Familien von Differentialoperatoren über Mannigfaltigkeiten von Einbettungen und der Binz'sche Zerlegungssatz

Thomas Ackermann

Fakultät für Mathematik u. Informatik
Universität Mannheim

Heft Nr. 149 Januar 1993

Familien von Differentialoperatoren über Mannigfaltigkeiten von Einbettungen und der Binz'sche Zerlegungssatz

Thomas Ackermann

Übersicht. Ausgehend von einer von Binz im Rahmen der differentialgeometrischen Beschreibung konstitutiver Gesetze der Elastizitätstheorie gemachten Beobachtung (vgl. z.B. [B2], Theorem 5.2), daß jede Bündelabblidung $\alpha(j): TM \to TN$ über einer Einbettung $j \in E(M,\ N)$ endlich dimensionaler Mannigfaltigkeiten in einen *pseudo-exakten* und *pseudo-exakt freien* Teil zerfällt, untersucht diese Arbeit die unterliegende unendlich-dimensionale Frechét-Geometrie. Das Resultat ist eine entsprechende Zerlegung des Frechétbündels $\pi_*\mathcal{E}^{(1)} \cong \ker\, D^{1,0} \times \mathrm{Im}\, D^{1,0}$, wobei $D^{1,0}$ die glatte Familie von Differentialoperatoren $\{(j^*\nabla^{TN})^*\}$ bezeichnet.

Sind E, F zwei endlich-dimensionale Vektorraumbündel über einer endlich-dimensionalen Mannigfaltigkeit M und ist $A: E \to F$ ein Bündelhomomorphismus mit lokal konstantem Rang, so ist wohlbekannt, daß sowohl der Kern $\ker A := \bigcup_{x\in M} \ker A_x$ als auch das Bild $\mathrm{Im}\, A := \bigcup_{x\in M} \mathrm{Im}\, A_x$ Vektorraumbündel über M definieren. Über dies zerfällt die exakte Sequenz *

$$0 \longrightarrow \ker A \hookrightarrow E \xrightarrow{A} \mathrm{Im} A \longrightarrow 0, \tag{1}$$

also gilt $E = C \oplus \ker A$ wobei $C \cong \mathrm{Im} A$ ein Vektorbündel über M ist. Da der Schnittfunktor Γ direkte Summen respektiert, induziert (1) somit $\Gamma(E) = \Gamma(\ker A) \oplus \Gamma(C)$.

Dies läßt sich im allgemeinen *nicht* auf eine entsprechende *unendlich-dimensionale* Situation übertragen. Genauer: Sind E und F unendlich dimensionale Frechétbündel und A ein Frechétbündelmorphismus mit $\ker A \subset E$ ein Unter-Frechétbündel, so ist schon im allgemeinen $\mathrm{Im}\, A$ *nicht* abgeschlossen in F.

Ausgehend von einer von Binz im Rahmen der differentialgeometrischen Beschreibung konstitutiver Gesetze der Elastizitätstheorie gemachten Beobachtung (vgl. z.B. [B2], Theorem 5.2), daß jede Bündelabblidung $\alpha(j): TM \to TN$ über einer Einbettung $j: M \to N$ endlich dimensionaler Mannigfaltigkeiten in einen *pseudo-exakten* und *pseudo-exakt freien* Teil ** zerfällt, untersucht diese Arbeit die unterliegende unendlich-dimensionale Frechét-Geometrie. Dazu wird im ersten Abschnitt der geometrische Rahmen (GD) allgemein etabliert und dannach - teilweise mit Ergebnissen aus [BF], [B1], [B2] und [BSF] - gezeigt, daß die Räume der TN-wertigen k-Formen über Einbettungen $\mathcal{A}^k_E(M,\ TN)$ in diesen Rahmen passen (Satz 5). Nach Einführen von Familien von glatten Differentialoperatoren über der Frechét-Mannigfaltigkeit $E(M,\ N)$ der Einbettungen von M in N im zweiten Abschnitt wird im dritten Abschnitt der Zerlegungssatz aus [B2] (s.o.) zitiert und bewiesen (Satz

* Exakte Sequenzen *endlich dimensionaler* Vektorbündel zerfallen immer.
** Hier wurden die Bezeichnungen von [B2] übernommen.

8). Die Untersuchung im folgenden Abschnitt (Satz 9) zeigt, daß diese spezielle Situation der Binz'schen Zerlegung dem oben erwähnten endlich-dimensionalen Fall entspricht, also schon eine Zerlegung auf dem Niveau der Frechétbündel etabliert. Die dadurch ermöglichte Übertragung der kovarianten Ableitung von $TE(M, N)$ (vgl. [B3]) wird im fünften Abschnitt skizziert. Die Holonomie dieser kovarianten Ableitung, bzw. Berry-Phasen (vgl. [Be]) sind Objekte zukünftiger Untersuchungen und erlauben eventuell eine Interpretation im Rahmen der konstitutiven Theorie von [B2]. Die beiden letzten Abschnitte ebthalten die für den Beweis von Satz 9 wesentlichen Tatsachen.

1. Geometrischer Hintergrund

Betrachtet werden

M kompakte, orientierte, zusammenhängende C^∞-Mannigfaltigkeit mit $\partial M = \emptyset$

N orientierte, Riemannsche C^∞-Mannigfaltigkeit

mit $\dim M \leq \dim N$. Wie bekannt ([BSF], [H]), gilt der folgende

SATZ 1. *Die Menge der C^∞-Einbettungen $E(M, N)$ von M im N ist entweder leer oder eine (∞-dimensionale) Riemannsche Frechét-Mannigfaltigkeit.*

Hier wird die Charakterisierung aus [B1] eines *deformierbaren Mediums ohne Microstruktur* nocheinmal nachvollzogen - wenngleich auch aus einem etwas anderen Blickwinkel. Den dafür zugrunde liegenden Rahmen liefert:

GEOMETRISCHE DATEN (GD).

