x_n - x_0)$) und $z_k = M_k$ oder $z_k = m_{k+1}$ für ein $k \in \{1 \dots n\}$ gilt

$$D\begin{pmatrix} B_1 \dots B_n \\ z_1 \dots z_n \end{pmatrix} \neq 0$$

(b2) es gibt eine Punktmenge $t_1 < \dots < t_n (< t_1 + (x_n - x_0))$ in Schoenberg-Whitney am Kreis Lage mit $t_k \in \sigma_k; k = 1 \dots n$, wobei $t_{k_0} \in]m_{k_0}, M_{k_0}[$ für ein $k_0 \in \{1 \dots n\}$ gilt, so daß

$$D\begin{pmatrix} B_1 \dots B_n \\ t_1 \dots t_n \end{pmatrix} = 0.$$

Beweis von Lemma 33 :

Wir beweisen zunächst $\Rightarrow$, Die erstgenannte Determinantenbedingung ist dann klar. Um die zweite Determinantenbedingung nachzuweisen betrachte man die stetige Determinante

$$F(t) := D\begin{pmatrix} B_1 \dots B_n \\ \varphi_1(t) \dots \varphi_n(t) \end{pmatrix}; t \in [0, 1],$$

wobei $\varphi_k(t) := M_k + t(m_{k+1} - M_k); k = 1 \ldots n$. Dann gelten per Vorausetzung

$$F(0) = D\left(\begin{array}{c} B_1 \ldots B_n \\ M_1 \ldots M_n \end{array}\right) \neq 0 \text{ und } F(1) = D\left(\begin{array}{cc} B_1 \ldots & B_n \\ m_2 \ldots m_n & m_1 \end{array}\right) \neq 0.$$

Angenommen $F(0)F(1) < 0$, dann folgt aufgrund der Stetigkeit von F die Existenz von $\gamma_0 \in]0,1[$ mit $F(\gamma_0) = 0$. Dies bedeutet aber, daß $z_k := \varphi_k(\gamma_0) \in]M_k, m_{k+1}[; k = 1 \ldots n$ die Eigenschaft

$$D\left(\begin{array}{c} B_1 \ldots B_n \\ z_1 \ldots z_n \end{array}\right) = 0$$

hat - ein Widerspruch zur Vorausetzung. Es sei nun $T^* = \{t_k^*\}_{k=1}^n$ wie in Lemma 32 gewählt. Weiter definiert man

$$G(t) := D\left(\begin{array}{c} B_1 \ldots B_n \\ \gamma_1(t) \ldots \gamma_n(t) \end{array}\right); t \in [0,1],$$

wobei $\gamma_j; j = 1 \ldots n$ wiefolgt festgelegt ist

$$\gamma_j(t) := \left\{ \begin{array}{r} m_j + 2t(t_j^* - m_j) \; ; \; t \in [0, \frac{1}{2}] \\ M_j + 2(1-t)(t_j^* - M_j) \; ; \; t \in]\frac{1}{2}, 1] \end{array} \right. ; j = 1 \ldots n.$$

Aufgrund von

$$G(0) = D\left(\begin{array}{c} B_1 \ldots B_n \\ m_1 \ldots m_n \end{array}\right) = -F(1) \text{ und } G(1) = D\left(\begin{array}{c} B_1 \ldots B_n \\ M_1 \ldots M_n \end{array}\right) = F(0).$$

erhält man $G(0)G(1) < 0$ und damit die Existenz von $\tau_0 \in]0,1[$ mit $G(\tau_0) = 0$. Setzt man nun $t_j := \gamma_j(\tau_0); j = 1 \ldots n$, so gilt offenbar $t_j \in \sigma_j; j = 1 \ldots n$ und wegen Lemma 22 folgt die Existenz von $j_0 \in \{1 \ldots n\}$ mit $m_{j_0} < M_{j_0}$, das heißt $t_{j_0} \in]m_{j_0}, M_{j_0}[$. Diese Punktmenge $T = \{t_j\}_{j=1}^n$ erfüllt aufgrund von Lemma 32 die Schoenberg-Whitney am Kreis Eigenschaft.

