Die L^2–Spurformel von Arthur im Fall der Gruppe GSp(4): Die gemittelten Charaktere der diskrete Serie an der unendlichen Stelle

von
Michael Schröder

Nr 159

Schwerpunkt Arithmetik
an der Universität Mannheim
Mai 1992

Einleitung

Die L^2–Spurformel von Arthur beschreibt den Lefschetzcharakter der Wirkung eines Heckeoperators auf der L^2–Kohomologie einer Shimuravarietät zu einer reduktiven Gruppe G durch die geometrische Seite der allgemeinen Spurformel von Arthur zu G. Ihre Besonderheit liegt darin, daß auf der geometrischen Seite nur die Konjugationsklassen elliptischer halbeinfacher Elemente auftreten und so alle Terme dort einfache Interpretationen haben. Wir erinnern daran im ersten Kapitel unserer Arbeit. Die L^2–Spurformel gibt so eine endliche, geschlossene Formel für den Lefschetzcharakter. Motiviert ist unsere Arbeit durch die Frage, ob man auf diese Weise Aussagen über die zweite Kohomologie der Gruppe $GSp(4)$ erhalten kann.

Die Vereinfachungen auf der geometrischen Seite in der Spurformel finden ausschließlich an der unendlichen Stelle statt. Ausdruck hierfür sind die gemittelten diskrete Serie Charaktere $\Phi_M(\gamma, \tau)$ auf der geometrischen Seite der L^2–Spurformel. Harish–Chandra hat für sie allgemeine Formeln im Fall $M = G$ angegeben, Herb konnte Rekursionsbedingungen für die im Fall $M \neq G$ auftretenden Patchingfaktoren herleiten. In Teil 2 unserer Arbeit führen wir diese Berechnungen für die Gruppe $GSp(4)$ und ihre beiden in Frage kommenden Levifaktoren $L(\alpha)$ und $L(\beta)$ explizit durch. In (3.28), (4.31) und (5.30) geben wir die Ausdrücke für $\Phi_{GSp(4)}(\gamma, \tau)$, $\Phi_{L(\alpha)}(\gamma, \tau)$ und $\Phi_{L(\beta)}(\gamma, \tau)$ respektive für eine allgemeine Darstellung τ an. In (6.8) haben wir diese Charaktere für eine eindimensionale Darstellung τ berechnet, wo sie sich stark vereinfachen.

Inhaltsverzeichnis

Teil 1

Kapitel 1 Die L^2–Spurformel von Arthur

Die invariante Spurformel [**ArITF**] von Arthur wurde von ihm in [**ArL2**] auf das klassische Problem angewandt, die Spur eines Heckeoperators auf einem Raum automorpher Funktionen zu berechnen. Ziel dieses Abschnittes ist es sein Resultat darzustellen.

1A Berechnung der Lefschetzzahl eines Heckeoperators auf der L^2– Kohomologie durch die geometrische Seite der Spurformel

Seien dazu im folgenden G eine zusammenhängende, über $\mathbf{Q}$ definierte, reduktive algebraische Gruppe, A_G der maximalzerfallende Torus im Zentrum von G und $K'_\infty = K_\infty \cdot A_G^\circ(\mathbf{R})$ für eine maximalkompakte Teilgruppe K_∞ von $G(\mathbf{R})$. Für eine endlichdimensionale irreduzible Darstellung (μ, V) von $G(\mathbf{R})$ sei F_μ die lokalkonstante Garbe

$$\mathcal{F}_\mu = G(\mathbf{Q})\backslash(V \times G(\mathbb{A}_\mathbf{Q}))/K'_\infty$$

über

$$X_K = G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})/K'_\infty = G(\mathbf{Q})\backslash(X \times G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})_{fin}).$$

Nach einem Resultat von Harish-Chandra [**Wa I**, 1.3.3.3, p.99], [**Wal**, p.58f] sind alle fundamentalen Tori einer halbeinfachen Liegruppe über den reellen Zahllen zueinander konjugiert. Daher existiert in einer reell reduktiven Gruppe höchstens eine $G(\mathbf{R})$–Konjugationsklasse über $\mathbf{R}$ definierter, maximaler Tori von G, die anisotrop modulo A_G sind.
Existiere weiter in G ein über $\mathbf{R}$ definierter, maximaler Torus $B = B(G)$, der anisotrop modulo A_G ist. Sei B so gewählt, daß $B(\mathbf{R})$ in K'_∞ liegt. Unter diesen Voraussetzungen ist die L^2–Kohomologiegruppe

$$H^*_{(2)}(X_K, \mathcal{F}_\mu) = \oplus_{q\geq 0} H^q_{(2)}(X_K, \mathcal{F}_\mu)$$

nach einem Satz von Borel und Casselman endlichdimensional. Jedes Element g in $G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})_{fin}$ operiert auf dem $H^q_{(2)}(X_K, \mathcal{F}_\mu)$ zugrundeliegenden Komplex gebildet von den Räumen $A^q_{(2)}$ der glatten und quadratintegrierbaren q–Differentialformen ω auf X_K mit Werten in $\mathcal{F}_\mu$, die invariant sind unter einer offenen, kompakten Teilgruppe von $G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})_{fin}$ und für die $d\omega$ quadratintegrierbar ist. Diese Operation kommutiert mit dem Differential d. Folglich definiert jedes Element g aus $G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})_{fin}$ einen Operator

$$H^*_{(2)}(g, \mathcal{F}_\mu) = \oplus_{q\geq 0} H^q_{(2)}(g, \mathcal{F}_\mu)$$

auf $H^*_{(2)}(X_K, \mathcal{F}_\mu)$. Diese Darstellung ist zulässig und glatt. Für jedes Element h aus dem Raum $C_c^\infty(G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})_{fin})$ der glatten Abbildungen mit kompaktem Träger auf $G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})_{fin}$ ist

$$H^q_{(2)}(h, \mathcal{F}_\mu) = \int_{G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})_{fin}} h(g) H^q_{(2)}(g, \mathcal{F}_\mu)dg$$

ein Operator mit endlichem Rang auf $H^q_{(2)}(X_K, \mathcal{F}_\mu)$. Die L^2–Spurformel von Arthur drückt die Lefschetzzahl

$$\mathcal{L}(\mu)(h) = \sum\nolimits_{q\geq 0} (-1)^q \mathrm{tr}\big(H^q_{(2)}(h, \mathcal{F}_\mu)\big)$$

in termini der geometrischen Seite der Spurformel aus. An dieser Stelle sei zunächst daran erinnert, daß die L^2–Kohomologie identisch ist mit der relativen Liealgebrakohomologie des Raumes der glatten Vektoren im diskreten Spektrum der rechtsregulären Darstellung von $G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})$ auf $L^2(G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{Q}))$. Sei präziser $\xi = \xi(\mu)$ der Quasicharakter auf $A_G^\circ(\mathbf{R})$, so daß

$$\mu(xz) = \xi^{-1}(z).\mu(x)$$

für alle z in $A_G^\circ(\mathbf{R})$ und alle x in G_∞ gilt.

Sei $L^2(G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{Q}),\xi)$ der Raum aller Abbildungen f auf $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})$ mit

$$f(zx) = \xi(z).f(x)$$

für alle z in $A_G^\circ(\mathbf{R})$ und alle x in $G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})$. Die Gruppe $G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})$ operiert durch Rechtsmultiplikation auf diesem Raum. Sei $\Pi(G(\mathbb{A}_\mathbf{Q}),\xi)$ die Menge der Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von $G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})$ in $\Pi(G(\mathbb{A}_\mathbf{Q}))$ mit $\pi(zx) = \xi(z).\pi(x)$ für alle z in $A_G^\circ(\mathbf{R})$ und alle x in $G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})$. Für jede solche Darstellung π bezeichne $m_{disc}(\pi)$ die Vielfachheit, mit der π diskret als direkter Summand in $L^2(G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{Q}),\xi)$ auftritt. Sei weiter $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_{fin}$ mit π_∞ einer irreduziblen Darstellung von G_∞ und π_{fin} einer irreduziblen Darstellung von $G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})_{fin}$. Da $G_\infty/A_G^\circ(\mathbf{R})$ eine kompakte Cartanuntergruppe enthält, gilt nach Resultaten von Borel und Casselman

$$H^q_{(2)}(h,\mathcal{F}_\mu) = \oplus\big(m_{disc}(\pi).\mathrm{dim}H^q(\mathrm{Lie}G, K'_\infty, \pi_\infty\otimes\mu)\big).\pi_{fin}(h).$$

