Nr 158

Kapitel 18
Berechnung einiger Orbitalintegrale zu singulären, halbeinfachen Elementen aus einem echten Levifaktor von $GSp(4)$

von
Michael Schröder

Universität Mannheim
November 1992

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 18 Berechnung einiger Orbitalintegrale zu singulären, halbeinfachen Elementen aus einem echten Levifaktor von $GSp(4)$

Seien im folgenden F ein nichtarchimedischer lokaler Körper mit π als Ortsuniformisierender. Gelte $F = \mathbb{Q}_2$, wenn $\mathrm{ord}_F 2 > 0$ ist. Seien weiter M einer der Standardlevifaktoren $A = T_{split}$, $L(\alpha)$, $L(\beta)$ von $G = GSp(4)$, K die maximalkompakte Teilgruppe $GSp(4)(\mathcal{O}_F)$ und s ein F-rationales, singuläres, halbeinfaches Element aus M. Die Gruppe M sei darüberhinaus der kleinste Standardlevifaktor von G, der s enthält. Im folgenden schreiben wir wieder vereinfachend H für die F-rationalen Punkte einer über F definierten algebraischen Gruppe H. Ist L einer der Standardlevifaktoren von G, der M enthält, dann soll im folgenden das Orbitalintegral

$$(18.1) \qquad I_L(f)(s) = \int_{N_L} \int_{L_s \backslash L} f(m^{-1} sm.n) \frac{dm}{dh}\, dn$$

berechnet werden. Dabei seien die Maße wie in Kapitel 12 und 16 beschrieben und f sei der als die charakteristische Funktion des Doppelkosets

$$(18.2) \qquad K \cdot \mathrm{diag}(\pi^{r_1}, \pi^{r_2}, \pi^{r_0 - r_1}, \pi^{r_0 - r_2}) \cdot K \qquad \text{mit} \qquad 0 \leq \frac{r_0}{2} \leq r_1 \leq r_2 \leq r_0.$$

gegebene Heckeoperator $h(r_0, r_1, r_2)$ auf G. Werden Referenzen auf Kapitel 17 gemacht, gelte zusätzlich $f = T(a)$ mit a in $\mathcal{O}_F$.
Das Integral differiert von (17.2.1) um den bereits in Kapitel 17 bestimmten, von Null verschiedenen Faktor $\sqrt{\delta_L(s)}$. Ist L von A verschieden, setzen wir weiter voraus, daß s ein F-elliptisches Element in L ist, der Zentralisator in L von s also einen modulo dem Zentrum von L anisotropen, über F definierten, maximalen Torus in L enthält. Wegen der Beschreibung von $C_L(s)$ in (2.2) ist dies äquivalent dazu, daß s in einem modulo dem Zentrum von L anisotropen, über F definierten, maximalen Torus von L enthalten ist. Wir diskutieren im folgenden wieder die Fälle, in denen s aus A, $L(\alpha)$ und $L(\beta)$ ist. Sei zunächst

18A s singulär im maximalzerfallenden Torus $A = T_{split}$

Sei $s = \mathrm{diag}(a, b, ca^{-1}, cb^{-1}) = \mathrm{diag}(\gamma, c\gamma^{-1})$ mit a, b, c in F^*. Wir diskutieren die Möglichkeiten von a, b, c. Wie in (2.7) bemerkt ist s genau dann regulär, wenn a, b, ca^{-1}, cb^{-1} paarweise verschieden sind. Folglich ist s genau dann singulär, wenn mindestens zwei dieser Elemente gleich sind. Sind drei dieser Elemente gleich, dann liegt s bereits im Zentrum von G. Deshalb ist $\{a, b, ca^{-1}, cb^{-1}\}$ mindestens zweielementig genau dann, wenn s singulär ist und nicht im Zentrum von G liegt. Wir sagen in diesem Fall s sei vom Typ (k, ℓ) mit $1 \leq k < \ell \leq 4$, wenn die k-te und die ℓ-te Koordinate von s gleich sind. Es fokgt dann

(18.3) Bemerkung: *Ein singuläres Element $s = \mathrm{diag}(a, b, ca^{-1}, cb^{-1})$ liegt entweder im Zentrum von $GSp(4)$ oder zwei seiner Einträge sind gleich und $\{a, b, ca^{-1}, cb^{-1}\}$ ist mindestens zweielementig. In diesem Fall gilt für s genau eine der folgenden Aussagen*

(1) *s ist vom Typ $(1,2)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a = b$ und $c \neq a^2$ sind.*
(2) *s ist vom Typ $(1,4)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $s(\alpha_3)(s) = \mathrm{diag}(a, cb^{-1}, ca^{-1}, b)$ vom Typ $(1,2)$ ist, also $c = ab$ und $c \neq a^2$, $c \neq b^2$ gelten.*
(3) *s ist vom Typ $(2,3)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $s(\alpha_2)(s) = \mathrm{diag}(ca^{-1}, b, a, cb^{-1})$ vom Typ $(1,2)$ ist, also $c = ab$ und $c \neq a^2$, $c \neq b^2$ gelten.*
(4) *s ist vom Typ $(1,3)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $c = a^2$, $c \neq b^2$ und $a \neq b$ gelten.*
(5) *s ist vom Typ $(2,4)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $s(\alpha_1)(s) = \mathrm{diag}(b, a, cb^{-1}, ca^{-1})$ vom Typ $(1,3)$ ist, also $c = b^2$, $c \neq a^2$ und $a \neq b$ gelten.*
(6) *s ist vom Typ $(1,3)$ und $(2,4)$. Dies ist zu $a = -b$ und $c = a^2$ äquivalent.*

In einem nächsten Schritt wollen wir die Zentralisatoren dieser Elemente s in G berechnen.

Wegen der Darstellung der Spiegelungen $s(\alpha_i)$ als innere Automorphismen von G in (1.24) reicht es, die Zentralisatoren in G eines Elementes vom Typ (1,2) und eines Elementes vom Typ (1,3) zu berechnen. Sei zunächst s vom Typ (1,2). Indem man die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} aX & ca^{-1}Y \\ aZ & ca^{-1}W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & c\gamma^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & c\gamma^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX & aY \\ ca^{-1}Z & ca^{-1}W \end{pmatrix}$$

löst, folgt $ca^{-1}Y = aY$ und $ca^{-1}Z = aZ$. Nach Voraussetzung sind a und ca^{-1} verschieden. Daher ist $Y = Z = 0$. Weiter folgt somit $W = d^tX^{-1}$ für d in F^*.
Sei daher $s = \mathrm{diag}(a, b, a, a^2b^{-1})$. Der Ansatz $sX = Xs$ liefert hier

$$\begin{pmatrix} ax_1 & bx_2 & ay_1 & a^2b^{-1}y_2 \\ ax_3 & bx_4 & ay_3 & a^2b^{-1}y_4 \\ az_1 & bz_2 & aw_1 & a^2b^{-1}w_2 \\ az_3 & bz_4 & aw_3 & a^2b^{-1}w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 & ax_2 & ay_1 & ay_2 \\ bx_3 & bx_4 & by_3 & by_4 \\ az_1 & az_2 & aw_1 & aw_2 \\ a^2b^{-1}z_3 & a^2b^{-1}z_4 & a^2b^{-1}w_3 & a^2b^{-1}w_4 \end{pmatrix}$$

Wegen $a \neq b$ sind so x_2, y_2, x_3, y_3, z_2, w_2, z_3, w_3 Null. Für $a \neq -b$, also $a^2b^{-1} \neq b$, sind zusätzlich y_4 und z_4 Null. Für $a = -b$ sind sie beliebig.
Zu berechnen bleiben daher die Bilder unter den jeweiligen Spiegelungen $s(\alpha_i)$ dieser beiden Matrizengruppen. Dazu rechnen wir

$$s(\alpha_3)\left(\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right)\right) = \mathrm{Int}\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}\left(\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} a&0&0&b \\ 0&w&z&0 \\ 0&y&x&0 \\ c&0&0&d \end{pmatrix},$$

$$s(\alpha_2)\left(\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right)\right) = \mathrm{Int}\begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\left(\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} x&0&0&y \\ 0&d&c&0 \\ 0&b&a&0 \\ z&0&0&w \end{pmatrix},$$

$$s(\alpha_1)\begin{pmatrix} a&0&b&0 \\ 0&x&0&y \\ c&0&d&0 \\ 0&z&0&w \end{pmatrix} = \mathrm{Int}\begin{pmatrix} 0&1&&0 \\ 1&0&& \\ &&0&1 \\ 0&&1&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a&0&b&0 \\ 0&x&0&y \\ c&0&d&0 \\ 0&z&0&w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x&0&y&0 \\ 0&a&0&b \\ z&0&w&0 \\ 0&c&0&d \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten somit zusammenfassend das folgende Lemma wegen

$$^t\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{xw - yz}\begin{pmatrix} w & -z \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

(18.4) Lemma: *Für ein Element $s = \mathrm{diag}(a, b, ca^{-1}, cb^{-1})$ aus $A(F)$ gelten folgende Aussagen*

(1) *Ist s vom Typ $(1,2)$, dann besteht der Zentralisator in G von s aus allen Matrizen der Form $\mathrm{diag}(A, c^tA^{-1})$ mit A in $GL(2,F)$ und c in F^*, ist also mit dem Levifaktor $L(\alpha)$ identisch. Insbesondere gelten somit $C_{L(\alpha)}(s) = L(\alpha)$ und $C_{L(\beta)}(s) = A$.*

(2) *Ist s vom Typ $(1,4)$, dann ist der Zentralisator in G von s das Bild unter $s(\alpha_3)$ von $L(\alpha)$, besteht also aus allen Matrizen der Form*

$$s(\alpha_3)(\mathrm{diag}(A, c^tA^{-1})) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & D^{-1}x & -D^{-1}y & 0 \\ 0 & -D^{-1}z & D^{-1}w & 0 \\ z & 0 & 0 & w \end{pmatrix}$$

mit

$$c \text{ in } F^*, \; A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \text{ in } GL(2,F) \text{ und } D = \det A.$$

Insbesondere gelten $C_{L(\alpha)}(s) = A$ und $C_{L(\beta)}(s) = A$.

(3) *Ist s vom Typ $(2,3)$, dann ist der Zentralisator in G von s das Bild unter $s(\alpha_2)$ von $L(\alpha)$, besteht also aus allen Matrizen der Form*

$$s(\alpha_2)\big(\mathrm{diag}(A, c^tA^{-1})\big) = \begin{pmatrix} D^{-1}w & 0 & 0 & -D^{-1}z \\ 0 & w & z & 0 \\ 0 & y & x & 0 \\ -D^{-1}y & 0 & 0 & D^{-1}x \end{pmatrix}$$

mit

$$c \text{ in } F^*,\ A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \text{ in } GL(2,F) \text{ und } D = \det A.$$

Insbesondere gelten $C_{L(\alpha)}(s) = A$ und $C_{L(\beta)}(s) = A$.

(4) *Ist s vom Typ $(1,3)$, dann ist*

$$s(\alpha_1)\Big(L(\beta)\Big) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^{-1}\det(A) \end{pmatrix} : A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,F),\ x \in GL(1,F) \right\}$$

der Zentralisator von s in G. Insbesondere gelten $C_{L(\alpha)}(s) = A$ und $C_{L(\beta)}(s) = A$.

(5) *Ist s vom Typ $(2,4)$, dann ist der Zentralisator von s in G die Gruppe $L(\beta)$, besteht also aus allen Matrizen der Form*

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^{-1}\det A \end{pmatrix} \quad \textit{mit} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,F),\ x \in GL(1,F).$$

Insbesondere gelten $C_{L(\alpha)}(s) = A$ und $C_{L(\beta)}(s) = L(\beta)$.

(6) *Ist s vom Typ $(1,3)$ und $(2,4)$, dann ist der Zentralisator von s in G die Gruppe H, besteht also aus allen Matrizen der Form*

$$[A,B] = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & z & 0 & w \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \text{ und } \det A = \det B \neq 0.$$

Insbesondere gelten $C_{L(\alpha)}(s) = A$ und $C_{L(\beta)}(s) = L(\beta)$.

Wir beginnen jetzt die Integrale $I_L(f)(s)$ zu berechnen. Sei zunächst daran erinnert, daß $\mathcal{A}(f)$ nach (17.5) die Menge aller Matrizen A aus $GL(2,F)$ bezeichnet, so daß

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & c^tA^{-1} \end{pmatrix}$$

für c in F^* und B in $M(2,F)$ im Doppelkoset $f^{-1}(\{1\})$ liegt. In (15.13) hatten wir die Doppelnebenklassen $h_2(c,d) = GL(2,\mathcal{O}_F)\mathrm{diag}(\pi^c, \pi^d)GL(2,\mathcal{O}_F)$ mit $c \leq d$ bestimmt, die in $\mathcal{A}(f)$ auftreten, die also einen nichtleeren Schnitt mit $\mathcal{A}(f)$ haben. Nach (15.14) treten in $\mathcal{A}(T(\pi))$ mit $T(\pi)$ dem Heckeoperator $h(1,1,1)$ genau die Doppelnebenklassen zu $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,1)$ auf. Darüberhinaus hat c in jeder Matrix wie oben die Ordnung Eins. Wir diskutieren zunächst den Fall eines zentralen Elementes s. Dazu bemerken wir, daß das Integral $I_A(f)(s)$ in (17.8) berechnet wurde. Die Integrale $I_{L(\alpha)}(f)(s)$ und $I_{L(\beta)}(f)(s)$ wurden in (17.6) sowie im wesentlichen in (17.7) und (17.8) berechnet. Genauer gilt der

(18.5) Satz: *Sei $s = aE_4$ ein F-rationales Element aus dem Zentrum von $G = GSp(4)$. Für jeden Standardlevifaktor L von G verschwindet das Integral*

$$I_L(f)(s) = \int_{N_L} f(sn)dn$$

nur dann nicht, wenn $|a|_F = \sqrt{|\mu(f)|_F}$ ist. In diesem Fall sei I die Menge aller der Elemente $\xi(i) = \mathrm{diag}(\pi^i, a^2\pi^{-i})$ mit $0 \leq i \leq \mathrm{ord}\, a$, für die $GL(2,\mathcal{O}_F).\xi(i).GL(2,\mathcal{O}_F)$ in $\mathcal{A}(f)$ auftritt. Dann gelten

$$I_{L(\alpha)}(f)(s) = \frac{1}{|a|_F^3}, \qquad I_A(f)(s) = \frac{|I \cap \{\xi(\mathrm{ord}\, a)\}| + |I - \{\xi(\mathrm{ord}\, a)\}| \cdot \mathrm{vol}(U(F))}{|a|_F^3},$$

$$I_{L(\beta)}(f)(s) = \frac{1}{|a|_F^5}\Big(\mathrm{vol}(U(F)) \cdot \sum\nolimits_{\xi \in I - \{\xi(\mathrm{ord}\, a)\}} \frac{1}{||\xi||_\infty} + \frac{|I \cap \{\xi(\mathrm{ord}\, a)|}{|a|_F}\Big).$$

Dabei ist $||\xi||_\infty$ der erste Elementarteiler von ξ. Schließlich verschwindet $I_G(f)(s)$ nur dann nicht, wenn $\xi(\mathrm{ord}\, a)$ in I liegt, also $a.GL(2,\mathcal{O}_F)$ in $\mathcal{A}(f)$ auftritt. In diesem Fall ist $I_G(f)(s) = 1$.

Wegen $I_G(f)(s) = f(s)$ ist die letzte Aussage des Satzes klar. Nach (17.6) ist weiter $\int_{N(\alpha)} f(sn)dn = V(\mathrm{ord}\, a, \mathrm{ord}\, a) = q^{3\mathrm{ord}\, a} = |a^{-1}|_F^3$. Zu berechnen bleibt daher $I_{L(\beta)}(f)(s)$. Nach der Definition des Maßes auf $N(\beta)$ in (16.17) gilt jetzt aber wie in 17D

$$I_{L(\beta)}(f)(s) = \int_{N(\beta)} f(sn)dn = \sum\nolimits_\xi V_0(\xi) \int_{N(2)} h(\xi)(\mathrm{diag}(a,a).n)dn$$

mit $N(2)$ der Gruppe der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen in $GL(2,F)$ und $h(\xi)$ der charakteristischen Funktion von ξ. Die Summe läuft dabei über alle Repräsentanten ξ für $GL(2,\mathcal{O}_F)\backslash GL(2,F)/GL(2,\mathcal{O}_F)$ im maximalzerfallenden Torus A_2 von $GL(2)$, für die $GL(2,\mathcal{O}_F).\xi.GL(2,\mathcal{O}_F)$ in $\mathcal{A}(F)$ auftritt. Nach (14.5) ist für $\xi = \mathrm{diag}(\pi^c, \pi^d)$ mit $c \leq d$

$$\int_{N(2)} h(\xi)(\mathrm{diag}(a,a).n)dn = \begin{cases} 1 & |a|_F^2 = |\det\xi|_F,\ d = \mathrm{ord}\, a \\ \mathrm{vol}U(F) \cdot q^{d-\mathrm{ord}\, a} & |a|_F^2 = |\det\xi|_F,\ d > \mathrm{ord}\, a \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Exponent $r-$ord in (14.5) ist nämlich in unserer Situation gerade $d-$ord a. Wie im Argument zu (17.8) folgt weiter, daß man tatsächlich nur über die Elemente in I zu summieren hat. Wegen $V_0(i, 2\mathrm{ord}\, a - i) = q^{2(i+2\mathrm{ord}\, a)} = q^{4\mathrm{ord}\, a}q^{2i}$ nach (17.7) ist daher

$$I_{L(\beta)}(f)(s) = \sum\nolimits_{\xi \in I} \frac{1}{|a|_F^4 \cdot ||\xi(i)||_\infty^2} \int_{N(2)} h(\xi)(\mathrm{diag}(a,a).n)dn.$$

In der Notation von (17.8) ist in unserer Situation $m = \mathrm{ord}\, a$. Für $i < \mathrm{ord}\, a$ ist $2\mathrm{ord}\, a - i > \mathrm{ord}\, a$. Weiter ist $q^d = q^{(c+d)-c} = ||\xi||_\infty \cdot |\det\xi^{-1}|$. Für jedes Element $\xi(i)$ ist $|\det\xi(i)| = |a|^2$. Setzt man diese Werte in das Integral oben ein, erhält man die Formel für $I_{L(\beta)}(f)(s)$ des Satzes. Das beendet den Beweis. Ist ord $\mu(f)$ ungerade, gilt $|\mu(f)| \neq |a|^2$ für jedes Element a aus F. Somit erhalten wir das

(18.6) Korollar: *Ist s aus dem Zentrum von $GSp(4)(F)$, dann verschwindet das Integral $\int_{N_L} h(r_0, r_1, r_2)(sn)dn$ für jeden Standardlevifaktor L von $GSp(4)$, wenn r_0 ungerade ist. Insbesondere gilt*

$$\int_{N_L} T(\pi)(sn)dn = 0$$

für jeden Standardlevifaktor L von $GSp(4)$ und $T(\pi)$ dem Heckeoperator $h(1,1,1)$.

Sei daher jetzt s ein singuläres Element aus $\mathcal{A}(F)$, das nicht aus dem Zentrum von G ist. Wie oben bemerkt, wurde $I_A(f)(s)$ bereits in (17.8) berechnet. Wir diskutieren im folgenden sukzessive die Integrale $I_{L(\alpha)}(f)(s)$, $I_{L(\beta)}(f)(s)$ und $I_G(f)(s)$.

Notwendig dafür, daß $I_{L(\alpha)}(f)(s)$ nicht verschwindet, ist dann wieder $r_0 = \mathrm{ord}\,(\mu(f)) = \mathrm{ord}\, c$. Dies sei im folgenden vorausgesetzt. Für s vom Typ (1,2) ist $C_{L(\alpha)}(s) = L(\alpha)$. Nach (17.6) gilt somit

$$I_{L(\alpha)}(f)(s) = \int_{N(\alpha)} f(sn)dn = V(\mathrm{ord}\, a, \mathrm{ord}\, a) = \frac{1}{|a|_F^3},$$

wenn $(\mathrm{ord}\, a, \mathrm{ord}\, a)$ in $\mathcal{A}(f)$ auftritt. Ist s nicht vom Typ (1,2), erhält man

$$\begin{aligned} I_{L(\alpha)}(f)(s) &= \int_{N(\alpha)} \int_{A\backslash L(\alpha)} f(m^{-1}sm.n)\frac{dm}{dh}\,dn \\ &= |\det(1-\mathrm{Ad}s|\mathrm{Lie}\, N(\alpha))| \cdot O_s^G(f) = \frac{|\det(1-\mathrm{Ad}s|\mathrm{Lie}\, N(\alpha))|}{|\det(1-\mathrm{Ad}s|\mathrm{Lie}\, N_A)|}\int_{N_A} f(sn)dn, \end{aligned}$$

indem man (12.16) zweimal anwendet. Nach (17.3) ist jetzt weiter

$$\frac{|\det(1-\mathrm{Ad}s|\mathrm{Lie}\, N(\alpha))|}{|\det(1-\mathrm{Ad}s|\mathrm{Lie}\, N_A)|} = \frac{\left|1-\frac{a^2}{c}\right| \cdot \left|1-\frac{b^2}{c}\right| \cdot \left|1-\frac{ab}{c}\right|}{\left|1-\frac{a^2}{c}\right| \cdot \left|1-\frac{b^2}{c}\right| \cdot \left|1-\frac{ab}{c}\right| \cdot \left|1-\frac{a}{b}\right|} = \frac{|b|}{|b-a|}.$$

Da a und b nach Voraussetzung verschieden sind, ist der Quotient wohldefiniert. Das Integral $\int_{N_A} f(sn)dn$ wurde in (17.8) berechnet. Zusammenfassend gilt also der

(18.7) Satz: *Sei $s = \mathrm{diag}(a, b, ca^{-1}, cb^{-1})$ ein singuläres Element aus $A(F)$, das nicht im Zentrum von $GSp(4)$ liegt. Notwendig dafür, daß das Integral $I_{L(\alpha)}(f)(s)$ nicht verschwindet, ist $|\mu(f)|_F = |c|_F = |\mu(s)|_F$. In diesem Fall gelten folgende Aussagen*
Für s vom Typ $(1,2)$ verschwindet $I_{L(\alpha)}(f)(s)$ genau dann nicht, wenn $a \cdot GL(2, \mathcal{O}_F)$ in $\mathcal{A}(f)$ auftritt. In diesem Fall ist

$$I_{L(\alpha)}(f)(s) = \int_{N(\alpha)} f(sn)dn = \frac{1}{|a|_F^3}.$$

Ist s nicht vom Typ $(1,2)$, sind also a und b verschieden, seien $m = \min\{\mathrm{ord}\, a, \mathrm{ord}\, b\}$, $T = \mathrm{ord}\, a + \mathrm{ord}\, b$ und I die Menge aller der nichtnegativen ganzen Zahlen $i \leq [T/2]$, für die das Doppelkoset $GL(2, \mathcal{O}_F).\mathrm{diag}(\pi^i, \pi^{T-i}).GL(2, \mathcal{O}_F)$ in $\mathcal{A}(f)$ auftritt. Dann gilt

$$I_{L(\alpha)}(f)(s) = \frac{|I \cap \{m\}| + |I - \{m\}| \cdot \mathrm{vol} U(F)}{|a-b|_F \cdot |a|_F^2}.$$

(18.8) Korollar: *Sei $s = \mathrm{diag}(a, b, ca^{-1}, cb^{-1})$ ein singuläres Element aus $A(F)$, das nicht im Zentrum von $GSp(4)$ liegt. Genau dann verschwindet $I_{L(\alpha)}(T(\pi))(s)$ nicht, wenn es ein Element w der Weylgruppe $W(GSp(4), A)$ gibt, für das $w(s)$ vom Typ $(1,2)$ ist, sowie $\mathrm{ord}\,\mu(s) = \mathrm{ord}\, c = \mathrm{ord}\,\mu(T(\pi)) = 1$ und $(\min\{\mathrm{ord}\, a, \mathrm{ord}\, b\}, \max\{\mathrm{ord}\, a, \mathrm{ord}\, b\}) \in \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$ gelten. In diesem Fall ist*

$$I_{L(\alpha)}(T(\pi))(s) = \frac{1}{|a|_F^2 \cdot \max\{|a|_F, |b|_F\}}.$$

Sei nämlich s zunächst vom Typ (1,2). Notwendig dafür, daß das Integral in diesem Fall nicht verschwindet, ist dann $\mathrm{ord}\, a = 0$ oder $\mathrm{ord}\, a = 1$. Nach (18.3) ist $c \neq a^2$, so daß $\mathrm{ord}\, c = 1$ erfüllt werden kann. In diesem Fall ist $I_{L(\alpha)}(T(\pi))(s) = |a^{-1}|^3 = |a^{-2}| \max\{|a|, |b|\}$ wegen $a = b$. Für s vom Typ (1,3) oder (2,4) gilt $c = a^2$ und $c = b^2$ respektive, so daß $\mathrm{ord}\, c$ stets von 1 verschieden ist. Ist s vom Typ (1,4) oder (2,3), ist $c = ab$. Nach (17.9) verschwindet das Integral nur für $(m, M) = (0,0), (0,1), (1,1), (0,2)$ nicht. Wegen $\mathrm{ord}\, c = m + M$ ist $\mathrm{ord}\, c = 1$ nur für $(m, M) = (0,1)$ möglich. Indem man (17.9) in die Formel des Satzes einsetzt, erhält man $I_{L(\alpha)}(T(\pi))(s) = |a^{-2}| \max\{|a|, |b|\}$. Beachtet man (1.24) folgt, daß s genau dann vom Typ (1,2), (1,4) oder (2,3) ist, wenn $w(s)$ für ein Element w der Weylgruppe vom Typ (1,2) ist. Das beendet den Beweis des Korollars.

Wir berechnen jetzt die Integrale $I_{L(\beta)}(f)(s)$. Notwendig dafür, daß $I_{L(\beta)}(f)(s)$ nicht verschwindet, ist $r_0 = \operatorname{ord}\mu(f) = \operatorname{ord} c$. Dies sei im folgenden vorausgesetzt. Für s vom Typ $(1,3)$ oder (2,4) ist $C_{L(\beta)}(s) = L(\beta)$. Nach dem Argument zu (17.26) gilt

$$I_{L(\beta)}(f)(s) = \int_{N(\beta)} f(sn)dn = \sum\nolimits_{c\leq d} V_0(c,d) \int_{N(2)} h(c,d)(\operatorname{diag}(a,b).n)dn.$$

Nach (14.5) ist

$$\int_{N(2)} h(c,d)(\operatorname{diag}(a,b).n)dn$$

$$= \begin{cases} q^{d-\operatorname{ord} b} & \operatorname{ord} a + \operatorname{ord} b = c+d,\ d = \max\{\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} b\} \\ q^{d-\operatorname{ord} b}\operatorname{vol} U(F) & \operatorname{ord} a + \operatorname{ord} b = c+d,\ d > \max\{\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} b\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir setzen $m = \min\{\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} b\}$, $M = \max\{\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} b\}$, $T = m + M$ und fassen in der Menge I alle nichtnegativen ganzen Zahlen $i \leq [T/2]$ zusammen, für die die Doppelnebenklasse $GL(2,\mathcal{O}_F).\operatorname{diag}(\pi^i, \pi^{T-i}).GL(2,\mathcal{O}_F)$ in $\mathcal{A}(f)$ auftritt. Nach (17.7) ist $V_0(c,d) = q^{2(2c+d)}$. Der Exponent von q in $V_0(i, T-i)q^{(T-i)-\operatorname{ord} b}$ ist somit $2(2i+(T-i))+((T-i)-\operatorname{ord} b) = 2T+2i-\operatorname{ord} b = 2\operatorname{ord} a + \operatorname{ord} b + 2i$. Folglich ist

$$I_{L(\beta)}(f)(s) = \frac{1}{|b|_F \cdot |a|_F^2}\Big(\frac{|I\cap\{m\}|}{\|\xi(m)\|_\infty^2} + \operatorname{vol}U(F)\cdot \sum\nolimits_{i\in I-\{m\}} \frac{1}{\|\xi(i)\|_\infty^2}\Big)$$

mit $\xi(i) = \operatorname{diag}(\pi^i, \pi^{T-i})$. Sei daher s nicht vom Typ (1,3) oder (2,4). Dann ist $C_{L(\beta)}(s) = A$ und

$$I_{L(\beta)}(f)(s) = \int_{N(\beta)}\int_{A\backslash L(\beta)} f(m^{-1}sm.n)\frac{dm}{dh}\,dn.$$

Indem man (12.16) zweimal anwendet, gilt hier

$$I_{L(\beta)}(f)(s) = |\det(1-\operatorname{Ad}s|\operatorname{Lie}N(\beta))|\cdot O_s^G(f) = \frac{|\det(1-\operatorname{Ad}s|\operatorname{Lie}N(\beta))|}{|\det(1-\operatorname{Ad}s|\operatorname{Lie}N_A)|}\int_{N_A} f(sn)dn.$$

Nach (17.3) ist

$$\frac{|\det(1-\operatorname{Ad}s|\operatorname{Lie}N(\beta))|}{|\det(1-\operatorname{Ad}s|\operatorname{Lie}N_A)|} = \frac{\left|1-\frac{a}{b}\right|\cdot\left|1-\frac{a^2}{c}\right|\cdot\left|1-\frac{ab}{c}\right|}{\left|1-\frac{a}{b}\right|\cdot\left|1-\frac{a^2}{c}\right|\cdot\left|1-\frac{ab}{c}\right|\cdot\left|1-\frac{b^2}{c}\right|} = \frac{|c|}{|c-b^2|}.$$

Ist s vom Typ (1,2) gilt $c \neq a^2 = b^2$. Ist s vom Typ (2,3), gilt $c \neq b^2$. Für s vom Typ (1,4) ist $c = ab$ und $c \neq a^2$. Aus $b^2 = c$ folgt dann aber $a = b$, so daß s im Zentrum von G liegt. Indem man die Formel für $\int_{N_A} f(sn)dn$ aus (17.8) einsetzt, erhält man somit wegen $|c|_F = |\mu(f)|_F$ zusammenfassend den

(18.9) Satz. *Sei $s = \operatorname{diag}(a,b,ca^{-1},cb^{-1})$ ein singuläres Element aus $A(F)$, das nicht im Zentrum von $GSp(4)$ liegt. Seien weiter $m = \min\{\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} b\}$, $T = \operatorname{ord} a + \operatorname{ord} b$ und I die Menge aller der Elemente $\xi(i) = \operatorname{diag}(\Pi^i, \pi^{T-i})$ mit $0 \leq i \leq [T/2]$, für die $GL(2,\mathcal{O}_F).\xi(i).GL(2,\mathcal{O}_F)$ in $\mathcal{A}(f)$ auftritt. Notwendig dafür, daß $I_{L(\beta)}(f)(s)$ nicht verschwindet, ist $|\mu(f)|_F = |c|_F = |\mu(s)|_F$. In diesem Fall gelten folgende Aussagen*

Für s vom Typ $(1,3)$ oder $(2,4)$ ist

$$I_{L(\beta)}(f)(s) = \frac{1}{|b|_F\cdot|a|_F^2}\left(\frac{|I\cap\{\xi(m)\}|}{\|\xi(m)\|_\infty^2} + \operatorname{vol}(U(F))\cdot\sum\nolimits_{i\in I-\{\xi(m)\}}\frac{1}{\|\xi(i)\|_\infty^2}\right)$$

Für s vom Typ $(1,2)$, $(1,4)$ oder $(2,3)$ ist

$$I_{L(\beta)}(f)(s) = \frac{|\mu(f)|_F}{|\mu(s)-b^2|_F\cdot|a|_F\cdot|ab|_F}\Big(|I\cap\{\xi(m)\}| + \operatorname{vol}(U(F))\cdot|I-\{\xi(m)\}|\Big).$$

(18.10) Korollar: *Sei $s = \mathrm{diag}(a, b, ca^{-1}, cb^{-1})$ ein singuläres Element aus $A(F)$, das nicht im Zentrum von $GSp(4)$ liegt. Nur dann verschwindet $I_{L(\beta)}(T(\pi))(s)$ nicht, wenn es ein Element w aus der Weylgruppe $W(GSp(4), A)$ gibt, für das $w(s)$ vom Typ $(1,2)$ ist, und wenn $\mathrm{ord}\,\mu(T(\pi)) = \mathrm{ord}\,c = \mathrm{ord}\,\mu(s) = 1$ gilt. In diesem Fall hat $I_{L(\beta)}(T(\pi))(s)$ den Wert*

$$I_{L(\beta)}(T(\pi))(s) = \frac{|\mu(T(\pi))|_F}{|\mu(s) - b^2|_F \cdot |a|_F \cdot |ab|_F},$$

wenn $(\min\{\mathrm{ord}\,a, \mathrm{ord}\,b\}, \max\{\mathrm{ord}\,a, \mathrm{ord}\,b\}) \in \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$ ist, und verschwindet sonst.

Die erste Aussage folgt daraus, daß $\mu(s)$ für s vom Typ (1,3) oder (2,4) nach (18.3) ein Quadrat ist und somit stets $\mathrm{ord}\,\mu(s) \neq 1$ gilt. Ist s vom Typ $(1,4)$ oder $(2,3)$, dann ist $c = \mu(s) = ab$, so daß $\mathrm{ord}\,c = \mathrm{ord}\,a + \mathrm{ord}\,b = M + m = T$ gilt. Die einzig möglichen Werte für (m, M), an denen das Integral nach dem Argument zu (17.9) nicht verschwindet, sind (0,0), (0,1), (1,1), (0,2). Nur für $(m, M) = (0,1)$ ist aber $\mathrm{ord}\,c = 1$. Ist s vom Typ (1,2), verschwindet das Integral genau für $m = M$ in $\{0,1\}$ nicht. Die letzte Aussage folgt jetzt wegen $I = \{0\} = m$ aus der zweiten Formel von Satz (18.9).