(1) *Eine C^∞-Faserung von Mannigfaltigkeiten $\pi: Z \xrightarrow{X} B$, mit kompakten, endlich-dimensionalen, orientierten Fasern $Z_b := \pi^{-1}(b) \cong X$, die Basis B jedoch eine beliebige (nicht notwendig endlich-dimensionale) Mannigfaltigkeit ist (d.h. eine Familie von Mannigfaltigkeiten $\{ Z_b \mid b \in B \}$).*

(2) *Eine Metrik längs der Fasern, d.h. eine Metrik $g^{Z/B}$ auf dem Fasertangentialbündel $T(Z/B)$ (damit werden die Fasern Riemannsche Mannigfaltigkeiten).*

(3) *Ein Riemannsches Vektorraumbündel $\mathcal{E} \to Z$, so daß $\mathcal{E}|_{Z_b} := \mathcal{E}_b$ ein Riemannsches Vektorbündel über Z_b für alle $b \in B$ ist (d.h. eine Familie von Vektorraumbündeln $\{ \mathcal{E}_b \mid b \in B \}$).*

(4) *Ein dazu 'assoziiertes' Frechét-Bündel $\pi_*\mathcal{E} \to B$ mit Faser $(\pi_*\mathcal{E})_b = \Gamma(Z_b, \mathcal{E}_b)$.*

BEMERKUNGEN:

(1) Eine C^∞-Faserung π von Z über B heißt, daß sowohl Z als auch B glatte Mannigfaltigkeiten sind, π glatt ist und für kleine offene Umgebungen $U \subset B$ das Urbild $\pi^{-1}(U)$ *diffeomorph* zu $U \times X$ ist. Zusammengeklebt werden diese lokalen Produkte mittels orientierungserhaltenden Diffeomorphismen von X.

(2) Ein *glatter* Schnitt s in $\pi_*\mathcal{E}$ über B ist definiert als glatter Schnitt in $\mathcal{E}$ über Z, d.h. $\Gamma(B,\ \pi_*\mathcal{E}) := \Gamma(Z,\ \mathcal{E})$.

(3) Da jedes Z_b kompakt und orientiert ist, trägt $\pi_*\mathcal{E}$ eine *kanonische* Fasermetrik: Seien $v^b,\ w^b\ \in\ (\pi_*\mathcal{E})_b = \Gamma(Z_b,\ \mathcal{E}_b)$, dann definiert

$$< v^b,\ w^b >:= \int_{Z_b} g^{\mathcal{E}_b}(v^b,\ w^b)\, vol(Z_b) \tag{2}$$

eine kanonische Fasermetrik.

Seien nun M, N wie oben, $E(M,\ N)$ nicht leer und $\bigcup_{j\in E(M,\ N)} j(M)$ die Vereinigung aller Bildmannigfaltigkeiten. Dann gelten

PROPOSITION 1. *Die natürliche Projektion* $\pi\colon \bigcup_{j\in E(M,\ N)} j(M) \xrightarrow{M} E(M,\ N)$ *definiert eine C^∞-Faserung von Mannigfaltigkeiten im Sinne von (GD (1)).*

BEWEIS. Denn die *Auswertungs-Abbildung*

$$ev\colon E(M,\ N) \times M \longrightarrow \bigcup_{j\in E(M,\ N)} j(M) \tag{3}$$

ist glatt da $\partial M = \emptyset$ (vgl. [Mi], Cor. 11.7) und liefert somit eine globale Trivialisierung von π. Nach Voraussetzung sind die Fasern $\pi^{-1}(j) \cong M$ kompakt, endlich-dimensional, orientiert.

□

BEMERKUNG. Auf ähnliche Weise werden tautologische Bündel über Grassmann-Mannigfaltigkeiten konstruiert.

PROPOSITION 2. *Die C^∞-Faserung π besitzt eine Fasermetrik im Sinne von (GD (2)).*

BEWEIS. Diese wird durch die Riemannsche Metrik der 'Gast'-Mannigfaltigkeit N induziert.

□

Bezeichne $\bigwedge^k T^*M \xrightarrow{pr} M$ das *k-te äußere Algebrenbündel* und $j^*TN \to M$ das mit Hilfe der Einbettung $j \in E(M,\ N)$ auf M zurückgezogene Tangentialbündel von N. Definiert man $\tau := j \circ pr$, so ist $\bigwedge^k T^*M \otimes j^*TN \xrightarrow{\tau} j(M)$ zusammen mit der induzierten Fasermetrik für jedes $j \in E(M,\ N)$ ein Riemannsches Vektorbündel.