Dabei läuft die direkte Summe über alle Äquivalenzklassen in $\Pi(G(\mathbb{A}_\mathbf{Q}),\xi)$. Setzt man

$$\chi(\mu)(\pi_\infty) = \sum\nolimits_{q\geq 0}(-1)^q \mathrm{dim}H^q(\mathrm{Lie}G, K'_\infty, \pi_\infty\otimes\mu),$$

dann ist

$$\mathcal{L}(\mu)(h) = \sum\nolimits_\pi \big(m_{disc}(\pi)\chi(\mu)(\pi_\infty)\big)\mathrm{tr}\big(\pi_{fin}(h)\big).$$

Dabei läuft die Summe über alle Äquivalenzklassen in $\Pi(G(\mathbb{A}_\mathbf{Q}),\xi)$. Auf diese Weise ist $\chi(\mu)(\pi_\infty)$ sinnvoll definiert für jede Darstellung von G_∞, die eine endliche Kompositionsreihe besitzt. Als additive Funktion, die nur vom Bild einer solchen Darstellung in der Grothendieckgruppe abhängt, braucht $\chi(\mu)$ dann aber nur noch auf einer Basis der Grothendieckgruppe berechnet zu werden, wie sie von den Standarddarstellungen gebildet wird. Dabei bestehen die Standardarstellungen genau aus den Darstellungen, die parabolisch von irreduziblen und modulo Zentrum temperierten Darstellungen von Levifaktoren induziert werden. Jede Standardadrstellung ist entweder induziert oder gehört zur Menge $\Pi_{temp}(G_\infty)$ der modulo $A_G^\circ(\mathbf{R})$ temperierten Darstellungen in $\Pi(G_\infty)$. Nach Standardresultaten der Liekohomologie verschwindet $\chi(\mu)$ auf den temperierten Standarddarstellungen. Bezeichnet $\check{\mu}$ die für alle x in G_∞ durch $\check{\mu}(x) = {}^t\mu(x^{-1})$ definierte kontragradiente Darstellung, gilt sogar

$$\chi(\mu)(\pi_\infty) = \begin{cases} (-1)^{q(G)} & \text{für } \pi_\infty \text{ in } \Pi_{disc}(\check{\mu}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dabei ist

$$q(G) = \frac{1}{2}\mathrm{dim}(G(\mathbf{R})/K'_\infty). \tag{1.1}$$

Nach dem Paley-Wiener Satz von Clozel und Delorme gibt es eine Abbildung f_μ aus dem Raum $\mathcal{H}_{ac}(G(\mathbf{R}),\xi^{-1})$ aller der glatten, K'_∞−endlichen Abbildungen auf $G(\mathbf{R})$ mit modulo $A_G^\circ(\mathbf{R})$ kompaktem Träger, die sich unter $A_G^\circ(\mathbf{R})$ mit dem Charakter ξ^{-1} transformieren, so daß gilt

$$\mathrm{tr}\big(\pi_\infty(f_\mu)\big) = \mathrm{tr}\Big(\int_{G(\mathbf{R})\backslash A_G^\circ(\mathbf{R})} f_\mu(x).\pi_\infty(x)dx\Big) = \begin{cases} (-1)^{q(G)} & \text{für } \pi_\infty \text{ in } \Pi_{disc}(\check{\mu}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Da die Standaddarstellungen eine Basis für die Grothendieckgruppe von G_∞ bilden, gilt somit

$$\mathrm{tr}\big(\pi_\infty(f_\mu)\big) = \chi(\mu)(\pi_\infty)$$

für alle π in $\Pi(G_\infty,\xi^{-1})$. Sei $f_\mu\otimes h$ die für alle $x = x_\infty\otimes x_{fin}$ in $G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})$ durch

$$(f_\mu\otimes h)(x_\infty\otimes x_{fin}) = f_\mu(x_\infty).h(x_{fin})$$

gegebene glatte Abbildung auf $G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})$. Dann ist $\mathrm{tr}\big(\pi(f_\mu\otimes h)\big) = \mathrm{tr}\big(\pi_\infty(f_\mu)\big).\mathrm{tr}\big(\pi_{fin}(h)\big)$ für alle π in $\Pi(G(\mathbb{A}_\mathbf{Q}),\xi)$. Folglich gilt

$$\boxed{\mathcal{L}(\mu)(h) = \sum\nolimits_\pi \big(m_{disc}(\pi)\big)\mathrm{tr}\big(\pi(f_\mu\otimes h)\big).} \tag{1.2}$$

Dabei läuft die Summe über alle Äquivalenzklassen π in $\Pi(G(\mathbb{A}_\mathbf{Q}),\xi)$.

Auf den Ausdruck der rechten Seite kann jetzt die invariante Spurformel von Arthur angewendet werden. Genauere Inspektion zeigt, daß ihre in [**ArITF II**,Theorem (7.1)(a), p.538] beschriebene Spektralseite ausgewertet an der Stelle $f_\mu \otimes h$ mit $\mathcal{L}(\mu)(h)$ identisch ist.
Die geometrische Seite der Spurformel hat nach [**ArITF II**, Theorem (3.3), p.513] die Gestalt

$$(1.3) \qquad \boxed{I(f_\mu \otimes h) = \sum\nolimits_M \frac{|W_0^M|}{|W_0^G|} \sum\nolimits_\gamma a^M(S,\gamma) I_M(\gamma,\ f_\mu \otimes h)}.$$

Wir erklären kurz die Bedeutung der einzelnen Terme. Dazu sei G im folgenden allgemeiner über dem Zahlkörper F definiert.
Die erste Summe läuft über alle die Standardlevifaktoren M über F von G, die einen fixierten minimalen Levifaktor M_0 enthalten und für die M_∞ stabil unter der zu K_∞ korrespondierenden Cartaninvolution von G ist. Die Gruppe W_0^M ist die eingeschränkte Weylgruppe $N_M^\circ(M_0)/M_0^\circ$.
Die zweite Summe läuft über alle (M,S)–Äquivalenzklassen γ in M_∞. Dabei ist zunächst S Vereinigung der unendlichen Stellen S_∞ von F mit einer fixierten endlichen Menge S_{fin} endlicher Stellen von F, die eine nur von $f_\mu \otimes h$ abhängige Stellenmenge S_0 enthält, sonst aber beliebig ist. Bezeichne weiter F_S das Produkt der Komplettierungen von F an den Stellen aus S. Die (M,S)*–Äquivalenzklassen* in $M(F)$ sind dann für jedes halbeinfache Element σ in $G(F)$ und jede unipotente Konjugationsklasse U im Zentralistor $C_G(\sigma)(F_S)$ gegeben durch

$$\{g^{-1}\sigma u g : g \text{ in } M^\circ(F) \text{ und } u \text{ in } U \cap M^\circ(F)\}.$$

Insbesondere sind die halbeinfachen (M,S)–Äquivalenzklassen genau die halbeinfachen $M^\circ(F)$–Konjugationsklassen.
Die Gewichtungsfaktoren $a^M(S,\gamma)$ verallgemeinern die Tamagawazahlen des Zentralisators von γ als Gewichtungskoeffizienten im Fall der klassischen Spurformel. Sie werden nach [**ArFD**, p.208] im wesentlichen bestimmt durch den halbeinfachen Anteil σ von γ, sie kommen aber von den unipotenten Konjugationsklassen [**ArMUV**, pp. 1269ff]. In dieser Situation hat Arthur induktiv gezeigt, daß Gewichtsfaktoren $a^{M_\sigma}(S,u)$ für J_{unip} existieren, konnte aber nur im Fall $u=1$ eine explizite Formel für sie angeben. Für die Klasse halbeinfacher Elemente, die in der L^2–Spurformel auftreten, übersetzt sich dies aber zu einer expliziten Formel für $a^M(S,\gamma)$. Dazu die

(1.4) Definition: Ein halbeinfaches, F–rationales Element γ aus einem Levifaktor M von G heißt F**–elliptisch in** M, wenn sein Zentralisator in M einen maximalen F–Torus von M enthält, der anisotrop modulo A_M° ist.
Sei weiter $i^M(\gamma)$ die Zahl der Zusammenhangskomponenten von M_γ, die F–rationale Punkte enthalten.

(1.5) Satz: *Für ein ein F-rationales, halbeinfaches Element γaus dem Levifaktor M von G gilt*

$$a^M(S,\gamma) = \frac{1}{i^M(\gamma)} \mathrm{vol}\big(M_\gamma^\circ(F)\backslash M_\gamma^\circ(F)(\mathbb{A}_F)^1\big) = \frac{1}{i^M(\gamma)} \mathrm{vol}\big(M_\gamma^\circ(F) A_M^\circ(F_\infty)\backslash M_\gamma^\circ(F)(\mathbb{A}_F)^1\big),$$

wenn γ ein F-elliptisches Element in M ist . In allen anderen Fällen ist $a^M(S,\gamma)$ Null.