Zu berechnen bleiben daher jetzt die Integrale $I_G(f)(s)$. Elemente s vom Typ (1,4) oder (2,3) werden wie in (18.3) bemerkt durch einen inneren Automorphismus von $G(F)$ zu Elementen vom Typ (1,2) transformiert. Genauso wird ein Element vom Typ (2,4) durch einen inneren Automorphismus von $G(F)$ zu einem Element vom Typ (1,3). Daher reicht es $I_G(f)(s)$ für s vom Typ (1,2) und für s vom Typ (1,3) zu berechnen. Sei zunächst

s vom Typ (1,2).

In diesem Fall ist $L(\alpha)$ der Zentralisator von $s = \mathrm{diag}(a, a, ca^{-1}, ca^{-1})$ in G. Folglich gilt

$$I_G(f)(s) = \int_{L(\alpha)\backslash G} f(g^{-1}sg)\frac{dg}{dm} = \frac{1}{|\det(1 - \mathrm{Ad}s|\mathrm{Lie}\,N(\alpha))|}\int_{N(\alpha)} f(sn)dn$$

nach (12.16). Wegen $a = b$ ist nach (17.3)

$$|\det(1 - \mathrm{Ad}s|\mathrm{Lie}\,N(\alpha))| = \left|1 - \frac{a^2}{c}\right| \cdot \left|1 - \frac{a^2}{c}\right| \cdot \left|1 - \frac{a^2}{c}\right| = \left|1 - \frac{a^2}{c}\right|^3.$$

Wenn das Paar $(\mathrm{ord}\,a, \mathrm{ord}\,a)$ in $\mathcal{A}(f)$ auftritt, ist nach (17.6) weiterhin $\int_{N(\alpha)} f(sn)dn = V(\mathrm{ord}\,a, \mathrm{ord}\,a) = |a^{-1}|_F^3$. Zusammenfassend haben wir folglich gezeigt

(18.11) Satz: *Sei $s = \mathrm{diag}(a, a, ca^{-1}, ca^{-1})$ ein singuläres Element vom Typ $(1,2)$ aus $A(F)$, das nicht im Zentrum von $G = GSp(4)$ liegt. Genau dann verschwindet $I_G(f)(s)$ mit f dem Heckeoperator $h(r_0, r_1, r_2)$ nicht, wenn $|\mu(s)|_F = |c|_F = |\mu(f)|_F$ ist und das Doppelkoset $a \cdot GL(2, \mathcal{O}_F)$ in $\mathcal{A}(f)$ auftritt. In diesem Fall gilt*

$$I_G(f)(s) = \int_{L(\alpha)\backslash G} f(g^{-1}sg)\frac{dg}{dm} = \frac{|\mu(f)|_F^3}{|\mu(s) - a^2|_F^3 \cdot |a|_F^3}.$$

(18.12) Korollar: *Seien $s = \mathrm{diag}(a, a, ca^{-1}, ca^{-1})$ ein singuläres Element vom Typ $(1,2)$ aus $A(F)$, das nicht im Zentrum von $G = GSp(4)$ liegt, und $T(\pi)$ der Heckeoperator $h(1,1,1)$. Genau dann verschwindet $I_G(T(\pi))(s)$ nicht, wenn $\mathrm{ord}\,\mu(s) = \mathrm{ord}\,c = \mathrm{ord}\,\mu(T(\pi)) = 1$ und $\mathrm{ord}\,a \in \{0, 1\}$ gelten. In diesem Fall ist*

$$I_G(T(\pi))(s) = \int_{L(\alpha)\backslash G} T(\pi)(g^{-1}sg)\frac{dg}{dm} = |\mu(T(\pi))^{1-2\mathrm{ord}\,a}|_F^3 = \begin{cases} |\mu(T(\pi))|^3 & \mathrm{ord}\,a = 0 \\ |\mu(T(\pi))|_F^{-3} & \mathrm{ord}\,a = 1. \end{cases}$$

Für $\mathrm{ord}\,a = 0$ ist nämlich $|c - a^2| = |a^2| = 1$. Für $\mathrm{ord}\,a = 1$ ist $|c - a^2| = |c| = |\mu(T(\pi))|$. Damit ist aber $|\mu(T(\pi))|^3\,|\mu(s) - a^2|^{-3}\,|a|^{-3} = |a^{-1}|^3 = |\mu(T(\pi))|^{-3}$. Sei daher jetzt

s vom Typ (1,3).

Nach der Kasuistik in (18.3) ist in diesem Fall $\mu(s)$ ein Quadrat. Nur wenn $\mathrm{ord}\,\mu(f) = r_0$ gerade ist, verschwindet somit $I_G(f)(s)$ in diesem Fall nicht. Folglich können wir zunächst festhalten

(18.13) Satz: *Ist s ein singuläres Element aus $A(F)$ vom Typ $(1,3)$, dann verschwindet $I_G(f)(s)$ für jeden Heckeoperator $f = h(r_0, r_1, r_2)$ mit $\operatorname{ord}\mu(f) = r_0$ einer ungeraden ganzen Zahl. Insbesondere verschwindet in diesem Fall das Integral $I_G(T(\pi))(s)$ für den Heckeoperator $T(\pi) = h(1,1,1)$.*

(18.14) Berechnung von Repräsentanten für $H\backslash G/K$: In einem nächsten Schritt wollen wir Repräsentanten von $G_s\backslash G/K$ berechnen, wenn $s = \operatorname{diag}(a,-a,a,-a)$ ist. Nach (18.4) ist $G_s = H$. Wir schreiben ein typisches Element von $H(F)$ als

$$[A,B] = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & z & 0 & w \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \ \text{und} \ \det A = \det B \neq 0.$$

Nur solche Matrizen $[A,B]$ mit $c = z = 0$ erhalten bei Linksmultiplikation die standardmäßigen Repräsentanten von G/K. Genauer gilt in diesem Fall

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a' & 0 & b' \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & \ell & m \\ 0 & w & k & s \\ 0 & 0 & x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -y(xw)^{-1} & w^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay & a\ell + bx^{-1} & am \\ 0 & a'w & a'k - b'y(xw)^{-1} & a's + b'w^{-1} \\ 0 & 0 & dx^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -d'y(xw)^{-1} & d'w^{-1} \end{pmatrix}$$

mit $ad = a'd'$, also $d' = ad(a')^{-1}$. Sukzessive kann man die Einträge $a\ell + bx^{-1}$ und $a's + b'w^{-1}$ zu Null machen. Hierfür seien zunächst $a \neq 0$ und b so gewählt, daß $a\ell + bx^{-1} = 0$ ist. Seien weiter $a' \neq 0$ und b' so gewählt, daß $a's + b'w^{-1} = 0$ ist. Die Elemente d, d' seien so gewählt, daß $ad = a'd'$ gilt. Wir erhalten Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} x & y & 0 & m \\ 0 & w & k & 0 \\ 0 & 0 & x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -y(xw)^{-1} & w^{-1} \end{pmatrix}.$$

Wir wählen $a = x^{-1}$ und $a' = w^{-1}$. Seien weiter $b = b' = 0$ und $d = x$. Dann ist $d' = (a')^{-1}ad = w$. Wir erhalten Elemente der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & z & 0 & d \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -z & 1 \end{pmatrix}$$

mit c, d in F. Genau für $c = d$ ist eine Matrix dieser Form aus $GSp(4)$. Wir untersuchen, ob sich Matrizen dieser Form durch Rechtsmultiplikation mit unipotenten oberen Dreiecksmatrizen weiter vereinfachen lassen. Dazu notieren wir allgemein

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & S \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AS+B \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+zb & b+zd \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Diese beiden Formeln zeigen zunächst, daß nur mit Matrizen von Rechts multipliziert werden kann, in denen $d = 0$ und $a = -zb$ ist. Sind a, b, d aus $\mathcal{O}_F$, gibt dies die Bedingung $\operatorname{ord} b \geq \max\{0, -\operatorname{ord} z\}$. Durch Rechtsmultiplikation mit einer geeigneten unipotenten oberen Dreiecksmatrix aus K können wir folglich erreichen, daß in c nur π-Potenzen strikt niedrigerer Ordnung als $\max\{0, -\operatorname{ord} z\}$ auftreten. Im Spezialfall $c = 0$ können wir darüberhinaus auf die gleiche Weise erreichen, daß entweder $z = 0$ oder $\operatorname{ord} z < 0$ gilt. Als ein erstes Resultat können wir somit festhalten

(18.14.1) *Jedes Doppelkoset in $H(F)\backslash G(F)/K$ enthält eine Matrix*

$$g(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & b \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

aus $G(F) = GSp(4,F)$. Dabei gelten entweder $b = 0$ und entweder $a = 0$ oder $\operatorname{ord}_F a < 0$ oder aber $\operatorname{ord}_F b < \max\{0, -\operatorname{ord}_F a\}$.

Wir untersuchen, ob wir $g(a,b)$ weiter vereinfachen können, insbesondere, ob a und b in der Form π^S mit S in $\mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ gewählt werden können. Sei dazu explizit $G = GSp(V,B)$ und trage V die symplektische Basis (e_1, f_1, e_2, f_2). Sei $\Lambda = \mathcal{O}_F e_1 \oplus \mathcal{O}_F f_1 \oplus \mathcal{O}_F e_2 \oplus \mathcal{O}_F f_2$ das korrespondierende Standardgitter, so daß $K = GSp(4)(\mathcal{O}_F)$ der Stabilisator von Λ in $GSp(4,F)$ ist. Genau dann liegen $g(a,b)$ und $g(\alpha,\beta)$ in dem gleichen Doppelkoset von $H(F)\backslash G(F)/K$, wenn $[X_1,X_2].g(a,b)\Lambda = g(\alpha,\beta)\Lambda$ für $[X_1,X_2]$ aus $H(F)$ gilt, oder dazu äquivalent $g^{-1}(\alpha,\beta).[X_1,X_2].g(a,b)$ in K liegt. Wir berechnen zuerst diese beiden Matrizenausdrücke. Zunächst ist

$$g^{-1}(\alpha,\beta)\cdot[X_1,X_2]\cdot g(a,b) = g^{-1}(\alpha,\beta)\begin{pmatrix} x_1 & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & y_2 \\ z_1 & 0 & w_1 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & w_2 \end{pmatrix} g(a,b)$$

$$(18.14.2) \quad = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & ax_1 & y_1 & bx_1 \\ 0 & x_2 & bx_2 - ay_2 & y_2 \\ z_1 & az_1 & w_1 & bz_1 \\ 0 & z_2 & bz_2 - aw_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & ax_1 - \alpha x_2 - \beta z_2 & y_1 - \alpha bx_2 + \alpha ay_2 - \beta bz_2 + \beta aw_2 & bx_1 - \alpha y_2 - \beta w_2 \\ -\beta z_1 & x_2 - a\beta z_1 & bx_2 - ay_2 - \beta w_1 & y_2 - \beta bz_1 \\ z_1 & az_1 & w_1 & bz_1 \\ \alpha z_1 & z_2 + a\alpha z_1 & \alpha w_1 + bz_2 - aw_2 & w_2 + \alpha bz_1 \end{pmatrix}.$$

Weiter erhalten wir

$$(18.14.3) \quad \begin{pmatrix} x_1 & ax_1 & y_1 & bx_1 \\ 0 & x_2 & bx_2 - ay_2 & y_2 \\ z_1 & az_1 & w_1 & bz_1 \\ 0 & z_2 & bz_2 - aw_2 & w_2 \end{pmatrix}\Lambda = [X_1,X_2]\cdot g(a,b)\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}\Lambda.$$

Die Determinante einer Matrix aus $GSp(4)$ ist bis auf das Vorzeichen das Quadrat ihres Ähnlichkeitsfaktors. Folglich liegt (18.14.2) genau dann in K, wenn alle ihre Einträge ganz sind und der Ähnlichkeitsfaktor

$$(1) \quad \mu = \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

aus $U(F)$ ist. Wir erhalten speziell die Ganzheitsbedingungen

$$(2) \quad \mathrm{ord}_F x_1,\ \mathrm{ord}_F z_1,\ \mathrm{ord}_F w_1 \geq 0.$$

Indem wir die Bilder unter der zu (e_1, f_1, e_2, f_2) dualen Basis des Gitters in (18.14.3) betrachten, erhalten wir die Ordnungsbedingungen

$$(3) \quad \min\{\mathrm{ord}\, x_1, \mathrm{ord}\,(ax_1), \mathrm{ord}\, y_1, \mathrm{ord}\,(bx_1)\} = \min\{0, \mathrm{ord}\,\alpha, \mathrm{ord}\,\beta\},$$

$$(4) \quad \min\{\mathrm{ord}\, x_2, \mathrm{ord}\,(bx_2 - ay_2), \mathrm{ord}\, y_2\} = \min\{0, \mathrm{ord}\,\beta\},$$

$$(5) \quad \min\{\mathrm{ord}\, z_1, \mathrm{ord}\,(az_1), \mathrm{ord}\, w_1, \mathrm{ord}\,(bz_1)\} = 0,$$

$$(6) \quad \min\{\mathrm{ord}\, z_2, \mathrm{ord}\,(bz_2 - aw_2), \mathrm{ord}\, w_2\} = \min\{0, \mathrm{ord}\,\alpha\}.$$

Wir zeigen zunächst, daß man $g(a,b)$ wie oben beschrieben weiter vereinfachen kann. Dazu seien $\alpha = ua$ und $\beta = \gamma b$ für Einheiten u und γ aus $U(F)$. Seien $z_1 = z_2 = 0$, so daß sich (18.14.2) zu

$$\begin{pmatrix} x_1 & ax_1 - \alpha x_2 & y_1 - \alpha bx_2 + \alpha ay_2 + \beta aw_2 & bx_1 - \alpha y_2 - \beta w_2 \\ 0 & x_2 & bx_2 - ay_2 - \beta w_1 & y_2 \\ 0 & 0 & w_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha w_1 - aw_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

vereinfacht. Wir setzen weiter $x_1 = u\gamma$, $w_1 = 1$, $x_2 = \gamma$, $w_2 = u$. Dann gelten $ax_1 - \alpha x_2 = 0$, $\alpha w_1 - aw_2 = 0$, $y_1 - \alpha bx_2 + \alpha ay_2 + \beta aw_2 = y_1 - \alpha\beta + \alpha ay_2 + \beta\alpha = y_1 + \alpha ay_2$, $bx_2 - ay_2 - \beta w_1 = \beta - ay_2 - \beta = -ay_2$ und $bx_1 - \alpha y_2 - \beta w_2 = \beta u - \alpha y_2 - \beta u = -\alpha y_2$. Folglich geht (18.14.2) über in

$$(18.14.4) \quad \begin{pmatrix} x_1 & 0 & y_1 + \alpha ay_2 & -\alpha y_2 \\ 0 & x_2 & -ay_2 & y_2 \\ 0 & 0 & w_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_2 \end{pmatrix}.$$

Wählt man y_1 und y_2 aus $\mathcal{O}_F$, so daß $a^2 y_2$ ganz ist, liegt diese Matrix in $M(4, \mathcal{O}_F)$. Wir rechnen $\det X_1 = x_1 w_1 = u\gamma$ und $\det X_2 = x_2 w_2 = u\gamma$. Somit ist (18.14.4) bereits aus $GSp(4)(\mathcal{O}_F)$. Wir haben damit gezeigt

(18.14.5) *Jedes Doppelkoset in $H(F)\backslash G(F)/K$ enthält eine Matrix*

$$g(\pi^a, \pi^b) = \begin{pmatrix} 1 & \pi^a & 0 & \pi^b \\ 0 & 1 & \pi^b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi^a & 1 \end{pmatrix}$$

mit a, b aus $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Dabei gelten entweder $b = \infty$ und entweder $a = \infty$ oder $a < 0$ oder aber $b < \max\{0, -a\}$.

Wir behaupten in einem nächsten Schritt, daß wir auf die Repräsentanten mit $b = \infty$ und $a < 0$ verzichten können. Dazu seien $a = \pi^n$ und $\beta = \pi^n$ mit $n < 0$. Wir behaupten, daß eine Matrix $[X_1, X_2]$ aus $H(F)$ existiert, für die $g^{-1}(0,\beta)[X_1, X_2]g(a, 0)$ in $GSp(4)(\mathcal{O}_F)$ liegt. Die Matrix (18.14.2) hat in unserer Situation wegen $a = \beta$ die Gestalt

$$(18.14.6) \qquad \begin{pmatrix} x_1 & ax_1 - az_2 & y_1 + a^2 w_2 & -aw_2 \\ -az_1 & x_2 - a^2 z_1 & -ay_2 - aw_1 & y_2 \\ z_1 & az_1 & w_1 & 0 \\ 0 & z_2 & -aw_2 & w_2 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen $z_1 = a^{-1}$, $z_2 = 0$, $w_2 = a^{-1}$, $x_1 = a^{-1}$, $x_2 = a$. Dann hat die erste Spalte und die letzte Zeile nur ganzzahlige Einträge. Weiter ist $ax_1 - az_2 = 1$. Für $y_1 = -a$ gilt $y_1 + a^2 w_2 = y_1 + a = 0$. Deshalb hat auch die erste Zeile nur ganzzahlige Einträge. Es gilt $x_2 - a^2 z_1 = a - a = 0$. Für $y_2 = 0$ und $w_1 = 0$ hat die zweite und dritte Zeile nur ganze Einträge. Wir rechnen $x_1 w_1 - y_1 z_1 = a^{-1}.0 - (-a).a^{-1} = 1$ und $x_2 w_2 - y_2 z_2 = a.a^{-1} - 0.0 = 1$. Daher liegt die so konstruierte Matrix $[X_1, X_2]$ in $H(F)$. Ihr Ähnlichkeitsfaktor 1 ist ganz und stimmt bis auf das Vorzeichen mit der Determinante von (18.14.6) überein. Die eben konstruierte Matrix (18.14.6) liegt mithin in $GSp(4)(\mathcal{O}_F)$. Wir haben damit gezeigt

(18.14.7) *Jedes Doppelkoset in $H(F)\backslash G(F)/K$ enthält eine Matrix $g(\pi^a, \pi^b)$ mit a, b aus $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ und entweder $b = \infty = a$ oder $b < \max\{0, -a\}$.*

In einem nächsten Schritt wollen wir dieses System weiter ausreduzieren. Wir behaupten, daß die Elemente $g(\pi^a, \pi^b)$ mit $a = b = \infty$ oder $a = \infty$, $b < 0$ ein Repräsentantensystem enthalten. Wir setzen dafür $\alpha = 0$ in (18.14.2) und erhalten die Matrix

$$(18.14.8) \qquad \begin{pmatrix} x_1 & ax_1 - \beta z_2 & y_1 - \beta b z_2 + \beta a w_2 & bx_1 - \beta w_2 \\ -\beta z_1 & x_2 - a\beta z_1 & bx_2 - ay_2 - \beta w_1 & y_2 - \beta b z_1 \\ z_1 & az_1 & w_1 & bz_1 \\ 0 & z_2 & bz_2 - aw_2 & w_2 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind a, b, β reine π–Potenzen und $\operatorname{ord}\beta < 0$. Wir behaupten genauer, daß es zu jedem Parameterpaar $(\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} b)$ außerhalb des oben angegebenen Bereiches eine Matrix $[X_1, X_2]$ aus $H(F)$ gibt, für die (18.14.8) in $GSp(4)(\mathcal{O}_F)$ liegt. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Ähnlichkeitsfaktor $\mu = x_1 w_1 - y_1 z_1 = x_2 w_2 - y_2 z_2$ von $[X_1, X_2]$ eine Einheit von $\mathcal{O}_F$ ist und alle Einträge von (18.14.8) ganz sind.

(18.14.9) Sei $\operatorname{ord} b < 0 \leq \operatorname{ord} a$. Wir setzen $\beta = b$. Für $z_1 = z_2 = b^{-1}$, $x_1 = w_2 = 0$ sind die erste Spalte und die vierte Zeile von (18.14.8) ganz. Wir analysieren die letzte Spalte. Wegen $y_2 - \beta b z_1 = y_2 - b$ sei $y_2 = b$. Wir analysieren die zweite Zeile. Hier ist $x_2 - a\beta z_1 = x_2 - a$ ganz für $\operatorname{ord} x_2 \geq 0$. Weiter ist $bx_2 - ay_2 - \beta w_1 = bx_2 - ab - bw_1$. Wir setzen $x_2 = a$ und $w_1 = b^{-1}$. Für $y_1 = b$ ist $y_1 - \beta b z_2 + \beta a w_2 = y_1 - b = 0$, so daß (18.14.8) nur ganzzahlige Einträge hat. Wir rechnen $x_1 w_1 - y_1 z_1 = -y_1 z_1 = -b.b^{-1} = -1$ und $x_2 w_2 - y_2 z_2 = -y_2 z_2 = -b.b^{-1} = -1$. Die eben konstruierte Matrix $[X_1, X_2]$ ist also aus $H(F)$ und ihr Ähnlichkeitsfaktor μ ist -1.

(18.14.10) Sei $\operatorname{ord} a < 0 \le \operatorname{ord} b < -\operatorname{ord} a$. Wir setzen $\beta = a$. Für $x_1 = 0$, $z_1 = z_2 = a^{-1}$ und $w_2 = a^{-1}$ hat die erste Spalte und die letzte Zeile von (18.14.8) nur ganzzahlige Einträge. Wegen $bx_1 - \beta w_2 = -1$ und $y_2 - \beta b z_1 = y_2 - b$ hat die letzte Spalte für $y_2 = 0$ nur ganzzahlige Einträge. Wir analysieren die zweite Spalte. Hier ist $ax_1 - \beta z_2 = -1$. Wegen $x_2 - a\beta z_1 = x_2 - a$ sei $x_2 = a$. Für diese Werte ist $bx_2 - ay_2 - \beta w_1 = ba - aw_1$. Sei daher $w_1 = b$. Wegen $y_1 - \beta b z_2 + \beta a w_2 = y_1 - b + a$ sei $y_1 = -a$. Für diese Parameterwerte hat (18.14.8) nur ganzzahlige Einträge. Wir rechnen $x_1 w_1 - y_1 z_1 = 0 - (-a).a^{-1} = 1$ und $x_2 w_2 - y_2 z_2 = a.a^{-1} - 0 = 1$. Die eben konstruierte Matrix $[X_1, X_2]$ ist also aus $H(F)$ und ihr Ähnlichkeitsfaktor μ ist 1.

(18.14.11) Sei $\operatorname{ord} b \le \operatorname{ord} a < 0$. Wir setzen $\beta = b$. Für $x_1 = 0$, $z_1 = z_2 = b^{-1}$, $w_2 = 0$ hat die erste Spalte und die letzte Zeile nur ganze Einträge. Wegen $x_2 - a\beta z_1 = x_2 - a$ hat die zweite Spalte für $x_2 = a$ nur ganze Einträge. Wegen $y_2 - \beta b z_1 = y_2 - b$ hat die letzte Spalte für $y_2 = b$ nur ganze Einträge. Wegen $bx_2 - ay_2 - \beta w_1 = ab - ab - \beta w_1$ setzen wir $w_1 = 0$. Wegen $y_1 - \beta b z_2 + \beta a w_2 = y_1 - b$ hat (18.14.8) für $y_1 = b$ nur ganze Einträge. Wir rechnen $x_1 w_1 - y_1 z_1 = 0 - b.b^{-1} = -1$ und $x_2 w_2 - y_2 z_2 = 0 - b.b^{-1} = -1$. Die eben konstruierte Matrix $[X_1, X_2]$ ist also aus $H(F)$ und ihr Ähnlichkeitsfaktor μ ist -1.

(18.14.12) Sei $\operatorname{ord} a < \operatorname{ord} b < 0$. Wir setzen $\beta = a$. Für $x_1 = 0$, $z_1 = a^{-1}$, $z_2 = 0$, $w_2 = -a^{-1}$ hat die erste Spalte und die letzte Zeile nur ganze Einträge. Wegen $y_2 - \beta b z_1 = y_2 - b$ hat die letzte Spalte für $y_2 = b$ nur ganze Einträge. Wegen $x_2 - a\beta z_1 = x_2 - a$ hat die zweite Spalte für $x_2 = a$ nur ganze Einträge. Wegen $bx_2 - ay_2 - \beta w_1 = ba - ab - \beta w_1$ setzen wir $w_1 = 0$. Wir rechnen $y_1 - \beta b z_2 + \beta a w_2 = y_1 - 0 + \beta a(-\beta^{-1}) = y_1 - a$. Für $y_1 = a$ hat (18.14.8) nur ganze Einträge. Weiter gelten $x_1 w_1 - y_1 z_1 = 0 - a.a^{-1} = -1$ und $x_2 w_2 - y_2 z_2 = a.(-a^{-1}) - 0 = -1$. Die eben konstruierte Matrix $[X_1, X_2]$ ist also aus $H(F)$ und ihr Ähnlichkeitsfaktor μ ist -1. Zusammenfassend gilt daher

(18.14.13) *Jedes Doppelkoset von $H(F)\backslash G(F)/K$ enthält eine Matrix $g(\pi^a, \pi^b)$ mit $a = b = \infty$ oder mit $a = \infty$ und $b < 0$.*

Wir wollen zeigen, daß diese Matrizen tatsächlich ein Repräsentantensystem der Doppelkosetmenge $H(F)\backslash G(F)/K$ bilden. Für $a = \alpha = 0$ berechnen wir hierzu die Matrix (18.14.2) als

(18.14.14)
$$\begin{pmatrix} x_1 & -\beta z_2 & y_1 - \beta b z_2 & bx_1 - \beta w_2 \\ -\beta z_1 & x_2 & bx_2 - \beta w_1 & y_2 - \beta b z_1 \\ z_1 & 0 & w_1 & bz_1 \\ 0 & z_2 & bz_2 & w_2 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen im folgenden voraus, daß diese Matrix in $GSp(4)(\mathcal{O}_F)$ liegt. Im Fall $\operatorname{ord} b, \operatorname{ord} \beta < 0$ können wir aus Symmetriegründen weiter $\operatorname{ord} b \ge \operatorname{ord} \beta$ annehmen.

(18.14.15) Seien $\operatorname{ord} b, \operatorname{ord} \beta < 0$. Wir nehmen an sie seien verschieden, so daß $\operatorname{ord} b > \operatorname{ord} \beta$ gilt. Dann sind wegen $\operatorname{ord} x_1, \operatorname{ord} x_2 \ge 0$ die Relationen

(3′) $$\min\{\operatorname{ord} y_1, \operatorname{ord}(bx_1)\} = \operatorname{ord} \beta,$$
(4′) $$\min\{\operatorname{ord}(bx_2), \operatorname{ord} y_2\} = \operatorname{ord} \beta,$$
(5′) $$\min\{\operatorname{ord} z_1, \operatorname{ord} w_1, \operatorname{ord}(bz_1)\} = 0,$$
(6′) $$\min\{\operatorname{ord} z_2, \operatorname{ord}(bz_2), \operatorname{ord} w_2\} = 0$$

notwendig für die Gleichheit in (18.14.3). Wegen $\operatorname{ord}(bx_i) \ge \operatorname{ord} b > \operatorname{ord} \beta$ folgt $\operatorname{ord} y_1 = \operatorname{ord} y_2 = \operatorname{ord} \beta$ aus (3′) und (4′). Notwendig dafür, daß $y_2 - \beta b z_1$ in $\mathcal{O}_F$ liegt, ist dann weiter $\operatorname{ord} y_2 = \operatorname{ord}(\beta b z_1)$, also $\operatorname{ord} z_1 = -\operatorname{ord} b$. Nach (5′) ist $\operatorname{ord} w_1 \ge 0$. Somit ist $\operatorname{ord}(x_1 w_1) \ge 0$. Wegen $\operatorname{ord}(y_1 z_1) = \operatorname{ord} \beta - \operatorname{ord} b < 0$ folgt dann aber $\operatorname{ord} \mu = \operatorname{ord}(x_1 w_1 - y_1 z_1) = \operatorname{ord}(y_1 z_1) < 0$. Dieser Widerspruch zu $\operatorname{ord} \mu = 0$ zeigt $\operatorname{ord} b = \operatorname{ord} \beta$und damit $b = \beta$.

(18.14.16) Sei jetzt zusätzlich $\beta = 0$ und gelte $\operatorname{ord} b < 0$. Die Matrix (18.14.14) vereinfacht sich dann weiter zur Matrix

(18.14.17)
$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & y_1 & bx_1 \\ 0 & x_2 & bx_2 & y_2 \\ z_1 & 0 & w_1 & bz_1 \\ 0 & z_2 & bz_2 & w_2 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gelten somit $\operatorname{ord} x_i, \operatorname{ord} z_i \geq -\operatorname{ord} b$. Alle Elemente y_i und w_i sind aus $\mathcal{O}_F$. Folglich hat jeder Summand $x_i w_i$ und $y_i z_i$ in $\mu = x_i w_i - y_i z_i$ mindestens die Ordnung $-\operatorname{ord} b > 0$. Daher ist μ keine Einheit in $\mathcal{O}_F$. Dieser Widerspruch zeigt abschließend den

(18.15) Satz: *Die Doppelkosetmenge $H(F)\backslash GSp(4,F)/GSp(4,\mathcal{O}_F)$ besitzt als Repräsentantensystem die Matrizen*

$$g(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist entweder $\gamma = 0$ oder es gilt $\gamma = \pi^a$ für eine ganze Zahl $a < 0$.

Nachdem wir Repräsentanten für $H(F)\backslash G(F)/K$ bestimmt haben, wollen wir im folgenden diskutieren, wann $f(g^{-1}(\gamma)sg(\gamma))$ nicht verschwindet und die Volumina $\operatorname{vol}_H(H(F) \cap g(\gamma)Kg^{-1}(\gamma))$ berechnen. Das Orbitalintegral $I_G(f)(s) = O_s^G(f)$ können wir dann nach (12.12) berechnen. Wir erinnern, daß $s = \operatorname{diag}(a, b, ca^{-1}, cb^{-1})$ vom Typ $(1,3)$ ist. Folglich ist $c = a^2$. Für $\gamma = 0$ oder $\gamma = \pi^n$ mit $n < 0$ berechnen wir $g^{-1}(\gamma) \cdot s \cdot g(\gamma)$ als

$$(18.16.1) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 1 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & ca^{-1} & \\ & & & cb^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \gamma(a - cb^{-1}) \\ 0 & b & \gamma(b - ca^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 & ca^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cb^{-1} \end{pmatrix}.$$

Nach Voraussetzung (18.2) korrespondiert f zu einem $GSp(4)(\mathcal{O}_F)$-Doppelkoset in $M(4,\mathcal{O}_F)$. Genau dann verschwindet folglich $f(g^{-1}(\gamma)sg(\gamma))$ nicht, wenn das Paar $(\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} b)$ in $\mathcal{A}(f)$ auftritt, $\gamma(b - ca^{-1})$ und $\gamma(a - cb^{-1})$ beide ganz sind sowie $|\mu(f)| = |a|^2 = |\mu(s)|$ gilt. In diesem Fall sind a und b beide ganz. Weiter sind $\gamma(b - ca^{-1}) = \gamma a^{-1}(ab - c)$ und $\gamma(a - cb^{-1}) = \gamma b^{-1}(ab - c)$. Diese beiden Elemente sind folglich genau im Fall

$$(18.16.2) \qquad \operatorname{ord}_F \gamma \geq \max\{\operatorname{ord}_F a, \operatorname{ord}_F b\} - \operatorname{ord}_F(ab - c)$$

aus $\mathcal{O}_F$. Wie oben bemerkt ist $c = a^2$. Daher ist $\operatorname{ord}(ab - c) = \operatorname{ord} a + \operatorname{ord}(b - a)$. Nach (15.13) ist $\operatorname{ord} a = r_0/2 \leq \operatorname{ord} b \leq r_0 = 2\operatorname{ord} a$ notwendig dafür, daß $(\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} b)$ in $\mathcal{A}(f)$ auftritt. Folglich ist

$$(18.16.3) \qquad \begin{aligned} &\max\{\operatorname{ord}_F a, \operatorname{ord}_F b\} - \operatorname{ord}_F(ab - c) \\ &= \operatorname{ord}_F b - \left(\operatorname{ord}_F a + \operatorname{ord}_F(b - a)\right) = \begin{cases} -\operatorname{ord}_F(b - a) & \operatorname{ord}_F a = \operatorname{ord}_F b \\ \operatorname{ord}_F b - 2\operatorname{ord}_F a & \operatorname{ord}_F a < \operatorname{ord}_F b. \end{cases} \end{aligned}$$

Zusammenfassend haben wir damit gezeigt

(18.17) Lemma: *Seien f der Heckeoperator $h(r_0, r_1, r_2)$ mit $0 \leq r_0/2 \leq r_1 \leq r_2 \leq r_0$ und $s = \operatorname{diag}(a, b, ca^{-1}, cb^{-1})$ ein singuläres Element vom Typ $(1,3)$ aus $A(F)$. Gelte entweder $\gamma = 0$ oder $\gamma = \pi^n$ mit einer ganzen Zahl $n < 0$. Genau dann verschwindet $f(g^{-1}(\gamma) \cdot s \cdot g(\gamma))$ für*

$$g(\gamma) = \begin{pmatrix} E_2 & \Gamma \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

nicht, wenn $|\mu(f)|_F = |\mu(s)|_F = |a|_F^2$ ist, das Paar $(\operatorname{ord}_F a, \operatorname{ord}_F b)$ in $\mathcal{A}(f)$ auftritt, damit insbesondere $\operatorname{ord}_F a \leq \operatorname{ord}_F b \leq 2\operatorname{ord}_F a$ gilt, sowie die Ungleichung

$$\operatorname{ord}_F \gamma \geq \operatorname{ord}_F b - \left(\operatorname{ord}_F a + \operatorname{ord}_F(a - b)\right)$$

oder dazu äquivalent

$$|\gamma|_F \leq \frac{|b|_F}{|a|_F \cdot |a - b|_F}$$

erfüllt ist.