BEMERKUNG. Da für alle $j \in E(M,\ N)$ das Bild $j(M)$ diffeomorph zu M ist, gilt

$$\Gamma(j(M),\ \bigwedge^k T^*M \otimes j^*TN) \cong \Gamma(M,\ \bigwedge^k T^*M \otimes j^*TN). \tag{4}$$

Sei $\mathcal{E}^{(k)} := \bigcup_{j\in E(M,\ N)} \bigwedge^k T^*M \otimes j^*TN$. Offensichtlich existiert eine natürliche Projektion von $\mathcal{E}^{(k)}$ auf die gefaserte Mannigfaltigkeit $\bigcup_{j\in E(M,\ N)} j(M)$. Es gilt sogar

PROPOSITION 3. *Für jedes* $k \leq \dim M$ *definiert* $\mathcal{E}^{(k)} \to \bigcup_{j \in E(M,\, N)} j(M)$ *ein Riemannsches Vektorbündel im Sinne von (GD (3)).*

BEWEIS. Benützt man die durch die Auswertungsabbildung ev gegebene globale Trivialisierung $\bigcup_{j \in E(M,\, N)} \cong E(M,\, N) \times M$ (vgl. Prop.1), so kann man äquivalent $\mathcal{E}^{(k)}$ über $E(M,\, N) \times M$ betrachten.
Sei nun $V \subset E(M,\, N)$ offen und diffeomorph zu einer offenen Teilmenge $\bar{V}$ des unterliegenden Frechét-Raums, $U \subset M$ offen und so gewählt, daß für alle $j \in V$ die auf U eingeschränkten Bündel $\bigwedge^k T^*M \otimes j^*TN|_U$ trivial sind, d.h. es gibt Diffeomorphismen

$$\bigwedge^k T^*M \otimes j^*TN|_U \cong U \times F_j. \tag{5}$$

Da $V \cong \bar{V}$ und $\bar{V}$ konvex, ist auch V konvex. Somit sind alle paarweise verschiedenen $j,\, \hat{j} \in V$ homotop - die 'Verbindungsstrecke' $tj + (1-t)\hat{j},\ t \in [\,0,\ 1\,]$ liefert eine Homotopie. Die zurückgezogenen Bündel j^*TN und $\hat{j}^*TN$ sind deswegen diffeomorph. Über $U \subset M$ gilt folglich

$$F_j \cong F_{\hat{j}}, \tag{6}$$

also ist $\mathcal{E}^{(k)}$ lokal trivial.
Nach Konstruktion von $\mathcal{E}^{(k)}$ gilt außerdem $\mathcal{E}_j^{(k)} := \mathcal{E}^{(k)}|_{j(M)} = \bigwedge^k T^*M \otimes j^*TN$ und dies ist ein Riemannsches Vektorbündel für alle $j \in E(M,\, N)$ (s.o.).

□

Nach der Bemerkung (S.3) entsprechen sich die Schnitte $\Gamma(j(M),\ \bigwedge^k T^*M \otimes j^*TN)$ und $\Gamma(M,\ \bigwedge^k T^*M \otimes j^*TN) := \Omega^k(M,\ j^*TN)$, die *k-Formen auf M mit Werten in* j^*TN. Sei $\pi_*\mathcal{E}^{(k)}$ definiert durch die Vereinigung $\bigcup_{j \in E(M,\, N)} \Omega^k(M,\ j^*TN)$.

PROPOSITION 4. *Die natürliche Projektion* $\pi_*\mathcal{E}^{(k)} \to E(M,N)$ *definiert ein* ∞*-dimensionales, im Sinne von (GD (4)) zu* $\mathcal{E}^{(k)}$ *'assoziiertes' Frechét-Bündel.*

BEWEIS. Bezeichnet $\Omega^k(M,\ TN) := \bigcup_{f \in C^\infty(M,\, N)} \Omega^k(M,\ f^*TN)$ die k-Formen auf M mit Werten in TN (vgl. [BF]), dann ist

$$\Pi\colon \Omega^k(M,\ TN) \longrightarrow C^\infty(M,\ N) \tag{7}$$

ein Frechét-Bündel ([BF]). Da $\pi_*\mathcal{E}^{(k)}$ das Urbild von $E(M,\ N) \subset C^\infty(M,\ N)$ unter Π ist, ist es selbst ein Frechét-Bündel (vgl. auch [B2]).

□

Zusammenfassend folgt aus den Propositionen 1 bis 4 der

SATZ 5. *Das Tripel von Mannigfaltigkeiten* $\left(E(M,\ N),\ \bigcup_{j \in E(M,N)} j(M),\ \mathcal{E}^{(k)}\right)$ *erfüllt die Geometrischen Daten (GD).*

BEMERKUNG. Das Frechét-Bündel $\pi_*\mathcal{E}^{(0)} := \bigcup_{j\in E(M,N)} \Gamma(M,\ j^*TN)$ ist gerade das Tangentialbündel $TE(M,\ N)$ der Frechét-Mannigfaltigkeit der Einbettungen $E(M,\ N)$. Die darauf induzierte kanonische Fasermetrik $<\ ,\ >^{(0)}$ (vgl. (1)) ist identisch mit der in [B2] konstruierten Riemannschen Metrik $\mathcal{G}$.

2. Familien von Differentialoperatoren über $E(M,\ N)$

Sei $D^{k,l} := \{D^{k,l}(j) \colon \Gamma(M,\ \bigwedge^k T^*M \otimes j^*TN) \to \Gamma(M,\ \bigwedge^l T^*M \otimes j^*TN) \mid j \in E(M,\ N)\}$ eine *(Freché-) glatte* Familie von linearen Differentialoperatoren, d.h. in lokalen Trivialisierungen der Bündel $\{\bigwedge^k T^*M \otimes j^*TN\}$ und $\{\bigwedge^l T^*M \otimes j^*TN\}$ hängen die Koefizienten $A_i(j,x)$ von $\{D^{k,l}(j)|_U = \sum_i A_i(j,x)\frac{\partial^i}{\partial x^i}\}$ glatt * von j ab. Beispiele sind:

- Die Familie $D^{0.1} := \{\nabla(j) \mid j \in E(M,N)\}$ der vom Levi-Civita Zusammenhang ∇^{TN} von TN auf den Bündeln $\{j^*TN\}$ induzierten *kovarianten Ableitungen* $\nabla(j) := j^*\nabla^{TN}$.
- Die Familie $D^{k,k+1} := \{\ d^{\nabla(j)} \mid j \in E(M,\ N)\ \}$ der *äußeren kovarianten Ableitungen* (zur Konstruktion von $d^{\nabla(j)}$ vgl. [A], §3.2).
- Die Familie $\Delta^{(0)} := \{\ \Delta(j) \mid j \in E(M,\ N)\ \}$ der *horizontalen* (oder auch *Bochner-*) Laplace-Operatoren $\Delta(j) := \nabla(j)^*\nabla(j) \colon \Gamma(M,\ j^*TN) \to \Gamma(M;\ j^*TN)$ ($\nabla(j)^*$ ist der zu $\nabla(j)$ bezüglich der Metrik (0) *formal adjungierte* Operator, vgl. z.B. [M]).

Eine zweckmäßige Beschreibung solcher glatten Familien von Operatoren liefert die

PROPOSITION 6. *Jede (Frechét-) glatte Familie von Differentialoperatoren $D^{k,l}$ definiert (eindeutig) einen C^∞- Frechét-Bündelhomomorphismus $\pi_*\mathcal{E}^{(k)} \xrightarrow{D^{k,l}} \pi_*\mathcal{E}^{(l)}$ über $E(M,\ N)$.*

BEWEIS. Denn nach Definition der Familie $D^{k,l}$ gilt fasernweise

$$(\pi_*\mathcal{E}^{(k)})_j = \Gamma(M,\ \bigwedge^k T^*M \otimes j^*TN) \xrightarrow{D^{k,l}_{(j)}} \Gamma(M,\ \bigwedge^l T^*M \otimes j^*TN) = (\pi_*\mathcal{E}^{(l)})_j \qquad (8)$$

und $\{\ D^{k,l}(j)\ \}$ ist nach Voraussetzung glatt in j.

□

BEMERKUNG. Offensichtlich vertauscht jede glatte Familie $D^{k,l}$ mit allen (Frechét-) glatten Funktionen auf $E(M,\ N)$.

Somit kann man eine glatte Familie von Differentialoperatoren $D^{k,l}$ auffassen als glatten Schnitt des Homomorphismenbündels $\mathrm{Hom}(\pi_*\mathcal{E}^{(k)},\ \pi_*\mathcal{E}^{(l)})$ über $E(M,\ N)$.

Sei $A^{k,l} \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\pi_*\mathcal{E}^{(k)},\ \pi_*\mathcal{E}^{(l)}))$ ein beliebiger glatter Schnitt. Genau wie im endlichdimensionalen Fall ist dann der Kern von $A^{k,l}$ nicht notwendigerweise ein Frechét-Bündel.

* Und selbstverständlich glatt in den $\{x^i\}$.

Hat $A^{k,l}$ jedoch diese Eigenschaft, d.h. ist ker $A^{k,l} \subset \pi_* \mathcal{E}^{(k)}$ ein glattes Frechét-Bündel, so bezeichnet man $A^{k,l}$ als *strikten* Frechét-Bündelhomomorphismus **.

3. Der Zerlegungssatz

Sei nun E ein *endlich*-dimensionales, Riemannsches Vektorbündel über M mit kovarianter Ableitung $\nabla^E : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$. Dann gilt die folgende

PROPOSITION 7. *Für jedes $a \in \Gamma(T^*M \otimes E) = \Omega^1(M,\ E)$ mit $a \notin \ker(\nabla^E)^*$ existiert eindeutig ein $h \in \Omega^0(M, E)$ mit $h \perp \ker\nabla^E$, so daß die Zerlegung $a = \nabla^E h + b$ mit $b \in \ker(\nabla^E)^*$ gilt.*

BEWEIS. Zu zeigen ist, daß für jedes $s = (\nabla^E)^* a$ die Gleichung

$$\triangle h = s \tag{9}$$

eindeutige Lösungen $h \notin \ker\nabla$ besitzt. Dazu die folgende Erinnerung:

Der horizontale Laplace-Operator $\triangle := (\nabla^E)^* \nabla^E$ ist ein *elliptischer* Operator. Deswegen gilt für ihn die *'Fredholmalternative'*:

1) Der Kern von $\triangle$ ist endlich-dimensional.
2) Ein $s \in \Omega^0(M, E)$ ist genau dann im Bild von $\triangle$, wenn für alle $t \in \ker\triangle$ das L^2-innere Produkt $<\ s,\ t\ >$ verschwindet.

Es gilt $\ker\triangle = \ker((\nabla^E)^* \nabla^E) = \ker\nabla^E$. Sei also $t \in \ker\nabla^E$. Dann gilt

$$<\ s,\ t\ >=<\ (\nabla^E)^* a,\ t\ >=<\ a,\ \nabla t\ >= 0.$$

Also existieren Lösungen von (7), die sich offensichtlich um Elemente aus $\ker\triangle \subset \Omega^0(M, E)$ unterscheiden.