Dies ist [**ArFD**, Theorem (8.2), p.208].

Im vorliegenden Fall besteht die Hauptarbeit darin, zu zeigen, daß die invariante Distribution $I_M(\gamma, f_\mu \otimes h)$ für die oben gewählte Abbildung $f_\mu \otimes h$ nur für $\mathbf{Q}$–elliptische Elemente γ in M nicht verschwindet.
Um dies zu präzisieren fahren wir mit der Diskussion der invarianten Distribution $I_M(\gamma, f)$ im allgemeineren Kontext einer über F definierten Gruppe G fort. Hierfür sei allgemeiner f zunächst das Tensorprodukt einer Abbildung aus $C_c^\infty(G(F_{S_0})^1)$ mit den charakteristischen Abbildungen der maximalkompakten Teilgruppen K_v von $G(F_v)$ für alle v nicht in S_0. Sei darüberhinaus f links- und rechtsendlich unter der maximalkompakten Teilgruppe $K = \Pi_v K_v$ von $G(\mathbb{A}_F)$.

Wir gehen jetzt zurück zur nichtinvarianten Cutoff–Spurformel. Deren geometrische Seite ist

$$J(f) = \sum_M \frac{|W_0^M|}{|W_0^G|} \sum_\gamma a^M(S,\gamma) J_M(S,\gamma)(f)$$

mit den bis auf J_M gleichen Termen wie in der oben angegebenen invarianten Spurformel (1.3). Die Distribution $J_M(S,\gamma)$ ist für γ regulär nach [**ArLBWOI**,§ 6] ein –verallgemeinertes– gewichtetes Orbitalintegral. Aus diesen gewichteten Orbitalintegralen entsteht $J_M(S,\gamma)$ durch eine verschachtelte Limesbildung, wenn γ nicht regulär ist. Die Spektralseite der nicht invarianten Cutoff–Spurformel hat die Gestalt

$$J(f) = \sum_{t\geq 0} \sum_M \frac{|W_0^M|}{|W_0^G|} \int_{\Pi(M,t)} a^M(\pi) J_M(\pi, f) d\pi.$$

Wesentlich hierin sind die in [**ArIOR**] definierten und untersuchten gewichteten Charaktere $J_M(\pi, f)$. Nach skalaren Paley–Wiener Sätzen von Clozel–Delorme im archimedischen Fall sowie Berstein–Deligne–Kazhdan und Rogawski im nichtarchimedischen Fall gibt es zu jeder Abbildung f wie oben Abbildungen $\phi_M(f)$ aus $C^\infty(M(F_S))$ mit modulo Zentrum kompaktem Träger, so daß

$$\mathrm{tr}(\pi(\phi_M(f))) = J_M(\pi, f)$$

für alle Darstellungen π in $\Pi(M(/\!\mathbb{A}_F))$ gilt, die bis auf Twisten mit einem Charakter temperiert sind. Diese Abbildungen sind eindeutig bis auf Abbildungen mit skalarer Fouriertransformation Null. Sie seien so gewählt, daß $\phi_G(f) = f$ gilt.
Wir sagen weiter, daß eine invariante Distribution I *von Charakteren getragen wird*, wenn $I(f) = 0$ für alle Abbildungen f wie oben ist, falls $\mathrm{tr}(\pi(f)) = 0$ für alle temperierten Darstellungen π in $\Pi(G(/\!\mathbb{A}_F))$ gilt. In diesem Fall gibt es nach [**ArITF I**, Proposition (1.1), p.329f] eine eindeutig durch I bestimmte Distribution $\check{I}$ auf dem Paley–Wiener Raum mit

$$I(f) = \check{I}(\phi_M(f)).$$

Es ist ein weiterer Satz [**ArITF II**, Theorem (5.1), p.523; Corollary (5.3), p.529], daß invariante, von Charakteren getragene Distributionen $I_M = I_M^G$ induktiv durch Rekursion über die Levifaktoren L, die M enthalten, wiefolgt definiert werden

$$I_M^M = J_M^M \qquad \text{und} \qquad J_M(\cdot, f) = \sum_{L\supseteq M} \check{I}_M^L(\cdot\, , \phi_L(f)).$$

Dabei ist I_M^M nach [**ArLBWOI**, p.224, p.234f, p.254f] ein ungewichtetes Orbitalintegral auf M. Auf dessen genaue Form für γ halbeinfach kommen wir unten zurück.
In unserer Situation vereinfacht sich $I_M(\gamma, f_\mu \otimes h)$ weiter zu

$$I_M(\gamma, f_\mu \otimes h) = I_M^G(\gamma, f_\mu) \check{I}_M^M(\gamma, \phi_M(h)).$$

Dabei wird $I_M^G(\gamma)$ als Distribution auf $G(\mathbf{R})$ aufgefaßt und I_M^M ist ein Orbitalintegral auf $G(\mathbf{Q}_{S_{fin}})$. Sei nämlich $h = \Pi_{v\in S_{fin}} h_v$ mit h_v in $\mathcal{H}(G(F_v))$. Induktiv können wir $S_{fin} = \{v, w\}$ voraussetzen. Nach [**ARrITF I**, Proposition (9.1), p.368] spaltet sich $I_M(\gamma, f_\mu \otimes h)$ auf zu

$$I_M(\gamma, f_\mu \otimes h) = \sum_{L,L^*\supseteq M} d_M^G(L, L^*) \check{I}_M^L(\gamma, \phi_L(f_\mu \otimes h_v)) \check{I}_M^{L^*}(\gamma, \phi_{L^*}(h_w)).$$

Da $f_\mu \otimes h$ kuspidal an der unendlichen Stelle ist, verschwindet $\phi_L(f_\mu \otimes h_v)$ nur für $L = G$ nicht. Weiter ist $d_M^G(G, L^*) = 1$ für $L^* = M$ und verschwindet für alle anderen Levifaktoren L^*, die M enthalten. Deshalb gilt in einem ersten Schritt

$$\text{(1.6)} \qquad \boxed{\mathcal{L}(\mu)(h) = \sum_M \frac{|W_0^M|}{|W_0^G|} \sum_\gamma a^M(S,\gamma) I_M^G(\gamma, f_\mu) \check{I}_M^M(\gamma, \phi_M(h)).}$$

Dabei läuft die erste Summe wieder über alle Standardlevifaktoren M über $\mathbf{Q}$, die M_0 enthalten. Die zweite Summe läuft jeweils über alle (M,S)–Äquivalenzklassen γ in $M(\mathbf{Q})$.

1B Das Integral $I_M^G(\gamma, f_\mu)$

Der Beitrag $I_M^G(\gamma, f_\mu)$ an der reellen Stelle verschwindet nur für halbeinfache, F–elliptische Elemente γ nicht. Für diese Elemente kann er explizit als Summe von Charakteren der μ–diskreten Serie berechnet werden. Dies reduziert die Summe in (1.6) auf halbeinfache Konjugationsklassen γ, für die alle ihre Summanden explizite Darstellungen haben und vereinfacht somit die Spurformel für $\mathcal{L}(\mu)(h)$ entscheidend.

Um dies zu präzisieren sei im folgenden ξ ein Quasicharakter auf $A_G^\circ(\mathbf{R})$. Für jede Darstellung π in $\Pi(G(\mathbf{R}), \xi^{-1})$ sei $\check{\pi}$ die kontragradiente Darstellung. Sei weiter $\overline{G}/A_G$ eine fixierte kompakte reelle Form von G/A_G. Vorausgesetzt ist hierbei, daß ein Paar $(\overline{G}, \eta)$ mit $\overline{G}$ einer reell–reduktiven Gruppe und $\eta : \overline{G} \to G$ einem über den komplexen Zahlen definierter Isomorphismus fixiert ist, so daß $\eta^\sigma \circ \eta$ für alle σ in $Gal(\mathbf{C}|\mathbf{R})$ ein innerer Automorphismus von G ist. Mittels η identifizieren wir A_G mit dem maximalzerfallenden Torus über $\mathbf{R}$ im Zentrum von $\overline{G}$. Der Quotient $\overline{G}(\mathbf{R})/A_G(\mathbf{R})$ sei kompakt. Die Darstellungen in $\Pi(\overline{G}(\mathbf{R}))$ sind dann alle endlichdimensional.