(18.18) In einem nächsten Schritt wollen wir den Schnitt von $H(F)$ mit $g(\gamma)Kg^{-1}(\gamma)$ bestimmen. Dabei sei wieder entweder $\gamma = 0$ oder $\gamma = \pi^n$ mit $n < 0$. Für $\gamma = 0$ besteht der Schnitt aus ganz $H(\mathcal{O}_F)$. Sei daher $\gamma = \pi^n$ mit $n < 0$. Wir rechnen allgemein

$$g(\gamma)kg(\gamma) = \begin{pmatrix} E_2 & \Gamma \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & -\Gamma \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+\Gamma C & -A\Gamma - \Gamma C\Gamma + B + \Gamma D \\ C & D - C\Gamma \end{pmatrix}.$$

Explizit gelten dabei

$$A + \Gamma C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + \gamma c_3 & a_2 + \gamma c_4 \\ a_3 + \gamma c_1 & a_4 + \gamma c_2 \end{pmatrix},$$

$$D - C\Gamma = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - \gamma c_2 & d_2 - \gamma c_1 \\ d_3 - \gamma c_4 & d_4 - \gamma c_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} -A\Gamma - \Gamma C\Gamma + B + \Gamma D &= -\gamma \begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ a_4 & a_3 \end{pmatrix} - \gamma^2 \begin{pmatrix} c_4 & c_3 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} d_3 & d_4 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 + \gamma(d_3 - a_2) - \gamma^2 c_4 & b_2 + \gamma(d_4 - a_1) - \gamma^2 c_3 \\ b_3 + \gamma(d_1 - a_4) - \gamma^2 c_2 & b_4 + \gamma(d_2 - a_3) - \gamma^2 c_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zu lösen ist daher das System

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & y_2 \\ z_1 & 0 & w_1 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + \gamma c_3 & a_2 + \gamma c_4 & b_1 + \gamma(d_3 - a_2) - \gamma^2 c_4 & b_2 + \gamma(d_4 - a_1) - \gamma^2 c_3 \\ a_3 + \gamma c_1 & a_4 + \gamma c_2 & b_3 + \gamma(d_1 - a_4) - \gamma^2 c_2 & b_4 + \gamma(d_2 - a_3) - \gamma^2 c_1 \\ c_1 & c_2 & d_1 - c_2\gamma & d_2 - c_1\gamma \\ c_3 & c_4 & d_3 - c_4\gamma & d_4 - c_3\gamma \end{bmatrix}.$$

Wir analysieren zuerst die Einträge, die Null sein müssen. Zunächst sind $c_2 = c_3 = 0$ und $d_3 = c_4\gamma$, $d_2 = c_1\gamma$. Wir erhalten so $c_1 = d_2\gamma^{-1}$ und $c_4 = d_3\gamma^{-1}$. Weiter ist $a_2 = -\gamma c_4 = -d_3$. Analog gilt $a_3 = -d_2$. Die Bedingung $0 = b_2 + \gamma(d_4 - a_1) - \gamma^2 c_3$ gibt $a_1 = d_4 + \gamma^{-1} b_2$ wegen $c_3 = 0$. Die Bedingung $0 = b_3 + \gamma(d_1 - a_4) - \gamma^2 c_2$ gibt $a_4 = d_1 + \gamma^{-1} b_3$ wegen $c_2 = 0$. Weiter rechnen wir

$$\begin{aligned} b_1 + \gamma(d_3 - a_2) - \gamma^2 c_4 &= b_1 + \gamma(d_3 - (-d_3)) - \gamma^2(\gamma^{-1} d_3) = b_1 + \gamma d_3, \\ b_4 + \gamma(d_2 - a_3) - \gamma^2 c_1 &= b_4 + \gamma(d_2 - (-d_2)) - \gamma^2(\gamma^{-1} d_2) = b_4 + \gamma d_2. \end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir

$$(18.18.1) \qquad \mu_1 = \det \begin{pmatrix} d_4 + \gamma^{-1} b_2 & b_1 + \gamma d_3 \\ \gamma^{-1} d_2 & d_1 \end{pmatrix} = d_1 d_4 - d_2 d_3 + \gamma^{-1}(d_1 b_2 - d_2 b_1),$$

$$(18.18.2) \qquad \mu_2 = \det \begin{pmatrix} d_1 + \gamma^{-1} b_3 & b_4 + \gamma d_2 \\ \gamma^{-1} d_3 & d_4 \end{pmatrix} = d_1 d_4 - d_2 d_3 + \gamma^{-1}(d_4 b_3 - d_3 b_4).$$

Die Determinantenbedingung $\mu_1 = \mu_2$ an die Elemente aus $H(F)$ ist genau für $d_1 b_2 - d_2 b_1 = b_3 d_4 - b_4 d_3$ erfüllt. Das eben definierte Element aus $H(F)$ liegt in $g(\gamma)Kg^{-1}(\gamma)$ genau dann, wenn zusätzlich $\mu = \mu_1 = \mu_2$ eine Einheit aus $U(F)$ ist. Indem man zurückrechnet, also $[X_1, X_2]$ mit $g^{-1}(\gamma)$ konjugiert, erhält man explizit die Darstellung

$$(18.18.3) \qquad k = k(\mathbf{b}, \mathbf{d}) = \begin{pmatrix} d_4 + \gamma^{-1} b_2 & -d_3 & b_1 & b_2 \\ -d_2 & d_1 + \gamma^{-1} b_3 & b_3 & b_4 \\ d_2 \gamma^{-1} & 0 & d_1 & d_2 \\ 0 & d_3 \gamma^{-1} & d_3 & d_4 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind b_i und d_i aus $\mathcal{O}_F$ die freien Parameter. Sie unterliegen nur den oben beschriebenen Restriktionen $\mu = \mu_1 = \mu_2$ und $\operatorname{ord} \mu = 0$. Zusammenfassen erhalten wir somit das

(18.19) Lemma: *Gelte entweder $\gamma = 0$ oder $\gamma = \pi^n$ für eine ganze Zahl $n < 0$ und sei*

$$g(\gamma) = \begin{pmatrix} E_2 & \Gamma \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Schnitt von $H(F)$ mit $g(\gamma) \cdot GSp(4)(\mathcal{O}_F) \cdot g^{-1}(\gamma)$ besteht für $\gamma = 0$ aus $H(\mathcal{O}_F)$. Für $\gamma = \pi^n$ mit $n < 0$ besteht er aus allen Matrizen

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & y_2 \\ z_1 & 0 & w_1 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_4 + \gamma^{-1} b_2 & 0 & b_1 + \gamma d_3 & 0 \\ 0 & d_1 + \gamma^{-1} b_3 & 0 & b_4 + \gamma d_2 \\ \gamma^{-1} d_2 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} d_3 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

mit d_1, d_2, d_3, d_4, b_1, b_2, b_3, b_4 aus $\mathcal{O}_F$, für die $d_1 b_2 - d_2 b_1 = d_4 b_3 - d_3 b_4$ gilt und deren Ähnlichkeitsfaktor

$$\mu = d_1 d_4 - d_2 d_3 + \gamma^{-1}(d_1 b_2 - d_2 b_1) = d_1 d_4 - d_2 d_3 + \gamma^{-1}(d_4 b_3 - d_3 b_4)$$

eine Einheit aus $U(F)$ ist.

Wir wollen in einem nächsten Schritt die Volumina der eben berechneten Schnitte bestimmen. Um das Haarsche Maß auf H zu beschreiben zeigen wir zuerst das wohlbekannte allgemeine

(18.20) Lemma: *Seien A und B abgeschlossene Teilgruppen der lokalkompakten topologischen Gruppe G, so daß $A \times B$ abzählbar im Unendlichen und $A \cap B$ kompakt ist. Die Menge $AB = \{ab : a \text{ in } A,\ b \text{ in } B\}$ sei offen in G und ihr Komplement in G habe Maß Null bezüglich eines linksinvarianten Haarschen Maßes μ_G auf G. Seien μ_A und μ_B linksinvariante Haarsche Maße auf A und B respektive. Dann kann das Maß μ_G so gewählt werden , daß*

$$\int_G f(g) d\mu_G(g) = \int_{A \times B} f(ab) \, \frac{\delta_B(b)}{(\delta_G|_B)(b)} \, d\mu_A(a) \, d\mu_B(b)$$

für alle integrierbaren Abbildungen f auf G gilt.

(18.21) Wir bemerken, daß dabei δ_H für jede topologische Gruppe H der für alle a in H durch $\int_H f(xa) d\mu_H(x) = \delta_H(a) \int_H f(x) d\mu_H(x)$ gegebene Modulushomomorphismus ist. Für eine Liegruppe H gilt $\delta_H(a) = |\det(\mathrm{Ad}a|\mathrm{Lie}\, H)|_F$.

Wir zeigen die Aussage des Lemmas für $A \cap B = \{1\}$. Der allgemeine Fall läßt sich hierauf reduzieren. Wir erinnern, daß ein lokalkompakter topologischer Raum abzählbar im Unendlichen ist, wenn er Vereinigung abzählbar vieler kompakter Teilmengen ist. Unter dieser Bedingung ist die durch $\Phi(a, b) = ab^{-1}$ gegebene Abbildung $\Phi : A \times B \longrightarrow U = AB$ ein Homöomorphismus.
Zu zeigen ist dafür, daß Φ offen ist. Seien V eine Einsumgebung in $A \times B$ und W eine symmetrische, kompakte Einsumgebung, für die WW in V liegt. Sei $A \times B$ für eine Folge (z_n) die Vereinigung von $\{z_n W\}$. Der Bairesche Raum U ist dann Vereinigung der kompakten Mengen $\{\Phi(z_n W)\}$. Sei $\Phi(z_\ell \overline{w})$ für einen Index ℓ und $\overline{w}$ in W ein innerer Punkt von $\Phi(z_\ell W)$. Dann ist e ein innerer Punkt der Teilmenge $\Phi(\overline{w}^{-1} W)$ von $\Phi(V)$.
Wir definieren eine Operation von $A \times B$ auf U durch $\ell(a, b).u = aub^{-1}$ und auf $A \times B$ durch komponentenweise Linksmultiplikation. Dann ist Φ ein Intertwiningoperator zwischen den beiden $A \times B$–Mengen. Das Bildmaß π unter Φ des Produktmaßes $\mu_A \otimes \mu_B$ ist folglich invariant unter der Operation von ℓ. Die Restriktion μ_U des Haarschen Maßes von G auf U ist quasiinvariant unter der Operation ℓ und es gilt

$$\int_U f(\ell(a, b)^{-1}.x) d\mu_U(x) = \int_U f(a^{-1} x b) d\mu_U(x) = \delta_G(b) \int_U f(x) d\mu_U(x).$$

Damit sind π und $(\delta_G|_B)^{-1} \mu_U$ unter $A \times B$ invariante Maße auf U, differieren also nur um einen Skalar. Die Aussage des Lemmas folgt jetzt wegen der Identität $\int f(x^{-1}) dx = \int f(x) \delta(x^{-1}) dx$ nach Variablentransformation von b nach b^{-1} aus der expliziten Definition des Bildmaßes π.

(18.22) Wir wollen die Elemente $[X_1, X_2]$ aus $H(F)$ explizit parametrisieren und explizit ein Haarsches Maß auf H nach (18.20) angeben. Für μ aus F^* sei $\mu = x_i w_i - y_i z_i = \det X_i$. Ist $w_i \neq 0$, gilt $x_i = (\mu + y_i z_i)w_i^{-1}$. Für $w_i = 0$ ist $z_i = -\mu y_i^{-1}$ mit $y_i \neq 0$. Deshalb ist $H(F)$ die disjunkte Vereinigung der aus allen Matrizen der Form

$$(18.22.1) \qquad \begin{pmatrix} (\mu + y_1 z_1)w_1^{-1} & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & (\mu + y_2 z_2)w_2^{-1} & 0 & y_2 \\ z_1 & 0 & w_1 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & w_2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } w_1,\, w_2,\, \mu \neq 0,$$

$$(18.22.2) \qquad \begin{pmatrix} (\mu + y_1 z_1)w_1^{-1} & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & y_2 \\ z_1 & 0 & w_1 & 0 \\ 0 & -\mu y_2^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } w_1,\, y_2,\, \mu \neq 0,$$

$$(18.22.3) \qquad \begin{pmatrix} x_1 & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & (\mu + y_2 z_2)w_2^{-1} & 0 & y_2 \\ -\mu y_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & w_2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } y_1,\, w_2,\, \mu \neq 0,$$

$$(18.22.4) \qquad \begin{pmatrix} x_1 & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & y_2 \\ -\mu y_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu y_2^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } y_1,\, y_2,\, \mu \neq 0$$

respektive bestehenden vier Mengen. Davon liegen die letzten drei auf Hyperebenen in $H(F)$, haben also Maß Null in $H(F)$. Schreibt man eine Matrix (18.22.1) als partitionierte Matrix, gilt

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu W^{-1} & Y \\ 0 & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ W^{-1}Z & E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu W^{-1} & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & \mu^{-1}WY \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ W^{-1}Z & E_2 \end{pmatrix}$$

wegen $x_i = (\mu + y_i z_i)w_i^{-1}$. Explizit haben wir somit für jedes Element der Form (18.22.1) die Darstellung

$$(18.22.5) \qquad \begin{pmatrix} (\mu + y_1 z_1)w_1^{-1} & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & (\mu + y_2 z_2)w_2^{-1} & 0 & y_2 \\ z_1 & 0 & w_1 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu w_1^{-1} & & & \\ & \mu w_2^{-1} & & \\ & & w_1 & \\ & & & w_2 \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mu^{-1}w_1 y_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mu^{-1}w_2 y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ w_1^{-1}z_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & w_2^{-1}z_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für w_1, w_2, μ in F^* und y_1, y_2, z_1, z_2 in F. Wir bemerken, daß diese Parametrisierung nicht über $\mathcal{O}_F$ definiert ist. Die Teilmenge $H_{reg}(F)$ von $H(F)$ bestehe aus allen Matrizen der Form (18.22.1). Seien N_H die Gruppe der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen in H und $\overline{N_H}$ die Gruppe der unipotenten unteren Dreiecksmatrizen in H. Wir bemerken, daß N_H der Schnitt von H mit $N(\alpha)$ ist. Bezeichne schließlich $A = T_{split}$ den maximalzerfallenden Torus in $GSp(4)$. Die explizite Parametrisierung in (18.22.5) zeigt dann

$$(18.22.6) \qquad H_{reg} = A \cdot N_H \cdot \overline{N_H}.$$

Dabei schneiden sich diese Gruppen paarweise nur in der Eins. Sie sind alle unimodular. Durch die Produktmaße

$$(18.22.7) \qquad d_A\Big(\mathrm{diag}(\mu a^{-1}, \mu b^{-1}, a, b)\Big) = \frac{d_F a}{|a|_F} \otimes \frac{d_F b}{|b|_F} \otimes \frac{d_F \mu}{|\mu|_F},$$

$$(18.22.8) \qquad d_{N_H}\begin{pmatrix} E_2 & \begin{matrix} a & 0 \\ 0 & b \end{matrix} \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} = d_F a \otimes d_F b,$$

$$(18.22.9) \qquad d_{\overline{N_H}}\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ \begin{matrix} a & 0 \\ 0 & b \end{matrix} & E_2 \end{pmatrix} = d_F a \otimes d_F b$$

werden Haarsche Maße auf A, N_H und $\overline{N_H}$ respektive definiert. Dabei bezeichnet $d_F x$ das auf $\mathcal{O}_F$ normierte, additive Haarsche Maß auf F. Indem man (18.20) sukzessive auf die Gruppenpaare AN_H, $\overline{N_H}$ und A, N_H anwendet, folgt jetzt

(18.23) **Lemma:** *Durch die Vorschrift*

$$\int_H f(h) d\mu_H(h) = \int_A \int_{N_H} \int_{\overline{N_H}} f(ayz) d_A(a)\, d_{N_H}(y)\, d_{\overline{N_H}}(z)$$

wird ein Haarsches Maß μ_H auf der Gruppe H definiert.

Falls nicht anders gesagt, trage H im folgenden das so definierte Haarsche Maß μ_H. Wir schreiben dann auch vereinfachend $d_H h$ oder dh für $d\mu_H(h)$.

(18.24) **Das Volumen von $H(\mathcal{O}_F)$:** Im folgenden soll als erstes das Volumen von $H(\mathcal{O}_F)$ oder dazu äquivalent das Volumen von $H_{reg}(\mathcal{O}_F)$ berechnet werden. Sei hierfür μ aus $U(F)$ fixiert. Wir wollen das Volumen der Menge $H(\mu)$ aller der Elemente in $H_{reg}(\mathcal{O}_F)$ mit μ als Ähnlichkeitsfaktor bestimmen. Indem wir über $U(F)$ integrieren, erhalten wir dann das Volumen von $H(\mathcal{O}_F)$.
Das Maß auf $H(\mu)$ ist ein Produktmaß aus den Maßen der beiden $GL(2)$–Faktoren in (18.22.1). Zu berechnen ist deshalb das Volumen der Menge $G(\mu)$ aller Matrizen

(18.24.1) $$\begin{pmatrix} (\mu + yz)w^{-1} & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu w^{-1} & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu^{-1} wy \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w^{-1}z & 1 \end{pmatrix}$$

mit w in $\mathcal{O}_F - \{0\}$, y, z, $(\mu + yz)w^{-1}$ in $\mathcal{O}_F$ aus $GL(2, \mathcal{O}_F)$ bezüglich des Maßes

(18.24.2) $$d\begin{pmatrix} (\mu + yz)w^{-1} & y \\ z & w \end{pmatrix} = d_F^* w \otimes d_F(\mu^{-1}wy) \otimes d_F(w^{-1}z) = d_F^* w \otimes d_F y \otimes d_F z.$$

Die Matrizen (18.24.1) parametrisieren wir durch $\operatorname{ord} w$. In der Menge $G(\mu, k)$ seien für jede nichtnegative ganze Zahl k alle die Matrizen (18.24.1) mit $\operatorname{ord} w = k$ zusammengefaßt. Hat w die Ordnung Null, ist $(\mu + yz)w^{-1}$ aus $\mathcal{O}_F$ für alle Elemente y, z aus $\mathcal{O}_F$. Deshalb ist

(18.24.3) $$\operatorname{vol}(G(\mu, 0)) = \operatorname{vol}_F(U(F)) = \frac{q-1}{q}$$

mit q der Kardinalität des Restklassenkörpers von F. Sei deshalb $\operatorname{ord} w = k > 0$. Genau dann liegt $(\mu + yz)w^{-1}$ in $\mathcal{O}_F$, wenn yz in $-\mu + w\mathcal{O}_F = -\mu + \pi^k \mathcal{O}_F$ liegt. Insbesondere sind in diesem Fall yz und z Einheiten. Wir setzen $a = yz$, $b = z$. Wir haben dann gezeigt, daß $G(\mu, k)$ für $k > 0$ aus allen Matrizen der Form

(18.24.4) $$\begin{pmatrix} (\mu + a)w^{-1} & ab^{-1} \\ b & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu w^{-1} & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & w(b\mu)^{-1}a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w^{-1}b & 1 \end{pmatrix}$$

mit $w \in \pi^k U(F)$, b in $U(F)$ und a in $\{-\mu\} + \pi^k \mathcal{O}_F$ besteht. Die Menge $\{-\mu\} + \pi^k \mathcal{O}_F$ hat bezüglich des Maßes $d_F x$ auf F das Volumen $|\pi|^k = |w|$. Die Menge $U(F) = \{x \in \mathcal{O}_F : \operatorname{ord} x = 0\}$ hat bezüglich $d_F x$ das Volumen $\operatorname{vol}(U(F)) = (q-1)q^{-1}$. Wir rechnen $d(w(b\mu)^{-1}a) = |w| da$ und $d(w^{-1}b) = |w|^{-1} db$. Deshalb ist

$$\operatorname{vol}(G(\mu, k)) = \int_{\pi^k U(F)} \operatorname{vol}(U(F)) |\pi|^k \frac{d_F w}{|w|} = \operatorname{vol}(U(F)) \int_{\pi^k U(F)} d_F w.$$

Im letzten Integral wechsle man die Integrationsvariable von w nach $\pi^k w$ und integriere über $U(F)$. Indem man $d(\pi^k w) = |\pi|^k dw$ beachtet, erhält man

(18.24.5) $$\operatorname{vol}(G(\mu, k)) = |\pi|_F^k \cdot \operatorname{vol}(U(F))^2 = \frac{1}{q^k} \operatorname{vol}(U(F))^2$$

für $k \geq 1$. Die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ mit $|x| < 1$ hat den Grenzwert $(1-x)^{-1} - 1 = x(1-x)^{-1}$. Folglich ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(G(\mu)) &= \mathrm{vol}(G(\mu,0)) + \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}(G(\mu,k)) \\
&= \mathrm{vol}(U(F)) + \mathrm{vol}(U(F))^2 \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} q^{-k} \\
&= \mathrm{vol}(U(F)) + \mathrm{vol}(U(F))^2 \frac{1}{q}\left(\frac{q-1}{q}\right)^{-1} = \mathrm{vol}(U(F))\,(1+\frac{1}{q}).
\end{aligned}$$

Denn wie oben bemerkt ist $\mathrm{vol}(U(F)) = (q-1)q^{-1}$. Das Volumen von $H(\mu)$ ist das Quadrat des Volumens von $G(\mu)$. Es hängt insbesondere nicht von μ ab. Indem man zuletzt über μ integriert, erhält man somit abschließend das

(18.25) Lemma: *Bezüglich des Maßes μ_H auf der Gruppe H gilt*

$$\mathrm{vol}_H(H(\mathcal{O}_F)) = \mathrm{vol}_F(U(F))^3 \left(\frac{q+1}{q}\right)^2 .$$

Dabei bezeichnet q die Kardinalität des Restklassenkörpers von F.

(18.26) das Volumen von $H(\gamma)$: Sei im folgenden $\gamma = \pi^M$ mit M einer negativen ganzen Zahl. Wir wollen das Volumen der Teilgruppe $H(\gamma) = H(F) \cap g(\gamma) \cdot K \cdot g^{-1}(\gamma)$ für

$$g(\gamma) = \begin{pmatrix} E_2 & \Gamma \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

berechnen. Äquivalent dazu ist wieder das Volumen von $H_{reg}(\gamma) = H(\gamma) \cap H_{reg}$ zu bestimmen. Die Elemente aus $H(\gamma)$ hatten wir in (18.19) beschrieben. Wegen der Parametrisierung (18.22.5) der Elemente von H_{reg} besteht $H_{reg}(\gamma)$ mithin aus allen Elementen der Form

(18.26.1)
$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \frac{\mu + \gamma^{-1} a_1 (b_1 + \gamma a_2)}{w_1} & 0 & b_1 + \gamma a_2 & 0 \\ 0 & \frac{\mu + \gamma^{-1} a_2 (b_2 + \gamma a_1)}{w_2} & 0 & b_2 + \gamma a_1 \\ \gamma^{-1} a_1 & 0 & w_1 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} a_2 & 0 & w_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\mu}{w_1} & & & \\ & \frac{\mu}{w_2} & & \\ & & w_1 & \\ & & & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{w_1(b_1+\gamma a_2)}{\mu} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{w_2(b_2+\gamma a_1)}{\mu} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_1}{w_1\gamma} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{w_2\gamma} & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dabei sind μ aus $U(F)$, w_1, w_2 aus $\mathcal{O}_F - \{0\}$ und a_1, a_2, b_1, b_2 aus $\mathcal{O}_F$. Indem man die Gleichungen (18.18.1) und (18.18.2) für den Ähnlichkeitsfaktor μ in (18.19) nach den dortigen Parametern b_2 und b_3 löst, erhält man die zusätzlichen Restriktionen, daß

(18.26.2)
$$\alpha_i = \frac{(\mu - (w_1 w_2 - a_1 a_2))\gamma + a_i b_i}{w_i}$$

für $i = 1, 2$ beide aus $\mathcal{O}_F$ sind. Löst man diese Gleichungen nach $\mu - (w_1 w_2 - a_1 a_2)$, folgt, daß $a_1 a_2$ notwendigerweise in $\{-(\mu - w_1 w_2)\} + \gamma^{-1}\mathcal{O}_F$ liegt. Wir schreiben $a_1 a_2 = -(\mu - w_1 w_2) + \gamma^{-1}\alpha$ für α in $\mathcal{O}_F$. Setzt man dies in (18.26.2) ein, erhält man $\alpha_i = (\alpha + a_i b_i) w_i^{-1}$, also

$$b_i = a_i^{-1}(\alpha_i w_i - \alpha).$$

Ist a_i eine Einheit, dann liegt b_i in $\mathcal{O}_F$ für alle α_i in $\mathcal{O}_F$. Wir bemerken, daß $a_1 = a_2^{-1}(a_1 a_2)$ genau für $\mathrm{ord}\, a_2 \leq \mathrm{ord}\,(a_1 a_2)$ aus $\mathcal{O}_F$ ist. Seien jetzt $\mathrm{ord}\,(a_1 a_2) = n > 0$ und $\mathrm{ord}\, a_2 = s \geq 0$. Dann ist $w_1 w_2$ eine Einheit in $\mathcal{O}_F$. Weiter ist b_2 genau dann ganz, wenn $\alpha_2 w_2 - \alpha$ in $\pi^s\mathcal{O}_F$ liegt, also α_2 aus $\alpha w_2^{-1} + \pi^s \mathcal{O}_F = \alpha w_2^{-1} + a_2\mathcal{O}_F$ ist. Analog ist b_1 genau dann ganz, wenn α_1 aus $\alpha w_1^{-1} + \pi^{n-s}\mathcal{O}_F = \alpha w_1^{-1} + (a_1a_2)a_2^{-1}\mathcal{O}_F$ ist. Die Bedingungen an (18.26.2) sind daher zu den folgenden Bedingungen äquivalent

(18.26.3)	$a_1a_2 = -(\mu - w_1w_2) + \gamma^{-1}z_1$	mit $z_1 \in \mathcal{O}_F$,
(18.26.4)	$0 \leq \operatorname{ord}_F a_2 \leq \operatorname{ord}_F(a_1a_2)$,	
(18.26.5)	$a_1 = a_2^{-1}(a_1a_2)$,	
(18.26.6A)	$b_i = a_i^{-1}(w_iy_i - z_1)$	mit $y_i \in \mathcal{O}_F$ im Fall $\operatorname{ord}_F a_i = 0$,
(18.26.6B)	$b_i = y_i$	mit $y_i \in \mathcal{O}_F$ im Fall $\operatorname{ord}_F a_i > 0$.

In einem nächsten Schritt wollen wir für μ und z_1 fixiert die Elemente a_1a_2 mit vorgegebener Ordnung $n \geq 0$ parametrisieren. Gilt $\operatorname{ord}(w_1w_2) > 0$, dann ist $\mu - w_1w_2$ eine Einheit. In diesem Fall ist $\operatorname{ord}(a_1a_2) = 0$ wegen $\operatorname{ord}\gamma < 0$.
Sei deshalb w_1w_2 eine Einheit. Dies ist äquivalent zu $\operatorname{ord} w_1 = \operatorname{ord} w_2 = 0$. Genau dann gilt $\operatorname{ord}(\mu - w_1w_2 + \gamma^{-1}z_1) = n$ für eine ganze Zahl $n \geq 0$, wenn $\mu - w_1w_2 + \gamma^{-1}z_1$ in $\pi^n U(F)$ liegt oder dazu äquivalent

$$\mu + \gamma^{-1}z_1 = w_1w_2 + \pi^n w \qquad \text{für } w \text{ in } U(F)$$

gilt. Wir unterscheiden die Fälle $n = 0$ und $n > 0$. Sei zuerst $n = 0$. Wegen $\operatorname{ord}(\gamma^{-1}z_1) > 0$ gilt in diesem Fall $\mu + \gamma^{-1}z_1 = w_1w_2 + w$ für w in $U(F)$ genau dann, wenn $\mu - w_1w_2$ wieder eine Einheit ist. Dies ist genau dann richtig, wenn w_1w_2 nicht aus $\{\mu\} + \pi\mathcal{O}_F$ ist. In diesem Fall gilt $\operatorname{ord}((\mu - w_1w_2) + \gamma^{-1}z_1) = 0$ für alle z_1 in $\mathcal{O}_F$.
Sei deshalb $n \geq 1$. Wenn $\mu - w_1w_2$ wieder eine Einheit ist, ist auch $(\mu - w_1w_2) + \gamma^{-1}z_1$ wegen $\operatorname{ord}(\gamma^{-1}z_1) \geq 1$ wieder eine Einheit. Die Gleichung $(\mu - w_1w_2) + \gamma^{-1}z_1 = \pi^n w$ kann somit nur für $n = 0$ erfüllt werden. Als Konsequenz ist w_1w_2 aus $\mu + \pi\mathcal{O}_F$. Wir schreiben $w_1w_2 = \mu + \pi x$ für x in $\mathcal{O}_F$. Zu lösen ist $\gamma^{-1}z_1 = \pi x + \pi^n w$. Wir erhalten $x = \pi^{-1}(\gamma^{-1}z_1 - \pi^n w)$ für z_1 in $\mathcal{O}_F$ und w in $U(F)$. Einsetzen zeigt $w_1w_2 = \mu + (\gamma^{-1}z_1 - \pi^n w)$. Wir können somit festhalten

(18.26.7) *Seien μ aus $U(F)$ und z_1 aus $\mathcal{O}_F$. Dann gilt*

$$\operatorname{ord}_F(-(\mu - w_1w_2) + \gamma^{-1}z_1) = \begin{cases} 0 & \operatorname{ord}_F(w_1w_2) > 0 \\ 0 & w_1w_2 \in U(F) \setminus \{\{\mu\} + \pi\mathcal{O}_F\} \\ n & w_1w_2 = \mu + \gamma^{-1}z_1 - \pi^n w \textit{ mit } w \in U(F) \end{cases}$$

für jede ganze Zahl $n > 0$.

Wir bezeichen mit $V(u, x, y)$ das Volumen bezüglich $d_{N_H} \otimes d_{\overline{N_H}}$ der Menge aller Elemente (18.26.1) aus $H_{reg}(\gamma)$ mit Ähnlichkeitsfaktor $\mu = u$, mit $w_1 = x$ und $w_2 = y$. Für nichtnegative ganze Zahlen k und n bezeichne $V(u, k, n)$ das Volumen der Menge aller Elemente (18.26.1) aus $H_{reg}(\gamma)$ mit $\mu = u$, $\operatorname{ord} w_1 = k$, $\operatorname{ord} w_2 = n$ berechnet bezüglich der Restriktion des Maßes μ_H.