□

Eine unmittelbare Folge ist der zuerst in [B2] erwähnte und dort im Zusammenhang mit Konstitutiven Gesetzen der Elastititätstheorie physikalisch interpretierte Zerlegungssatz:

SATZ 8. (BINZ [B2]) *Jedes $\alpha \in \Gamma(\pi_* \mathcal{E}^{(0)})$ mit $\alpha(j) \notin \ker\nabla(j)^*$ für alle $j \in E(M,\ N)$ besitzt einen eindeutigen 'pseudo'-exakten Anteil, d.h. es existiert eindeutig ein $\mathcal{H} \in \Gamma(\pi_* \mathcal{E}^{(0)})$ mit $\mathcal{H}(j) \notin \ker\nabla(j)$ für $\forall j \in E(M,\ N)$, so daß die Zerlegung $\alpha = D^{0,1}\mathcal{H} + \beta$ mit $\beta \in \pi_* \mathcal{E}^{(1)}$ wobei $\beta(j) \in \ker\nabla(j)^*$ für alle $j \in E(M,\ N)$ gilt.*

BEWEIS. Aus Proposition 7 folgt die Existenz und Eindeutigkeit von $\mathcal{H}(j) \in \Omega^0(M,\ j^*TN)$ für jedes $j \in E(M,\ N)$. Deswegen gibt es eine Abbildung

$$\mathcal{H} : E(M,\ N) \longrightarrow \pi_* \mathcal{E}^{(0)}. \tag{10}$$

** Diese Bezeichnung entspricht derjenigen im endlich-dimensionalen Fall, vgl. [At].

Da dieses $\mathcal{H}$ die Gleichung $\Delta^{(0)}\mathcal{H} = D^{1,0}\alpha$ erfüllt und sowohl α ein (Frechét-) glatter Schnitt des Frechét-Bündels $\pi_*\mathcal{E}^{(1)}$ über $E(M,\ N)$ ist, als auch $\Delta^{(0)} := \{\ \Delta(j)\ \}$ und $D^{1,0} := \{\ \nabla(j)^*\ \}$ glatte Frechét-Bündelhomomorphismen sind (vgl. Proposition 6), ist auch $\mathcal{H}$ (Frechét-) glatt.

□

4. Die korrespondierende Zerlegung des Bündels $\pi_*\mathcal{E}^{(1)}$

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß die Zerlegung der Schnitte $\Gamma(\pi_*\mathcal{E}^{(1)})$ äquivalent als eine Zerlegung des Frechétbündels $\pi_*\mathcal{E}^{(1)}$ verstanden werden kann. Genauer:

SATZ 9. *Sei $D^{1,0}\colon \pi_*\mathcal{E}^{(1)} \to \pi_*\mathcal{E}^{(0)}$ der durch die glatte Familie $\{\ \nabla(j)^* := (j^*\nabla^{TN})^*\}$ definierte C^∞ -Frechét-Bündelmorphismus. Dann gilt*

a) Der Kern ker $D^{1,0} := \bigcup_{j\in E(M,N)}$ ker $(j^*\nabla^{TN})^*$ ist ein Frechétbündel.

b) Das Bild Im $D^{1,0} := \bigcup_{j\in E(M,N)}$ Im $(j^*\nabla^{TN})^*$ ist ein Frechét-Unterbündel von $\pi_*\mathcal{E}^{(0)}$.

c) Die exakte Sequenz von Frechétbündeln über $E(M,\ N)$

$$0 \longrightarrow \mathit{ker}\ D^{1,0} \hookrightarrow \pi_*\mathcal{E}^{(1)} \xrightarrow{D^{1,0}} \mathit{Im}\ D^{1,0} \longrightarrow 0$$

zerfällt.

BEWEIS. *a)* Sei $V \subset E(M,\ N)$ offen und diffeomorph zu einer offenen, konvexen Teilmenge $\tilde{V}$ des unterliegenden Frechét-Raums. Sind $j_1,\ j_2 \in V$ verschiedene Einbettungen, so sind sie homotop (vgl. Proposition 3.). Die zurückgezogenen Bündel j_1^*TN und j_2^*TN sind deswegen diffeomorph. Bezeichne $f\colon j_2^*TN \xrightarrow{\cong} j_1^*TN$ diesen Diffeomorphismus. Damit gilt $\iota_{j_2} = \iota_{j_1} \circ f$ * und deswegen

$$j_2^*\nabla^{TN} := \iota_{j_2}^*\nabla^{TN} = (\iota_{j_1} \circ f)^*\nabla^{TN} = f^*(\iota_{j_1}^*\nabla^{TN}) =: f^*(j_1^*\nabla^{TN}). \tag{11}$$

Wegen Proposition A5 kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Omega^0(M,\ j_1^*TN) \arrow[d, "f^*"] & \Omega^1(M,\ j_1^*TN) \arrow[l, "(j_1^*\nabla^{TN})^*"'] \arrow[d, "f^*"] \\ \Omega^0(M,\ j_2^*TN) & \Omega^1(M,\ j_2^*TN) \arrow[l, "(j_2^*\nabla^{TN})^*"'] \end{tikzcd} \tag{12}$$

Folglich gilt $\ker(j_1^*\nabla^{TN})^* \cong \ker(j_2^*\nabla^{TN})^*$ (Korollar A6), d.h. $\ker D^{1,0}$ ist lokal trivial.

b) Für jedes $j \in E(M,\ N)$ ist der durch die kanonische Zerlegung

$$\Omega^1(M,\ j^*TN) \xrightarrow{pr} \Omega^1(M,\ j^*TN)/\ker\ \nabla(j)^* \xrightarrow{\widetilde{\nabla(j)}^*} \mathrm{Im}\ \nabla(j)^* \hookrightarrow \Omega^0(M,\ j^*TN)$$

definierte lineare Differentialoperator $\widetilde{\nabla(j)}^*$ bijektiv und stetig.

---

* Hier bezeichnet ι_{j_i} die natürliche Abbildung $j_i^*TN \to TN$.