Nach der Langlandsklassifikation ist $\Pi_{disc}(G(\mathbf{R}))$ disjunkte Vereinigung von endlichen Teilmengen $\Pi_{disc}(\tau)$. Diese werden parametrisiert von den irreduziblen Darstellungen τ in $\Pi_{disc}(\overline{G}(\mathbf{R}))$. Die Elemente jedes dieses Pakete $\Pi_{disc}(\tau)$ werden wiederum parametrisiert durch die Kosets in

$$(1.7) \qquad \mathcal{D}(G, B) = W(G(\mathbf{R}), B(\mathbf{R}))/W(G(\mathbf{C}), B(\mathbf{C})).$$

dabei ist $W(G, B) = W(G(\mathbf{C}), B(\mathbf{C}))$ die relative Weylgruppe von G bezüglich des oben fixierten maximalen Torus B und $W(G(\mathbf{R}), B(\mathbf{R}))$ ist die Teilgruppe der von $G(\mathbf{R})$ induzierten Elemente. Auch die oben fixierte Darstellung μ fassen wir durch Pullback mit η als Element von $\overline{G}(\mathbf{R})$) auf und erhalten insbesondere die endlichen Pakete $\Pi_{disc}(\mu)$ und $\Pi_{disc}(\check{\mu})$.

Wir nennen eine Abbildung f aus $\mathcal{H}_{ac}(G(\mathbf{R}), \xi)$ *stabil kuspidal*, wenn die für alle temperierten Darstellungen π durch $\pi \mapsto tr(\check{\pi}(f))$ gegebene Abbildung ihren Träger in der Teilmenge $\Pi_{disc}(G(\mathbf{R}), \xi)$ hat, die aus allen modulo $A_G(\mathbf{R})$ quadratintegrierbaren, temperierten Darstellungen in $\Pi_{temp}(G(\mathbf{R}), \xi)$ besteht, und konstant ist auf allen Paketen $\Pi_{disc}(\tau)$ mit τ einer Darstellung aus $\Pi(\overline{G}(\mathbf{R}), \xi)$. Die oben fixierte Abbildung f_μ ist nach Konstruktion ein Beispiel einer stabil kuspidalen Abbildung.

Sei im folgenden M einer der Levifaktoren, die M_0 enthalten und stabil sind unter der zu K korrespndierenden Cartaninvolution. Für jedes Element γ in M mit Jordanzerlegung $\gamma = \sigma u$ sei

$$(1.8) \qquad D^M(\gamma) = \det(1 - Ad(\sigma)|\mathrm{Lie}M/\mathrm{Lie}M_\sigma^\circ).$$

Im Fall $M_\sigma^\circ = G_\sigma^\circ$ ist

$$(1.9) \qquad D^G(\gamma) = D(G|M)(\gamma)D^M(\gamma) \qquad \text{mit} \qquad D(G|M)(\gamma) = \det(1 - Ad(\sigma)|\mathrm{Lie}G/\mathrm{Lie}M).$$

Enthalte M zusätzlich einen maximalen, über $\mathbf{R}$ definierten Torus $T = B(M)$, so daß $T(\mathbf{R})/A_M^\circ(\mathbf{R})$ kompakt ist. Nach [**ArIOR II**, Theorem (6.4), p.89] gilt dann für alle in G regulären Elemente γ in $T_{reg}(\mathbf{R})$ zunächst

$$(1.10) \qquad I_M(\gamma, f) = (-1)^{\dim(A_M \backslash A_G)} \frac{\sqrt{|D^G(\gamma)|}}{\mathrm{vol}(T(\mathbf{R})/A_M^\circ(\mathbf{R}))} \sum\nolimits_\pi \Theta_\pi(\gamma) \mathrm{tr}(\check{\pi}(f)).$$

Dabei läuft die Summe über alle Klassen π in $\Pi_{disc}(G(\mathbf{R}), \xi)$ und Θ_π bezeichnet den Charakter von π. Es ist ein weiterer Satz von Arthur, daß $I_M(\gamma, f)$ für jedes Element γ in $M(\mathbf{R})$ im wesentlichen durch diese Formel gegegben ist. Wir setzen zur Vereinfachung

$$(1.11) \qquad \Phi_M(\gamma, f) = \frac{1}{\sqrt{|D^M(\gamma)|}} I_M(\gamma, f)$$

für alle γ in $M(\mathbf{R})$ und

$$(1.12) \qquad \Phi_M(\gamma, \tau) = (-1)^{q(G)} \sqrt{|D(G|M)(\gamma)|} \sum\nolimits_{\pi \in \Pi_{disc}(G(\mathbf{R}), \xi)} \Theta_\pi(\gamma) \mathrm{tr}(\check{\pi}(f))$$

für alle γ in $T_{reg}(\mathbf{R})$ und alle τ in $\Pi_{disc}(\overline{G}(\mathbf{R}), \xi)$.

Mit diesen Bezeichnungen schreibt sich (1.10) als

$$(1.13) \qquad \Phi_M(\gamma, f) = (-1)^{\dim(A_M \backslash A_G)} \frac{1}{\mathrm{vol}(T(\mathbf{R})/A_M^\circ(\mathbf{R}))} \sum\nolimits_\tau \Phi_M(\gamma, \tau)(-1)^{q(G)} \mathrm{tr}\big(\breve{\tau}(f)\big).$$

Dabei läuft die Summe über alle τ in $\Pi(\overline{G}(\mathbf{R}), \xi)$. Weiter ist $\mathrm{tr}\big(\breve{\pi}(f)\big)$ für alle π in $\Pi_{disc}(\tau)$ gleich. Wir schreiben $\mathrm{tr}\big(\breve{\tau}(f)\big)$ für diese Zahl.
Sei auf $G(\mathbf{R})$ ein Haarsches Maß fixiert, das induziert wird von einer Differentialform ω höchsten Grades auf $G(\mathbf{R})$. Diese wird duch Pullback zu einer Differentialform höchsten Grades auf $\overline{G}(\mathbf{R})$. Auf diese Weise definiert jedes Haarsche Maß auf $G(\mathbf{R})$ genau ein Haarsches Maß auf $\overline{G}(\mathbf{R})$. Bezüglich dessen wird $\mathrm{vol}\big(T(\mathbf{R})/A_M^\circ(\mathbf{R})\big)$ berechnet. Nach [**ArL2**, Theorem (5.1), p.275] gilt

(1.14) Satz: *Ist f aus $\mathcal{H}_{ac}(G(\mathbf{R}), \xi)$ stabil kuspidal, dann gilt*

$$\Phi_M(\gamma, f) = (-1)^{\dim(A_M \backslash A_G)} \frac{\mathcal{D}(M_\gamma^\circ | B(M))}{(-1)^{q(M_\gamma^\circ)} \mathrm{vol}(T(\mathbf{R})/A_M^\circ(\mathbf{R}))} \sum\nolimits_\tau \Phi_M(\gamma, \tau)(-1)^{q(G)} \mathrm{tr}\big(\breve{\tau}(f)\big)$$

für alle γ in $M(\mathbf{R})$. Dabei läuft die Summe über alle Darstellungen τ in $\Pi(\overline{G}(\mathbf{R}), \xi)$. Insbesondere verschwindet $\Phi_M(\gamma, f)$, wenn γ nicht halbeinfach ist.

Wir kommen später darauf zurück, daß $\Phi_M(\cdot, \tau)$ zu einer stetigen Abbildung auf ganz $M(\mathbf{R})$ fortgesetzt werden kann und beschreiben im folgenden kurz die Idee des Beweises von Arthur dieses Satzes. Dabei setzen wir zur Vereinfachung voraus, daß alle auftretenden Zentralisatoren zusammenhängend sind.
Sei $\gamma = \sigma u$ die Jordanzerlegung von γ. Grundlegend für den Spezialfall $M = G$ und $\gamma = u$ ist ein Resultat von Harish-Chandra, nach dem es zu jedem unipotenten Element w in $G(\mathbf{R})$ ein harmonisches Polynom h_w vom Grad $\frac{1}{2}(\dim(G/B) - \dim(G/G_u))$ in der symmetrischen Algebra $S(\mathrm{Lie}B(\mathbf{C}))$ über $\mathrm{Lie}B(\mathbf{C})$ gibt, so daß für jedes reguläre Element H in $\mathrm{Lie}B(\mathbf{R})$ gilt

$$\Phi_G(w, f) = \lim_{H \to 0} \big((\partial h_u).F_f^B\big)(H) \qquad \text{mit} \qquad F_f^B(H) = \Delta_B^G(H) \int_{B(\mathbf{R}) \backslash G(\mathbf{R})} f(x^{-1} \exp(H) x) dx.$$