(18.26.8) Wir berechnen zuerst $V(\mu, k, n)$ mit $(k, n) \neq (0, 0)$. Dazu beschreiben wir die Volumenelemente auf den unipotenten Teilen N_H und $\overline{N_H}$ in termini der oben eingeführten Parameter z_1, y_1 und y_2. Die Integrationsvariablen auf N_H sind b_1 und b_2. Sie werden in der Form $b_1 = b_1(y_1, y_2)$ und $b_2 = b_2(y_2)$ parametrisiert. Die resultierende Jacobimatrix hat obere Dreiecksgestalt. Zu berechnen sind daher nur die Terme auf ihrer Hauptdiagonalen. Es gilt $d(\mu^{-1}w_1(b_1 + \gamma a_2)) = |\mu^{-1}w_1|db_1 = |\mu^{-1}w_1|d(a_2(a_1a_2)^{-1}(w_1y_1 - z_1)) = |\mu^{-1}w_1|.|a_2|.|a_1a_2|^{-1}.|w_1|dy_1$ und analog $d(\mu^{-1}w_2(b_2+\gamma a_1)) = |\mu^{-1}w_2|.|a_2|^{-1}.|w_2|dy_2$. Die Integrationsvariablen auf $\overline{N_H}$ sind a_1 und a_2. In termini von z_1 und a_1 sind folglich $d((w_1\gamma)^{-1}a_1) = |w_1\gamma|^{-1}d(a_2^{-1}(\mu - w_1w_2 + \gamma^{-1}z_1)) = |w_1\gamma|^{-1}|a_2|^{-1}|\gamma|^{-1}dz_1$ und $d((w_2\gamma)^{-1}a_2) = |w_2\gamma|^{-1}da_2$. Beachtet man (18.26.3) gilt so nach der Transformationsformel

$$\begin{aligned} &d_{N_H}\begin{pmatrix} E_2 & \begin{matrix}\mu^{-1}w_1(b_1+\gamma a_2) & 0 \\ 0 & \mu^{-1}w_2(b_2+\gamma a_1)\end{matrix} \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} d_{\overline{N_H}}\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ \begin{matrix}(w_1\gamma)^{-1}a_1 & 0 \\ 0 & (w_2\gamma)^{-1}a_2\end{matrix} & E_2 \end{pmatrix} \\ (18.26.9) \qquad &= \frac{|w_1|_F \cdot |w_2|_F}{|\mu - w_1w_2 + \gamma^{-1}z_1|_F \cdot |a_2|_F \cdot |\gamma|_F^3}\, dy_1 \otimes dy_2 \otimes dz_1 \otimes da_2. \end{aligned}$$

Dabei ist $d_F x$ das auf $\mathcal{O}_F$ normierte, additive Haarsche Maß auf F. Seien jetzt w_1 und w_2 mit $\operatorname{ord} w_1 = k$ und $\operatorname{ord} w_2 = n$ fixiert. Nach (18.26.7) sind dann $\operatorname{ord} a_2 = 0$ und $\operatorname{ord}(a_1 a_2) = \operatorname{ord}(\mu - w_1 w_2 + \gamma^{-1} z_1) = 0$. Somit läuft a_2 über die Elemente in $U(F)$. Keine Restriktionen gibt es an y_1, y_2 und z_1. Sie laufen über alle Elemente in $\mathcal{O}_F$. Nach (18.26.9) ist deshalb

$$V(\mu, w_1, w_2) = \frac{|w_1|_F \cdot |w_2|_F}{|\gamma|_F^3} \operatorname{vol}(U(F)).$$

Wir erhalten hieraus $V(\mu, k, n)$, indem wir bezüglich des multiplikativen Haarschen Maßes $d_F^* x = |x|^{-1} d_F x$ auf F^* die Variablen w_1 über $\pi^k U(F)$ und w_2 über $\pi^n U(F)$ integrieren. Die Faktoren $|w_1|.|w_2|$ kürzen sich dabei. Wegen $\operatorname{vol}(\pi^\ell U(F)) = |\pi|^\ell \operatorname{vol}(U(F))$ gilt folglich

$$V(\mu, k, n) = \left(\frac{\operatorname{vol}(U(F))}{|\gamma|_F}\right)^3 \cdot |\pi|_F^{k+n} \qquad \text{für } (k, n) \neq (0, 0). \tag{18.26.10}$$

(18.26.11) Wir wollen im folgenden $V(\mu, 0, 0)$ berechnen. Dazu bezeichnen wir für jede nichtnegative ganze Zahl ℓ mit $W(\mu, \ell)$ das Volumen aller Elemente (18.26.1) mit $\operatorname{ord}(w_1 w_2) = 0$ und $\operatorname{ord}(a_1 a_2) = \ell$ berechnet bezüglich der Restriktion des Maßes μ_H. Wegen (18.26.7) ist $V(\mu, 0, 0)$ die Summe dieser Volumina, wobei über alle $\ell \geq 0$ summiert wird.
Wir wollen zuerst $W(\mu, 0)$ berechnen. Das Volumenelement auf dem unipotenten Teil ist nach (18.26.6A) und (18.26.9) gegeben durch $|\gamma|^{-3} dy_1 \otimes dy_2 \otimes dz_1 \otimes da_2$. Auf dem halbeinfachen Teil integrieren wir bezüglich der Variablen $w_1 w_2$ und w_2. Die Volumenelemente sind daher $d_F^*(w_2^{-1}(w_1 w_2)) = d_F^*(w_1 w_2)$ und $d_F^* w_2$. Keine Restriktionen gibt es an z_1, y_1 und z_1. Sie laufen über $\mathcal{O}_F$. Die Variable a_2 läuft wegen (18.26.4) über $U(F)$. Die Variable w_2 läuft über $U(F)$. Nach (18.26.7) läuft $w_1 w_2$ über $U(F) \setminus \{\{\mu\} + \pi \mathcal{O}_F\}$. Diese Menge hat das Volumen $\operatorname{vol}(U(F)) - |\pi|$. Fassen wir die Terme zusammen, ergibt sich mithin

$$W(\mu, 0) = \left(\frac{\operatorname{vol}(U(F))}{|\gamma|_F}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{|\pi|_F}{\operatorname{vol}(U(F))}\right). \tag{18.26.12}$$

Sei daher jetzt $\ell \geq 1$. Nach (18.26.6B) ändert sich das Volumenelement auf N_H für $\operatorname{ord} a_i > 0$. Es gilt dann $b_i = b_i(y_i)$, so daß sich die Maße separat transformieren. Genauer rechnen wir $d(\mu^{-1} w_1 (b_1 + \gamma a_2)) = |\mu^{-1} w_1| db_1 = |\mu^{-1}| dy_1 = dy_1$ für $\operatorname{ord} a_1 > 0$, also für $\operatorname{ord} a_2 < \operatorname{ord}(a_1 a_2)$. Für $\operatorname{ord} a_2 > 0$ gilt analog $d(\mu^{-1} w_2 (b_2 + \gamma a_1)) = |\mu^{-1} w_2| dy_2 = dy_2$. In den Extremfällen $\operatorname{ord} a_2 = \operatorname{ord}(a_1 a_2)$, also $\operatorname{ord} a_1 = 0$, und $\operatorname{ord} a_2 = 0$ stimmen diese Volumenelemente mit den zur Parametrisierung (18.26.6A) korrespondierenden Volumenelementen überein. Die Volumenelemente auf $\overline{N_H}$ ändern sich nicht im Vergleich zu oben. Deshalb gilt hier

$$\begin{aligned} & d_{N_H} \begin{pmatrix} E_2 & \begin{matrix} \frac{w_1(b_1 + \gamma a_2)}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{w_2(b_2 + \gamma a_1)}{\mu} \end{matrix} \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} d_{\overline{N_H}} \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ \begin{matrix} \frac{a_1}{w_1 \gamma} & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{w_2 \gamma} \end{matrix} & E_2 \end{pmatrix} \\ & = \frac{1}{|a_2|_F \cdot |\gamma|_F^3} dy_1 \otimes dy_2 \otimes dz_1 \otimes da_2. \end{aligned} \tag{18.26.13}$$

Auf dem halbeinfachen Teil integrieren wir wieder bezüglich der Variablen $w_1 w_2 = w_1 w_2(w)$ und w_2. Hier ist aber $d_F^*(w_1 w_2) = d_F(\mu + \gamma^{-1} z_1 - \pi^\ell w) = |\pi|^\ell dw$ nach (18.26.7). Dabei läuft w über $U(F)$. Wie oben gibt es keine Restriktionen an die Variablen y_1, y_2 und z_1. Sie laufen über $\mathcal{O}_F$. Wegen (18.26.4) unterliegt a_2 der Bedingung $0 \leq a_2 \leq \ell$. Folglich kommt a_2 aus $\pi^i U(F)$ für $i = 0, \ldots, \ell$. Faßt man diese Terme zusammen, erhält man

$$W(\mu, \ell) = \left(\frac{\operatorname{vol}(U(F))}{|\gamma|_F}\right)^3 \cdot (\ell + 1) \cdot |\pi|_F^\ell = \left(\frac{\operatorname{vol}(U(F))}{|\gamma|_F}\right)^3 \cdot \frac{\ell + 1}{q^\ell} \qquad \text{für } \ell \geq 1. \tag{18.26.14}$$

Dabei bezeichnet q die Kardinalität des Restklassenkörpers von F. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir im folgenden

$$U = \operatorname{vol}(U(F)) = \frac{q-1}{q}. \tag{18.26.15}$$

Sei $|x| < 1$ Nach dem Produktsatz von Cauchy ist $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ das Quadrat der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Werten wir diese Reihen an der Stelle $q^{-1} = |\pi|$ aus, erhalten wir die speziellen Werte

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{-1} = (1-q^{-1})^{-1} = \frac{1}{U}, \tag{18.26.16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{-1} = \frac{q^{-1}}{1-q^{-1}} = \frac{|\pi|_F}{U} = \frac{1-U}{U}, \tag{18.26.17}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)q^{-1} = \frac{2q-1}{(q-1)^2} = \frac{1-U^2}{U^2}. \tag{18.26.18}$$

Nach Konstruktion ist $V(\mu,0,0)$ die Summe von $W(\mu,0)$ und dem Grenzwert der Reihe $\sum_{\ell\geq 1} W(\mu,\ell)$. Wegen $(1-|\pi|U^{-1}) + (1-U^2)U^{-2} = (U^2 - |\pi|U + 1 - U^2)U^{-2} = (1-|\pi|U)U^{-2}$ haben wir deshalb zusammenfassend

$$V(\mu,0,0) = \left(\frac{\mathrm{vol}(U(F))}{|\gamma|_F}\right)^3 \cdot \frac{1-|\pi|_F \cdot \mathrm{vol}(U(F))}{\mathrm{vol}(U(F))^2}. \tag{18.26.19}$$

Um das Volumen von $H(\gamma)$ zu bestimmen summieren wir die Volumina $V(\mu,k,n)$ für μ in $U(F)$ fixiert über k, $n \geq 0$ auf. Wir rechnen hierfür in der Notation oben

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} V(\mu,k,n)\\
&= V(\mu,0,0) + \sum_{k=1}^{\infty} V(\mu,k,0) + \sum_{n=1}^{\infty} V(\mu,0,n) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} V(\mu,k,n)\\
&= V(\mu,0,0) + \left(\frac{U}{|\gamma|_F}\right)^3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^{-k} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{-n} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q^{-(k+n)}\right)\\
&= \left(\frac{U}{|\gamma|_F}\right)^3 \left(\frac{1-|\pi|_F U}{U^2} + 2\frac{1-U}{U} + \frac{(1-U)^2}{U^2}\right)\\
&= \left(\frac{U}{|\gamma|_F}\right)^3 \frac{1-|\pi|_F U + 2U - 2U^2 + 1 - 2U + U^2}{U^2} = \left(\frac{U}{|\gamma|_F}\right)^3 \frac{2-|\pi|_F U - U^2}{U^2}.
\end{aligned}$$

Das Volumen von $H(\gamma)$ erhält man, indem man diesen Ausdruck über μ in $U(F)$ integriert. Dies gibt einen weitern Faktor U im Zähler. Wir bemerken, daß $|\pi| + U = q^{-1} + (q-1)q^{-1} = 1$ ist. Daher können wir die Konstante $(2-|\pi|U-U^2)U^{-1}$ zu $2U^{-1} - 1 = 2q(q-1)^{-1} - 1 = (2q-q+1)(q-1)^{-1} = (q+1)(q-1)^{-1}$ vereinfachen. Zusammenfassend haben wir damit gezeigt

(18.27) Lemma: *Seien $\gamma = \pi^n$ mit einer ganzen Zahl $n < 0$ und $g(\gamma)$ die Matrix*

$$g(\gamma) = \begin{pmatrix} E_2 & \Gamma \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \quad \textit{mit} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Bezeichne $H(\gamma)$ den Schnitt $H(F) \cap g(\gamma) \cdot GSP(4)(\mathcal{O}_F) \cdot g^{-1}(\gamma)$. Dann gilt

$$\mathrm{vol}_H(H(\gamma)) = \left(\frac{\mathrm{vol}(U(F))}{|\gamma|_F}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{\mathrm{vol}(U(F))} - 1\right) = \left(\frac{\mathrm{vol}(U(F))}{|\gamma|_F}\right)^3 \cdot \frac{q+1}{q-1}$$

berechnet bezüglich des Haarschen Maßes μ_H auf der Gruppe H und mit q der Kardinalität des Restklassenkörpers von F.

(18.28) Wir können jetzt das Orbitalintegral $O_s^G(f)$ für den als die charakteristische Funktion des Doppelkosets $K\mathrm{diag}(\pi^{r_1}, \pi^{r_2}, \pi^{r_0 - r_1}, \pi^{r_2 - r_0})K$ mit $K = GSp(4)(\mathcal{O}_F)$ und $0 \leq r_0/2 \leq r_1 \leq r_2 \leq r_0$ gegebenen Heckeoperator $f = h(r_0, r_1, r_2)$ auf $G(F) = GSp(4)(F)$ und das singuläre Element $s = \mathrm{diag}(a,-a,a,-a)$ aus $A(F)$ berechnen. Wir setzen voraus, daß die in (18.17) aufgeführten Bedingungen an s erfüllt sind. Sei wieder $H(\gamma) = H(F) \cap g(\gamma)Kg^{-1}(\gamma)$. Indem man die Volumina aus (18.25) und (18.27) in die Formel (12.12) für $O_s^G(f)$ einsetzt, erhält man nach (18.17) mit $N = \mathrm{ord}\, b - (\mathrm{ord}\, a + \mathrm{ord}\,(a-b)) = -\mathrm{ord}\,(2a)$ und $U = \mathrm{vol}(U(F))$

$$O_s^G(f) = \frac{1}{\mathrm{vol}_H(H(\mathcal{O}_F))} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\mathrm{vol}_H(H(\pi^{-k}))}$$
$$= \frac{1}{U^3}\left(\left(\frac{q}{q+1}\right)^2 + \frac{q-1}{q+1}\sum_{k=1}^{N} q^{-3k}\right)$$
$$= \frac{1}{U^3}\left(\left(\frac{q}{q+1}\right)^2 + \frac{q-1}{q+1}q^{-3}\frac{q^{-3N}-1}{q^{-3}-1}\right) = \frac{1}{U^3}\left(\left(\frac{q}{q+1}\right)^2 + \frac{q-1}{q+1}\,\frac{q^{3N}-1}{(q^3-1)q^{3N}}\right).$$

Wir bemerken, daß $(q^{3N}-1)q^{-3N} = 1 - q^{-3N} = 1 - |b|^3|a|^{-3}|a-b|^{-3}$ ist. Weiter schreiben wir $q(q+1)^{-1} = (q-1)(q+1)^{-1}((q-1)q^{-1})^{-1} = (q-1)(q+1)^{-1}U^{-1}$. In den Rechnungen zu (18.27) haben wir $(q+1)(q-1)^{-1} = 2U^{-1} - 1$ gezeigt. Somit gilt $q(q+1)^{-1} = (2U^{-1}-1)^{-1}U^{-1}$. Wir klammern in der Formel für $O_s^G(f)$ oben das Quadrat dieses Ausdrucks aus. Wegen der Identität $(q+1)^2q^{-2}(q-1)(q+1)^{-1} = U^2(2U^{-1}-1)^2(2U^{-1}-1)^{-1} = U^2(2U^{-1}-1)$ haben wir somit zusammenfassend in der Notation oben gezeigt

(18.29) Satz: *Seien f der Heckeoperator $h(r_0, r_1, r_2)$ und $s = \mathrm{diag}(a, -a, a, -a)$ ein singuläres Element aus $A(F)$. Genau dann verschwindet das Orbitalintegral $I_G(f)(s) = O_s^G(f)$ nicht, wenn $|\mu(f)|_F = |\mu(s)|_F = |a|_F^2$ ist und das Paar $(\mathrm{ord}_F a, \mathrm{ord}_F a)$ in $\mathcal{A}(f)$ auftritt. In diesem Fall gilt*

$$O_s^G(f) = \int_{H\backslash G} f(g^{-1}sg)\,\frac{dg}{dh} = \frac{1}{\mathrm{vol}_H(H(\mathcal{O}_F))}\left(1 + \frac{1}{\xi_F(2)}\cdot\left(1 - \frac{|b|_F^3}{|a|_F^3\cdot|a-b|_F^3}\right)\right).$$

Dabei ist $\xi_F(2) = 1/(1-q^{-2})$ der Wert der Zetafunktion ξ_F des lokalen Körpers F an der Stelle 2, wenn q die Kardinalität des Restklassenkörpers von F bezeichnet. Es gilt weiter $1/\xi_F(2) = \mathrm{vol}(U(F))^2(q+1)/(q-1)$.
Der Zentralisator von s in G, die Gruppe H, trägt das Haarsche Maß μ_H, bezüglich dessen $H(\mathcal{O}_F)$ das Volumen $\mathrm{vol}(U(F))^3(q+1)^2q^{-2} = \mathrm{vol}(U(F))^5((q+1)(q-1)^{-1})^2$ hat.

18B s singulär aus einem modulo dem Zentrum von $L(\beta)$ anisotropen, maximalen Torus in $L(\beta)$

Seien in diesem Abschnitt $L = F(\sqrt{A})$ mit $\mathrm{ord}\, A = 0, 1$ ein quadratischer Erweiterungskörper von F und s ein singuläres, F-rationales Element aus dem zu L assoziierten, modulo dem Zentrum von $L(\beta)$ anisotropen, maximalen Torus T in $L(\beta)$. Folglich ist

$$s = [x, \ell(y)] = [x, \begin{pmatrix} a & bA \\ b & a \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} (a^2-b^2A)x^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & bA \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{pmatrix} \tag{18.30}$$

für Elemente x in F^* und $y = a+b\sqrt{A}$ in L^*. Wir können dabei voraussetzen, daß s nicht aus $A(F)$ ist, also b von Null verschieden ist. Sei weiter daran erinnert, daß $\mu(s) = N_{L/F}(a+b\sqrt{A}) = a^2-b^2A$ ist. Die Eigenwerte von $\ell(a+b\sqrt{A})$ sind $a \pm b\sqrt{A}$. Ein Eigenvektor zu $a+b\sqrt{A}$ ist ${}^t(A, \sqrt{A})$, ein Eigenvektor zu $a-b\sqrt{A}$ ist ${}^t(A, -\sqrt{A})$. Mit

$$g(s) = \begin{pmatrix} A & A \\ \sqrt{A} & -\sqrt{A} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g^{-1}(s) = \frac{1}{2A}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{A} \\ 1 & -\sqrt{A} \end{pmatrix}$$

gilt dann $g^{-1}(s)\ell(a+b\sqrt{A})g(s) = \mathrm{diag}(a+b\sqrt{A},\, a-b\sqrt{A})$. Insbesondere ist

$$s' = [1, g^{-1}(s)]\cdot s\cdot[1, g(s)] = \mathrm{diag}\left((a^2-b^2A)x^{-1},\, a+b\sqrt{A},\, x,\, a-b\sqrt{A}\right).$$

Somit sind wir in der Situation von (18.3). Wir diskutieren die dort aufgeführten Möglichkeiten. Da b nach Vorraussetzung von Null verschieden ist, ist s' nicht vom Typ (1,2), (1,4) oder (2,3). Genau dann ist s' vom Typ (1,3), wenn $x^2 = a^2 - b^2A = \mu(s)$ ist. Da b von Null verschieden ist, sind $a+b\sqrt{A}$ und $a-b\sqrt{A}$ verschieden, s' ist also nicht vom Typ (2,4). Wir können festhalten

(18.31) Bemerkung: *Genau dann ist ein F-rationales Element $s = [x, \ell(a + b\sqrt{A})]$ aus dem zu L assoziierten Torus T in $L(\beta)$ singulär, wenn b von Null verschieden ist und $x^2 = N_{L/F}(a + b\sqrt{A}) = a^2 - b^2A = \mu(s)$ gilt.*

Ist f der Heckeoperator $h(r_0, r_1, r_2)$, dann verschwindet $I_L(f)(s)$ für einen Levifaktor L von G, der s enthält, nur dann nicht, wenn $r_0 = \operatorname{ord}\mu(f) = \operatorname{ord}\mu(s)$ ist. Folglich gilt der

(18.32) Satz: *Sei $s = [x, \ell(y)]$ für x in F^* und y in L^* ein F-rationales Element aus dem zu L assoziierten Torus T in $L(\beta)$, das singulär ist und nicht in T_{split} liegt. Sei L ein Standardlevifaktor von G, der s enthält. Dann verschwindet $I_L(f)(s)$, wenn $r_0 = \operatorname{ord}\mu(f)$ eine ungerade ganze Zahl ist. Insbesondere gelten*

$$I_{L(\beta)}(T(\pi))(s) = I_{GSp(4)}(T(\pi))(s) = 0$$

für den Heckeoperator $T(\pi) = h(1,1,1)$.

18C s singulär aus einem modulo dem Zentrum von $L(\alpha)$ anisotropen, maximalen Torus in $L(\alpha)$

(18.33) Voraussetzungen: Seien in diesem Abschnitt $L = F(\sqrt{A})$ mit $\operatorname{ord} A = 0, 1$ ein quadratischer Erweiterungskörper von F und s ein singuläres, F-rationales Element aus dem zu L assoziierten, modulo dem Zentrum von $L(\alpha)$ anisotropen, maximalen Torus T in $L(\alpha)$. Sei

$$s = \operatorname{diag}(\ell(a + b\sqrt{A}),\ c.{}^t\ell^{-1}(a + b\sqrt{A})) \tag{18.33.1}$$

für Elemente c in F^* und $a + b\sqrt{A}$ aus L^*. Bezüglich der Basis $1, \sqrt{A}$ von L über F gilt dabei

$$\ell(a + b\sqrt{A}) = \begin{pmatrix} a & bA \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{18.33.2}$$

Sei weiter s nicht aus $A(F)$, sei also b von Null verschieden. In der Notation von 17B unterscheiden wir die Fälle, daß L vom Typ I oder vom Typ II ist.

Die Situation oben deckt den Fall L vom Typ I ab. Wir werden den Fall II hierauf reduzieren: Wie in 18B bemerkt sind $a \pm b\sqrt{A}$ die Eigenwerte von $\ell(a + b\sqrt{A})$. Ist $g = g(s)$ wie in 18B, folgt

$$s' = \operatorname{diag}(g^{-1}, {}^tg).s.\operatorname{diag}(g, {}^tg^{-1}) = \operatorname{diag}(a + b\sqrt{A},\ a - b\sqrt{A},\ c(a + b\sqrt{A})^{-1},\ c(a - b\sqrt{A})^{-1}).$$

Damit sind wir wieder in der Situation von (18.3). Wir diskutieren die dort aufgeführten Möglichkeiten. Da b nach Voraussetzung von Null verschieden ist, ist s' nicht vom Typ (1,2). Genau dann ist s' vom Typ (1,4) oder (2,3), wenn $c = (a + b\sqrt{A}).(a - b\sqrt{A}) = a^2 - b^2A = N_{L/F}(a + b\sqrt{A})$ gilt. Wir haben in diesem Fall

$$c.{}^t\ell^{-1}(a + b\sqrt{A}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ -bA & a \end{pmatrix}.$$

Sei jetzt L vom Typ I, sei also $1, \sqrt{A}$ eine Ganzheitsbasis von L über F. Dann ist $\operatorname{ord}(a^2 - b^2A)$ für $\operatorname{ord} A = 0$ stets gerade im Fall $\operatorname{ord} 2 = 0$. Ist $\operatorname{ord} 2 > 0$, ist $\operatorname{ord}(a^2 - b^2A)$ ungerade nur für $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord} b$. Wie in (13.5) bemerkt gilt $m(-1) = m(-5) = 1$. Daher ist $1 = 2\operatorname{ord} b + m(A)$ richtig genau für $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord} b = 0$. Für $\operatorname{ord} A = 1$ ist $\operatorname{ord}(a^2 - b^2A)$ ungerade nur für $\operatorname{ord} b < \operatorname{ord} a$ und dann gilt $\operatorname{ord}(a^2 - b^2A) = 2\operatorname{ord} b + 1$. Insbesondere ist daher $\operatorname{ord}(a^2 - b^2A) = 1$ genau im Fall $\operatorname{ord} A = 1$, $\operatorname{ord} b = 0$ und $\operatorname{ord} a \geq 1$ erfüllt.
Genau dann ist s' vom Typ (1,3), wenn $c = (a + b\sqrt{A})^2$ ist. Da b von Null verschieden ist, heißt dies $a = 0$ und $c = b^2A$. Ungerade ist $\operatorname{ord}\mu(s) = \operatorname{ord} c$ folglich nur für $\operatorname{ord} A = 1$. Es gilt speziell $\operatorname{ord}\mu(s) = 1$ genau für $\operatorname{ord} b = 0$ und $\operatorname{ord} A = 1$.
Schließlich ist s' genau dann vom Typ (2,4), wenn $c = (a - b\sqrt{A})^2$ gilt. Da b von Null verschieden ist, ist dies wiederum äquivalent zu $a = 0$ und $c = b^2A$. Deshalb gilt

(18.34) Lemma (Typ I Situation): *Sei* $s = \mathrm{diag}(\ell(a+b\sqrt{A}), c^t\ell^{-1}(a+b\sqrt{A}))$ *ein singuläres Element aus* $T(F)$ *das nicht in* $A(F)$ *liegt. Für* L *vom Typ* I *ist* $\mathrm{ord}\, c = \mathrm{ord}\, \mu(s)$ *genau in den folgenden Fällen ungerade*

(1) *Es gelten* $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_F[1, \sqrt{A}]$, $\mathrm{ord}\, A = 1$, $\mathrm{ord}\, b < \mathrm{ord}\, a$ *und* $\mu(s) = c = N_{L/F}(a + b\sqrt{A}) = a^2 - b^2 A$. *In diesem Fall ist* $\mathrm{ord}\, c = 2\mathrm{ord}\, b + 1$.

(2) *Es gelten* $\mathrm{ord}\, A = 1$, $a = 0$ *und* $\mu(s) = c = -N_{L/F}(b\sqrt{A}) = b^2 A$.

(3) *Es gelten* $F = \mathbb{Q}_2$, $L = \mathbb{Q}_2(\sqrt{A})$ *mit* $A \in \{-1, -5\}$, $\mathrm{ord}\, a = \mathrm{ord}\, b$ *und* $\mu(s) = c = a^2 - b^2 A = N_{L/F}(a + b\sqrt{A})$ *mit* $\mathrm{ord}\, \mu(s) = 2\mathrm{ord}\, b + 1$. *Speziell gilt* $\mathrm{ord}\, \mu(s) = 1$ *genau für* $\mathrm{ord}\, a = \mathrm{ord}\, b = 0$.

Die bisherige Diskussion deckt den Fall ab, in dem L vom Typ I ist, also 1, $\sqrt{A}$ eine Ganzheitsbasis von L über F bilden. Seien daher jetzt $F = \mathbb{Q}_2$, $A = 5$ und $L = F(\sqrt{A}) = \mathbb{Q}_2(\sqrt{5})$. In diesem Fall bilden 1 und $(1 + \sqrt{5})/2$ eine Ganzheitsbasis von L über F. Es gilt

$$a + b\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \left(a + \frac{b}{2}\right) + \frac{b}{2}\sqrt{5} \overset{\text{def}}{=} x + y\sqrt{A}.$$

Wir können daher auch hier $b \neq 0$ voraussetzen. Dies schließt in der Notation von (18.3) aus, daß s' vom Typ (1,2) ist. Ist s' vom Typ (1,4) oder vom Typ (2,3), dann gilt $c = x^2 - y^2 A = a^2 + ab - b^2$. Folglich ist $\mathrm{ord}\, c$ in diesen beiden Fällen stets gerade.
Ist s' vom Typ (1,3), dann ist $c = (x + y\sqrt{A})^2 = (a^2 + ab + \frac{3}{2}b^2) + (a + \frac{b}{2})\frac{b}{2}\sqrt{A}$. Da b ungleich Null ist, heißt dies $a = -b/2$. Folglich ist in diesem Fall $c = 5/4.b^2$ und $\mathrm{ord}\, c = \mathrm{ord}\, 5 + 2\mathrm{ord}\, b - 2\mathrm{ord}\, 2 = 2(\mathrm{ord}\, b - 1)$ ist stets gerade.
Ist s' vom Typ (2,4), dann ist $c = (x - y\sqrt{A})^2 = (x^2 + y^2 A) - 2xy\sqrt{A}$. Analog ist dies genau im Fall $a = -b/2$ und $c = 5/4.b^2$ möglich, so daß $\mathrm{ord}\, c = 2(\mathrm{ord}\, b - 1)$ gilt. Somit erhalten wir das

(18.35) Lemma (Typ II Situation): *Sei* $s = \mathrm{diag}(\ell(a + b(1+\sqrt{5})/2), c^t\ell^{-1}(a + b(1+\sqrt{5})/2)$ *ein singuläres,* $\mathbb{Q}_2$*-rationales Element aus dem zu* $L = \mathbb{Q}_2(\sqrt{5})$ *assoziierten Torus* T *in* $L(\alpha)$, *das nicht über* $\mathbb{Q}_2$ *zu einem Element aus* $T_{split}(\mathbb{Q}_2)$ *konjugiert ist. Dann ist* b *von Null verschieden und es gelten mit* $c = \mu(s) = N_{L/F}(a + b(1 + \sqrt{5})/2)$ *entweder* $c = a^2 + ab - b^2$ *oder* $a = -b/2$ *und* $c = \frac{5}{4}b^2$. *In beiden Fällen ist* $\mathrm{ord}\, c$ *stets gerade.*

Ist $\mathrm{ord}\, \mu(f) = r_0$ ungerade, dann kann die notwendige Bedingung $\mathrm{ord}\, \mu(s) = r_0$ dafür, daß das Integral $I_L(f)(s)$ nicht verschwindet, nur für die in (18.34) aufgeführten Fälle erfüllt werden. Im folgenden Resultat fassen wir die Situation für den Heckeoperator $T(\pi)$ zusammen

(18.36) Kasuistik der im Fall $f = T(\pi)$ auftretenden Typen singulärer Elemente s: *Seien* $s = \mathrm{diag}(\ell(a + b\sqrt{A}), c.^t\ell(a + b\sqrt{A})^{-1})$ *ein singuläres Element aus* $T(F)$, *das nicht in* $A(F)$ *liegt. Sei* M *einer der Levifaktoren* $L(\alpha)$ *oder* $GSp(4)$.
Nur dann verschwindet $I_M(T(\pi))(s)$ *nicht, wenn* L *vom Typ* I *ist und* s *eine der folgenden Möglichkeiten für* $\mathrm{ord}\, \mu(s) = \mathrm{ord}\, c = 1$ *erfüllt*

(1) *Es sind* $\mathrm{ord}\, A = 1$, $0 = \mathrm{ord}\, b < \mathrm{ord}\, a$ *und* $\mu(s) = N_{L/F}(a + b\sqrt{A})$.

(2) *Es sind* $F = \mathbb{Q}_2$, $L = \mathbb{Q}_2(\sqrt{A})$ *mit* $A \in \{-1, -5\}$, $\mathrm{ord}\, a = \mathrm{ord}\, b = 0$ *und* $\mu(s) = N_{L/F}(a + b\sqrt{A})$.

(3) *Es sind* $\mathrm{ord}\, A = 1$, $a = 0$ *und* $\mu(s) = b^2 A = -N_{L/F}(a + b\sqrt{A})$.

Dies legt unser Programm für den Rest dieses Abschnittes fest. Um das Integral in der Situation von (18.36) zu berechnen, können wir daher im folgenden annehmen, daß L vom Typ I ist, also 1, $\sqrt{A}$ eine Ganzheitsbasis von L über F bilden. In einem ersten Schritt berechnen wir den Zentralisator in G der Elemente aus (18.34).

(18.37) Lemma: *Sei $s = \mathrm{diag}(\ell(a+b\sqrt{A}),\ c^t\ell^{-1}(a+b\sqrt{A}))$ ein singuläres Element aus $T(F)$ das nicht in $A(F)$ liegt. Gelte entweder*
(1) $c = N_{L/F}(a+b\sqrt{A}) = a^2 - b^2A$ oder
(2) $a = 0$ und $c = \mu(s) = -N_{L/F}(b\sqrt{A}) = b^2A$.
Im Fall (1) sei $\varepsilon = -1$, im Fall (2) sei $\varepsilon = 1$. Dann besteht der Zentralisator in $GSp(4)$ von s aus allen regulären Matrizen in $GSp(4)$ der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1A & \varepsilon y_2A & x_2 \\ y_1 & x_1 & \varepsilon x_2 & y_2 \\ y_3 & \varepsilon x_3 & x_4 & y_4 \\ x_3 & \varepsilon y_3A & y_4A & x_4 \end{pmatrix}.$$

Im Fall $a = 0$ und $c = b^2A$ ist

$$s = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & bA \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ bA & 0 \end{pmatrix}\right) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{diag}(A_0, B_0).$$

Im anderen Fall ist

$$s = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} a & bA \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -b \\ -bA & a \end{pmatrix}\right) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{diag}(A', B').$$

Um den Zentralisator von s zu berechnen, ist in beiden Fällen das durch

$$\begin{pmatrix} XA & UB \\ WA & ZB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & U \\ W & Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & U \\ W & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX & AU \\ BW & BZ \end{pmatrix}$$

gegebene Gleichungssystem $XA = AX$, $ZB = BZ$, $WA = BW$, $UB = AU$ zu lösen. Wegen $A' = aE_2 + A_0$ und $B' = aE_2 - B_0$ unterscheiden sich nur die Komponenten U und W. Wir berechnen zuerst die Komponenten X und Z. Wegen

$$\begin{pmatrix} x_{12}b & x_{11}bA \\ x_{22}b & x_{21}bA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & bA \\ b & 0 \end{pmatrix} = XA_0 = A_0X = \begin{pmatrix} bAx_{21} & bAx_{22} \\ bx_{11} & bx_{12} \end{pmatrix}$$

erhält man $x_{11} = x_{22}$ und $x_{21}A = x_{12}$. Analog folgt $z_{11} = z_{22}$ und $z_{21} = Az_{12}$ aus der Rechnung

$$\begin{pmatrix} z_{12}bA & z_{11}b \\ z_{22}bA & z_{21}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ bA & 0 \end{pmatrix} = ZB_0 = B_0Z = \begin{pmatrix} bz_{21} & bz_{22} \\ bAz_{11} & bAz_{12} \end{pmatrix}.$$

Weiter sind

$$A_0U = \begin{pmatrix} 0 & bA \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bAu_{21} & bAu_{22} \\ bu_{11} & bu_{12} \end{pmatrix}, \quad UB_0 = \begin{pmatrix} u_{12}bA & u_{11}b \\ u_{22}bA & u_{21}b \end{pmatrix}.$$

Somit erhält man $u_{12} = u_{21}$ und $u_{22}A = u_{11}$ aus $A_0U = UB_0$. Die Relation $A_0U = -UB_0$ gibt $u_{11} = -Au_{22}$ und $-u_{12} = u_{21}$. Schließlich ist

$$\begin{pmatrix} w_{12}b & w_{11}bA \\ w_{22}b & w_{21}bA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & bA \\ b & 0 \end{pmatrix} = WA_0, \quad B_0W = \begin{pmatrix} bw_{21} & bw_{22} \\ bAw_{11} & bAw_{12} \end{pmatrix}.$$

Somit erhält man $w_{12} = w_{21}$ und $w_{22} = w_{11}A$ aus $A_0W = WB_0$. Die Relation $A_0W = -WB_0$ gibt $-w_{11}A = w_{22}$ und $w_{12} = -w_{21}$. Das beendet den Beweis des Lemmas.