Sei $i\colon \mathrm{Im}\ \nabla(j)^* \hookrightarrow (\ker\ \nabla(j))^\perp$ die im Beweis von Proposition 7 implizit definierte stetige Abbildung $s \longmapsto h$ mit $\Delta(j)\ h = s$ und $G(j)\colon \ker\ \Delta(j)^\perp \xrightarrow{\cong} \ker\ \Delta(j)^\perp$ der Greensche Operator zu $\Delta(j)$ (vgl. Anhang II). Dann ist die durch die Verkettung

$$\mathrm{Im}\ \nabla(j)^* \overset{i}{\hookrightarrow} (\ker\ \Delta(j))^\perp \xrightarrow{G(j)} (\ker\ \Delta(j))^\perp \xrightarrow{\nabla(j)} \Omega^1(M,\ j^*TN) \xrightarrow{pr} \Omega^1(M,\ j^*TN)/\ker\ \nabla(j)^*$$

definierte Abbildung $\widetilde{G}(j)$ linear, stetig und invers zu $\widetilde{\nabla(j)}^*$. Deswegen ist $\mathrm{Im}\ \nabla(j)^*$ abgeschlossen in $\Omega^0(M,\ j^*TN)$ und somit ein Frechét-Unterraum für alle $j \in E(M,\ N)$. Die glatte Familie $\{\ \widetilde{\nabla(j)}^*\ \}$ definiert deswegen einen C^∞-Frechétbündel-Isomorphismus

$$\pi_*\mathcal{E}^{(1)}/\ker\ D^{1,0} \cong \mathrm{Im}\ D^{1,0}.$$

c) Denn der durch die Familie $\{\ \widetilde{G}(j)\ \}$ definierte C^∞-Frechétbündelmorphismus

$$\widetilde{G} : \mathrm{Im}\ D^{1,0} \longrightarrow \pi_*\mathcal{E}^{(1)}$$

ist ein Rechtsinverses von $D^{1,0}$ (vgl. *b*)) und spaltet somit die Sequenz.

□

Eine äquivalente Formulierung von Satz 9 c) ist das

COROLLAR 10. *Es gibt einen C^∞-Frechétbündel- Isomorphismus*

$$\pi_*\mathcal{E}^{(1)} \ \cong\ \ker D^{1,0}\ \times\ \mathrm{Im}\ D^{1,0}. \tag{13}$$

5. Ausblick und offene Fragen

Auf einer endlich dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit $\bar{M}$ ist der Levi-Civita Zusammenhang ∇ der einzige Zusammenhang auf $T\bar{M}$, welcher torsionsfrei und mit der Riemannschen Metrik $<\ ,\ >$ verträglich ist. Äquivalent gilt für ihn die *'Levi-Civita Formel'*

$$\begin{aligned} 2 < \nabla_X Y,\ Z > &= X < Y,\ Z > + Y < X,\ Z > - Z < X,\ Y > \\ &\quad - < X,\ [Y,\ Z] > - < Y,\ [X,\ Z] > + < Z,\ [Y,\ X] > \end{aligned} \tag{14}$$

für Vektorfelder $X,\ Y,\ Z\ \in\ \Gamma(T\bar{M})$. Die rechte Seite von (14) definiert ein C^∞-lineares Funktional in Z und die Existenz und Eindeutigkeit von $\nabla_X Y$ folgt somit aus dem durch die Riemannsche Metrik gegebenen Isomorphismus $T\bar{M} \cong T\bar{M}^*$. Dies überträgt sich auf eine unendlich-dimensionale Situation nur, wenn jeder Tangentialraum bzgl. der Riemannschen Metrik vollständig ist *.

* Denn in einem Hilbertraum gilt der Riesz'sche Darstellungssatz.

Die Tangentialräume $T_jE(M,\ N) = \pi_*\mathcal{E}_j^{(0)}$ der Frechétmannigfaltigkeit $E(M,\ N)$ der Einbettungen sind jedoch *nicht* vollständig bzgl. der L^2-Fasermetrik $<\ ,\ >^{(0)}$. Durch Verallgemeinerung des in [B3] behandelten Spezialfalles $N = \mathbb{R}^n$, $\dim M = n-1$ kann der Levi-Civita Zusammenhang ∇ explizit angegeben werden (vgl. [Sch], Theorem 3.3). Dieser induziert auch auf Im $D^{1,0}$ - als Unterbündel von $\pi_*\mathcal{E}^{(0)}$, vgl. Satz 9 - einen Zusammenhang ∇. Versieht man nun noch ker $D^{1,0}$ mit einem Zusammenhang ∇^{ker} **, so gilt nach Konstruktion der

SATZ 11. *Der Operator* $\nabla^{(1)} = \nabla^{\mathrm{ker}} \times \nabla$ *definiert eine kovariante Ableitung auf dem Frechétbündel* $\pi_*\mathcal{E}^{(1)} \cong$ *ker* $D^{1,0} \times$ *Im* $D^{1,0}$.