Dies heißt speziell, daß jedes unipotente Orbitalintegral Limes von Orbitalintegralen über halbeinfache Elemente ist. Als Konsequenz gilt damit

$$\Phi_G(u, f) = \big(\partial(Ah_u).F_f^B\big)(0) \qquad \text{mit} \qquad Ah_u = \frac{1}{|W(G,B)|} \sum\nolimits_{s \in W(G,B)} \epsilon(s)(s.h_u).$$

Dabei ist $\epsilon(s)$ das Signum von s. Das harmonische Element h zu ϵ ist daher gegeben durch das Produkt der Kowurzeln zu den positiven Wurzeln. Da $\dim G_u$ kleiner ist als $\dim G$, hat h_u kleineren Grad als h und transformiert sich somit unter $W(G, B)$ nicht mit dem Charakter ϵ. Deshalb ist Ah_u identisch Null, wenn u nicht Eins ist.
Für $\gamma = 1$ zeigt die Plancherelformel

$$\Phi_G(1, f) = f(1) = \sum (d\breve{\pi}) \mathrm{tr}\big(\breve{\pi}(f)\big),$$

Dabei läuft die Suumme über alle π in $\Pi_{disc}(G(\mathbf{R}), \xi)$. Nach Rechnungen von Shelstad gilt

$$d\breve{\pi} = \deg(\breve{\tau}) \frac{1}{\mathrm{vol}(\overline{G}(\mathbf{R})/A_G^\circ(\mathbf{R}))}$$

für alle π im Paket $\Pi_{disc}(\tau)$. Wegen $\deg(\breve{\tau}) = \deg(\tau) = \mathrm{tr}(\tau(1))$ und $|\mathcal{D}(G,B)| \mathrm{tr}(\breve{\tau}(f)) = \sum_{\pi \in \Pi(\overline{G}(\mathbf{R}), \xi)} \mathrm{tr}(\breve{\tau}(f))$ folgt somit

$$\Phi_G(1, f) = \frac{|\mathcal{D}(G,B)|}{(-1)^{q(G)} \mathrm{vol}(\overline{G}(\mathbf{R})/A_G^\circ(\mathbf{R}))} \sum\nolimits_\tau \Phi_G(1, \tau)(-1)^{q(G)} \mathrm{tr}\big(\breve{\pi}(f)\big).$$

Kombiniert man diese Formel mit der oben angegebenen Formel für $I_M(\gamma, f)$ mit γ regulär in $B(\mathbf{R})$, erhält man

$$\Phi_G(1,f) = \frac{|\mathcal{D}(G,B)|}{(-1)^{q(G)}\mathrm{vol}(\overline{G}(\mathbf{R})/A_G^\circ(\mathbf{R}))}\mathrm{vol}(B(\mathbf{R})/A_G^\circ(\mathbf{R}))\lim_{\gamma\to 1}\Phi_G(\gamma,f).$$

dabei wird der Limes gebildet über kleine Elemente in $B_{reg}(\mathbf{R})$. Die restlichen Fälle werden durch ältere Resultate von Arthur auf diesen Fall zurückgeführt.

1C Das Integral $\Phi_M(\gamma,\tau)$

Wir erinnern daran, daß wir oben einen maximalen, über den reellen Zahlen definierten Torus B in G fixiert hatten, der anisotrop modulo A_G ist und zusätzlich die Eigenschaft hat, daß seine reellen Punkte in der Gruppe $K'_\infty = K_\infty A_G^\circ(\mathbf{R})$ liegen. Nach einem Lemma von Harish-Chandra ist $B(\mathbf{R})$ das Produkt seiner Zusammenhangskomponente $B^\circ(\mathbf{R})$ mit dem Zentralisator $Z(B)$ der Zusammenhangskomponente $G^\circ(\mathbf{R})$ in K_∞. Da $G^\circ(\mathbf{R})$ Zariski-dicht in G liegt, ist $Z(B)$ gleich dem Schnitt von K_∞ mit dem Zentrum von G.
Wir fixieren eine Ordnung der Wurzeln von (G,B) und definieren $2\rho_B$ wie üblich als die Summe dieser positiven Wurzeln

$$\rho_B = \frac{1}{2}\sum\nolimits_{\alpha>0}\alpha. \tag{1.15}$$

Sei $\wedge(\xi)$ für den Quasicharakter ξ auf $A_G^\circ(\mathbf{R})$ die Menge aller Paare (g,f) mit g in $Z(B)^* = \mathrm{Hom}(Z(B),\mathbf{C}^*)$ und f in $\mathrm{Lie}B(\mathbf{C})^* = \mathrm{Hom}(\mathrm{Lie}B(\mathbf{C}),\mathbf{C})$, für die durch

$$\begin{aligned} Z(B)\times\exp(\mathrm{Lie}B(\mathbf{C})) &\longrightarrow \mathbf{C} \\ (z,\exp(H)) &\longmapsto g(z)\exp((f-\rho_B)(H)) \end{aligned} \tag{1.16}$$

ein Quasicharakter auf $B(\mathbf{R})$ mit ξ als seiner Restriktion auf $A_G^\circ(\mathbf{R})$ definiert ist. Sei $\wedge_{reg}(\xi)$ die Teilmenge aller der Paare (g,f) in $\wedge(\xi)$, für die f regulär ist, also $< f, \alpha^\vee >$ nicht verschwindet für alle Kowurzeln $\alpha^\vee$. Beide Mengen sind unabhängig von der gewählten Ordnung der Wurzeln. Auf beiden operiert die Weylgruppe durch Pullback mit $\mathrm{Ad}(s^{-1})$.
Die endlichdimensionalen Darstellungen τ in $\Pi(\overline{G}(\mathbf{R}),\xi)$ werden durch die $W(G,B)$–Orbiten in $\wedge_{reg}(\xi)$, die Darstellungen in der diskreten Serie werden durch die $W(G(\mathbf{R}),B(\mathbf{R}))$–Orbiten in $\wedge_{reg}(\xi)$ parametrisiert. Jedes Paket $\Pi_{disc}(\tau)$ korrespondiert somit zu der Partition eines gegebenen $W(G,B)$–Orbits von $\wedge_{reg}(\xi)$ in $W(G(\mathbf{R}),B(\mathbf{R}))$–Orbiten.
Für τ in $\Pi(\overline{G}(\mathbf{R}),\xi)$ fixiert sei (g,f) aus $\wedge_{reg}(\xi)$ dasjenige Element im korrespondierenden Orbit, für das f positiv ist auf allen positiven Kowurzeln von (G,B). Für jeden regulären Punkt

$$\gamma = z.\exp H \qquad \text{mit } z \text{ in } Z(B) \quad \text{und} H \text{ in } \mathrm{Lie}B(\mathbf{R})$$

gilt dann

$$\mathrm{tr}(\tau(\gamma)) = \Phi_G(\gamma,\tau) = \frac{1}{\Delta_B^G(H)}g(z)\sum\nolimits_{s\in W(G,B)}\epsilon(s)\exp((s.f)(H)) \tag{1.17}$$

mit

$$\Delta_B^G(H) = \Pi_{\alpha>0}\exp\left(\frac{\alpha(H)}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha(H)}{2}\right) \qquad \text{und} \qquad \epsilon(s) = \det(\mathrm{Ad}\, s|\mathrm{Lie}B(\mathbf{C})). \tag{1.18}$$

Auf allen anderen maximalen Tori in G werden die Werte der Charaktere bestimmt durch die Funktionen

$$\overline{c}(Q^+,R^+)$$

mit ganzzahligen Werten, die wir im folgenden zunächst diskutieren. Sie sind allgemein definiert für jedes Wurzelsystem R, dessen Weylgruppe $W(R)$ die -1 enthält. Dann seien R^+ ein positives Wurzelsystem in R und Q^+ ein positives System für die Kowurzeln $Q = R^\vee$ zu R. Zu R^+ korrespondiert dann eine positive Weylkammer $\mathbf{a}(R^+)$ im von Q erzeugten reellen Vektorraum und zu Q^+ korrespondiert eine positive Weylkammer $\mathbf{a}(Q^+)$ im von R erzeugten reellen Vektorraum. Für jede Wurzel α in R ist die Menge $R(\alpha)$ aller zu α orthogonalen Wurzeln in R ein Wurzelsystem des gleichen Typs wie R. Dessen Kowurzelsystem ist mit $Q(\alpha) = Q(\alpha^\vee)$ identisch. Die Funktionen $\bar{c}(Q^+, R^+)$ sind dann eindeutig durch die folgenden Eigenschaften bestimmt

(1.19) Für alle s in $W(R)$ ist $\bar{c}(s.Q^+, s.R^+) = \bar{c}(Q^+, R^+)$.