(18.38) Das Integral $I_{L(\alpha)}(f)(s)$: Als erste Konsequenz ist deshalb $T(F)$ der Schnitt von $L(\alpha)$ mit dem Zentralisator in $G(F)$ eines dieser Elemente. Das Integral $I_{L(\alpha)}(f)(s)$ verschwindet nur dann nicht, wenn $r_0 = \mathrm{ord}\,\mu(f) = \mathrm{ord}\,\mu(s) = 2\mathrm{ord}\,b + 1$ ist. In diesem Fall ist es nach (17.17) gegeben durch

$$(1) \qquad I_{L(\alpha)}(f)(s) = \int_{N(\alpha)}\int_{T\backslash L(\alpha)} f(m^{-1}sm.n)\frac{dm}{dt}\,dn = \sum\nolimits_{\xi} \frac{\#R(\xi|s)}{\|\xi\|_\infty \cdot |\det\xi|_F}.$$

Dabei läuft die Summe über alle Doppelkosets ξ in $GL(2,\mathcal{O}_F)\backslash GL(2,F)/GL(2,\mathcal{O}_F)$, deren Schnitt mit $\mathcal{A}(f)$ nicht leer ist, und $\|\xi\|_\infty$ bezeichnet nach (14.13) den ersten Elementarteiler von ξ. Wir erinnern daran, daß a und $\pm b$ nach dem Argument zu (13.9) für Körper vom Typ I gegeben sind durch $a = (\lambda+\mu)/2$ und $b = \pm(\lambda-\mu)/\sqrt{D_{L/F}}$ mit λ und μ den Eigenwerten von $\ell(a+b\sqrt{A})$ sowie $D_{L/F}$ der Diskriminante von L über F. Indem wir die Formel aus (17.18) an der Stelle $\mathrm{ord}\,N_{L/F}(x) = 1$ auswerten, erhalten wir speziell für $T(\pi)$ den

(18.39) Satz: *Gelte $F = \mathbb{Q}_2$, wenn die Charakteristik des Restklassenkörpers von F zwei ist. Seien $L = F(\sqrt{A})$ mit $\operatorname{ord} A \in \{0, 1\}$ ein verzweigter quadratischer Erweiterungskörper von F und $s = \operatorname{diag}(\ell(x), c.{}^t\ell^{-1}(x))$ ein singuläres, F-rationales Element aus dem zu L assoziierten maximalen Torus T in $L(\alpha)$, das nicht in T_{split} liegt. Seien λ und μ die Eigenwerte von $\ell(x)$, so daß*

$$s \sim \operatorname{diag}(\lambda,\ \mu,\ c\lambda^{-1},\ c\mu^{-1})$$

über L gilt. Gelte entweder $\mu(s) = c = N_{L/F}(x)$ oder $\lambda + \mu = 0$, $\mu(s) = -N_{L/F}(x)$. Für den Heckeoperator $T(\pi) = h(1,1,1)$ verschwindet das Integral $I_{L(\alpha)}(T(\pi))(s)$ genau dann nicht, wenn $\operatorname{ord}\mu(s) = \operatorname{ord}\mu(T(\pi)) = 1$ ist. Im Fall $\operatorname{ord}_F 2 = 0$ ist dann $\operatorname{ord} A = 1$. Seien $a = \operatorname{ord}_F((\lambda+\mu)/2)$ und $b = \operatorname{ord}_F((\lambda-\mu)/\sqrt{D_{L/F}})$. Für $\operatorname{ord} A = 1$ gilt genau dann $\operatorname{ord} N_{L/F}(x) = 1$, wenn $b = 0$, $a > 0$ sind. Im Fall $F = \mathbb{Q}_2$ und $\operatorname{ord} A = 0$, gilt $\operatorname{ord} N_{L/F}(x) = 1$ genau für $a = b = 0$. In diesen Fällen ist

$$I_{L(\alpha)}(T(\pi))(s) = \int_{N(\alpha)}\int_{T\backslash L(\alpha)} T(\pi)(m^{-1}sm.n)\frac{dm}{dt}\,dn = \frac{1}{|\mu(T(\pi))|_F} = q.$$

Dabei bezeichnet q die Kardinalität des Restklassenkörpers von F.

(18.40) Um das Integral $I_G(f)(s)$ zu berechnen konstruieren wir im folgenden zuerst Repräsentanten von $G_s\backslash G/K$. Indem man (13.6) und die Iwasawazerlegung $G = ANK$ von G verwendet, folgt zunächst, daß jedes Koset in $G_s\backslash G/K$ einen Repräsentanten der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & c\pi^{-n} \\ 0 & \pi^n & c & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi^{-n} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } n \geq 0$$

hat. Weiter ist

$$\begin{pmatrix} E_2 & \begin{matrix} \varepsilon y A & x \\ \varepsilon x & y \end{matrix} \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & c\pi^{-n} \\ 0 & \pi^n & c & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi^{-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+\varepsilon yA & (c+x)\pi^{-n} \\ 0 & \pi^n & c+\varepsilon x & d+y\pi^{-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi^{-n} \end{pmatrix}.$$

Sei zunächst $\varepsilon = 1$. Indem man in diesem Fall $x = -c$ und $y = -d\pi^n$ setzt, erhält man Repräsentanten mit $c = d = 0$. Indem man von rechts mit einer geeigneten unipotenten Matrix aus K multipliziert, kann man weiter erreichen, daß in a keine nichtnegativen π-Potenzen auftreten.
Im Fall $\varepsilon = -1$ ist $x = 0$. Man erhält hier also nur Repräsentanten mit $d = 0$ und kann erreichen, daß in a und c keine nichtnegativen π-Potenzen auftreten. Zusammenfassend haben wir damit gezeigt

(18.41) Lemma: *Sei $s = \operatorname{diag}(\ell(a+b\sqrt{A}),\ c^t\ell^{-1}(a+b\sqrt{A}))$ ein singuläres Element aus $T(F)$ das nicht in $A(F)$ liegt. Im Fall $a = 0$ und $c = \mu(s) = -N_{L/F}(b\sqrt{A}) = b^2A$ enthält jedes Doppelkoset in $G_s(F)\backslash G(F)/K$ einen Repräsentanten*

$$g(n,x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & \pi^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi^{-n} \end{pmatrix}$$

mit n einer nichtnegativen ganzen Zahl und $x = \sum_{k=N}^{-1} x(k)\pi^k$ für eine nichtpositive ganze Zahl N und Elemente $x(k)$ aus dem Restklassenkörper von F.
Im Fall $\mu(s) = c = N_{L/F}(a+b\sqrt{A}) = a^2 - b^2A$ enthält jedes Doppelkoset in $G_s(F)\backslash G(F)/K$ einen Repräsentanten

$$g(n,x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & y\pi^{-n} \\ 0 & \pi^n & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi^{-n} \end{pmatrix}$$

mit n einer nichtnegativen ganzen Zahl, $x = \sum_{k=N}^{-1} x(k)\pi^k$ und $y = \sum_{k=M}^{-1} y(k)\pi^k$ für nichtpositive ganze Zahlen N, M und Elemente $x(k)$, $y(k)$ aus dem Restklassenkörper von F.

Wir unterscheiden jetzt wieder Fälle. Sei im folgenden zunächst $\operatorname{ord} A = 1$, $a = 0$ und $c = \mu(s) = b^2A$. In diesem Fall (18.36)(3) ist

$$g^{-1}(n,x).s.g(n,x) = \begin{pmatrix} a & bA\pi^n & 0 & -bx\pi^{-n} \\ b\pi^{-n} & a & bx\pi^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & a & b\pi^{-n} \\ 0 & 0 & bA\pi^n & a \end{pmatrix}.$$

Genau dann ist folglich $0 \le \operatorname{ord}(bx\pi^{-n}) = \operatorname{ord} b + \operatorname{ord} x - n$ im Fall $\operatorname{ord} b \le n$, wenn $x = 0$ und $n = \operatorname{ord} b$ sind. Wir erhalten die

(18.42) **Bemerkung** ($\varepsilon = 1$): *Im Fall* $\operatorname{ord} A = 1$, $a = 0$, $\operatorname{ord} b \le n$ *und* $c = \mu(s) = b^2A$ *liegt* $g^{-1}(n,x) \cdot s \cdot g(n,x)$ *genau dann in* $M(4,\mathcal{O}_F)$, *wenn* $x = 0$ *und* $\operatorname{ord} b = n$ *sind.*

Jetzt gilt $\operatorname{ord}\mu(s) = 1$ nur für $\operatorname{ord} b = 0$. In diesem Fall liegt daher $g^{-1}(n,x).s.g(n,x)$ genau für $x = 0$ und $n = 0$ in $M(4,\mathcal{O}_F)$ und es gilt $g^{-1}(0,0).s.g(0,0) = s$. Nach der Kasuistik in (13.9) hat $\ell(a+b\sqrt{A})$ im Fall $0 = \operatorname{ord} b \le \operatorname{ord} a$ und $M = 0$ die Elementarteilermatrix $(\operatorname{ord} b, \operatorname{ord} b+1) = (0,1)$. Dieses Paar tritt in $\mathcal{A}(T(\pi))$ auf. Somit haben wir

(18.43) **Bemerkung** ($\varepsilon = 1$): *Im Fall* $\operatorname{ord} A = 1$, $a = 0$ *und* $c = \mu(s) = -N_{L/F}(y) = b^2A$ *verschwindet* $T(\pi)(g^{-1}(n,x) \cdot s \cdot g(n,x))$ *genau für* $x = 0$, $n = 0$ *und* $\operatorname{ord} b = 0$ *nicht.*

Um $I_G(T(\pi))(s)$ nach (12.12) zu berechnen, bleibt somit das Volumen von G_s zu bestimmen. Dazu verfahren wir wie beim Beweis von (18.29) in 18A, indem wir die Elemente einer Zariski–offenen Teilmenge von G_s explizit parametrisieren und dann zurückrechnen.

(18.44) **Eine Zerlegung der Zentralisatoren $C_G(s)$:** Explizit parametrisieren wollen wir

$$\chi = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1A & \varepsilon y_2A & x_2 \\ y_1 & x_1 & \varepsilon x_2 & y_2 \\ y_3 & \varepsilon x_3 & x_4 & y_4 \\ x_3 & \varepsilon y_3A & y_4A & x_4 \end{pmatrix} \tag{18.44.1}$$

aus G_s mit $\det X \ne 0$. Sie bilden eine Zariski–offene Teilmenge G_s^{reg} von G_s. Wir erinnern daran, daß $\varepsilon = 1$ genau für $a = 0$, $\mu(s) = -N_{L/F}(a+b\sqrt{A})$ und $\varepsilon = -1$ genau im Fall $\mu(s) = N_{L/F}(a+b\sqrt{A})$ ist. Für jedes Element χ aus G_s^{reg} ist jetzt $X = \ell(x)$ für ein Element x aus L^*. Insbesondere hat $X^{-1} = \ell(x^{-1})$ die gleiche Form wie X. Wir lösen zunächst

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ F & E_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & M \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & M \\ FX & FM+P \end{pmatrix}.$$

Dazu setzen wir $F = ZX^{-1}$. Wir behaupten, daß F dann die gleiche Form wie Z hat. Dazu rechnen wir in der offensichtlichen Notation

$$\begin{pmatrix} y & \varepsilon x \\ x & \varepsilon yA \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & bA \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay+\varepsilon xb & \varepsilon(ax+\varepsilon byA) \\ ax+\varepsilon byA & \varepsilon(ay+\varepsilon xb)A \end{pmatrix} \tag{18.44.2}$$

wegen $\varepsilon^2 = 1$. In den Bezeichnungen oben ist dann weiter $M = Y$ und es gilt $P = \mu^t X^{-1}$ mit μ dem Ähnlichkeitsfaktor von χ. Folglich haben wir

$$\chi = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ ZX^{-1} & E_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & \mu^t X^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_2 & X^{-1}Y \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & ZX^{-1}Y + \mu^t X^{-1} \end{pmatrix}. \tag{18.44.3}$$

Die explizite Rechnung

$$\begin{pmatrix} a & bA \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon yA & x \\ \varepsilon x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon(ay+bx)A & ax+byA \\ \varepsilon(ax+byA) & ay+bx \end{pmatrix} \tag{18.44.4}$$

zeigt, daß $X^{-1}Y$ wieder die gleiche Form wie Y hat. Wir bemerken

$$\begin{pmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & \mu^{-1}{}^tX \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ ZX^{-1} & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & \mu^tX^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ \mu^{-1}{}^tXZ & E_2 \end{pmatrix}.$$

Genau dann hat ${}^tXZ$ die gleiche Form wie Z, wenn ${}^t({}^tXZ) = {}^tZX$ die gleiche Form wie Z hat. Dies haben wir oben bereits gezeigt. Um es explizit zu sehen rechnen wir hierfür

$$(18.44.5) \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ bA & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & \varepsilon x \\ x & \varepsilon yA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay+bx & \varepsilon(ax+byA) \\ ax+byA & \varepsilon(ay+bx)A \end{pmatrix}.$$

Folglich gilt genauso

$$(18.44.6) \qquad \chi = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & \mu^tX^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ \mu^{-1}{}^tXZ & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & X^{-1}Y \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}.$$

Wir bezeichnen mit $U_2 = U_2(s)$ den Schnitt von G_s mit der Gruppe $N(\alpha)$ und mit $U_1 = U_1(s)$ den Schnitt von G_s mit der Gruppe $\overline{N(\alpha)}$, so daß gelten

$$(18.44.7) \qquad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon yA & x \\ 0 & 1 & \varepsilon x & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x,\ y \text{ in } F \\ x = 0 \text{ für } \varepsilon = -1 \end{matrix} \right\},$$

$$(18.44.8) \qquad U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ y & \varepsilon x & 1 & 0 \\ x & \varepsilon yA & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x,\ y \text{ in } F \\ x = 0 \text{ für } \varepsilon = -1 \end{matrix} \right\}.$$

Die Gruppen T, $U_1(s)$ und $U_2(s)$ schneiden sich paarweise jeweils nur in der Eins. Die Darstellungen (18.44.3) und (18.44.6) oben zeigen daher, daß G_s^{reg} die Zerlegungen

$$(18.44.9) \qquad G_s^{reg} = T(F) \cdot U_1(s) \cdot U_2(s) = U_1(s) \cdot T(F) \cdot U_2(s)$$

besitzt. Haarsche Maße auf $T(F)$, $U_1(s)$ und $U_2(s)$ respektive werden gegeben durch die Produktmaße

$$(18.44.10) \qquad d_T\left(\operatorname{diag}(\ell(a+b\sqrt{A}), c\cdot{}^t\ell^{-1}(a+b\sqrt{A}))\right) = \frac{d_Fc}{|c|_F} \otimes \frac{d_Fa \otimes d_Fb}{|N_{L/F}(a+b\sqrt{A})|_F},$$

$$(18.44.11) \qquad d_2\begin{pmatrix} E_2 & \begin{matrix} \varepsilon yA & x \\ \varepsilon x & y \end{matrix} \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} d_Fy \otimes d_Fx & \varepsilon = 1 \\ d_Fy & \varepsilon = -1, \end{cases}$$

$$(18.44.12) \qquad d_1\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ \begin{matrix} y & \varepsilon x \\ x & \varepsilon yA \end{matrix} & E_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} d_Fy \otimes d_Fx & \varepsilon = 1 \\ d_Fy & \varepsilon = -1 \end{cases}$$

respektive. Indem man (18.20) sukzessive auf die Paare TU_1, U_2 und T, U_1 anwendet, erhält man

(18.45) Lemma (Das Haarsche Maß μ_s auf G_s): *Durch die Vorschrift*

$$\int_{G_s} f(g)d\mu_s(g) = \int_T \int_{U_1(s)} \int_{U_2(s)} f(azy)\, d_Ta\ d_1z\ d_2y$$

wird ein Haarsches Maß μ_s auf der Gruppe G_s definiert

Falls nicht anders gesagt trage G_s im folgenden das eben definierte Haarsche Maß μ_s. Wir schreiben dann auch vereinfachend d_sg oder dg für $d\mu_s(g)$.

(18.46) Berechnung des Volumens von $G_s(\mathcal{O}_F)$ im Fall $\varepsilon = -1$: Wir wollen im folgenden das Volumen von $G_s(\mathcal{O}_F) = G_s \cap K$ oder dazu äquivalent das Volumen von $G_s^{reg}(\mathcal{O}_F)$ berechnen. Wir unterscheiden dabei die Fälle $\varepsilon = -1$ und $\varepsilon = 1$. In diesem Abschnitt soll für $\varepsilon = -1$ das Volumen von $G_s(\mathcal{O}_F)$ explizit bezüglich des eben definierten Maßes μ_s bestimmt werden. Dabei betrachten wir zusätzlich den Fall $\operatorname{ord} A = 0$.

Dazu schreiben wir die Parametrisierungen (18.44.3) und (18.44.6) eines Elementes χ aus G_s^{reg} als

(18.46.1) $$\chi = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & \mu^t X^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ Z & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & Y \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & XY \\ \mu^t X^{-1} Z & \mu^t X^{-1}(ZY + E_2) \end{pmatrix}.$$

Dabei seien

(18.46.2) $$X = \begin{pmatrix} a & bA \\ b & a \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} -yA & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \; Z = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & -zA \end{pmatrix},$$

so daß χ mit

(18.46.3) $$D = \det X = a^2 - b^2 A = N_{L/F}(a + b\sqrt{A})$$

die Darstellung

(18.46.4) $$\chi = \begin{pmatrix} a & bA & -ayA & ybA \\ b & a & -ybA & ay \\ \frac{\mu az}{D} & \frac{\mu zbA}{D} & \frac{\mu a(1-zyA)}{D} & -\frac{\mu b(1-zyA)}{D} \\ -\frac{\mu zbA}{D} & -\frac{\mu zaA}{D} & -\frac{\mu bA(1-zyA)}{D} & \frac{\mu a(1-zyA)}{D} \end{pmatrix}$$

hat. Genau dann liegt jetzt χ in $G_s^{reg}(\mathcal{O}_F)$, wenn gelten

(1) $\mu \in U(F)$, $a, b \in \mathcal{O}_F$,

(2) μazD^{-1}, $\mu azAD^{-1}$, $\mu bAzD^{-1} \in \mathcal{O}_F$,

(3) ay, $bAy \in \mathcal{O}_F$,

(4) $\mu a(1-zyA)D^{-1}$, $\mu b(1-zyA)D^{-1} \in \mathcal{O}_F$.

Sei $G = GSp(V, B)$ und trage V die symplektische Basis (e_1, f_1, e_2, f_2). Die Gruppe $K = GSp(4)(\mathcal{O}_F)$ ist dann der Stabilisator des Standardgitters $\Lambda = \mathcal{O}_F e_1 \oplus \mathcal{O}_F f_1 \oplus \mathcal{O}_F e_2 \oplus \mathcal{O}_F f_2$ in $GSp(4)(F)$. Genau dann liegt mithin eine Matrix g aus $GSp(4)(F)$ in K, wenn $g.\Lambda = E_4.\Lambda$ gilt. Indem man die Bilder dieser beiden Gitter unter der zur symplektischen Basis oben dualen Basis betrachtet, erhält man im Fall $g = \chi$ die notwendigen Bedingungen

(5) $\min\{\operatorname{ord} a, \operatorname{ord}(bA), \operatorname{ord}(aAy), \operatorname{ord}(bAy)\} = 0$,

(6) $\min\{\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} b, \operatorname{ord}(ay), \operatorname{ord}(bAy)\} = 0$,

(7) $\min\{\operatorname{ord}(az), \operatorname{ord}(zbA), \operatorname{ord}(a(1-zyA)), \operatorname{ord}(b(1-zyA))\} = \operatorname{ord} D$,

(8) $\min\{\operatorname{ord}(zbA), \operatorname{ord}(azA), \operatorname{ord}(bA(1-zyA)), \operatorname{ord}(a(1-zyA))\} = \operatorname{ord} D$

dafür, daß χ in $G_s^{reg}(\mathcal{O}_F)$ liegt. In der folgenden Diskussion unterscheiden wir die Fälle $\operatorname{ord} A = 1$ und $\operatorname{ord} A = 0$. Sei zuerst

$$\boxed{\operatorname{ord}_F A = 1.}$$

Wegen $\operatorname{ord} a$, $\operatorname{ord} b \geq 0$ und $\operatorname{ord} A = 1$ vereinfacht sich (5) zu $\min\{\operatorname{ord} a, \operatorname{ord}(bAy)\} = 0$. Die Gleichungen (7) und (8) reduzieren sich auf $\operatorname{ord} D = \min\{\operatorname{ord}(bAz), \operatorname{ord}(a(1-zyA))\}$.

(18.46.5) Sei zuerst $0 \leq \operatorname{ord} a \leq \operatorname{ord} b$. Dann ist $\operatorname{ord} D = 2\operatorname{ord} a$. Genau für $\operatorname{ord} y = -(\operatorname{ord} b + 1)$ ist weiter $\operatorname{ord}(bAy) = 0$. Dann ist aber $\operatorname{ord}(ay) = \operatorname{ord} a - \operatorname{ord} b - 1$ negativ im Widerspruch zu (3). Folglich ist in diesem Fall stets $\operatorname{ord} a = 0$, so daß $\operatorname{diag}(X, \mu^t X^{-1})$ aus $T(\mathcal{O}_F)$ kommt. Nach (3) gilt weiter $\operatorname{ord} y \geq 0$. Wegen $\operatorname{ord} D = 0$ ist $\operatorname{ord} z \geq 0$ nach (2). Für die so gewählten Parameter a, b, y und z ist (4) stets erfüllt.

(18.46.6) Sei jetzt $0 \leq \operatorname{ord} b < \operatorname{ord} a$. Dann ist $\operatorname{ord} D = 2\operatorname{ord} b + 1$. Wegen $\operatorname{ord} a > 0$ gilt weiter $\operatorname{ord} y = -(\operatorname{ord} b + 1)$ nach (5). Wegen $\operatorname{ord} a > \operatorname{ord} b$ ist $\operatorname{ord}(a(1-zyA)D^{-1}) > 0$ nach (4). Daher ist wie am Anfang bemerkt $\operatorname{ord} D = \operatorname{ord}(bAz)$ nach (8), so daß $\operatorname{ord} z = \operatorname{ord} b$ gilt. Für diese Werte von a, b, y und z sind (1), (2) und (3) erfüllt. Genau dann ist $\operatorname{ord}(b(1-zyA)) \geq \operatorname{ord} D$, wenn $1 - zyA$ in $b^{-1}D\mathcal{O}_F$ liegt, also y aus $(zA)^{-1} + D(bzA)^{-1}\mathcal{O}_F$ ist. Wir bemerken $\operatorname{ord}(zA) = \operatorname{ord} b + 1$ und $\operatorname{ord} D - \operatorname{ord}(zbA) = 2\operatorname{ord} b + 1 - (2\operatorname{ord} b + 1) = 0$. Deshalb ist (4) genau für y aus $(zA)^{-1} + \mathcal{O}_F$ erfüllt.

(18.46.7) Das Volumen von $G_s^{reg}(\mathcal{O}_F)$ erhalten wir jetzt als die Summe der beiden oben berechneten disjunkten Mengen. Das Volumen V_1 der in (18.46.5) beschriebenen Menge ist $\mathrm{vol}(U(F))^2$. Es ist also mit dem Volumen von $T(\mathcal{O}_F)$ bezüglich μ_T identisch. Das Volumen der in (18.46.6) beschriebenen Menge ist gegeben durch

$$V_2 = \int_{U(F)} \int_{\mathcal{O}_F} \int_{b\pi\mathcal{O}_F} \int_{bU(F)} \int_{(zA)^{-1} + \mathcal{O}_F} d_F y \, d_F z \, \frac{d_F a \, d_F b}{|a^2 - b^2 A|_F} \, d_F^* \mu .$$

Wie oben bemerkt ist dabei $|a^2 - b^2 A| = |b^2 A| = |b^2 \pi|$. Da $d_F y$ translationsinvariant ist, gibt das innerste Integral in V_2 das Volumen von $\mathcal{O}_F$. Es ist also Eins. Wechselt man in den beiden anderen Integralen die Variablen von z nach bz und von a nach $b\pi a$ respektive, erhält man

$$V_2 = \mathrm{vol}(U(F)) \int_{\mathcal{O}_F} \frac{|b\pi| \cdot |b|}{|b^2 \pi|} \int_{\mathcal{O}_F} \int_{U(F)} dz \, da \, db = \mathrm{vol}(U(F))^2 .$$

Für $\mathrm{ord}\, A = 1$ hat also $G_s(\mathcal{O}_F)$ das Volumen $2\,\mathrm{vol}(T(\mathcal{O}_F))$, das wir als $(1 + |\pi A^{-1}|)\mathrm{vol}(T(\mathcal{O}_F))$ interpretieren. Sei deshalb jetzt

$$\boxed{\mathrm{ord}_F A = 0.}$$

(18.46.8) Sei zuerst $0 \le \mathrm{ord}\, a < \mathrm{ord}\, b$ oder $0 \le \mathrm{ord}\, a < \mathrm{ord}\, b$. Wir setzen $m = \min\{\mathrm{ord}\, a, \mathrm{ord}\, b\}$ und $M = \max\{\mathrm{ord}\, a, \mathrm{ord}\, b\}$. Dann ist $\mathrm{ord}\, D = 2m$. Aus (2) erhalten wir $\mathrm{ord}\, z \ge -m + 2m = m$, aus (3) resultiert $\mathrm{ord}\, y \ge -m$. Die Bedingung (5) ist äquivalent zu $0 = m + \min\{0, \mathrm{ord}\, y\}$ und (8) vereinfacht sich zu $\mathrm{ord}\, D = m + \min\{\mathrm{ord}\, z, \mathrm{ord}\,(1 - zyA)\}$, also zu $m = \min\{\mathrm{ord}\, z, \mathrm{ord}\,(1 - zyA)\}$.

(18.46.8A) Im Fall $m = 0$ erhält man somit $\mathrm{ord}\, z, \mathrm{ord}\, y \ge 0$. Für diese Parameterwerte ist die Bedingung (4) stets erfüllt.

(18.46.8B) Sei $m \ge 1$ Notwendig in diesem Fall ist dann $m + \mathrm{ord}\, y = 0$, also $\mathrm{ord}\, y = -m$ nach (5). Gelte $\mathrm{ord}\, z > m$. Dann ist $\mathrm{ord}\,(zyA) > m - m + \mathrm{ord}\, A = 0$, so daß $1 - zyA$ eine Einheit ist. Ein Widerspruch zu $\mathrm{ord}\,(1 - zyA) \ge m$. Deshalb gilt $\mathrm{ord}\, z = m$. Genau dann ist $\mathrm{ord}\,(1 - zyA) \ge m$, wenn y in $(zA)^{-1} + \pi^m (zA)^{-1} \mathcal{O}_F = (zA)^{-1} + \mathcal{O}_F$ liegt. Für diese Wahl der Parameter a, b, y und z sind dann die Bedingungen (1)–(4) erfüllt.

(18.46.9) Sei jetzt $0 \le \mathrm{ord}\, a = \mathrm{ord}\, b$. In diesem Fall ist $\mathrm{ord}\, D = 2\mathrm{ord}\, a + 1$. Nach (3) ist weiter $\mathrm{ord}\, y \ge -\mathrm{ord}\, a$. Wegen (2) ist $\mathrm{ord}\, z \ge \mathrm{ord}\, D - \mathrm{ord}\, a = \mathrm{ord}\, a + 1$. Somit ist $\mathrm{ord}\,(zyA) \ge \mathrm{ord}\, a + 1 - \mathrm{ord}\, a = 1$. Dies zeigt $\mathrm{ord}\,(1 - zyA) = 0$. Als Konsequenz erhalten wir $\mathrm{ord}\,(a(1 - zyA)) = \mathrm{ord}\, a < 2\mathrm{ord}\, a + 1 = \mathrm{ord}\, D$. Dieser Widerspruch zeigt, daß der Fall $0 \le \mathrm{ord} = \mathrm{ord}\, b$ nicht eintritt.

(18.46.10) Wir können jetzt das Volumen von $G_s(\mathcal{O}_F)$ im Fall $\mathrm{ord}\, A = 0$ berechnen. Es ist die Summe der Volumina der beiden in (18.46.8A) und (18.46.8B) beschriebenen Mengen. Das Volumen V_1 der Menge (18.46.8A) ist identisch mit dem Volumen $\mathrm{vol}(U(F))^2$ von $T(\mathcal{O}_F)$ bezüglich μ_T. Das Volumen V_2 der in (18.46.8B) beschriebenen Menge ist aus Symmetriegründen gegeben durch

$$V_2 = 2 \int_{U(F)} \int_{\pi\mathcal{O}_F} \int_{a\pi\mathcal{O}_F} \int_{aU(F)} \int_{(zA)^{-1} + \mathcal{O}_F} d_F y \, d_F z \, \frac{d_F b \, d_F a}{|a^2 - b^2 A|_F} \, d_F^* \mu .$$

Dabei ist $|a^2 - b^2 A| = |a^2|$. Wechselt man sukzessive die Variablen z nach az, b nach $a\pi b$ und a nach πa, nimmt man als Faktor $|a\pi|^2$ im Zähler auf. Somit ist $V_2 = |\pi| \mathrm{vol}(U(F))^2$ wegen $2|\pi|^2 = |\pi| = 2^{-1}$. Im Fall $\mathrm{ord}\, A = 0$ hat also $G_s(\mathcal{O}_F)$ das Volumen $(1 + |\pi|)\mathrm{vol}(U(F))^2 = (1 + |\pi A^{-1}|)\mathrm{vol}(T(\mathcal{O}_F))$. Wir bemerken, daß $A = D_{L/F}/4$ nach (13.2) modulo $U(F)^2$ gilt. Wir fassen dies explizit zusammen im folgenden

(18.47) Lemma ($\varepsilon = -1$): *Sei $s = \mathrm{diag}((\ell(a + b\sqrt{A}), c \cdot {}^t\ell^{-1}(a + b\sqrt{A}))$ ein singuläres Element aus $T(F)$, das nicht in $A(F)$ liegt. Im Fall $c = N_{L/F}(a + b\sqrt{A})$ gilt dann*

$$\mathrm{vol}_s(G_s(\mathcal{O}_F)) = \left(1 + \frac{|\pi|_F}{|A|_F}\right) \cdot \mathrm{vol}_T(T(\mathcal{O}_F)) = \left(1 + \frac{|\pi|_F}{|A|_F}\right) \cdot \mathrm{vol}_F(U(F))^2 .$$

Dabei trägt G_s das Haarsche Maß μ_s und es gilt $A = \frac{1}{4} D_{L/F}$ mit $D_{L/F}$ der Diskriminante von L über F.

(18.48) Kein Lemma:

(18.49) Kein Korollar:

(18.50) Der Fall $\varepsilon = -1$: Wegen (18.42) und (18.43) bleibt der Fall $c = N_{L/F}(a + b\sqrt{A})$ zu diskutieren. Hier gilt zunächst für alle Repräsentanten $g(n, x, y)$ aus (18.41)

(18.50.1)
$$
\begin{aligned}
&g^{-1}(n,x,y)\cdot s\cdot g(n,x,y)\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x & -y \\ 0 & \pi^{-n} & -y\pi^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi^{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & bA & & \\ b & a & & \\ & & a & -b \\ & & -bA & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & y\pi^{-n} \\ 0 & \pi^{n} & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi^{-n} \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} a & bA\pi^{n} & 2byA & bx\pi^{-n} \\ b\pi^{-n} & a & bx\pi^{-n} & 2by\pi^{-2n} \\ 0 & 0 & a & -b\pi^{-n} \\ 0 & 0 & -bA\pi^{n} & a \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Gelte wiederum $\operatorname{ord} b \leq n$. Dann ist die Bedingung $0 \leq \operatorname{ord}(bx\pi^{-n}) = \operatorname{ord} b - n + \operatorname{ord} x$ nur für $\operatorname{ord} b = n$ und $x = 0$ erfüllt. Die Bedingung $0 \leq \operatorname{ord}(2by\pi^{-2n})$ ist in diesem Fall äquivalent zu $\operatorname{ord} b = n \leq \operatorname{ord} 2 + \operatorname{ord} y$. Folglich erhalten wir die

(18.50.2) Bemerkung: *Nur für $x = 0$, $n = \operatorname{ord} b \leq \operatorname{ord} 2 + \operatorname{ord} y$ liegt $g^{-1}(n,x,y)\cdot s\cdot g(n,x,y)$ in $M(4, \mathcal{O}_F)$. Insbesondere liegt $g^{-1}(n,x,y)\cdot s\cdot g(n,x,y)$ im Fall $0 = \operatorname{ord} b$ und $\operatorname{ord} 2 = 0$ nur für $x = 0$, $y = 0$ und $n = 0$ in $M(4, \mathcal{O}_F)$.*

Im Fall $\operatorname{ord}_F 2 = 0$ sind wir daher auch hier in der gleichen Situation wie im vorherigen Fall. Zusammenfassend erhalten wir somit den

(18.51) Satz: *Gelte $F = \mathbb{Q}_2$, wenn der Restklassenkörper von F die Charakteristik zwei hat. Seien $L = F(\sqrt{A})$ mit $\operatorname{ord} A = 1$ ein quadratischer Erweiterungskörper von F und $s = \operatorname{diag}(\ell(x), c\,{}^t\ell^{-1}(x))$ ein singuläres, F-rationales Element aus dem zu L assoziierten maximalen Torus T in $L(\alpha)$, das nicht in T_{split} liegt. Seien λ und μ die Eigenwerte von $\ell(x)$, so daß*

$$s \sim \operatorname{diag}(\lambda,\, \mu,\, c\lambda^{-1},\, c\mu^{-1})$$

über L ist. Seien $a = \operatorname{ord}_F((\lambda+\mu)/2)$ und $b = \operatorname{ord}_F((\lambda-\mu)/\sqrt{D_{L/F}})$ mit $D_{L/F}$ der Diskriminante von L über F. Gelte entweder $\lambda + \mu = 0$, $\mu(s) = c = -N_{L/F}(x)$ oder seien $\operatorname{ord}_F 2 = 0$, $\mu(s) = c = N_{L/F}(x)$.
Genau dann verschwindet $I_G(T(\pi))(s)$ für den Heckeoperator $T(\pi) = h(1,1,1)$ nicht, wenn $\operatorname{ord}_F N_{L/F}(x) = \operatorname{ord}_F \mu(T(\pi)) = 1$ ist. Dies ist genau für $b = 0$ und $a > 0$ richtig. In diesem Fall gilt

$$I_G(T(\pi))(s) = \int_{G_s\backslash G} T(\pi)(g^{-1}sg)\frac{dg}{dm} = \frac{1}{\operatorname{vol}(G_s(\mathcal{O}_F))}.$$

Berechnet bezüglich des Maßes μ_s ist dabei $\operatorname{vol}(G_s(\mathcal{O}_F)) = (1 + |\pi A^{-1}|_F)\cdot \operatorname{vol}(U(F))^2$ im Fall $\lambda + \mu = 0$ und $-\lambda\mu = \mu(s)$.