Wir beweisen nun $\Leftarrow$. Angenommen es gibt $z_k \in]M_k, m_{k+1}[; k = 1 \ldots n$, so daß

$$D\left(\begin{array}{c} B_1 \ldots B_n \\ z_1 \ldots z_n \end{array}\right) = 0.$$

Dann sind die Punkte z_k paarweise verschieden und aus Satz 17 erhält man wie im Beweis von Satz 30, daß die Punktmenge $\{z_k\}_{k=1}^n$ die Schoenberg-Whitney am Kreis-Eigenschaft hat. Somit folgt mit Hilfe von Satz 9, daß für alle $T = \{t_j\}_{j=1}^n$ mit $t_j \in]z_{j-1}, z_j[; j = 1 \ldots n$

$$D\left(\begin{array}{c} B_1 \ldots B_n \\ t_1 \ldots t_n \end{array}\right) \neq 0$$

gilt. Aufgrund von $\sigma_j = [m_j, M_j] \subseteq]z_{j-1}, z_j[; j = 1 \ldots n$ ist dies insbesondere ein Widerspruch zur zweiten Determinantenbedingung. ∎

Abschließend erhält man aus dem Beweis von Lemma 33 das folgende Lemma, welches den wichtigen Fall, daß alle Alternationsmengen ein nicht leeres Inneres besitzen, behandelt. Hierbei sei bemerkt, daß in diesem Fall keine Hermite-Interpolationsdeterminanten auftreten.

Lemma 34 *Es seien* $f \in C_{(x_n - x_0)}$ *und* $p_f \in P_m(K_n)$; $n \in \mathbb{N}; n = 2l; l \in \mathbb{N}_0$. p_f *sei die stark eindeutig beste Approximation an* f *und es gelte, daß* $(f - p_f)$ *genau* n *Alternationsmengen* $\sigma_k; k = 1 \ldots n$ *besitzt, wobei* $m_k < M_k; k = 1 \ldots n$ *gelten soll. Die Determinantenbedingung (b) aus Satz 30 ist dann äquivalent zu der Forderung, daß es eine Punktmenge* $t_1 < \ldots < t_n (< t_1 + (x_n - x_0))$ *in Schoenberg-Whitney am Kreis Lage mit* $t_k \in]m_k, M_k[; k = 1 \ldots n$ *gibt, die die Eigenschaft*

$$D\begin{pmatrix} B_1 \ldots B_n \\ t_1 \ldots t_n \end{pmatrix} = 0$$

besitzt.

Literatur

[1] H.W. Bartelt, M.W. & McLaughlin. Characterizations of strong unicity in approximation theory. *J.Approx.Theory* ***9*** *p.255-266*, 1973.

[2] O.V. Davydov. Notes on alternation theorems of periodic functions. *in: Theory of functions and summation of series, Ed. V.P.Motornyl, p.21-25 Dnepropetrosk Gos. Univ.*, 1989.

[3] O.V. Davydov. On optimal uniform approximation on periodic functions by splines. *Soviet.Math.(Izv.Vyssh.Uchebn.Zaved.Mat.)* ***35****,no.5,p.7-14*, 1991.

[4] R.C. Jones and L.A. Karlovitz. Equioscillation under nonuniqueness in the approximation of continuous functions. *J.Approx.Theory* ***3*** *p.138-145*, 1970.

[5] G. Nürnberger. *Approximation by Spline Functions.* Springer-Verlag, Berlin,Heidelberg,New York, 1989.

[6] J.R. Rice. *The Approximation of Functions I.* Addison and Wesley, Reading,Massachusetts, 1964.

[7] T.J. Rivlin. *Chebyshev Polynomials.* John Wiley and Sons, New York,Chichester,Brisbane,Toronto, 1990.

[8] L. Schumaker. Uniform approximation by tchebycheffian spline functions. *J.Math.Mech.* ***18*** *p.369-378*, 1968.

[9] L. Schumaker. *Spline Functions Basic Theory.* John Wiley and Sons, New York,Chichester,Brisbane,Toronto, 1981.

[10] D.E. Wulbert. Uniqueness and differential characterization of approximation from manifolds. *Amer. J. Math.* ***18*** *p.350-366*, 1971.