(1.20) Nur wenn $\phi(X)$ negativ ist für alle X in $\mathbf{a}(R^+)$ und alle ϕ in $\mathbf{a}(Q^+)$, verschwindet $\bar{c}(Q^+, R^+)$ nicht.

(1.21) Für jede zu einer Wurzel α in R korrespondierenden Spiegelung $s(\alpha)$ in $W(R)$ gilt

$$\bar{c}(Q^+, R^+) + \bar{c}(s(\alpha).Q^+, R^+) = 2\bar{c}(Q^+ \cap Q(\alpha), R^+ \cap R(\alpha)).$$

(1.22) $\bar{c}(Q^+, \emptyset) = 1$.

Sei jetzt $T = B(M)$ ein maximaler, über den reellen Zahlen definierter Torus im Levifaktor M, der anisotrop modulo $A_M^\circ(\mathbf{R})$. Wie oben bemerkt ist T bis auf Konjugation durch Elemente aus $M(\mathbf{R})$ eindeutig bestimmt. Sei R die Menge der reellen Wurzeln von (G,T). Dann enthält $W(R)$ ein Element, das wie -1 operiert. Für jedes reguläre Element H aus $\mathrm{Lie}\,T = \mathrm{Lie}\,T(\mathbf{R})$ setzen wir

$$R^+(H) = \{\alpha \in R : \alpha(H) > 0\}. \tag{1.23}$$

Für jeden Homomorphismus ϕ von $\mathrm{Lie}\,T(\mathbf{C})$, so daß $\phi(\alpha^\vee)$ reell und ungleich Null ist für jede Kowurzel $\alpha^\vee$ in $Q = R^\vee$, sei

$$Q^+(\phi) = \{\alpha^\vee \in R : \phi(\alpha^\vee) > 0\}. \tag{1.24}$$

Wir fixieren eine Ordnung der Wurzeln von (G,T), die kompatibel ist mit einer Ordnung der eingeschränkten Wurzeln von (G, A_M). Seien R^+ die bezüglich dieser Ordnung positiven Wurzeln in R. Für jedes reguläre Element in $\mathrm{Lie}\,T$ ist dann

$$\frac{\sqrt{|D(G|M)(\exp H)|}}{\Delta_T^G(H)} = \frac{\epsilon_R(H)}{\Delta_T^M(H)} \qquad \text{mit} \qquad \epsilon_R(H) = (-1)^{|R^+(H)\cap(-R^+)|}. \tag{1.25}$$

Sei y aus $G(\mathbf{C})$ mit

$$(\mathrm{Ad}\,y)(\mathrm{Lie}\,B(\mathbf{C})) = \mathrm{Lie}\,T(\mathbf{C}). \tag{1.26}$$

Ist T so gewählt daß $T = (T \cap B)A_M$ gilt, kann y aus dem Zentralisator von $\mathrm{Lie}\,(B \cap T)(\mathbf{R})$ gewählt werden. Wir schreiben $\phi \mapsto y.\phi$ für den durch Pullback mit $\mathrm{Ad}\,y^{-1}$ definierten Isomorphismus $(\mathrm{Ad}\,y^{-1})^* : \mathrm{Lie}\,B(\mathbf{C})^* \longrightarrow \mathrm{Lie}\,T(\mathbf{C})^*$ zwischen den Dualräumen. Nach Harish-Chandra gilt dann

(1.27) Satz: *Sei (g,f) in $\Lambda_{reg}(\xi)$ zu τ in $\Pi(\overline{G}(\mathbf{R}),\xi)$ so gewählt, daß $y.f$ positiv ist für alle positiven Kowurzeln von G bezüglich $T = B(M)$. Dann verschwindet die Abbildung $\Phi_M(\gamma,\tau)$ nur auf den regulären Punkten γ in $T_{reg}(\mathbf{R})$ nicht, zu denen es Elemente z in $Z(B)$ und H in $\mathrm{Lie}\,T(\mathbf{R})$ gibt mit $\gamma = z.\exp(H)$. In diesem Fall ist*

$$\boxed{\Phi_M(z.\exp H, \tau) = \frac{\epsilon_R(H)}{\Delta_T^M(H)} g(z) \sum\nolimits_{s \in W(G,B)} \epsilon(s)\bar{c}(Q^+(y.s.f), R^+(H)) \exp\left((y.s.f)(H)\right).}$$

Eine einfache Konsequenz dieses Satzes ist dann

(1.28) Korollar: *Die auf $T_{reg}(\mathbf{R})$ definierte Abbildung $\Phi_M(\cdot,\tau)$ kann zu einer stetigen und $W(M,T)$–invarianten Abbildung auf ganz $T(\mathbf{R})$ fortgesetzt werden. Insbesondere ist $\Phi_M(\cdot,\tau)$ auf jeder Zusammenhangskomponente von $\{\gamma \in T(\mathbf{R}) : \alpha(\gamma) \neq 1$ für alle α in $R\}$ eine endliche, $W(M,T)$–invariante Linearkombination von Quasicharakteren auf $T(\mathbf{R})$.*

Ist das Element γ aus $M(\mathbf{R})$ in $M(\mathbf{R})$ zu σ aus dem Abschluß von $T_{reg}(\mathbf{R}) \cap Z(B) \exp\left(\operatorname{Lie} T(\mathbf{C})\right)$ in $T(\mathbf{R})$ konjugiert, setzen wir

$$\Phi_M(\gamma, \tau) = \Phi_M(\sigma, \tau).$$

Andernfalls sei $\Phi_M(\gamma, \tau) = 0$. Auf diese Weise haben wir $\Phi_M(\cdot, \tau)$ zu einer $M(\mathbf{R})$–invarianten Abbildung auf $M(\mathbf{R})$ fortgesetzt, die ihren Träger in den $M(\mathbf{R})$–elliptischen Konjugationsklassen von $M(\mathbf{R})$ hat.
Wir setzen weiter formal $\Phi_M(\cdot, \tau) = 0$, wenn der Levifaktor M von G nicht *kuspidal* ist, also nicht $\operatorname{rang} M(\mathbf{R}) = \operatorname{rang} M(\mathbf{R}) \cap K'_\infty$ gilt oder dazu äquivalent $M(\mathbf{R})$ keinen maximalen Torus über $\mathbf{R}$ enthält, der anisotrop modulo $A_M(\mathbf{R})$ ist.

1D Die L^2–Spurformel

Um eine Formel für $\mathcal{L}(\mu)(h)$ zu erhalten, setzen wir im folgenden die beiden Resultate (1.6) und (1.14) zusammen. Dazu bemerken wir, daß für jede der dort auftretenden Levifaktoren M nach der Produktformel

$$|D^M(\gamma)|_\infty |D^M(\gamma)|_{S_{fin}} = |D^M(\gamma)|_\infty \Pi_{v \in S_{fin}} |D^M(\gamma)|_v = 1$$

für alle (M, S)–Äquivalenzklassen γ in $M(\mathbf{R})$ gilt, wenn S hinreichend groß gewählt wurde. Indem man (1.6) auf beiden Seiten durch die Wurzel aus diesem Ausdruck teilt, erhält man

$$\mathcal{L}(\mu)(h) = \sum\nolimits_M \frac{|W_0^M|}{|W_0^G|} \sum\nolimits_\gamma a^M(S, \gamma) \Phi_M(\gamma, f_\mu) h_M(\gamma)$$

mit

$$h_M(\gamma) = \sqrt{|D^M(\gamma)|_{S_{fin}}}\ \check{I}_M^M(S_{fin}, \gamma, \phi_M(h)).$$

Weiter ist f_μ aus $\mathcal{H}_{ac}(G(\mathbf{R}), \xi^{-1})$, so daß für alle τ in $\Pi(\overline{G}(\mathbf{R}), \xi^{-1})$ nach Konstruktion

$$(-1)^{q(G)} \operatorname{tr}(\check{\tau}(F_\mu)) = \begin{cases} 1 & \tau = \mu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Nach (1.14) ist daher

$$\Phi_M(\gamma, f_\mu) = (-1)^{\dim(A_M \backslash A_G)} \frac{\mathcal{D}(M_\gamma^\circ | B(M))}{(-1)^{q(M_\gamma^\circ)} \operatorname{vol}(\overline{M_\gamma^\circ}(\mathbf{R}) / A_M^\circ(\mathbf{R}))} \Phi_M(\gamma, \mu).$$