Im Rest des Abschnittes wollen wir jetzt das Orbitalintegral $O_s^G(T(\pi))$ in dem nach (18.36) einzig noch offenen Fall

$$\boxed{\operatorname{ord}_F 2 \geq 1,\ 0 = \operatorname{ord}_F b \leq \operatorname{ord}_F a \text{ und } \mu(s) = N_{L/F}(a + b\sqrt{A})}$$

berechnen. Dann ist nach Voraussetzung $F = \mathbb{Q}_2$ und es gilt $\operatorname{ord}_F 2 = 1$. Wir behaupten

(18.52) Lemma: *Für alle Elemente c, d in F mit $\operatorname{ord} c = \operatorname{ord} d$ sind die Doppelnebenklassen $G_s(F)g(0,0,c)K$ und $G_s(F)g(0,0,d)K$ gleich.*

(18.53) Hierfür berechnen wir zunächst allgemein für X aus $G_s(F)$

$$g^{-1}(0,0,\gamma)\cdot X\cdot g(0,0,c)$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&0&-\gamma\\0&1&-\gamma&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&bA&-yA&x\\b&a&-x&y\\z&-w&g&d\\w&-zA&dA&g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&c\\0&1&c&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(18.53.1)
$$=\begin{pmatrix}1&0&0&-\gamma\\0&1&-\gamma&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&bA&(bc-y)A&ac+x\\b&a&ac-x&y+bc\\z&-w&g-wc&d+cz\\w&-zA&(d-zc)A&g+wc\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a-w\gamma&(b+z\gamma)A&(bc-y-\gamma(d-zc))A&ac+x-\gamma(g+wc)\\b-z\gamma&a+w\gamma&ac-x-\gamma(g-wc)&y+bc-\gamma(d+zc)\\z&-w&g-wc&d+zc\\w&-zA&(d-zc)A&g+wc\end{pmatrix}.$$

(18.53.2) Gelte $\operatorname{ord} c=\operatorname{ord}\gamma$. Wir setzen $a=1$, $b=z=w=0$. Dann geben die symplektischen Bedingungen

(1)	$aw=-zbA$	(3)	$ad-xz=yw-bg$
(2)	$xg=-ydA$	(4)	$\mu=ag+xw+(bd+zy)A$

an die Matrix X zunächst $d=x=0$. Deshalb ist

$$g^{-1}(0,0,\gamma)\cdot X\cdot g(0,0,c)=\begin{pmatrix}1&0&-yA&c-\gamma g\\0&1&c-\gamma g&y\\0&0&g&0\\0&0&0&g\end{pmatrix}.$$

Wählt man eine Einheit g so, daß $c=\gamma g$ ist, liegt diese Matrix dann in K. Das zeigt die Behauptung des Lemmas.

(18.53.3) Sei jetzt $G=GSp(V,B)$ und trage V die symplektische Basis (e_1,f_1,e_2,f_2). Seien $\Lambda_\infty=(\mathcal{O}_Fe_1)\oplus(\mathcal{O}_Ff_1)\oplus(\mathcal{O}_Fe_2)\oplus(\mathcal{O}_Ff_2)$ und $\Lambda_N=g(0,0,\pi^N).\Lambda_\infty$ für jede negative ganze Zahl N. Wir untersuchen jetzt, wann es für negative ganze Zahlen N und für $S=\infty$ oder $S<N$ aus Z ein Element X wie oben gibt mit $X.\Lambda_S=\Lambda_N$. Setzt man $c=\pi^S$ und $\gamma=\pi^N$, heißt dies

$$\begin{pmatrix}a&bA&(bc-y)A&ac+x\\b&a&ac-x&y+bc\\z&-w&g-wc&d+cz\\w&-zA&(d-zc)A&g+wc\end{pmatrix}\Lambda_\infty=\begin{pmatrix}1&0&0&\gamma\\0&1&\gamma&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\Lambda_\infty.$$

Wir bemerken weiterhin, daß die Formel für $g^{-1}(0,0,\gamma).X.g(0,0,c)$ weiterhin speziell $\operatorname{ord} z$, $\operatorname{ord} w$, $\operatorname{ord}(bz\pm\gamma)$, $\operatorname{ord}(a\pm w\gamma)$, $\operatorname{ord}(g\pm wc)$, $\operatorname{ord}(d\pm zc)$, $\operatorname{ord}((ac\pm x)-\gamma(g\pm wc))$, $\operatorname{ord}((bc+y)-\gamma(d+zc))\geq 0$ zeigt. Indem man die Bilder der beiden Darstellungen des Gitters unter den Elementen der zu der symplektischen Basis dualen Basis berechnet, folgen weiter

(5)	$\min\{\operatorname{ord} a,\operatorname{ord} bA,\operatorname{ord}(bc-y)A,\operatorname{ord}(ac+x)\}=\min\{0,\operatorname{ord}\gamma\}=\operatorname{ord}\gamma,$
(6)	$\min\{\operatorname{ord} a,\operatorname{ord} b,\operatorname{ord}(ac-x),\operatorname{ord}(y+bc)\}=\operatorname{ord}\gamma,$
(7)	$\min\{\operatorname{ord} z,\operatorname{ord} w,\operatorname{ord}(g-wc),\operatorname{ord}(d+cz)\}=0,$
(8)	$\min\{\operatorname{ord} w,\operatorname{ord} zA,\operatorname{ord}(d-zc)A,\operatorname{ord}(g+wc)\}=0.$

(18.53.4) Wir betrachten zuerst den Fall $c=0$, so daß

$$\begin{pmatrix}a&bA&-yA&x\\b&a&-x&y\\z&-w&g&d\\w&-zA&dA&g\end{pmatrix}\Lambda_\infty=\begin{pmatrix}1&0&0&\gamma\\0&1&\gamma&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\Lambda_\infty.$$

gilt. Dann ist $\min\{\operatorname{ord} z, \operatorname{ord} w, \operatorname{ord} g, \operatorname{ord} d\} = 0$ und weiter gilt $\min\{\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} b, \operatorname{ord} x, \operatorname{ord} y\} = \min\{\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} bA, \operatorname{ord} yA, \operatorname{ord} x\} = \operatorname{ord}\gamma$. Gilt $\operatorname{ord} A = 1$, sind speziell $\min\{\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} x, \operatorname{ord} y\} = \operatorname{ord}\gamma$ im Fall $\operatorname{ord} b = \operatorname{ord}\gamma$ und $\min\{\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} b, \operatorname{ord} x\} = \operatorname{ord}\gamma$ im Fall $\operatorname{ord} y = \operatorname{ord}\gamma$.
Seien x, y aus F, so daß $x+y$ und $x-y$ beide aus $\mathcal{O}_F$ sind. Dann liegen zunächst $2x$ und $2y$ beide in $\mathcal{O}_F$, so daß $\operatorname{ord} x, \operatorname{ord} y \geq -\operatorname{ord}_F 2 = -1$ gilt. Im Fall $\min\{\operatorname{ord} x, \operatorname{ord} y\} < 0$ folgt darüberhinaus $\operatorname{ord} x = \operatorname{ord} y$. Wir wenden dieses Argument auf die Einträge der Matrix $g^{-1}(0,0,\gamma).X.g(0,0,0)$ an und erhalten die notwendigen Bedingungen

(9) $\operatorname{ord} a$, $\operatorname{ord}(w\gamma) \geq -1$ und $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord}(w\gamma)$ im Fall $\min\{\operatorname{ord} a, \operatorname{ord}(w\gamma)\} < 0$.
(10) $\operatorname{ord}(\gamma g) = \operatorname{ord}(ac - \gamma g)$, $\operatorname{ord} x = \operatorname{ord}(x - \gamma wc) \geq -1$ und $\operatorname{ord} x = \operatorname{ord}(\gamma g)$ im Fall $\min\{\operatorname{ord} x, \operatorname{ord}(\gamma g)\} < 0$.

Im Fall $\operatorname{ord} A = 0$ gelten zusätzlich

(11) $\operatorname{ord} b$, $\operatorname{ord}(z\gamma) \geq -1$ und $\operatorname{ord} b = \operatorname{ord}(z\gamma)$ im Fall $\min\{\operatorname{ord} b, \operatorname{ord}(z\gamma)\} < 0$.
(12) $\operatorname{ord}(\gamma d) = \operatorname{ord}(bc - \gamma d)$, $\operatorname{ord} y = \operatorname{ord}(y - \gamma zc) \geq -1$ und $\operatorname{ord} y = \operatorname{ord}(\gamma d)$ im Fall $\min\{\operatorname{ord} y, \operatorname{ord}(\gamma d)\} < 0$.

(18.53.5) Wir untersuchen die Fälle $\operatorname{ord} A = 0$ und $\operatorname{ord} A = 1$ jetzt getrennt weiter. Sei zunächst $\operatorname{ord} A = 0$. Die Bedingungen (9) – (12) zeigen, daß $m = \min\{\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} b, \operatorname{ord} x, \operatorname{ord} y\} \geq -1$ ist. Deshalb kann $m = \operatorname{ord}\gamma$ für $\operatorname{ord}\gamma \leq -2$ nicht erfüllt werden. Wir setzen daher weiter $\operatorname{ord}\gamma = -1$ voraus. In einem nächsten Schritt analysieren wir die symplektischen Bedingungen (1) – (4). Aus (1) und (2) erhalten wir

$$b = -aw(zA)^{-1} \qquad \text{und} \qquad x = -g^{-1}ydA.$$

Setzt man diese Relationen in (3) ein, erhalten wir $ad + z(g^{-1}ydA) = yw + gaw(zA)^{-1}$, also $y(w - dzAg^{-1}) = a(d - wg(zA)^{-1})$. Genau dann ist $w - dzAg^{-1} = 0$, wenn $d - wg(zA)^{-1} = 0$ ist. Sei zunächst $w - g^{-1}dzA$ von Null verschieden. Hier ist $(d - wg(zA)^{-1}).(w - dg^{-1}zA)^{-1} = (-g^{-1}zA)^{-1} = -g(zA)^{-1}$. Folglich sind $y = -ag(zA)^{-1}$ und $x = -g^{-1}ydA = az^{-1}d$. Für $\mu = ag + xw + (bd + zy)A$ erhalten wir somit

$$\mu = ag + (az^{-1}d)w + (d(-aw(zA)^{-1}) + z(-ag(zA)^{-1}))A = ag + az^{-1}dw - az^{-1}dw - ag = 0.$$

Deshalb ist notwendigerweise $w - g^{-1}dzA = 0$. Indem man jetzt für w substituiert, folgt zuerst $b = -aw(zA)^{-1} = -a(g^{-1}dzA)(zA)^{-1} = -ag^{-1}d$. Für μ erhält man dann den Ausdruck $\mu = ag + (-g^{-1}ydA).(g^{-1}dzA) + (d(-ag^{-1}d) + zy)A = ag - zyA(dg^{-1})^2A - ag(dg^{-1})^2A + zyA = ag(1 - (dg^{-1})^2A) + zyA(1 - (dg^{-1})^2A)$, also

$$\mu = (ag + zyA)(1 - (dg^{-1})^2A) = (dg^{-1})^2(ag + zyA)((d^{-1}g)^2 - A).$$

Wir analysieren jetzt weiter die Bedingung $0 = \min\{\operatorname{ord} w, \operatorname{ord} z, \operatorname{ord} d, \operatorname{ord} g\}$. Sei zuerst $\operatorname{ord} w = 0$. Dann ist $\operatorname{ord}(w\gamma) = \operatorname{ord}\gamma < 0$. Somit folgt aber $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord}\gamma$ aus (9). Die Darstellung $b = -aw(zA)^{-1}$ zeigt $\operatorname{ord} b = \operatorname{ord}\gamma$ und $\operatorname{ord} z = 0$. Gelte umgekehrt $\operatorname{ord} z = 0$. Aus (11) folgt $\operatorname{ord} b = \operatorname{ord}\gamma$. Die Darstellung von b oben zeigt jetzt $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord}\gamma$ und $\operatorname{ord} w = 0$.
Sei $\operatorname{ord} d = 0$. Aus (12) folgt dann $\operatorname{ord} y = \operatorname{ord}\gamma$. Die Darstellung $x = -g^{-1}dAy$ zeigt $\operatorname{ord} x = \operatorname{ord}\gamma$ und $\operatorname{ord} g = 0$. Gelte umgekehrt $\operatorname{ord} g = 0$. Aus (10) folgt $\operatorname{ord} x = \operatorname{ord}\gamma$. Die Darstellung von x oben zeigt jetzt $\operatorname{ord} y = \operatorname{ord}\gamma$ und $\operatorname{ord} d = 0$.
Wir analysieren die Bedingung $\operatorname{ord}\mu = 0$. Seien zunächst $\operatorname{ord} d = \operatorname{ord} g = 0$ und $\operatorname{ord} x = \operatorname{ord} y = \operatorname{ord}\gamma = -1$. Dann ist $\operatorname{ord}(A - (d^{-1}g)^2) = m(A) = 1$ wie in (18.18) bemerkt. Daher ist notwendigerweise $\operatorname{ord}(ag + zyA) = -1$. Für $\operatorname{ord} z = 0$ ist $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord}\gamma$, also $\operatorname{ord}(ag + zyA) \geq 0$. Folglich gilt $\operatorname{ord} z \geq 1$. Notwendig für $\operatorname{ord}(ag + zyA) = -1$ ist dann aber $-1 = \operatorname{ord}(ag) = \operatorname{ord} a$. Aus (9) erhalten wir $\operatorname{ord} w = 0$. Wie oben gezeigt ist dann notwendigerweise auch $\operatorname{ord} z = 0$. Ein Widerspruch.
Seien deshalb $\operatorname{ord} w = \operatorname{ord} z = 0$ und $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord} b = \operatorname{ord}\gamma = -1$. Nach Voraussetzung ist $w = zA(g^{-1}d)$, so daß $0 = \operatorname{ord}(g^{-1}d)$ folgt. Damit ist wieder $\operatorname{ord}(A - (d^{-1}g)^2) = m(A) = 1$. Notwendig für $\operatorname{ord}\mu = 0$ ist deshalb $\operatorname{ord}(ag + zyA) = -1$. Für $\operatorname{ord} g = 0$ ist $\operatorname{ord} y = \operatorname{ord}\gamma = -1$, so daß $\operatorname{ord}(ag + zyA) \geq 0$ folgt. Deshalb ist hier $\operatorname{ord} g \geq 1$. Notwendig für $\operatorname{ord}(ag + zyA) = -1$ ist dann aber $\operatorname{ord} y = -1$. Aus (12) erhalten wir $\operatorname{ord} d = 0$. Wie oben bemerkt folgt hieraus aber $\operatorname{ord} g = 0$. Dieser endgültige Widerspruch zeigt, daß im Fall $\operatorname{ord} A = 0$ keine Matrix X mit $X.\Lambda_\infty = \Lambda_\gamma$ existiert.

(18.53.6) Betrachten wir jetzt den Fall $\operatorname{ord} A = 1$. Gelte zunächst $\operatorname{ord} x = \operatorname{ord} \gamma$. Dann ist $\operatorname{ord}(x - \gamma g) \geq 0$ nur für $\operatorname{ord} g = 0$ zu erfüllen. Wegen (2) erhalten wir weiter $\operatorname{ord} \gamma \leq \operatorname{ord} y = \operatorname{ord}(-xg(dA)^{-1}) = \operatorname{ord} x - \operatorname{ord} d - 1 = \operatorname{ord} \gamma - 1 - \operatorname{ord} d$, also $\operatorname{ord} d \leq -1$. Ein Widerspruch zu $\operatorname{ord} d \geq 0$.
Sei $\operatorname{ord} y = \operatorname{ord} \gamma$. Die Bedingung $\operatorname{ord}(y - \gamma d) \geq 0$ ist dann nur für $\operatorname{ord} d = 0$ zu erfüllen. Dann ist weiter $\operatorname{ord} \gamma \leq \operatorname{ord} x = \operatorname{ord}(-g^{-1} y d A) = \operatorname{ord} y + \operatorname{ord} d + 1 - \operatorname{ord} g = \operatorname{ord} \gamma + 1 - \operatorname{ord} g$, also $\operatorname{ord} g \leq 1$.
Sei zunächst $\operatorname{ord} g = 0$, so daß $\operatorname{ord} x = \operatorname{ord} \gamma + 1$ ist. In diesem Fall ist dann weiter $\min\{\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} b\} = \operatorname{ord} \gamma$. Ist $\operatorname{ord} b = \operatorname{ord} \gamma$, folgt $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord} \gamma$ wie oben bemerkt. Daher ist in diesem Fall stets $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord} \gamma$. Wegen $\operatorname{ord}(a - w\gamma) \geq 0$ ist dann weiter $\operatorname{ord} w = 0$. Wegen (1) ist somit $\operatorname{ord} \gamma = \operatorname{ord} aw = \operatorname{ord} z + \operatorname{ord} b + 1 \geq \operatorname{ord} b + 1 \geq \operatorname{ord} \gamma + 1$. Ein Widerspruch.
Sei $\operatorname{ord} g = 1$. Dann ist $\operatorname{ord} x = \operatorname{ord} \gamma$. Die Bedingung $\operatorname{ord}(x - \gamma g) \geq 0$ ist somit nur für $\operatorname{ord} g = 0$ zu erfüllen. Ein Widerspruch der $\operatorname{ord} y > \operatorname{ord} \gamma$ zeigt. Somit ist $\operatorname{ord} b = \operatorname{ord} \gamma$ oder $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord} \gamma$. Wie oben bemerkt ist daher in den verbleibenden Fällen stets
$\operatorname{ord} a = \operatorname{ord} \gamma$. Die Bedingung $\operatorname{ord}(a - w\gamma) \geq 0$ zeigt dann $\operatorname{ord} w = 0$. Aus (1) folgt $\operatorname{ord} \gamma = \operatorname{ord}(aw) = \operatorname{ord}(zbA) = \operatorname{ord} z + \operatorname{ord} b + 1$. Wegen $\operatorname{ord} z \geq 0$ zeigt dies insbesondere $\operatorname{ord} b < \operatorname{ord} \gamma$. Dieser endgültige Widerspruch zeigt das

(18.54) Lemma: *Seien $F = \mathbb{Q}_2$ und $s = \operatorname{diag}(\ell(x), c \cdot {}^t\ell^{-1}(x))$ mit $c = N_{L/F}(x)$ und* $\operatorname{ord} c = 1$. *Dann sind für $N < 0$ die Doppelkosets $G_s(F)g(0,0,0)K$ und $G_s(F)g(0,0,\pi^{-N})K$ disjunkt.*

(18.55) Notwendige Kongruenzbedingungen: Wir wollen im folgenden für $\gamma = \pi^{-1} = 2^{-1}$ das Volumen der Menge $G_s(\gamma) = G_s(F) \cap g(0,0,\gamma) \cdot K \cdot g^{-1}(0,0,\gamma)$ oder dazu äquivalent das Volumen von $G_s^{res}(\gamma) = G_s(\gamma) \cap G_s^{res}$ bezüglich des in (18.45) definierten Haarschen Maßes μ_s auf G_s berechnen. Die Elemente χ aus $G_s^{res}(\gamma)$ schreiben wir nach (18.46.1) in der Form

$$\chi = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & \mu^t X^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ Z & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & Y \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & XY \\ \mu^t X^{-1} Z & \mu^t X^{-1}(ZY + E_2) \end{pmatrix} \tag{18.55.1}$$

für Matrizen X, Y und Z der Form

$$X = \begin{pmatrix} a & bA \\ b & a \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -yA & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & -zA \end{pmatrix}. \tag{18.55.2}$$

Der Ähnlichkeitsfaktor μ einer solchen Matrix χ ist notwendigerweise aus $U(F)$. Dies sei im folgenden vorausgesetzt. Sei weiter $D = \det X = a^2 - b^2 A = N_{L/F}(a + b\sqrt{A})$. Genau dann liegt jetzt χ in $G_s^{res}(\gamma)$, wenn $g^{-1}(0,0,\gamma)\chi g(0,0,\gamma)$ aus $K = GSp(4)(\mathcal{O}_F)$ ist oder dazu äquivalent, wenn alle Einträge dieser Matrix ganz sind. Wir rechnen hierfür zunächst

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} E_2 & -\Gamma \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & XY \\ \mu^t X^{-1} Z & \mu^t X^{-1}(ZY + E_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & \Gamma \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_2 & -\Gamma \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & X\Gamma + XY \\ \mu^t X^{-1} Z & \mu^t X^{-1}(Z\Gamma + ZY + E_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X - \mu\Gamma^t X^{-1} Z & X\Gamma + XY - \mu\Gamma^t X^{-1}(Z\Gamma + ZY + E_2) \\ \mu^t X^{-1} Z & \mu^t X^{-1}(Z\Gamma + ZY + E_2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{18.55.3}$$

Explizit gelten mit den Bezeichnungen von (18.55.2) weiter

$$\mu^t X^{-1}\Gamma = \frac{\mu}{D} \begin{pmatrix} a & -b \\ -bA & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & -zA \end{pmatrix} = \frac{\mu}{D} \begin{pmatrix} az & zbA \\ -zbA & -azA \end{pmatrix},$$

$$\mu\Gamma^t X^{-1} Z = \frac{\mu}{D} \begin{pmatrix} -\gamma zbA & -\gamma azA \\ \gamma az & \gamma zbA \end{pmatrix}, \qquad X\Gamma + XY = \begin{pmatrix} (\gamma b - ay)A & a\gamma + ybA \\ a\gamma - ybA & \gamma b + ay \end{pmatrix},$$

$$\mu^t X^{-1}(Z\Gamma + ZY + E_2) = \frac{\mu}{D} \begin{pmatrix} \gamma zbA + a(1 - zyA) & \gamma za - b(1 - zyA) \\ -A(\gamma za + b(1 - zyA)) & a(1 - zyA) - \gamma zbA \end{pmatrix},$$

$$X\Gamma + XY - \mu\Gamma^t X^{-1}(Z\Gamma + ZY + E_2)$$
$$= \begin{pmatrix} (\gamma b - ay + \frac{\gamma\mu}{D}(\gamma az + b(1-zyA)))A & a\gamma + ybA - \frac{\gamma\mu}{D}(a(1-zyA) - \gamma zbA \\ a\gamma - ybA - \frac{\gamma\mu}{D}(\gamma zbA + a(1-zyA)) & b\gamma + ay - \frac{\gamma\mu}{D}(\gamma za - b(1-zyA)) \end{pmatrix}.$$

Als erstes Resultat können wir daher festhalten, daß eine Matrix (18.55.1) genau dann in $G_s^{reg}(\gamma)$ liegt, wenn ihr Ähnlichkeitsfaktor μ aus $U(F)$ ist und mit $D = \det X = a^2 - b^2A$ gelten

(18.55.4) $a \pm \dfrac{\gamma\mu zbA}{D} \in \mathcal{O}_F$,

(18.55.5) $b - \gamma\mu azD^{-1},\ A(b + \gamma\mu azD^{-1}) \in \mathcal{O}_F$,

(18.55.6) $\mu az,\ \mu zbA,\ \mu azA \in D\mathcal{O}_F$,

(18.55.7) $a(1-zyA) \pm \gamma zbA \in D\mathcal{O}_F$,

(18.55.8) $\gamma za - b(1-zyA),\ A(\gamma za + b(1-zyA)) \in D\mathcal{O}_F$,

(18.55.9) $a\gamma \pm ybA - \frac{\gamma\mu}{D}(a(1-zyA)) \mp \gamma zbA) \in \mathcal{O}_F$,

(18.55.10) $\gamma b + ay - \frac{\gamma\mu}{D}(\gamma az - b(1-zyA)), A(\gamma b - ay + \frac{\gamma\mu}{D}(\gamma az + b(1-zyA))) \in \mathcal{O}_F$.

Genau dann liegt χ in $G_s^{reg}(\gamma)$, wenn $\chi.g(0,0,\gamma).\Lambda_\infty = g(0,0,\gamma).\Lambda_\infty$ für das Standardgitter Λ_∞ in den Bezeichnungen von (18.53.3) gilt. Betrachtet man die Bilder dieser beider Gitter unter der zur symplektischen Basis (e_1, f_1, e_2, f_2) dualen Basis, erhält man wegen der ersten Gleichheit in (18.55.3) die notwendigen Bedingungen

(18.55.11) $\min\{\operatorname{ord} a, \operatorname{ord}(bA), \operatorname{ord}(A(\gamma b - ay)), \operatorname{ord}(a\gamma + ybA)\} = \operatorname{ord}\gamma$,

(18.55.12) $\min\{\operatorname{ord} b, \operatorname{ord} a, \operatorname{ord}(a\gamma - ybA), \operatorname{ord}(\gamma b + ay)\} = \operatorname{ord}\gamma$,

(18.55.13) $\min\{\operatorname{ord}(az), \operatorname{ord}(zbA), \operatorname{ord}(\gamma zbA + a(1-zyA)), \operatorname{ord}(\gamma az - b(1-zyA))\} = \operatorname{ord} D$,

(18.55.14) $\min\{\operatorname{ord}(zbA), \operatorname{ord}(azA), \operatorname{ord}(A(b(1-zyA) + \gamma az)),$
$\operatorname{ord}(a(1-zyA) - \gamma zbA)\} = \operatorname{ord} D$.

In der weiteren Diskussion unterscheiden wir wieder die Fälle $\operatorname{ord} A = 0$ und $\operatorname{ord} A = 1$.

(18.56) Volumenberechnungen im Fall $\operatorname{ord}_F A = 1$: Sei zunächst $\operatorname{ord} A = 1$. Wir wollen zuerst die Ordnungsbedingungen in (18.55.14) vereinfachen. Dazu notieren wir, daß $\operatorname{ord}(az) \geq \operatorname{ord} D$ wegen (18.55.13) gilt und folglich $\operatorname{ord}(azA) > \operatorname{ord} D$ ist. Sei weiter $\operatorname{ord}(b(1-zyA) + \gamma az) = \operatorname{ord} D - 1$. Wir können $z \neq 0$ annehmen. In diesem Fall ist $\gamma az + b(1-zyA)$ aus $DA^{-1}U(F)$ oder dazu äquivalent y aus $(b+\gamma az)(bzA)^{-1} + D(bzA^2)^{-1}U(F)$. Wir rechnen dann $\gamma az - b + bzyA = \gamma az - b + bzA((b+\gamma az)(bzA)^{-1} + D(bzA^2)^{-1}u) = 2\gamma az + DA^{-1}u$. Wegen $\operatorname{ord}\gamma = -1$ und $\operatorname{ord}(az) \geq \operatorname{ord} D$ erhalten wir $\operatorname{ord}(\gamma az - b(1-zyA)) = \operatorname{ord} D - 1$ im Widerspruch zu (18.55.13).
Sei daher $\operatorname{ord}(zbA) = \operatorname{ord} D$. Aus (18.55.4) folgt dann $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord}\gamma = -1$. Weiter ist $\operatorname{ord}(az) = \operatorname{ord} z - 1 = (\operatorname{ord} D - \operatorname{ord} b - 1) - 1 = \operatorname{ord} D - \operatorname{ord} b - 2$. Nach (18.55.6) ist $\operatorname{ord}(az) \geq \operatorname{ord} D$, so daß notwendigerweise $-\operatorname{ord} b - 2 \geq 0$, also $\operatorname{ord} b \leq -2$ ist. Ein Widerspruch zu (18.55.12). Somit ist bereits $\operatorname{ord}(zb) \geq \operatorname{ord} D$. Insbesondere erhalten wir $\operatorname{ord}(\mu zbAD^{-1}) \geq 1$, so daß $\gamma\mu zbAD^{-1}$ aus $\mathcal{O}_F$ ist. Nach (18.55.4) liegt deshalb a bereits in $\mathcal{O}_F$. Als erste Konsequenz können wir mithin festhalten

(1) $\gamma za \pm b(1-zyA) \in D\mathcal{O}_F$,

(2) $\operatorname{ord}_F(a(1-zyA) - \gamma zbA) = \operatorname{ord}_F D$,

(3) $\operatorname{ord}_F(zb) \geq \operatorname{ord}_F D$,

(4) $\operatorname{ord}_F a \geq 0$.

Wie eben gezeigt ist $\operatorname{ord}(\gamma az + b(1-zyA)) \geq \operatorname{ord} D$. Wegen (18.55.10) ist daher notwendigerweise $\operatorname{ord}(\gamma b - ay) \geq \operatorname{ord}\gamma = -1$. Wir erhalten also

(5) $\operatorname{ord}_F(\gamma b \pm ay) \geq -1$.

Nach (18.55.12) ist $\operatorname{ord} b \geq -1$. Wir nehmen $\operatorname{ord} b = -1$ an. Wegen (18.55.5) ist dann notwendigerweise $\operatorname{ord}(azD^{-1}) = 0$, also $\operatorname{ord} z = \operatorname{ord} D - \operatorname{ord} a$. Nach (3) ist andererseits $\operatorname{ord} z \geq \operatorname{ord} D - \operatorname{ord} b = \operatorname{ord} D + 1$. Somit folgt $-\operatorname{ord} a \geq 1$, also $-1 \geq \operatorname{ord} a \geq 0$. Dieser Widerspruch zeigt $\operatorname{ord} b \geq 0$. Da b und $b - \gamma\mu azD^{-1}$ beide ganz sind, ist jetzt auch $\gamma\mu azD^{-1}$ ganz. Folglich ist $\operatorname{ord}(az) \geq \operatorname{ord} D + 1$. Gelte $\operatorname{ord}(A(\gamma b - ay)) = -1$, also $\operatorname{ord}(\gamma b - ay) = -2$. Wegen $\operatorname{ord}(\gamma b) \geq -1$ ist dafür $\operatorname{ord}(ay) = -2$ notwendig. Damit ist $\operatorname{ord}(\gamma b + ay) = -2$ im Widerspruch zu (18.55.12). Wir erhalten deshalb

(6) $$\operatorname{ord}_F b \geq 0,$$

(7) $$\operatorname{ord}_F(az) \geq \operatorname{ord}_F D + 1,$$

(8) $$\operatorname{ord}_F(a\gamma + ybA) = \operatorname{ord}_F \gamma = -1.$$

Die Bedingung (2) ist äquivalent dazu, daß $a(1 - zyA) - \gamma zbA$ in $D.U(F)$ liegt. Löst man nach y heißt dies

(9) $$y \in \frac{a - \gamma zbA}{azA} + \frac{D}{azA}U(F) = \frac{1}{zA}\left(1 - \frac{\gamma zbA}{a} + \frac{D}{a}U(F)\right).$$

Dann ist $a(1 - zyA) + \gamma zbA = a + \gamma zbA - azA((a - \gamma zbA)(azA)^{-1} + D(azA)^{-1}u) = 2\gamma zbA - Du$. Wegen $\operatorname{ord}(2\gamma zbA) = \operatorname{ord}(zbA) \geq \operatorname{ord} D + 1$ nach (3) ist damit $\operatorname{ord}(a(1 - zyA) + \gamma zbA) = \operatorname{ord} D$. Es gilt also

(10) $$\operatorname{ord}_F\big(a(1 - zyA) \pm \gamma zbA\big) = \operatorname{ord}_F D.$$

Speziell gibt es eine Einheit u mit $y = (azA)^{-1}(a - \gamma zbA + Du)$. In der Notation oben rechnen wir

(11) $$\gamma az - b + bzAy = \gamma az - b + bzA\Big(\frac{1}{zA}\Big(1 - \frac{\gamma zbA}{a} + \frac{D}{a}u\Big)\Big) = \frac{(\gamma z + bu)D}{a},$$

(12) $$\gamma az + b - bzAy = \frac{\gamma a^2 z + ab - ba + \gamma zb^2 A - bDu}{a} = \frac{2\gamma zb^2 A + (\gamma z - bu)D}{a}.$$

Notwendig für (1) ist $\operatorname{ord}(\gamma az - b(1 - zyA)) \geq \operatorname{ord} D$. Dies ist genau dann der Fall, wenn wir $(\gamma z + bu)a^{-1} = \alpha$ mit α aus $\mathcal{O}_F$ haben. Indem man nach z löst, erhält man hieraus

(13) $$y = \frac{a - \gamma zbA + Du}{azA} \quad \text{und} \quad z = \frac{a\alpha - bu}{\gamma} \quad \text{für } \alpha \in \mathcal{O}_F,\ u \in U(F).$$

Substituiert man für z in (12), ergibt sich $2\gamma zb^2A + (\gamma z - bu)D = 2b^2A(a\alpha - bu) + ((a\alpha - bu) - bu)D = a\alpha(2b^2A + D) - 2bu(b^2A + D) = a\alpha(2b^2A + D) - 2bua^2$ wegen $D = a^2 - b^2A$. Daher gilt zunächst

(12′) $$\gamma az + b(1 - zyA) = 2b(bA\alpha - ua) + aD\alpha.$$

Die Bedingung $\operatorname{ord}(\gamma az + b(1 - zyA)) \geq \operatorname{ord} D$ aus (1) ist folglich genau im Fall

(14) $$\operatorname{ord}_F\big(2b(bA\alpha - ua)\big) \geq \operatorname{ord}_F D$$

erfüllt. Bezüglich der Parametrisierung in (13) gilt jetzt zunächst $ay = (zA)^{-1}(a - \gamma zbA + Du)$. Somit ist $\gamma b + ay = (zA)^{-1}(\gamma zbA + a - \gamma zbA + Du) = (zA)^{-1}(a + Du)$. Daher folgt aus (12)

(15) $$\gamma b + ay - \frac{\gamma\mu}{D}(\gamma az - b(1 - zyA)) = \frac{a + Du}{zA} + \gamma\mu\alpha.$$

Weiter rechnen wir $\gamma b - ay = (zA)^{-1}(\gamma bzA - a + \gamma zbA - Du) = b - (zA)^{-1}(a + Du)$, so daß wir

(16) $$\gamma b - ay + \frac{\gamma\mu}{D}(\gamma az + b(1 - zyA)) = b + \gamma\mu a\alpha - \frac{a + Du}{zA} + \frac{\mu b(bA\alpha - ua)}{D}$$

wegen (12′) erhalten. An dieser Stelle bemerken wir, daß die Bedingungen (18.55.4) – (18.55.6) genau dann richtig sind, wenn a und b ganz sind sowie die Bedingungen $\operatorname{ord}(zb) \geq \operatorname{ord} D$ aus (3) und $\operatorname{ord}(za) \geq \operatorname{ord} D + 1$ aus (7) erfüllt sind. Die Bedingungen (18.55.7) – (18.55.8) sind genau dann erfüllt, wenn y und z nach (13) parametrisiert sind und $\operatorname{ord}(2b(bA\alpha - ua)) \geq \operatorname{ord} D$ aus (14) gilt. Die Bedingungen in (18.55.9) sind genau dann erfüllt, wenn zusätzlich $\operatorname{ord}(a\gamma \pm ybA) = -1$ gelten. Die Ausdrücke in (18.55.10) gehen schließlich in (15) und (16) über. Wir unterscheiden im folgenden die Fälle $\operatorname{ord} a = 0$ und $\operatorname{ord} a \geq 1$.