Interessant wäre nun die Beantwortung der folgenden Fragen:

- Läßt sich die Holonomiegruppe $H(\nabla^{(1)})$ dieses Zusammenhangs - z.B. für $E(M,\ N)$ zusammenhängend - als abgeschlossene Untergruppe von $\mathcal{GL}(\Omega^1(M, j^*TN))$, der Strukturgruppe des Frechétbündels $\pi_*\mathcal{E}^{(1)}$, angeben ?
- Wegen der speziellen Gestallt von $\nabla^{(1)}$ gilt $H(\nabla^{(1)}) = H(\nabla^{ker}) \times H(\nabla)$. Läßt sich $H(\nabla)$ als abgeschlossene Untergruppe der Frechét-Liegruppe $\mathcal{GL}(\Omega^0(M,\ j^*TN))$ angeben ? Vielleicht in Spezialfällen ?
- Kann $H(\nabla)$ im Rahmen der konstitutiven Theorie von [B2] interpretiert werden - eventuell als Änderung der Materialeigenschaften eines glatt deformierbaren Mediums bei "Überdehnung" ?
- Vervollständigt man $\pi_*\mathcal{E}^{(0)}$ fasernweise in der Fasermetrik $<\ ,\ >^{(0)}$, so wird das Hilbert-bündel $\mathcal{H}(\pi_*\mathcal{E}^{(0)})$ trivial (denn nach einem Satz von Kuiper ist zugehörige Strukturgruppe zusammenziehbar). Wie sieht hier die Holonomiegruppe des entsprechenden Levi-Civita Zusammenhangs im Vergleich zum Frechét-Fall aus ?

** Dies kann man z.B. durch Wahl des Horizontalbündels als Vereinigung der Orthokomplemente bzgl. $<\ ,\ >$ der Tangentialrüme an jede Faser tun.

6. Anhang I: Einige nützliche Diagramme

Hier werden die in Kapitel 4 benötigten Hilfsmittel zusammengestellt und teilweise bewiesen. Es werden Bezeichnungen wie in [A] §1 - §3 benutzt und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.

1.1.1 Proposition: I.1. *Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit innerem Produkt $\hat{g}$ und $f \in Aut(V)$. Ist $g := f^*\hat{g}$ das mit f zurückgezogene innere Produkt und sind $\hat{*}, * : \bigwedge^k V \to \bigwedge^{n-k} V$ die zugehörigen 'Hodge-Operatoren', so ist das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^k V & \xrightarrow{*} & \bigwedge^{n-k} V \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \bigwedge^k V & \xrightarrow{\hat{*}} & \bigwedge^{n-k} V \end{array} \tag{A1}$$

für alle $0 \leq k \leq n$ kommutativ.

Beweis. Sei $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ eine bezüglich g orthonormale Basis von V. Dann sind die Bilder $\{fe_1, fe_2 \ldots fe_n\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich $\hat{g}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} *e_1 &= \pm e_2 \wedge e_3 \wedge \ldots \wedge e_n \\ \hat{*}(fe_1) &= \pm fe_2 \wedge fe_3 \wedge \ldots \wedge fe_n = \pm f(e_2 \wedge \ldots \wedge e_n,) \end{aligned}$$

deswegen also $\hat{*}fe_1 = f * e_1$.

□

Offensichtlich überträgt sich diese Proposition auf Formen auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M. Ist E ein Vektorbündel über M, so kann man auch Formen auf M mit Werten in diesem Vektorbündel $\Omega^*(M, E)$ betrachten. Ist $h: TM \to TM$ ein Automorphismus, sind g, $\hat{g}$ Riemannsche Metriken mit $g = h^*\hat{g}$ und $*$, $\hat{*}$ die auf $\Omega^*(M, E)$ erweiterten zugehörigen Hodge-Operatoren * so gilt entsprechend die

Proposition I.2. *Ist $h^*: T^*M \to T^*M$ die zu $h \in AutTM$ duale Abbildung, so kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k(M;\, E) & \xrightarrow{\hat{*}} & \Omega^{n-k}(M;\, E) \\ \downarrow{\scriptstyle h^*} & & \downarrow{\scriptstyle h^*} \\ \Omega^k(M;\, E) & \xrightarrow{*} & \Omega^{n-k}(M;\, E) \end{array} \tag{A2}$$

für $0 \leq k \leq n$.

* d.h. $* = * \otimes id_E$ bzw. $\hat{*} = \hat{*} \otimes id_E$.

Sei nun $f = (f, \widetilde{f}) \in \mathrm{Aut}(E)$. Dabei ist $\widetilde{f} \in \mathrm{Diff}(M)$ der von f induzierte Diffeomorphismus auf M, der das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_E} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_E} \\ M & \xrightarrow{\widetilde{f}} & M \end{array} \qquad \text{kommutativ macht.}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} f^* : \Omega^q(M; E) &\longrightarrow \Omega^q(M; E) \\ \phi &\longmapsto f^*\phi \end{aligned}$$

mit

$$f^*\phi(X_1, \cdots X_q) := f^{-1} \circ \phi(T\widetilde{f}(X_1), \cdots T\widetilde{f}(X_q)). \tag{A3}$$

Die Wirkung eines Automorphismus $f \in \mathrm{Aut}(E)$ auf die äußere kovariante Ableitung d^{∇^E} (vgl. [A]) beschreibt die folgende

PROPOSITION I.3. *Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k(M;\ E) & \xrightarrow{d^{\nabla^E}} & \Omega^{k+1}(M;\ E) \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ \Omega^k(M;\ E) & \xrightarrow{d^{f^*\nabla^E}} & \Omega^{k+1}(M;\ E) \end{array} \tag{A4}$$

ist für $0 \leq k \leq n$ kommutativ.

BEWEIS. Vgl. Satz 3.3.1 in [A], §3.3 .

□

Bemerkenswerter Weise ist dies unabhängig von der Riemannschen Struktur auf M, vgl. dazu die Darstellung von d^{∇^E} bzw. $d^{f^*\nabla^E}$ in [A], §3.2 .