Darüberhinaus verschwindet dieser Ausdruck nur für γ halbeinfach nicht. Da die (M, S)–Äquivalenzklasse eines halbeinfachen Elementes nach Konstruktion mit seiner Konjugationsklasse identisch ist, läuft die zweite Summe in der Formel für $\mathcal{L}(\mu)(h)$ tatsächlich nur über die Konjugationsklassen halbeinfacher Elemente in $M(\mathbf{R})$. Wie in (1.5) angegeben verschwinden $a^M(S, \gamma)$ aber nur für $M(\mathbf{R})$–elliptische Elemente γ nicht und ist dann gegeben durch

$$a^M(S, \gamma) = \frac{1}{i^M(\gamma)} \operatorname{vol}(M_\gamma^\circ(\mathbf{Q}) \backslash M_\gamma^\circ(\mathbf{Q})(\mathbb{A}_\mathbf{Q})^1) = \frac{1}{i^M(\gamma)} \operatorname{vol}(M_\gamma^\circ(\mathbf{Q}) A_M^\circ(\mathbf{R}) \backslash M_\gamma^\circ(\mathbf{Q})(\mathbb{A}_\mathbf{Q})^1).$$

Dabei ist $i^M(\gamma)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten des Zentralisators von γ in M, die $\mathbf{Q}$–rationale Punkte enthalten. Für ein halbeinfaches Element γ aus $M(\mathbf{Q})$ kann weiterhin $\check{I}_M^M(S_{fin}, \gamma, \phi_M(h))$ explizit angegeben werden. In diesem Fall sei nämlich $P = MN_P$ eine standardparabolische Teilgruppe über $\mathbf{Q}$ von G mit M als Levifaktor und mit unipotentem Radikal N_P. Sei δ_P der Modulushomomorphismus von P. Bezeichne weiter K_{fin} das Produkt über alle endlichen Stellen v der maximalkompakten Teilgruppen $K_v = G(\mathbf{Z}_v)$ von $G(\mathbf{Q}_v)$, so daß $G(\mathbb{A}_\mathbf{Q}) = (KP)(\mathbb{A}_\mathbf{Q})$ gilt. Dann ist

$$\check{I}_M^M(S_{fin}, \gamma, \phi_M(h)) = \sqrt{|D^M(\gamma)|_{S_{fin}}} \int_{M_\gamma^\circ(\mathbb{A}_\mathbf{Q})_{fin} \backslash M(\mathbb{A}_\mathbf{Q})_{fin}} h_P(m^{-1} \gamma m) d\dot{m}$$

mit

$$h_P(m) = \sqrt{\delta_P(m)} \int_{K_{fin}} \int_{N_P(\mathbb{A}_\mathbf{Q})_{fin}} h(k^{-1} mnk) dn\ dk.$$

Zusammenfassend erhalten wir damit

(1.29) Satz: *Seien μ eine endlichdimensionale, irreduzible über Q definierte Darstellung von G und h ein Element aus $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})_{fin})$. Dann gilt für die L^2-Lefschetzzahl von h die Formel*

$$\mathcal{L}(\mu)(h) = \sum\nolimits_M (-1)^{\dim(A_M\backslash A_G)} \frac{|W_0^M|}{|W_0^G|} \sum\nolimits_\gamma \frac{(-1)^{q(M_\gamma^\circ)} \mathrm{vol}\big(M_\gamma^\circ(\mathbf{Q})A_M^\circ(\mathbf{R})\backslash M_\gamma^\circ(\mathbb{A}_\mathbf{Q})_{fin}\big)}{\mathrm{vol}\big(\overline{M_\gamma^\circ}(\mathbf{R})/A_M^\circ(\mathbf{R})\big)}$$

$$\times\, \Phi_M(\gamma,\mu)\sqrt{\delta_P(\gamma_{fin})} \int_{K_{fin}} \int_{N_P(\mathbb{A}_\mathbf{Q})_{fin}} \int_{M_\gamma^\circ(\mathbb{A}_\mathbf{Q})_{fin}\backslash M(\mathbb{A}_\mathbf{Q})_{fin}} h(k^{-1}m^{-1}\gamma mnk)d\dot{m}\; dn\; dk.$$

Dabei läuft in der ersten Summe M über alle kuspidalen Standardlevifaktoren M über **Q**, *die invariant sind unter der zu K'_∞ korrespondierenden Cartaninvolution. In der zweiten Summe läuft γ über alle Konjugationsklassen halbeinfacher Elemente in $M(\mathbf{Q})$, die* **Q**-*elliptisch in $M(\mathbf{Q})$ sind und deren unendliche Stelle* **R**-*elliptisch in $M(\mathbf{R})$ ist.*

Für jede Darstellung π_∞ in $\Pi(G(\mathbf{R}),\xi)$ bezeichne $m_{disc}(\pi_\infty, K_0)$ die Multiplizität, von π_∞ in der Darstellung von $G(\mathbf{R})$ auf

$$L^2(G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})/K_0,\xi) = \oplus_{i=1}^n L^2\big((G(\mathbf{R})\cap G(\mathbf{Q})x_iK_0x_i^{-1})\backslash G(\mathbf{R}),\xi\big)$$

mit $x_1 = 1,\ x_2,\dots,x_n$ Repräsentanten aus $G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})_{fin}$ von $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})/K_0$ und K_0 einer offenen, kompakten Teilgruppe von $G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})_{fin}$. Ist h biinvariant unter K_0, sei $R_{disc}(\pi_\infty, h)$ der von h auf der π_∞–isotypischen Komponente von $L^2(G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})/K_0,\xi)$ induzierte Operator, eine Matrix aus $M(m_{disc}(\pi_\infty,K_0),\mathbf{C})$. Als Konsequenz der L^2–Spurformel für $\mathcal{L}(\mu)(h)$ erhält man dann das

(1.30) Korollar: *Seien das Höchstgewicht von μ regulär und h biinvariant unter der kompakt–offenen Teilgruppe K_0 von $G(\mathbb{A}_\mathbf{Q})_{fin}$. Dann gilt*

$$\sum\nolimits_{\pi_\infty\in\Pi_{disc}(\tilde{\pi})} \mathrm{tr}\big(R_{disc}(\pi_\infty,h)\big) = (-1)^{q(G)} \sum\nolimits_M (-1)^{\dim(A_M\backslash A_G)} \frac{|W_0^M|}{|W_0^G|}$$

$$\times \sum\nolimits_\gamma \frac{(-1)^{q(M_\gamma^\circ)} \mathrm{vol}\big(M_\gamma^\circ(\mathbf{Q})A_M^\circ(\mathbf{R})\backslash M_\gamma^\circ(\mathbb{A}_\mathbf{Q})_{fin}\big)}{\mathrm{vol}\big(\overline{M_\gamma^\circ}(\mathbf{R})/A_M^\circ(\mathbf{R})\big)} \Phi_M(\gamma,\mu)h_M(\gamma).$$

Dabei läuft in der ersten Summe M über alle kuspidalen Standardlevifaktoren M über **Q**, *die invariant sind unter der zu K'_∞ korrespondierenden Cartaninvolution. In der zweiten Summe läuft γ über alle Konjugationsklassen halbeinfacher Elemente in $M(\mathbf{Q})$, die* **Q**-*elliptisch in $M(\mathbf{Q})$ sind und deren unendliche Stelle* **R**-*elliptisch in $M(\mathbf{R})$ ist.*

Kapitel 2 Die Gruppe $GSp(4)$

Sei im folgenden K ein Körper. Die Chevalleyform über K der symplektischen Gruppe ist die für jede kommutative K–Algebra A durch

$$Sp(2n)(A) = \{a \in M(2n, A) : {}^t a.J.a = J\} \tag{2.1}$$

mit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

gegebene affine algebraische Gruppe über K. Die Gruppe $GSp(2n)$ ist die für jede kommutative K–Algebra A durch

$$GSp(2n)(A) = \{a \in M(2n, A) : {}^t a.J.a = \mu_a J \quad \text{mit } \mu_a \text{ in } A^*\} \tag{2.3}$$

gegebene Gruppe über K. Die Abbildung

$$\mu_A : GSp(2n)(A) \longrightarrow (\mathbf{G}_m)_A, \quad a \longmapsto \mu_a \tag{2.4}$$

ist dann ein Gruppenhomomorphismus. Die Sequenz

$$1 \longrightarrow Sp(2n) \longrightarrow GSp(2n) \xrightarrow{\mu} \mathbf{G}_m \longrightarrow 1 \tag{2.5}$$

ist exakt. Eine Matrix

$$Y = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

liegt genau dann in $GSp(2n)(A)$, wenn gelten

$${}^t A.C = {}^t({}^t A.C), \qquad {}^t D.B = {}^t({}^t D.B), \qquad \text{und} \qquad \mu(Y)E_n = {}^t A.D - {}^t C.B. \tag{2.6}$$