(**18.56.1**) Sei zuerst $\operatorname{ord} a \geq 1$. Notwendig für die Bedingung $\operatorname{ord}(a\gamma \pm byA) = -1$ aus (8) ist dann $\operatorname{ord}(ybA) = -1$ wegen $\operatorname{ord}(a\gamma) \geq 0$. Somit ist $\operatorname{ord} y = -(\operatorname{ord} b + 2)$. Wir nehmen weiter $\operatorname{ord} a \leq \operatorname{ord} b$ an. Dann ist $\operatorname{ord}(ay) = \operatorname{ord} a - \operatorname{ord} b - 2 \leq -2$ und $\operatorname{ord}(\gamma b) \geq \operatorname{ord}(\gamma a) \geq 0$. Nach (1) ist $\operatorname{ord}(\gamma az - b(1-zyA)) \geq \operatorname{ord} D$. Deshalb erhalten wir $\operatorname{ord}(\gamma b + ay - \gamma\mu D^{-1}(\gamma az - b(1-zyA))) \leq -2$. Ein Widerspruch zu (18.55.10). Somit ist

(17) $$\operatorname{ord}_F b < \operatorname{ord}_F a.$$

Speziell folgt $\operatorname{ord} D = 2\operatorname{ord} b + 1$. Weiter ist $\operatorname{ord}(bA\alpha - ua) \geq \operatorname{ord} b + 1$, so daß (14) stets erfüllt ist. Die Parametrisierung von z in (13) gibt

(18) $$\operatorname{ord}_F z = \operatorname{ord}_F b + 1 = \operatorname{ord}_F D - \operatorname{ord}_F b.$$

Wir untersuchen jetzt, wann $\operatorname{ord} y = -(\operatorname{ord} b + 2)$ gilt. Wegen $\operatorname{ord}(zA) = \operatorname{ord} b + 2$ ist dies nach (13) äquivalent zu

(19) $$\operatorname{ord}_F a = \operatorname{ord}_F(a - \gamma zbA + Du).$$

Gelte $\operatorname{ord} a \leq \operatorname{ord} D$. Wir haben $\operatorname{ord}(\gamma zbA) = \operatorname{ord} D$. Im Fall $\operatorname{ord} a < \operatorname{ord} D$ ist (19) daher richtig. Jetzt ist $\operatorname{ord}(x + y) \geq \operatorname{ord} x + 1$ für Elemente x und y gleicher Ordnung aus $\mathcal{O}_F$. Im Fall $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord} D$ gilt somit $\operatorname{ord}(a - \gamma zbA) \geq \operatorname{ord} D + 1$, also $\operatorname{ord}(a - \gamma zbA + Du) = \operatorname{ord} D$.
Sei $\operatorname{ord} a > \operatorname{ord} D$. Die Gleichheit (19) ist hier genau für $\operatorname{ord}(Du - \gamma zbA) \geq \operatorname{ord} a + 1$ richtig. Substituiert man für z aus (13), gilt $Du - \gamma zbA = Du - bA(a\alpha - bu) = a^2u - a\alpha bA = a(au - \alpha bA)$. Wegen $\operatorname{ord} a > \operatorname{ord} b \geq 0$ und $\operatorname{ord}(bA) \geq 1$ ist $\operatorname{ord}(au - \alpha bA) \geq 1$. Folglich gilt für $\operatorname{ord} a > \operatorname{ord} D$ stets $\operatorname{ord}(Du - \gamma zbA) \geq \operatorname{ord} a + 1$. Die Gleichung (19) ist also auch in diesem Fall stets erfüllt.

An dieser Stelle sind alle Bedingungen (18.55.4) – (18.55.9) erfüllt. Zu analysieren bleibt, welche Restriktionen sich aus (18.55.10) an die Parameter a, b, z und u ergeben. Da (14) wie oben bemerkt stets erfüllt ist, sowie b und $\gamma\mu a\alpha$ beide ganz sind, sind wegen (15) und (16) die beiden Ausdrücke in (18.55.10) genau dann ganz, wenn die beiden Bedingungen

(20) $$\frac{a + Du}{zA} + \gamma\mu\alpha \in \mathcal{O}_F,$$

(21) $$\operatorname{ord}_F(a + Du) \geq \operatorname{ord}_F z$$

erfüllt sind. Wir analysieren dafür im folgenden getrennt die Fälle $\operatorname{ord} a < \operatorname{ord} D$, $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord} D$ und $\operatorname{ord} a > \operatorname{ord} D$.

(**18.56.1A**) Sei zuerst $\operatorname{ord} a < \operatorname{ord} D$. Dann ist $\operatorname{ord}((a + Du)(zA)^{-1}) = \operatorname{ord} a - \operatorname{ord} z - 1 = \operatorname{ord} a - \operatorname{ord} b - 2$. Für $\operatorname{ord} \alpha = 0$ ist (20) genau im Fall $-1 = \operatorname{ord} a - \operatorname{ord} b - 2$, also für $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord} b + 1$ erfüllt. Für $\operatorname{ord} \alpha \geq 1$ ist (20) genau im Fall $0 \leq \operatorname{ord} a - \operatorname{ord} b - 2$, also für $\operatorname{ord} b + 2 \leq \operatorname{ord} a$ erfüllt. Notwendig in beiden Fällen ist $\operatorname{ord} b \geq 1$. In beiden Fällen ist weiter $\operatorname{ord}(a + Du) = \operatorname{ord} a \geq \operatorname{ord} b + 1 = \operatorname{ord} z$, so daß (21) richtig ist.

(**18.56.1B**) Sei $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord} D = 2\operatorname{ord} b + 1$. Dann ist $\operatorname{ord}(a + Du) \geq \operatorname{ord} D + 1$. Da $\operatorname{ord} D \geq \operatorname{ord} z$ gilt, kann hier der Fall $\operatorname{ord} \alpha = 0$ nicht auftreten. Sei daher $\operatorname{ord} \alpha \geq 1$. Genau für $\operatorname{ord}(a + Du) \geq \operatorname{ord}(zA) = \operatorname{ord} z + 1$ ist dann (20) erfüllt. Wegen $\operatorname{ord} D \geq \operatorname{ord} z$ ist dies stets der Fall.

(**18.56.1C**) Sei $\operatorname{ord} a > \operatorname{ord} D$. Dann ist $\operatorname{ord}(a + Du) = \operatorname{ord} D \geq \operatorname{ord} z$. Wir erhalten somit $\operatorname{ord}((a + Du)(zA)^{-1}) = (2\operatorname{ord} b + 1) - (\operatorname{ord} b + 2) = \operatorname{ord} b - 1$. Für $\operatorname{ord} \alpha = 0$ ist (20) daher genau im Fall $\operatorname{ord} b = 0$ erfüllt. Für $\operatorname{ord} \alpha \geq 1$ ist (20) genau im Fall $\operatorname{ord} b \geq 1$ erfüllt.

Wir bemerken, daß $\operatorname{ord} b = 0$ genau für $\operatorname{ord} a \geq \operatorname{ord} D$ möglich ist. Im Fall $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord} D$ ist dann $\operatorname{ord} \alpha \geq 1$, im Fall $\operatorname{ord} a > \operatorname{ord} D$ ist $\operatorname{ord} \alpha = 0$. Sei $\operatorname{ord} b \geq 1$. Für $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord} b + 1$ ist $\operatorname{ord} \alpha = 0$. Für $\operatorname{ord} b + 2 \leq \operatorname{ord} a$ ist $\operatorname{ord} \alpha \geq 1$. Wir fassen dies zusammen in der folgenden Tabelle

(**18.56.2**)

$\operatorname{ord}_F b = 0$		
	$\operatorname{ord}_F a = 2\operatorname{ord}_F b + 1 = 1$	$\operatorname{ord}_F \alpha \geq 1$
	$\operatorname{ord}_F a > 2\operatorname{ord}_F b + 1 = 1$	$\operatorname{ord}_F \alpha = 0$
$\operatorname{ord}_F b \geq 1$		
	$\operatorname{ord}_F a = \operatorname{ord}_F b + 1$	$\operatorname{ord}_F \alpha = 0$
	$\operatorname{ord}_F a \geq \operatorname{ord}_F b + 2$	$\operatorname{ord}_F \alpha \geq 1$

Der Parameter u ist dabei beliebig aus $U(F)$. Um die Volumina dieser Mengen bezüglich des Maßes μ_s zu berechnen, sind die dortigen Integrationsvariablen y und z in die Integrationsvariablen α und u zu transformieren.

(18.56.3) Für den Fall $\operatorname{ord} a \geq 1$ berechnen wir in eimem ersten Schritt die Jacobimatrix der nach (13) durch $y(\alpha, u) = (zA)^{-1}(1 - \gamma b a^{-1} Az + Da^{-1}u)$ und $z(\alpha, u) = \gamma^{-1}(a\alpha - bu)$ gegebenen Variablentransformation. Hierfür gilt zuerst

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\left(1 - \frac{\gamma bA}{a} z + \frac{D}{a} u\right) \cdot A}{(zA)^2} - \frac{\frac{\gamma bA}{a}}{zA} = -\frac{a + Du}{z^2 Aa}.$$

Wegen $\partial z / \partial \alpha = \gamma^{-1} a$ erhalten wir folglich

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\frac{a + Du}{z^2 A\gamma}. \tag{22}$$

Wegen $\partial z / \partial u = -\gamma^{-1} b$ rechnen wir weiter

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\left(1 - \frac{\gamma bA}{a} z + \frac{D}{a} u\right) \cdot \frac{Ab}{\gamma}}{(zA)^2} + \frac{\frac{b^2 A}{a} + \frac{D}{a}}{zA} = \frac{\frac{b}{\gamma} + \frac{Dub}{\gamma a} + \frac{D}{a} z}{z^2 A}.$$

Indem wir $\gamma z = a\alpha - bu$ substituieren, vereinfacht sich der Zähler dieses Ausdrucks wiefolgt $(\gamma a)^{-1}(ab + Dub + D\gamma z) = (\gamma a)^{-1}(ab + Dub + Da\alpha - Dub) = (\gamma a)^{-1}(ab + Da\alpha) = \gamma^{-1}(b + D\alpha)$. Somit gilt

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{b + D\alpha}{z^2 A\gamma}. \tag{23}$$

Als Determinante der Jacobimatrix $J(\alpha, u)$ der Variablentransformation (13) erhalten wir deshalb

$$J(\alpha, u) = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha} - \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{b + D\alpha}{z^2 A\gamma} \cdot \frac{a}{\gamma} - \left(-\frac{b}{\gamma}\right)\left(-\frac{a + Du}{z^2 A\gamma}\right).$$

Den Zähler dieses Ausdrucks berechnen wir als $ab + aD\alpha - ab - bDu = D(a\alpha - bu)$, so daß wir

$$J(\alpha, u) = \frac{D(a\alpha - bu)}{(z\gamma)^2 A} = \frac{(a^2 - b^2 A) \cdot (a\alpha - bu)}{(z\gamma)^2 A} \tag{24}$$

erhalten. Nach (17) ist $\operatorname{ord} b < \operatorname{ord} a$. Wegen $\operatorname{ord} u = 0$ und $\operatorname{ord} \alpha \geq 0$ folgt $\operatorname{ord}(a\alpha - bu) = \operatorname{ord} b$, also $|a\alpha - bu| = |b|$. Nach (18) gilt in unserer Situation $\operatorname{ord} z = \operatorname{ord} b + 1$. Wegen $\operatorname{ord} \gamma = -1$ ist $|z\gamma|^2 |A| = |b^2 A| = |D|$. Deshalb gilt $|J(\alpha, u)| = |b|$. Das Volumenelement auf der Menge $\{\chi \in G_s^{reg}(\gamma) : \operatorname{ord} a \geq 1\}$ ist folglich gegeben durch die Form

$$d\mu_s = \frac{1}{|b\pi|_F} d_F u \otimes d_F \alpha \otimes d_F a \otimes d_F b \otimes d_F^* \mu. \tag{25}$$

Wir berechnen jetzt sukzessive die Volumina der vier in (18.56.2) beschriebenen Mengen. Ihre Summe ist dann das Volumen $V(1)$ der Menge $\{\chi \in G_s^{reg}(\gamma) : \operatorname{ord} a \geq 1\}$.

(18.56.4) Sei zuerst $\operatorname{ord} b = 0$. Dann ist $|b\pi| = |\pi|$, so daß nach (25) die Volumina bezüglich der Form $|\pi|^{-1} du \otimes d\alpha \otimes da \otimes db \otimes d^* z$ berechnet werden.
Die durch die Parameterwerte $\operatorname{ord} b = 0$, $\operatorname{ord} a = 1$, $\operatorname{ord} \alpha \geq 1$ und $\operatorname{ord} u = 0$ gegebene Menge hat daher das Volumen

$$W_1 = \int_{U(F)} \int_{U(F)} \int_{\pi U(F)} \int_{\pi \mathcal{O}_F} \int_{U(F)} \frac{1}{|\pi|_F} d_F u \; d_F \alpha \; d_F a \; d_F b \; d_F^* \mu.$$

Indem man sukzessive die Variablen α nach $\pi\alpha$ und a nach πa wechselt, nimmt man $|\pi|^2$ als weiteren Faktor im Zähler auf. Es resultieren vier Integrale bezüglich des Maßes $d_F x$ auf F über $U(F)$ multipliziert mit $|\pi|$. Somit gilt

$$W_1 = |\pi|_F \cdot \operatorname{vol}_F(U(F))^4. \tag{26}$$

Die durch die Parameterwerte $\operatorname{ord} b = 0$, $\operatorname{ord} a > 1$, $\operatorname{ord} \alpha = 0$ und $\operatorname{ord} u = 0$ gegebene zweite Menge hat das Volumen

$$W_2 = \int_{U(F)} \int_{U(F)} \int_{\pi^2 \mathcal{O}_F} \int_{U(F)} \int_{U(F)} \frac{1}{|\pi|_F} \, d_F u \, d_F \alpha \, d_F a \, d_F b \, d_F^* \mu.$$

Wechselt man hier die Integrationsvariable a nach $\pi^2 a$, kürzt der Faktor $|\pi|$ im Nenner das aufgenommene Quadrat von $|\pi|$. Die resultierenden vier Integrale über $U(F)$ sind also mit $|\pi|$ zu multiplizieren. Somit gilt

$$W_2 = |\pi|_F \cdot \operatorname{vol}_F(U(F))^4. \tag{27}$$

(18.56.5) Sei jetzt $\operatorname{ord} b \geq 1$. In diesem Fall ist das Volumenelement durch $|b\pi|^{-1} du \otimes d\alpha \otimes da \otimes db \otimes d^* \mu$ gegeben. Die durch die Parameterwerte $\operatorname{ord} b \geq 1$, $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord} b + 1$, $\operatorname{ord} \alpha = 0$ und $\operatorname{ord} u = 0$ gegebene dritte Menge in (18.56.2) hat daher das Volumen

$$W_3 = \int_{U(F)} \int_{\pi \mathcal{O}_F} \int_{b\pi U(F)} \int_{U(F)} \int_{U(F)} \frac{1}{|b\pi|_F} \, d_F u \, d_F \alpha \, d_F a \, d_F b \, d_F^* \mu.$$

Wechselt man die Variable a nach $b\pi a$, kürzt sich der Faktor $|b\pi|$ im Nenner mit dem aufgenommenen Faktor $|b\pi|$. Wechselt man die Variable b nach πb, erhält man

$$W_3 = |\pi|_F \cdot \operatorname{vol}_F(U(F))^4. \tag{28}$$

Die durch die Parameterwerte $\operatorname{ord} b \geq 1$, $\operatorname{ord} a \geq \operatorname{ord} b + 2$, $\operatorname{ord} \alpha \geq 1$ und $\operatorname{ord} u = 0$ gegebene vierte Menge in (18.56.2) hat das Volumen

$$W_4 = \int_{U(F)} \int_{\pi \mathcal{O}_F} \int_{b\pi^2 \mathcal{O}_F} \int_{\pi \mathcal{O}_F} \int_{U(F)} \frac{1}{|b\pi|_F} \, d_F u \, d_F \alpha \, d_F a \, d_F b \, d_F^* \mu.$$

Wechselt man sukzessive die Variablen α nach $\pi\alpha$, a nach $b\pi^2 a$ und b nach πb, nimmt man den Faktor $|b\pi^4|$ im Zähler auf. Kürzt man mit $|b\pi|$, folgt somit abschließend

$$W_4 = |\pi|_F^3 \cdot \operatorname{vol}_F(U(F))^2 = |\pi|_F \cdot \operatorname{vol}_F(U(F))^4. \tag{29}$$

Dabei haben wir $\operatorname{vol}(U(F)) = (q-1)q^{-1} = 2^{-1} = |\pi|$ benutzt. Addiert man die Volumina W_i erhält man wegen $4|\pi| = 2$ daher zusammenfassend

(18.56.6) *Die in* (18.56.2) *beschriebene Menge* $\{\chi \in G_s^{reg}(\gamma) : \operatorname{ord}_F a \geq 1\}$ *hat das Volumen*

$$V(1) = 2 \cdot \operatorname{vol}_F(U(F))^4$$

bezüglich des Maßes μ_s.

(18.56.7) Sei im folgenden $\operatorname{ord} a = 0$. Dann ist $\operatorname{ord} D = 2 \operatorname{ord} a = 0$ wegen $\operatorname{ord} b \geq 0$, es gilt $\operatorname{ord} z \geq 1$ nach (7) und y ist nach (9) für eine Einheit u in $U(F)$ gegeben durch $y = (zaA)^{-1}(a - \gamma z b A + Du)$. Man überprüft, daß alle Bedingungen (18.55.4)–(18.55.9) erfüllt sind. Als Konsequenz bleiben nur noch die Bedingung $\operatorname{ord}(\gamma b - ay) \geq -1$ aus (5) und $\operatorname{ord}(\gamma b + ay - \mu\gamma D^{-1}(\gamma a z - b(1 - zyA))) \geq 0$ aus (18.55.10) zu erfüllen.
Indem wir für y substituieren, erhalten wir $\gamma b + ay = \gamma b + (zA)^{-1}(a - \gamma z b A + Du) = (zA)^{-1}(a + Du)$. Wegen (11) gilt deshalb

$$\Delta = \gamma b + ay - \frac{\gamma\mu}{D}(\gamma a z - b(1 - zyA)) = \frac{a + Du}{zA} - \frac{\gamma\mu(\gamma z + bu)}{a}. \tag{30}$$

Dabei ist $\operatorname{ord}(\gamma(\gamma z + bu)) \geq -1$, so daß notwendigerweise $\operatorname{ord}((a + Du)(zA)^{-1}) \geq -1$ gilt, wenn Δ aus $\mathcal{O}_F$ ist. Wir rechnen weiter $\gamma b - ay = (zA)^{-1}(\gamma z b A - a + \gamma z b A - Du) = \gamma b - (zA)^{-1}(a + Du)$. Wegen $\operatorname{ord} b \geq 0$ ist $\operatorname{ord}(\gamma b) \geq -1$. Wenn $\operatorname{ord}((zA)^{-1}(a + Du)) \geq -1$ ist, gilt daher also auch $\operatorname{ord}(\gamma b - ay) \geq -1$. Zu analysieren bleibt deshalb nur, wann Δ ganz ist. Dafür unterscheiden wir vier Fälle.

(18.56.7A) Seien zunächst $\operatorname{ord} z = 1$ und $\operatorname{ord} b = 0$. Dann ist $\operatorname{ord}(\gamma z) = \operatorname{ord}(bu) = 0$, so daß $\operatorname{ord}(\gamma z + bu) \geq 1$ gilt. Genau dann ist mithin Δ ganz, wenn $(zA)^{-1}(a + Du)$ ganz ist. Dies ist genau für

$$u = -\frac{a}{D} + zA\beta \qquad \text{mit } \beta \in \mathcal{O}_F \tag{31}$$

der Fall. Substituiert man für u, erhält man die Darstellung $y = (zaA)^{-1}(a - \gamma zbA + Du) = (zaA)^{-1}(a - \gamma zbA - a + DzA\beta) = (zaA)^{-1}(-\gamma zbA + DzA\beta)$, also

$$y = \frac{D\beta - \gamma b}{a}. \tag{32}$$

Wir bemerken, daß y im vorliegenden Fall somit die Ordnung $\operatorname{ord} z = -1$ hat.

(18.56.7B) Seien $\operatorname{ord} z = 1$ und $\operatorname{ord} b \geq 1$. Dann ist $\operatorname{ord}(\gamma z) = 0$ und $\operatorname{ord}(bu) \geq 1$, so daß $\gamma z + bu$ eine Einheit ist. Genau dann ist folglich Δ ganz, wenn $\operatorname{ord}((a + Du)(zA)^{-1}) = -1$ ist. Wegen $\operatorname{ord} A = 1$ ist dies genau dann der Fall, wenn $z^{-1}(a + Du)$ eine Einheit ist. Dies heißt

$$u = -\frac{a}{D} + z\beta \qquad \text{für } \beta \in U(F). \tag{33}$$

Substituiert man für u, folgt $y = (zaA)^{-1}(a - \gamma zbA + Du) = (zaA)^{-1}(-\gamma zbA + Dz\beta)$, also

$$y = -\frac{\gamma b}{a} + \frac{D}{aA}\beta. \tag{34}$$

Im vorliegenden Fall hat y somit die Ordnung $-\operatorname{ord} z = -1$.

(18.56.7C) Seien $\operatorname{ord} z \geq 2$ und $\operatorname{ord} b = 0$. Dann ist $\operatorname{ord}(\gamma z) \geq 1$ und $\operatorname{ord}(bu) = 0$, so daß $\gamma z + bu$ eine Einheit ist. Genau dann ist folglich Δ ganz, wenn $\operatorname{ord}((a + Du)(zA)^{-1} = -1$ oder dazu äquivalent $\operatorname{ord}(z^{-1}(a + Du)) = 0$ gilt. Genau wie in (18.56.7B) ist dies äquivalent zu

$$u = -\frac{a}{D} + z\beta, \quad y = -\frac{\gamma b}{a} + \frac{D}{aA}\beta \qquad \text{für } \beta \in U(F). \tag{35}$$

Im vorliegenden Fall hat y somit die Ordnung -1.

(18.56.7D) Seien $\operatorname{ord} z \geq 2$ und $\operatorname{ord} b \geq 1$. Dann ist $\operatorname{ord}(\gamma z + bu) \geq 1$. Folglich ist Δ genau für $\operatorname{ord}((a + Du)(zA)^{-1}) \geq 0$ ganz. Genau wie in (18.56.7A) ist dies äquivalent zu

$$u = -\frac{a}{D} + zA\beta, \quad y = \frac{D\beta - \gamma b}{a} \qquad \text{für } \beta \in \mathcal{O}_F. \tag{36}$$

Im vorliegenden Fall ist y deshalb ganz.

(18.56.8) Wir wollen jetzt die Jacobideterminante der beiden Variablentransformationen des vorangehenden Abschnittes berechnen und die korrespondierenden Volumenelemente angeben. Seien zunächst $y = y(z, \beta) = a^{-1}D\beta - a^{-1}\gamma b$ und $u = u(z, \beta) = -aD^{-1} + zA\beta$. Dann gilt

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial u}{\partial \beta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & A\beta \\ a^{-1}D & zA \end{pmatrix} = -a^{-1}AD\beta. \tag{37}$$

Wegen $|D| = |a^2 - b^2A| = 1$ erhalten wir somit in (18.56.7A) und (18.56.7D) als korrespondierendes Volumenelement

$$|\beta\pi|_F \cdot d_F\beta \otimes d_F z \otimes d_F b \otimes d_F a \otimes d_F \mu. \tag{38}$$

Seien jetzt $y = y(z, \beta) = -a^{-1}\gamma b + (aA)^{-1}D\beta$ und $u = u(z, \beta) = -aD^{-1} + z\beta$. Die Jacobideterminante dieses Systems berechnen wir als

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ (aA)^{-1}D & z \end{pmatrix} = -(aA)^{-1}D\beta. \tag{39}$$

Als korrespondierendes Volumenelement in (18.56.7B) und (18.56.7C) erhalten wir somit wegen $|D| = |a| = 1$ die Form

$$(40)\qquad \frac{|\beta|_F}{|\pi|_F} \cdot d_F\beta \otimes d_F z \otimes d_F b \otimes d_F a \otimes d^*_F\mu .$$

(18.56.9) Wir bestimmen jetzt die Volumina der in (18.56.7) beschriebenen vier disjunkten Mengen. Ihre Summe gibt dann das Volumen $V(0)$ der Menge $\{\chi \in G_s^{reg}(\gamma) : \operatorname{ord} a = 0\}$. In den beiden Fällen $\operatorname{ord} z = 1$, $\operatorname{ord} b \geq 1$ und $\operatorname{ord} z \geq 2$, $\operatorname{ord} b = 0$ wird bezüglich des Volumenelementes (40) integriert. Die durch $\operatorname{ord} a = 0$, $\operatorname{ord} z = 1$, $\operatorname{ord} b \geq 1$ und $\operatorname{ord} \beta = 0$ gegebene Menge aus (18.56.7B) hat das Volumen

$$V_1 = \int_{U(F)} \int_{U(F)} \int_{\pi O_F} \int_{\pi U(F)} \int_{U(F)} \frac{1}{|\pi|_F} d_F\beta \, d_F z \, d_F b \, d_F a \, d^*_F\mu .$$

Indem man sukzessive die Variablen z nach πz und b nach πb transformiert, nimmt man einen Faktor $|\pi|^2$ im Zähler auf. Es folgt

$$(41)\qquad V_1 = |\pi|_F \cdot \operatorname{vol}_F(U(F))^4 .$$

Die durch $\operatorname{ord} a = 0$, $\operatorname{ord} b = 0$, $\operatorname{ord} z \geq 2$, und $\operatorname{ord} \beta = 0$ gegebene Menge aus (18.56.7C) hat das Volumen

$$V_2 = \int_{U(F)} \int_{U(F)} \int_{U(F)} \int_{\pi^2 O_F} \int_{U(F)} \frac{1}{|\pi|_F} d_F\beta \, d_F z \, d_F b \, d_F a \, d^*_F\mu .$$

Indem man die Variable z nach $\pi^2 z$ transformiert, erhält man

$$(42)\qquad V_2 = |\pi|_F \cdot \operatorname{vol}_F(U(F))^4 .$$

In den beiden Fällen $\operatorname{ord} b = 0$, $\operatorname{ord} z = 1$ und $\operatorname{ord} b \geq 1$, $\operatorname{ord} z \geq 2$ wird bezüglich des Volumenelementes (38) integriert. Die durch $\operatorname{ord} a = 0$, $\operatorname{ord} b = 0$, $\operatorname{ord} z = 1$, und $\operatorname{ord} \beta \geq 0$ gegebene Menge aus (18.56.7A) hat das Volumen

$$V_3 = \int_{U(F)} \int_{U(F)} \int_{U(F)} \int_{\pi U(F)} \int_{O_F} |\beta\pi|_F \, d_F\beta \, d_F z \, d_F b \, d_F a \, d^*_F\mu .$$

Indem man die Variable z nach πz wechselt, nimmt man einen weiteren Faktor $|\pi|$ im Zähler auf. Damit gilt zunächst $V_3 = |\pi|_F^2 \cdot \operatorname{vol}_F(U(F))^4 \int_{O_F} |\beta|_F \, d_F\beta$. Wir erinnern an die Rechnung

$$(43)\qquad \int_{O_F} |\beta|_F \, d_F\beta = \sum_{k=0}^{\infty} |\pi|_F^k \int_{\pi^k U(F)} d_F\beta = \operatorname{vol}_F(U(F)) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |\pi|^{2k} = \frac{\operatorname{vol}_F(U(F))}{1 - |\pi|_F^2} .$$

Deshalb gilt

$$(44)\qquad V_3 = \frac{|\pi|_F^2}{1 - |\pi|_F^2} \cdot \operatorname{vol}_F(U(F))^5 .$$

Die durch $\operatorname{ord} a = 0$, $\operatorname{ord} b \geq 1$, $\operatorname{ord} z \geq 2$, und $\operatorname{ord} \beta \geq 0$ gegebene Menge aus (18.56.7D) hat das Volumen

$$V_4 = \int_{U(F)} \int_{U(F)} \int_{\pi O_F} \int_{\pi^2 O_F} \int_{O_F} |\beta\pi|_F \, d_F\beta \, d_F z \, d_F b \, d_F a \, d^*_F\mu .$$

Indem man sukzessive die Variablen z nach $\pi^2 z$ und b nach πb wechselt, nimmt man einen weiteren Faktor $|\pi|^3$ im Zähler auf. Wegen $|\pi| = \operatorname{vol}(U(F))$ gilt damit hier

$$(45)\quad V_4 = |\pi|_F^4 \cdot \operatorname{vol}_F(U(F))^2 \int_{O_F} |\beta|_F \, d_F\beta = \frac{|\pi|_F^4}{1 - |\pi|_F^2} \cdot \operatorname{vol}_F(U(F))^3 = \frac{|\pi|_F^2}{1 - |\pi|_F^2} \cdot \operatorname{vol}_F(U(F))^5 .$$

Somit sind $V_1 + V_2 = \operatorname{vol}(U(F))^4$ und $V_3 + V_4 = |\pi|^2(1 - |\pi|^2)^{-1}\operatorname{vol}(U(F))^4$ wegen $|\pi| = 2^{-1}$. Wegen $1 - |\pi|^2 + |\pi|^2 = 1$ erhalten wir deshalb abschließend

(18.56.10) *Die in* (18.56.7A) – (18.56.7D) *beschriebene Menge* $\{\chi \in G_s^{reg}(\gamma) : \operatorname{ord}_F a = 0\}$ *hat das Volumen*

$$V(0) = \frac{\operatorname{vol}_F(U(F))^4}{1-|\pi|_F^2} = \frac{|\pi|_F^4}{1-|\pi|_F^2}$$

bezüglich des Maßes μ_s.

Die beiden Konstanten von $\operatorname{vol}(U(F))^4$ in $V(0)$ und $V(1)$ addieren sich zu $2+(1-|\pi|^2)^{-1} = |\pi|^{-1}(1+|\pi|\cdot(1-|\pi|^2)^{-1})$. Weiter ist $1+|\pi|\cdot(1-|\pi|^2)^{-1} = (1-|\pi|^2)^{-1}\cdot(1-|\pi|^2+|\pi|)$. Wegen $|\pi|-|\pi|^2 = |\pi|^2$ und $1-|\pi| = |\pi|$ gilt also $1+|\pi|\cdot(1-|\pi|^2)^{-1} = (1+|\pi|^2)\cdot|\pi|^{-1}\cdot(1+|\pi|)^{-1}$. Nach (18.47) ist $\operatorname{vol}(G_s(\mathcal{O}_F)) = 2\operatorname{vol}(U(F))^2$ im Fall $\operatorname{ord} A = 1$. Wegen $\operatorname{vol}(U(F)) = |\pi|$ erhalten wir deshalb abschließend

(18.56.11) *Die Menge* $G_s^{reg}(\gamma)$ *hat für* $\gamma = \pi^{-1} = 2^{-1}$ *im Fall* $\operatorname{ord}_F A = 1$ *das Volumen*

$$\left(2+\frac{1}{1-|\pi|_F^2}\right)\operatorname{vol}_F(U(F))^4 = \operatorname{vol}_s(G_s(\mathcal{O}_F))\cdot\frac{1+|\pi|_F^2}{1+|\pi|_F}\cdot|\pi|_F$$

bezüglich des Maßes μ_s. *Dabei gilt* $\operatorname{vol}(U(F)) = |\pi|_F = 2^{-1}$.