KOROLLAR I.4. *Für die Kerne der Differentialoperatoren d^{∇^E} und $d^{f^*\nabla^E}$ gilt*

$$ker d^{\nabla^E} \cong ker d^{f^*\nabla^E}. \tag{A5}$$

Für die bezüglich der Riemannschen Metriken $\hat{g}$, g * zu d^{∇^E} bzw. $d^{f^*\nabla^E}$ formal adjungierte Operatoren

$$\begin{aligned} \delta^{\nabla^E} &:= (-1)^{n(k+1)+1} \hat{*}\, d^{\nabla^E}\, \hat{*} : \Omega^k(M,\ E) \longrightarrow \Omega^{(k-1)}(M,\ E) \\ \delta^{f^*\nabla^E} &:= (-1)^{n(k+1)+1} *\, d^{f^*\nabla^E} * : \Omega^k(M,\ E) \longrightarrow \Omega^{(k-1)}(M,\ E) \end{aligned} \tag{A6}$$

* Hier ist $g = T\widetilde{f}^*\hat{g}$.

folgt aus den Propositionen I.2 und I.3 sofort

PROPOSITION I.5. *Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k(M;\, E) & \overset{\delta^{\nabla^E}}{\longleftarrow} & \Omega^{k+1}(M;\, E) \\ \big\downarrow f^* & & \big\downarrow f^* \\ \Omega^k(M;\, E) & \overset{\delta^{f^*\nabla^E}}{\longleftarrow} & \Omega^{k+1}(M;\, E) \end{array} \tag{A7}$$

ist für $0 \leq k \leq n$ kommutativ.

KOROLLAR I.6. *Für die Kerne der Differentialoperatoren δ^{∇^E} und $\delta^{f^*\nabla^E}$ gilt*

$$ker\delta^{\nabla^E} \cong ker\delta^{f^*\nabla^E}. \tag{A8}$$

7. Anhang II: Zum Greenschen Operator

Sei $\triangle(j) := \nabla(j)^*\nabla(j)\colon \Gamma(M,\, j^*TN) \to \Gamma(M,\, j^*TN)$ der horizontale Laplace-Operator zu einem $j \in E(M,\, N)$ (vgl. Abschnitt 2) und bezeichne $\sigma(\triangle(j))$ das Spektrum von $\triangle(j)$. Ist $f(j)\colon \sigma(\triangle(j) \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so läßt sich ein linearer Operator $F(\triangle(j))$ auf dem Frechétraum $\Gamma(M,\, j^*TN)$ definieren: $F(\triangle(j))$ ist derjenige Operator, welcher durch Multiplikation von $f(\lambda)$ auf dem Eigenraum zum Eigenwert λ von $\triangle(j)$ operiert. Offensichtlich gilt die

PROPOSITION II.1. *Sei $\triangle(j)$ ein horizontaler Laplace-Operator und bezeichne $\sigma(\triangle(j))$ sein Spektrum. Dann gilt:*

a) Die durch $f \mapsto F(\triangle(j))$ definierte Abbildung von den beschränkten Funktionen auf $\sigma(\triangle(j))$ nach den linearen Operatoren auf $\Gamma(M,\, j^*TN)$ ist ein Homomorphismus von Ringen.

b) Falls $\triangle(j)$ mit einem Operator $A \in Lin(j^*TN)$ kommutiert, so kommutiert auch $F(\triangle(j))$ mit A.

c) Der Operator $F(\triangle(j))$ ist stetig.

Sei nun die Funktion $g\colon \sigma(\triangle(j)) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(\lambda) := \begin{cases} \lambda^{-1} & \text{falls } \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{falls } \lambda = 0. \end{cases}$$

Dann ist g beschränkt auf $\sigma(\triangle(j))$. Der durch g definierte stetige Operator $G(\triangle(j))$ heißt *Greenscher Operator* und ist 'invers' zu $\triangle(j)$.

Literatur

[A] T. ACKERMANN, *Modulräume über selbst-dualen 4-Mannigfaltigkeiten,* Diplomarbeit, Fak. für Mathematik, Ruprecht-Karls Universität Heidelberg, (1989)

[At] M. ATIYAH, *K-Theory,* Benjamin-Cummings

[B1] E. BINZ, *Global Differential Geometric Methods in Elasticity and Hydrodynamics,* Preprint Mannheim, (1991)

[B2] E. BINZ, *On the Irredundant Part of the First Piola-Kirchhoff Stress Tensor* Preprint Mannheim, (1992)

[B3] E. BINZ, *Two natural metrics and their covariant derivatives on a manifold of embeddings,* Mh. Math. **89**, (1980)

[Be] M. BERRY, *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes,* Proc. Roy. Soc. London **A 392**, (1984)

[BF] E. BINZ - H. FISCHER, *One Forms on Spaces of Embeddings,* Preprint Mannheim

[BP] E. BINZ - R. PFERSCHY, *The Dirac Operator and the Change of the Metric,* C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **V**, (1983)

[BSF] E. BINZ - J. SNIATYCKI - H. FISCHER, *Geometry of Classical Fields,* Math. Studies 154, North-Holland Verlag, (1988) Analysis,Benjamin, New York, (1968)

[G] J. GUTKNECHT, *Die C^∞_Γ-Struktur auf der Diffeomorphismengruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit,* Dissertation, ETH Zürich, (1977)

[L] S. LANG, *Differential Manifolds,* Springer, (1972)

[Mi] P. MICHOR, *Manifolds of differentiable mappings,* Shiva (1980)

[Sch] U. SCHÄPER, *Geometry of loop spaces. I Kaluza-Klein type point of view,* Freib. Preprint

(1991)

Thomas Ackermann
Fak. f. Mathematik u.Informatik
der Universetät Mannheim, A5
6800 Mannheim