(18.57) Volumenberechnungen im Fall $\operatorname{ord}_F A = 0$: Sei im folgenden $\operatorname{ord} A = 0$, gelte also $A \in \{-1,-5\}$. Wir untersuchen zuerst, welche allgemeinen Aussagen wir über die Ordnungen der Parameter a, b, y und z machen können. Wegen (18.55.11) gelten zuerst $\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} b \geq -1$. Wir setzen

(1) $$m = \min\{\operatorname{ord}_F a, \operatorname{ord}_F b\} \qquad \text{und} \qquad M = \max\{\operatorname{ord}_F a, \operatorname{ord}_F b\}.$$

(18.57.1) Sei $m \geq 0$. Notwendig sind dann $\operatorname{ord}(\gamma z b D^{-1}) \geq 0$ und $\operatorname{ord}(\gamma z a D^{-1}) \geq 0$ nach (18.55.4) und (18.55.5), also $\operatorname{ord} z \geq \operatorname{ord} D - 1 - m$. Speziell sind dann aber auch $\operatorname{ord}(az)$, $\operatorname{ord}(bz) \geq \operatorname{ord} D + 1$. Die Bedingungen (18.55.4) – (18.55.8) reduzieren sich folglich im Fall $m \geq 0$ darauf, daß gelten

(2) $$\operatorname{ord}_F z \geq \operatorname{ord}_F D + 1 - m,$$

(3) $$\min\{\operatorname{ord}_F(\gamma a z \pm b(1-zyA)), \operatorname{ord}_F(a(1-zyA) \mp \gamma z b A)\} = \operatorname{ord}_F D.$$

(18.57.2) Sei $m \geq 1$, so daß $a\gamma$ und $b\gamma$ beide ganz sind. Notwendig für (18.55.11) und (18.55.12) ist dann $\operatorname{ord} y = -(m+1)$. Wie oben bemerkt ist $\operatorname{ord} z \geq \operatorname{ord} D + 1 - m$, so daß $\operatorname{ord}(zyA) \geq \operatorname{ord} D - 2m$ ist. Im Fall $m = M$ ist $\operatorname{ord} D = 2m+1$ nach (13.5). In diesem Fall ist $1 - zyA$ eine Einheit. Wir haben $\min\{\operatorname{ord}(a(1-zyA)), \operatorname{ord}(b(1-zyA))\} = m$ und $\operatorname{ord}(\gamma a z), \gamma b z) \geq \operatorname{ord} D$. Im Fall $m = M$ kann deshalb (3) nicht erfüllt werden. Notwendig ist also

(4) $$m < M.$$

In diesem Fall gilt $\operatorname{ord} D = 2m$. Es folgt $\operatorname{ord} z \geq m+1$. Im Fall $\operatorname{ord} z > m+1$ ist $\operatorname{ord}(zyA) > 1$, so daß $1 - zyA$ eine Einheit ist. Wie oben folgt dann, daß (3) nicht erfüllt werden kann. Somit ist

(5) $$\operatorname{ord}_F z = m+1.$$

Notwendig und hinreichend für (3) ist wegen $\min\{\operatorname{ord}(\gamma z a), \operatorname{ord}(\gamma z b)\} = \operatorname{ord} D$ jetzt weiter

(6) $$\operatorname{ord}_F(1-zyA) \geq \operatorname{ord}_F D - m = m.$$

Sei dafür aus Symmetriegründen $\operatorname{ord} a = m$. Notwendig für $\operatorname{ord}(a(1-zyA) - \gamma z b A) \geq \operatorname{ord} D$ ist wegen $\operatorname{ord}(\gamma z b A) = \operatorname{ord}(zb) \geq 2m+2$ dann $\operatorname{ord}(a(1-zyA)) \geq \operatorname{ord} D$, also $\operatorname{ord}(1-zyA) \geq \operatorname{ord} D - m$. Wegen $\operatorname{ord} b = M > m$ sind im Fall (6) $\operatorname{ord}(b(1-zyA)) \geq \operatorname{ord} D + 1$, $\operatorname{ord}(\gamma a z) = \operatorname{ord} D$ und $\operatorname{ord}(\gamma z b A) \geq \operatorname{ord} D + 1$, $\operatorname{ord}(a(1-zyA)) \geq \operatorname{ord} D$. Löst man weiter die aus (6) resultierende Gleichung nach y, erhalten wir die zu (6) äquivalente Formulierung

(7) $$y \in \frac{1}{zA} + \frac{\pi^m}{zA}\mathcal{O}_F = \frac{1}{zA} + \frac{1}{\pi}\mathcal{O}_F.$$

Genau dann liegt die so konstruierte Matrix in $G_s^{reg}(\gamma)$, wenn die Bedingungen (18.55.9) und (18.55.10) erfüllt sind. Dies ist aber äquivalent dazu, daß die Elemente in den Paaren $\gamma b \pm ay$, $\gamma\mu D^{-1}(\gamma az \mp b(1-zyA))$ und $a\gamma \pm ybA$, $\gamma\mu D^{-1}(a(1-zyA) \mp \gamma zbA)$ jeweils entweder beide ganz sind oder beide die Ordnung $\operatorname{ord}\gamma = -1$ haben. Aus Symmetriegründen reicht es hierfür den Fall $m = \operatorname{ord} a$ und $M = \operatorname{ord} b$ zu betrachten.
Dann ist $\operatorname{ord}(ay) = m-(m+1) = -1$, so daß $\operatorname{ord}(\gamma b \pm ay) = -1$ wegen $\operatorname{ord}(\gamma b) \geq 0$ ist. Wir behaupten, daß $\gamma az \pm b(1-zyA) = \gamma az \mp bzA\pi^{-1}\beta$ mit β in $\mathcal{O}_F$ die Ordnung $\operatorname{ord} D = 2m$ hat. Wir notieren dazu $\operatorname{ord}(\gamma az) = -1+m+(m+1) = 2m$ und $\operatorname{ord}(bzA\pi^{-1}\beta) = M+(m+1)-1+\operatorname{ord}\beta \geq M+m \geq 2m+1$. Daher ist $\operatorname{ord}(\gamma az \pm b(1-zyA)) = 2m$.
Wir untersuchen die Terme des zweiten Paares. Hier gilt $\operatorname{ord}(ybA) = M-(m+1) \geq 0$, so daß $\operatorname{ord}(a\gamma \pm ybA) \geq 0$ ist. Wir rechnen $a(1-zyA) \mp \gamma zbA = -(azA\pi^{-1}\beta + \gamma zbA)$. Hier ist $\operatorname{ord}(\gamma zbA) = m+M > 2m$ und $\operatorname{ord}(azA\pi^{-1}\beta) = 2m + \operatorname{ord}\beta$. Zu erfüllen ist $\operatorname{ord}(a(1-zyA) \mp \gamma zbA) \geq \operatorname{ord} D + 1 = 2m+1$. Hierfür ist $\operatorname{ord}\beta \geq 1$ notwendig und hinreichend. Statt (7) gilt also tatsächlich

(8) $$y \in \frac{1}{zA} + \mathcal{O}_F.$$

Zu berechnen bleibt das Volumen $V(1)$ der eben konstruierten Menge $\{\chi \in G_s^{reg}(\gamma) : m \geq 1\}$. Aus Symmetriegründen ist $V(1)$ das Doppelte des Volumens der durch die Parameterwerte $\operatorname{ord} a \geq 1$, $\operatorname{ord} b \geq \operatorname{ord} a + 1$, $\operatorname{ord} z = \operatorname{ord} a + 1$ und $y \in (zA)^{-1} + \mathcal{O}_F$ gegebenen Menge. Auf ihr wird wegen $|a^2 - b^2 A| = |a|^2$ bezüglich des Maßes $d\mu_s = |a|^{-2} \cdot dy \otimes dz \otimes db \otimes da \otimes d^*\mu$ integriert. Es gilt also

$$V(1) = 2\int_{U(F)}\int_{\pi\mathcal{O}_F}\int_{a\pi\mathcal{O}_F}\int_{a\pi U(F)}\int_{(zA)^{-1}+\mathcal{O}_F} \frac{1}{|a|_F^2}\, d_F y\, d_F z\, d_F b\, d_F a\, d_F^*\mu .$$

Da das Maß $d_F y$ translationsinvariant ist, ergibt das innerste Integral über $(zA)^{-1} + \mathcal{O}_F$ in $V(1)$ das Volumen von $\mathcal{O}_F$, ist also Eins. Indem wir sukzessive die Variablen z nach $a\pi z$ und b nach $a\pi b$ transformieren, nehmen wir $|a\pi|^2$ als zusätzlichen Faktor im Zähler auf. Daher gilt

(9) $$V(1) = 2\cdot \operatorname{vol}_F\big(U(F)\big)^2 \int_{\pi\mathcal{O}_F} |\pi|_F^2\, d_F a = |\pi|_F^3 \cdot \operatorname{vol}_F\big(U(F)\big)^2$$

nach einer weiteren Variablentransformation von a nach πa. Wir haben deshalb wegen $|\pi| = \operatorname{vol}(U(F)) = 2^{-1}$ zusammenfassend

(18.57.3) *Die Menge* $\{\chi \in G_s^{reg}(\gamma) : \min\{\operatorname{ord}_F a, \operatorname{ord}_F b\} \geq 1\}$ *hat das Volumen*

$$V(1) = \operatorname{vol}_F\big(U(F)\big)^4 = |\pi|_F^4$$

bezüglich des Maßes μ_s.

(18.57.4) Sei $m = \min\{\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} b\} = 0$. Nach (2) ist dann $\operatorname{ord} z \geq \operatorname{ord} D + 1$. Wir wollen zuerst $m < M$ zeigen und nehmen dafür $m = M = 0$ an. Nach (13.5) ist dann $\operatorname{ord} D = 1$, also $\operatorname{ord} z \geq 2$. Wegen $\operatorname{ord}(\gamma b - ay) \geq -1$ nach (18.55.11) gilt weiter $\operatorname{ord} y \geq -1$, so daß $\operatorname{ord}(zy) \geq 1$ ist. Als Konsequenz ist $1 - zyA$ eine Einheit. Wir haben $\operatorname{ord}(\gamma az) = \operatorname{ord} z - 1 \geq 1$ und $\operatorname{ord}(b(1-zyA)) = 0$. Daher ist $\gamma az - b(1-zyA)$ eine Einheit. Wegen $\operatorname{ord} D = 1$ ist dies ein Widerspruch zu (3). Somit ist auch hier

(10) $$0 = m < M.$$

Wie oben bemerkt gilt damit $\operatorname{ord} D = 0$ und $\operatorname{ord} z \geq 1$. Notwendig und hinreichend für (18.55.11) und (18.55.12) ist weiter $\operatorname{ord} y \geq -1$. Wir behaupten, daß $1 - zyA$ notwendigerweise eine Einheit ist, und nehmen dafür $\operatorname{ord}(1-zyA) \geq 1$ an. Da sonst $\operatorname{ord}(zy) \geq 1$ ist, folgt hieraus $\operatorname{ord} z < 2$ und $\operatorname{ord} y < 0$, also $\operatorname{ord} z = 1$ und $\operatorname{ord} y = -1$. Seien $\operatorname{ord} a = 0$ und $\operatorname{ord} b \geq 1$. Da ybA ganz ist, gilt dann $\operatorname{ord}(\gamma a \pm ybA) = -1$. Wegen $\operatorname{ord}(a(1-zyA)) \geq 1$ und $\operatorname{ord}(\gamma zbA) \geq 1$ ist $\operatorname{ord}(a(1-zyA) \mp \gamma zbA) \geq 1$. Im Widerspruch zu (18.55.9) ist daher $\operatorname{ord}(a\gamma \pm ybA - \gamma\mu D^{-1}(a(1-zyA) \mp \gamma zbA) = -1$. Analog argumentieren wir mit (18.55.10) im Fall $\operatorname{ord} b = 0$ und $\operatorname{ord} a \geq 1$. Dies zeigt

(11) $$\operatorname{ord}_F(1-zyA) = 0.$$

Ausgeschlossen haben wir damit die Konstellation $\operatorname{ord} z = 1$, $\operatorname{ord} y = -1$. Ist $\operatorname{ord} z = 1$, dann gilt also $\operatorname{ord} y \geq 0$, ist $\operatorname{ord} y = -1$, dann gilt $\operatorname{ord} z \geq 2$. Wir behaupten, daß wir auch diese Fälle ausschließen könne, daß also

$$\text{(12)} \qquad \operatorname{ord}_F z \geq 2 \quad \text{und} \quad \operatorname{ord}_F y \geq 0$$

gelten. Dafür nehmen wir wieder $\operatorname{ord} a = 0$ und $\operatorname{ord} b \geq 1$ an. Gelte zuerst $\operatorname{ord} y = -1$. Dann ist $\operatorname{ord}(\gamma b \pm ay) = -1$ wegen $\operatorname{ord}(\gamma b) \geq 0$. Zu zeigen ist daher $\operatorname{ord}(\gamma az \mp b(1-zyA)) = 0$ nach (18.55.10). Jetzt gelten aber $\operatorname{ord}(\gamma az) \geq 1$ wegen $\operatorname{ord} z \geq 2$ und $\operatorname{ord}(b(1-zyA)) = \operatorname{ord} b \geq 1$, so daß $\operatorname{ord}(\gamma az \pm b(1-zyA)) \geq 1$ ist. Ein Widerspruch.
Sei daher $\operatorname{ord} z = 1$, so daß y wie oben bemerkt ganz ist. In diesem Fall ist $\operatorname{ord}(\gamma b \pm ay) \geq 0$. Wegen $\operatorname{ord}(\gamma az) = \operatorname{ord} a = 0$ ist $\operatorname{ord}(\gamma az \mp b(1-zyA)) = 0$. Dieser Widerspruch zu (18.55.10) zeigt unsere Behauptung im Fall $\operatorname{ord} a = 0$. Im Fall $\operatorname{ord} b = 0$ argumentieren wir analog mit (18.55.9).

Wir behaupten abschließend, daß (18.55.9) und (18.55.10) für die Parameterwerte $m = 0$, $M \geq 1$, $\operatorname{ord} z \geq 2$ und $\operatorname{ord} y \geq 0$ erfüllt sind. Dies ist äquivalent dazu zu zeigen, daß die Elemente in den Paaren $\gamma b \pm ay$, $\gamma\mu D^{-1}(\gamma az \mp b(1-zyA))$ und $a\gamma \pm ybA$, $\gamma\mu D^{-1}(a(1-zyA) \mp \gamma zbA)$ jeweils entweder beide ganz sind oder beide die Ordnung -1 haben. Aus Symmetriegründen betrachten wir hierzu im folgenden wieder nur den Fall $\operatorname{ord} a = m$, $\operatorname{ord} b = M$. Dann ist zuerst $\operatorname{ord}(\gamma b \pm ay) \geq 0$ und $\operatorname{ord}(\gamma az \mp b(1-zyA)) \geq 1$ wegen $\operatorname{ord}(\gamma az) = \operatorname{ord} z - 1 \geq 1$ und $\operatorname{ord}(b(1-zyA)) = \operatorname{ord} b \geq 1$. Weiter ist $\operatorname{ord}(a\gamma \pm ybA) = \operatorname{ord}(a\gamma) = -1$. Wegen $\operatorname{ord}(\gamma zbA) \geq 2$ ist $\operatorname{ord}(a(1-zyA) \mp \gamma zbA) = \operatorname{ord}(a(1-zyA)) = 0$. Dies zeigt die Behauptung.

Zu berechnen bleibt das Volumen $V(0)$ der eben konstruierten Menge $\{\chi \in G_s^{reg}(\gamma) : m = 0\}$. Aus Symmetriegründen ist $V(0)$ das Doppelte des Volumens der durch die Parameterwerte $\operatorname{ord} a = 0$, $\operatorname{ord} b \geq 1$, $\operatorname{ord} z \geq 2$ und $\operatorname{ord} y \geq 0$ gegebenen Menge. Auf ihr wird wegen $|a^2 - b^2A| = |D| = 1$ bezüglich des Maßes $d\mu_s = dy \otimes dz \otimes db \otimes da \otimes d^*\mu$ integriert. Es gilt also

$$V(0) = 2\int_{U(F)}\int_{U(F)}\int_{\pi\mathcal{O}_F}\int_{\pi^2\mathcal{O}_F}\int_{\mathcal{O}_F} d_Fy\, d_Fz\, d_Fb\, d_Fa\, d_F^*\mu\,.$$

Wechselt man sukzessive die Variablen von z nach $\pi^2 z$ und von b nach πb, nimmt man $|\pi|^3$ als Faktor auf. Die resultierenden zwei Integrale bezüglich d_Fx über $U(F)$ sind daher mit $|\pi|^2$ zu multiplizieren. Wegen $|\pi| = \operatorname{vol}(U(F)) = 2^{-1}$ gilt deshalb zusammenfassend

(18.57.5) *Die Menge* $\{\chi \in G_s^{reg}(\gamma) : \min\{\operatorname{ord}_F a, \operatorname{ord}_F b\} = 0\}$ *hat das Volumen*

$$V(0) = \operatorname{vol}_F(U(F)) = |\pi|_F^4$$

bezüglich des Maßes μ_s.

(18.57.6) Sei $m = \min\{\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} b\} = -1$. Wir behaupten, daß in diesem Fall $m = M$ gilt. Sei dafür $\operatorname{ord} a = -1$. Dann gilt $\operatorname{ord}(a\gamma) = -2$, so daß $\operatorname{ord}(ybA) = -2$ wegen (18.55.11) ist, also $\operatorname{ord} y = -(\operatorname{ord} b + 2)$ gilt. Für $\operatorname{ord} b \geq 0$ ist dann $\operatorname{ord} y \leq -2$. Wegen $\operatorname{ord}(\gamma b) \geq -1$ folgt in diesem Fall $\operatorname{ord}(\gamma b - ay) \leq -3$ im Widerspruch zu (18.55.12). Daher ist $\operatorname{ord} b = -1$. Analog argumentieren wir im Fall $\operatorname{ord} b = -1$. Zusammenfassend gelten daher im Fall $m = -1$ notwendigerweise

$$\text{(12)} \qquad \operatorname{ord}_F a = \operatorname{ord}_F b = -1,$$

$$\text{(13)} \qquad \operatorname{ord}_F y = -1$$

Speziell ist $\operatorname{ord} D = 2m + 1 = -1$. Nach (18.55.4) und (18.55.5) ist weiterhin $\operatorname{ord}(\gamma azD^{-1}) = \operatorname{ord}(\gamma bzD^{-1}) = -1$. Es gilt also $\operatorname{ord} z = -1 - 2\operatorname{ord}\gamma + \operatorname{ord} D = 0$. Notwendigerweise ist also

$$\text{(14)} \qquad z \in U(F).$$

Man überprüft, daß alle Bedingungen (18.55.4) – (18.55.8) für das so konstruierte Element aus $G_s^{reg}(F)$ erfüllt sind. Wir untersuchen wie die Parameter y und z zu modifizieren sind, damit zusätzlich auch (18.55.9) und (18.55.10) gelten. Notwendig für (18.55.11) ist jetzt $\gamma b - ay = \beta$ mit $\operatorname{ord}\beta \geq -1$. Löst man nach y heißt dies

$$y = \frac{\gamma b - \beta}{a} \qquad \text{mit } \operatorname{ord}_F \beta \geq -1.$$

Im folgenden untersuchen wir jetzt sukzessive, für welche Parameterwerte von $\operatorname{ord}\beta$ die vier Ausdrücke in (18.55.9) und (18.55.10) ganz sind. Hierfür notieren wir zuerst $1 - zyA = a^{-1}(a - zA(\gamma b - \beta)) = a^{-1}(a - \gamma zbA + zA\beta)$ und $D = a^2 - b^2 A$ sind. Weiter sei bemerkt, daß $\gamma\mu D^{-1}$ wegen $\operatorname{ord}\gamma = \operatorname{ord} D = -1$ eine Einheit ist.

Substituiert man für y gilt jetzt $\gamma az + b(1 - zyA) = a^{-1}(\gamma a^2 z + ab - \gamma zb^2 A + zbA\beta) = a^{-1}(D\gamma z + ab + zbA\beta)$. Wegen $\operatorname{ord}(D\gamma z) = -2$ und $\operatorname{ord}(ab) = -2$ ist $\operatorname{ord}(D\gamma z + ab) \geq -1$. Weiter gilt $\operatorname{ord}(zbA\beta) = \operatorname{ord}\beta - 2$. Für $\operatorname{ord}\beta \leq 0$ ist also $\operatorname{ord}(\gamma az + b(1 - zyA)) = \operatorname{ord}\beta - 1$. Nach Konstruktion ist $\operatorname{ord}(\gamma b - ay) = \operatorname{ord}\beta$. Notwendig und hinreichend dafür, daß $\gamma b - ay + \gamma\mu D^{-1}(\gamma az + b(1 - zyA))$ ganz ist, ist also $\operatorname{ord}\beta \geq 1$.

Substituiert man für y, gilt weiter $\gamma zbA - a(1 - zyA) = \gamma zbA - a + \gamma zbA - zA\beta = 2\gamma zbA - a - zA\beta = zbA - a - zA\beta$ wegen $\gamma = 2^{-1}$. Wegen $\operatorname{ord}(zbA) = -1$ ist $\operatorname{ord}(zbA - a) \geq 0$, so daß $\operatorname{ord}(\gamma zbA - a(1 - zyA)) \geq 0$ für $\operatorname{ord}\beta \geq 1$ ist. Wir rechnen $a\gamma + ybA = a^{-1}(a^2\gamma + b^2 A\gamma - bA\beta) = a^{-1}(D\gamma + 2\gamma b^2 A - bA\beta) = a^{-1}(D\gamma + b^2 A - bA\beta)$. Wegen $\operatorname{ord}(D\gamma) = -2$ und $\operatorname{ord}(b^2 A) = -2$ ist $\operatorname{ord}(D\gamma + b^2 A) \geq -1$. Wegen $\operatorname{ord}(bA\beta) \geq 0$ für $\operatorname{ord}\beta \geq 1$ ist daher $a\gamma + ybA$ ganz für $\operatorname{ord}\beta \geq 1$. Folglich ist in diesem Fall auch $a\gamma + ybA - \gamma\mu D^{-1}(a(1 - zyA) - \gamma zbA)$ ganz.

Indem man für y substituiert, ist $\gamma zbA + a(1 - zyA) = \gamma zbA + a - \gamma zbA + zA\beta = a + zA\beta$. Im Fall $\operatorname{ord}\beta \geq 1$ hat dieser Ausdruck die Ordnung -1. Wir rechnen $a\gamma - ybA = a^{-1}(a^2\gamma - b^2 A\gamma + bA\beta)) = a^{-1}(D\gamma + bA\beta)$. Wegen $\operatorname{ord}(D\gamma) = -2$ und $\operatorname{ord}(bA\beta) \geq 0$ hat $a\gamma - ybA$ im Fall $\operatorname{ord}\beta \geq 1$ die Ordnung -1. Folglich ist $a\gamma - ybA - \gamma\mu D^{-1}(a(1 - zyA) + \gamma zbA)$ ganz für $\operatorname{ord}\beta \geq 1$.

Wir haben schließlich $\gamma az - b(1 - zyA) = a^{-1}(\gamma a^2 z - ab + \gamma zb^2 A - zAb\beta) = a^{-1}(D\gamma z - ab + 2\gamma zb^2 A - zAb\beta) = a^{-1}(D\gamma z - ab + zb^2 A - zAb\beta)$. Wegen $\operatorname{ord}(D\gamma z) = -2$ und $\operatorname{ord}(ab) = -2$ ist $\operatorname{ord}(D\gamma z - ab) \geq -1$. Weiter ist $\operatorname{ord}(zAb\beta) \geq 0$ für $\operatorname{ord}\beta \geq 1$. Wegen $\operatorname{ord}(zb^2 A) = -2$ ist deshalb $\operatorname{ord}(\gamma az - b(1 - zyA)) = -1$ im Fall $\operatorname{ord}\beta \geq 1$. Weiter ist $b\gamma + ay = b\gamma + b\gamma - \beta = 2\gamma b - \beta = b - \beta$. Im Fall $\operatorname{ord}\beta \geq 1$ hat daher auch $b\gamma + ay$ die Ordnung -1. Daher ist $b\gamma + ay - \gamma\mu D^{-1}(\gamma za - b(1 - zyA))$ ganz für $\operatorname{ord}\beta \geq 1$. Wir haben deshalb zusammenfassend gezeigt, daß genau für

$$y = \frac{\gamma b}{a} + \pi^2\beta \qquad \text{mit } \beta \in \mathcal{O}_F \tag{15}$$

zusätzlich die Bedingungen (18.55.9) und (18.55.10) erfüllt sind. Zu berechnen bleibt das Volumen $V(-1)$ der eben konstruierten Menge $\{\chi \in G_s^{reg}(\gamma) : m = -1\}$. Wegen $|a^2 - b^2 A| = |D| = |\pi|^{-1}$ wird auf ihr bezüglich des Maßes $d\mu_s = |\pi|\, dy \otimes dz \otimes db \otimes da \otimes d^*\mu$ integriert. Es gilt also

$$V(-1) = \int_{U(F)} \int_{\pi^{-1}U(F)} \int_{\pi^{-1}U(F)} \int_{U(F)} \int_{\gamma ba^{-1} + \pi^2 \mathcal{O}_F} |\pi|_F \cdot d_F y\, d_F z\, d_F b\, d_F a\, d_F^* \mu .$$

Wegen $d(\gamma ba^{-1} + \pi^2\beta) = d(\pi^2\beta) = |\pi|^2 d\beta$ hat dabei das innerste Integral den Wert $|\pi|^2$. Indem man sukzessive die Variablen b nach $\pi^{-1}b$ und a nach $\pi^{-1}a$ wechselt, nimmt man $|\pi|^2$ als Faktor im Nenner auf. Folglich gilt

(18.57.7) *Die Menge* $\{\chi \in G_s^{reg}(\gamma) : \min\{\operatorname{ord}_F a, \operatorname{ord}_F b\} = -1\}$ *hat das Volumen*

$$V(-1) = |\pi|_F \cdot \operatorname{vol}_F(U(F))^4$$

bezüglich des Maßes μ_s.

Das Volumen von $G_s^{reg}(\gamma)$ erhalten wir als Summe der drei Volumina $V(1)$, $V(0)$ und $V(-1)$. Es ist daher mit $(2 + |\pi|)\operatorname{vol}(U(F))^4$ identisch. Wir schreiben $2 + |\pi| = |\pi|^{-1} + |\pi| = |\pi|^{-1}(1 + |\pi|^2)$. Nach (18.47) ist $\operatorname{vol}(G_s(\mathcal{O}_F)) = (1 + |\pi|)\operatorname{vol}(U(F))^2$. Somit gilt wegen $|\pi| = \operatorname{vol}(U(F)) = 2^{-1}$ zusammenfassend

(18.57.8) *Die Menge* $G_s^{reg}(\gamma)$ *hat für* $\gamma = \pi^{-1} = 2^{-1}$ *im Fall* $\mathrm{ord}_F A = 0$, *also* $A \in \{-1, -5\}$, *bezüglich des Maßes* μ_s *das Volumen*

$$(2 + |\pi|_F) \cdot \mathrm{vol}_F(U(F))^4 = \mathrm{vol}_s(G_s(\mathcal{O}_F)) \cdot \frac{1 + |\pi|_F^2}{1 + |\pi|_F} \cdot |\pi|_F$$

Dabei ist $\mathrm{vol}(G_s(\mathcal{O}_F)) = (1 + |\pi|) \cdot \mathrm{vol}(U(F))^2$ *mit* $\mathrm{vol}(U(F)) = |\pi|_F = 2^{-1}$.

Wir fassen die Resultate (18.56.11) und (18.57.8) zusammen in dem folgenden

(18.58) Lemma: *Gelte* $F = \mathbb{Q}_2$ *und sei* $L = F(\sqrt{A})$ *mit* $\mathrm{ord}_F A \in \{0, 1\}$ *ein über* F *verzweigter quadratischer Erweiterungskörper von* F. *Sei* $s = \mathrm{diag}(\ell(x), c^t\ell^{-1}(x))$ *ein singuläres,* F*-rationales Element aus dem zu* L *korrespondierenden maximalen Torus* T *in* $L(\alpha)$ *mit* $c = \mu(s) = N_{L/F}(x)$. *Für* $\gamma = 2^{-1} = \pi^{-1}$ *sei*

$$g(\gamma) = \begin{pmatrix} E_2 & \Gamma \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit $K = GSp(4)(\mathcal{O}_F)$ *gilt dann*

$$\mathrm{vol}_s(G_s(F) \cap g(\gamma) \cdot K \cdot g^{-1}(\gamma)) = \mathrm{vol}_s(G_s(\mathcal{O}_F)) \cdot \frac{1 + |\pi|_F^2}{1 + |\pi|_F} \cdot |\pi|_F.$$

Dabei trägt der Zentralisator G_s *von* s *in* $G = GSp(4)$ *das Haarsche Maß* μ_s, *bezüglich dessen* $\mathrm{vol}_s(G_s(\mathcal{O}_F)) = (1 + |\pi A^{-1}|_F) \cdot \mathrm{vol}_F(U(F))^2 = (1 + |\pi A^{-1}|_F) \cdot |\pi|_F^2$ *gilt.*

Aus $M(4, \mathcal{O}_F)$ ist $g^{-1}(0,0,c) \cdot s \cdot g(0,0,c)$ wie in (18.42) bemerkt im Fall $\mathrm{ord}\, b = 0$ nur für $c = 0$, also $g(0,0,c) = E_4$, oder $c = \pi^S$ mit $S < 0$ und $0 \leq \mathrm{ord}\, 2 + \mathrm{ord}\, c$, also $c = \pi^{-1}$. Jedes dieser Elemente liegt wie in (18.43) bemerkt im Träger von $T(\pi)$. Für $F = \mathbb{Q}_2$ erhält man daher aus (12.12) die Formel

$$O_s(T(\pi)) = \int_{G_s\backslash G} T(\pi)(g^{-1}sg)\frac{dg}{dm} = \frac{1}{\mathrm{vol}(T \cap K)} + \frac{1}{\mathrm{vol}(T \cap K)} \cdot \frac{1 + |\pi|_F}{1 + |\pi|_F^2} \cdot |\pi|_F^{-1}$$

für das Orbitalintegral $O_s^G(T(\pi))$. Zusammenfassend erhalten wir somit den

(18.59) Satz: *Gelte* $F = \mathbb{Q}_2$. *Seien* $L = F(\sqrt{A})$ *mit* $\mathrm{ord}\, A \in \{0, 1\}$ *ein über* F *verzweigter, quadratischer Erweiterungskörper von* F *und* $s = \mathrm{diag}(\ell(x), c^t\ell^{-1}(x))$ *ein singuläres,* F*-rationales Element aus dem zu* L *assoziierten maximalen Torus* T *in* $L(\alpha)$, *das nicht in* T_{split} *liegt. Gelte* $\mu(s) = c = N_{L/F}(x)$. *Seien* λ *und* μ *die Eigenwerte von* $\ell(x)$, *so daß*

$$s \sim \mathrm{diag}(\lambda, \mu, c\lambda^{-1}, c\mu^{-1})$$

über L *gilt. Wir setzen* $a = \mathrm{ord}_F((\lambda + \mu)/2)$ *und* $b = \mathrm{ord}_F((\lambda - \mu)/\sqrt{D_{L/F}})$ *mit* $D_{L/F}$ *der Diskriminante von* L *über* F. *Genau dann verschwindet* $I_G(T(\pi))(s)$ *für den Heckeoperator* $T(\pi) = h(1,1,1)$ *nicht, wenn* $\mathrm{ord}\,\mu(s) = \mathrm{ord}\, N_{L/F}(x) = \mathrm{ord}\,\mu(T(\pi)) = 1$ *ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn entweder* $\mathrm{ord}_F A = 1$, $b = 0$, $a > 0$ *oder aber* $\mathrm{ord}_F A = 0$, $a = b = 0$ *ist. In diesen Fällen gilt*

$$I_G(T(\pi))(s) = \int_{G_s\backslash G} T(\pi)(g^{-1}sg)\frac{dg}{dm} = \frac{1}{\mathrm{vol}_s(G_s(\mathcal{O}_F))}\left(1 + \frac{1 + |\pi|_F}{1 + |\pi|_F^2} \cdot \frac{1}{|\pi|_F}\right).$$

Dabei trägt der Zentralisator G_s *von* s *in* $G = GSp(4)$ *das Haarsche Maß* μ_s, *bezüglich dessen* $G_s(\mathcal{O}_F)$ *das Volumen* $(1 + |\pi A^{-1}|_F) \cdot |\pi|_F^2 = (1 + |4\pi D_{L/F}^{-1}|_F) \cdot \mathrm{vol}(U(F))^2$ *hat.*

Die Aussage des vorangehenden Resultates ist das Komplement zu Satz (18.51) für die Restklassencharakteristik zwei. Wir fassen die allgemeine Situation zusammen in dem abschließenden

(18.60) Satz: *Gelte $F = \mathbf{Q}_2$, wenn F gerade Restklassencharakteristik hat. Seien $L = F(\sqrt{A})$ mit* $\operatorname{ord} A \in \{0, 1\}$ *ein über F verzweigter, quadratischer Erweiterungskörper von F und $s =$* $\operatorname{diag}(\ell(x), c\,{}^t\ell^{-1}(x))$ *ein singuläres, F-rationales Element aus dem zu L assoziierten maximalen Torus T in $L(\alpha)$, das nicht in T_{split} liegt. Trage der Zentralisator G_s von s in $G = GSp(4)$ das Standardmaß. Seien λ und μ die Eigenwerte von $\ell(x)$, so daß*

$$s \sim \operatorname{diag}(\lambda,\ \mu,\ c\lambda^{-1},\ c\mu^{-1})$$

über L gilt und $\lambda\mu = N_{L/F}(x)$ ist. Wir setzen $a = \operatorname{ord}_F((\lambda+\mu)/2)$ *und* $b = \operatorname{ord}_F((\lambda-\mu)/\sqrt{D_{L/F}})$ *mit $D_{L/F}$ der Diskriminante von L über F.*
Genau dann verschwindet das Orbitalintegral $O_s^G(T(\pi)) = I_G(T(\pi))(s)$ für den Heckeoperator $T(\pi) = h(1,1,1)$ nicht, wenn $\operatorname{ord}_F(\mu(s)) = \operatorname{ord}_F c = \operatorname{ord}_F(\mu(T(\pi))) = 1$ *ist und entweder $\lambda + \mu = 0$, $\mu(s) = -\lambda\mu$ oder aber $\mu(s) = \lambda\mu$ gelten.*
Sei $\mu(s) = c = \lambda\mu$. Dann ist $\operatorname{ord}_F(\lambda\mu) = 1$ *genau für* $\operatorname{ord}_F A = 1$, $b = 0$, $a > 0$ *oder aber $F = \mathbf{Q}_2$,* $\operatorname{ord}_F A = 0$, $a = b = 0$ *erfüllt. In diesen Fällen ist*

$$O_s^G(T(\pi)) = \int_{G_s\backslash G} T(\pi)(g^{-1}sg)\frac{dg}{dm} = \frac{1}{\operatorname{vol}(G_s(\mathcal{O}_F))}\left(1 + \operatorname{ord}_F 2 \cdot \frac{1+|\pi|_F}{1+|\pi|_F^2}\cdot\frac{1}{|\pi|_F}\right).$$

Seien $\lambda + \mu = 0$ und $\mu(s) = -\lambda\mu$. Dann ist $\operatorname{ord}_F(\lambda\mu) = 1$ *genau für* $\operatorname{ord}_F A = 1$, $b = 0$ *und* $a > 0$ *richtig. In diesem Fall ist*

$$O_s^G(T(\pi)) = \int_{G_s\backslash G} T(\pi)(g^{-1}sg)\frac{dg}{dm} = \frac{1}{\operatorname{vol}(G_s(\mathcal{O}_F))}$$

mit $\operatorname{vol}(G_s(\mathcal{O}_F)) = (1 + |\pi A^{-1}|_F)\cdot \operatorname{vol}_F(U(F))^2$ *berechnet bezüglich des Maßes μ_s.*

Insbesondere haben wir mit dem letzten Resultat alle Orbitalintegrale $I_L(T(\pi))(s)$ berechnet, wenn F einer der p-adischen Körper $\mathbf{Q}_p$ ist und s ein $\mathbf{Q}_p$-rationales, halbeinfaches Element aus einem der Levifaktoren $A = T_{split}$, $L(\alpha)$ oder $L(\beta)$ von $GSp(4)$ ist.