Sei I_A die für alle a in $M(2n, A)$ durch

$$I(a) = I_A(a) = J \cdot {}^t a \cdot J^{-1} \tag{2.7}$$

gegebene Involution auf $M(2n, A)$. Wegen $J^{-1} = {}^t J = -J$ ist dann

$$\begin{aligned} Sp(2n)(A) &= \{a \in M(2n, A) : I_A(a).a = 1\}, \\ GSp(2n)(A) &= \{a \in M(2n, A) : I_A(a).a = \mu(a).1\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Die Involution I ist trivial auf dem Zentrum von $M(2n, A)$. Für alle Matrizen aus $M(2n, A)$ ist

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = I\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} {}^t D & -{}^t B \\ -{}^t C & {}^t A \end{pmatrix}$$

äquivalent zu

$$A = {}^t D, \quad B = -{}^t B \qquad \text{und} \qquad C = -{}^t C.$$

Der Raum aller I–invarianten Elemente in $M(2n, A)$ hat daher die Dimension $2n(n-1)$ über A. Sei allgemeiner B eine zentrale, einfache Algebra über K der Dimension $(2n)^2$. Sei I eine Involution auf B, die trivial auf dem Zentrum K von B ist. Der Raum der I–invarianten Elemente von B habe die Dimension $2n(n-1)$. Für alle kommutativen K–Algebren A ist dann die durch

$$S_B(A) = \{x \in B \otimes_K A : x.(I \otimes \mathrm{id}_A)(x) = 1\} \tag{2.9}$$

gegebene algebraische Gruppe S_B eine K–Form von $Sp(2n)$ und die durch

$$GS_B(A) = \{x \in B \otimes_K A : x.(I \otimes \mathrm{id}_A)(x) \in B \otimes_K A^*\} \tag{2.10}$$

gegebene algebraische Gruppe GS_B eine K–Form von $GSp(2n)$. Die so definierten Zuordnungen

$$(B,\ I) \longmapsto S_B \qquad \text{und} \qquad (B,\ I) \longmapsto GS_B \tag{2.11}$$

parametrisieren die K–Formen von $Sp(2n)$ und $GSp(2n)$ respektive.

Im Rest dieses Abschnittes wollen wir die Standardlevifaktoren bezüglich des maximalzerfallenden K–Torus in der $GSp(4)$ bestimmen. Hierfür geben wir zunächst einen Abriß der releventen allgemeinen Resultate aus [**BoTi**, III, IV, V].

2A Die Levifaktoren einer reduktiven Gruppe

Sei im folgenden G eine zusmmenhängende, reduktive algebraische Gruppe über dem Körper K. Sei bemerkt, daß in jeder solchen Gruppe ein über K definierter, maximaler Torus existiert.
Eine abgeschlossene Untergruppe P von G heißt **parabolisch**, wenn sie eine Borelgruppe von G enthält. Sei H eine Untergruppe von G. Ein **Levifaktor** von H ist dann eine abgeschlossene, reduktive Teilgruppe L von H, so daß H das semidirekte Produkt von L und dem unipotenten Radikal $R_u(H)$ von H ist.
Unser erstes Ziel besteht jetzt darin, ein Vertretersystem für die über K definierten parabolischen Teilgruppen und ihre Levifaktoren zu konstruieren.
Seien dazu im folgenden weiter S ein zerfallender K–Torus in G maximalen Ranges, der im maximalen Torus T von G enthalten sei. Die unten beschriebene Theorie ist identisch mit der absoluten Theorie, wenn S ein maximaler Torus in G ist. Seien Φ_K die Wurzeln aus $\Phi = \Phi(G,T)$, die über K definiert sind. Wir fixieren eine Ordnung auf Φ_K und bezeichnen die korrespondierenden einfachen Wurzeln von Φ_K mit Δ_K oder Δ, die positiven Wurzeln mit Φ_K^+ und die negativen Wurzeln mit Φ_K^-. Für jede Teilmenge I von Δ_K bestehe die Teilmenge $[I]$ von Φ_K aus allen Wurzeln in Φ_K, die in der von I erzeugten abelschen Gruppe liegen. Wir setzen

$$\pi(I) = [I] \cup \Phi_K^+ \qquad \text{und} \qquad A(I) = (\Phi_K - [I]) \cap \Phi_K^+.$$

Nach Konstruktion haben diese die Eigenschaften

$$\pi(I)^- = -\pi(I) \qquad \text{und} \qquad [I] = \pi(I) \cap \pi(I)^-.$$

Nach Konstruktion ist

$$S(I) = \left(\cap\{\ker(\alpha) : \alpha \in I\}\right)^\circ \tag{2.12}$$

ein Torus in G, der über K definiert ist. Als Zentralisator des Torus $S(I)$ in G ist

$$L_S(I) = C_G(S(I)) \tag{2.13}$$

nach [**Hu**, p.140, Theorem und p.159 Corollary A] eine zusammenhängende, reduktive Teilgrupppe von G. Da S über K definiert ist, ist sie über K definiert. Jede Wurzel aus Φ_K, die auf $S(I)$ verschwindet, ist eine ganzzahlige Linearkombination von Elementen aus I. Somit besteht $[I]$ aus den Elementen von Φ_K, die auf $S(I)$ verschwinden. Daher ist speziell die Liealgebra von $L_S(I)$ die direkte Summe der Liealgebra von T und der direkten Summe der Eigenräume zu den Wurzeln aus $[I]$.
Für alle Wurzeln aus Φ_K sei U_α die zu α assoziierte unipotente Einparametergruppe in G. Sie ist dadurch charakterisiert, daß es einen Isomorphismus $f_\alpha : \mathbf{G}_a \longrightarrow U_\alpha$ gibt mit

$$t.f_\alpha(x).t^{-1} = f_\alpha(\alpha(t).x)$$

für alle t in T und x in U_α. Mit α ist auch U_α über K definiert.
Da globale und infinitesimale Zentralisatoren von Tori nach [**Hu**, p119, Proposition (18.4)A] korrespondieren, ist speziell $L_S(I)$ die von T und den Einparameteruntergruppen U_α mit α aus $[I]$ erzeugte Teilgruppe von G. Sei $U_S(I) = U(I)$ die von den zu allen Wurzeln α aus $A(I)$ korrespondierenden Einparameteruntergruppen U_α erzeugte Teilgruppe von G. Mit den U_α ist auch $U(I)$ über K definiert. Die **standard-parabolische Teilgruppe** $P_S(I) = P(I)$ ist dann die von T sowie $U(I)$ und allen U_α mit α in $[I]$, also die von $L(I)$ und $U(I)$, in G erzeugte Teilgruppe.
Alle standardparabolischen Teilgruppen sind über K definiert. Weiter sind alle maximalen Tori, die S enthalten in $C_G(S)$ konjugiert. Daher kann speziell T durch einen maximalen K–Torus aus $C_G(S)$ ersetzt werden, wenn $P(I)$ das semidirekte Produkt von $L(I)$ und $U(I)$ ist. Aber nach Konstruktion enthält $P(I)$ nur die zu Wurzeln aus $\pi(I)$ korrespondierenden Einparameteruntergruppen U_α. Weiter normalisiert $L(I)$ die Gruppe $U(I)$. Somit ist $L(I)$ ein Levifaktor in $P(I)$. Die Gruppe $U(I)$ ist das unipotente Radikal von $P(I)$.
Die Gruppe $P = P(\emptyset)$ ist eine minimale, über K definierte parabolische Untergruppe von G. Die Gruppe $P(\Delta)$ ist ganz G und ist identisch mit ihrem Levifaktor. Insbesondere ist $P_S(\emptyset)$ eine über K definierte Borelgruppe in G, wenn S ein maximaler Torus in G ist.

Daß auf diese Weise tatsächlich ein Repräsentantensystem für über K definierte *parabolische* Untergruppen und Levifaktoren von G konstruiert werden kann, folgt aus den Hauptresultaten von **[BoTi]**.
Seien nämlich P eine über K definierte parabolische Untergruppe von G und S ein zerfallender Torus maximalen Ranges, der in ihrem Radikal liegt. Dann gibt es eine Ordnung der K–Wurzeln Φ_K von S in G, so daß $P = P_S(\Phi_K^+)$ gilt. Die über K definierten Levifaktoren in P sind sind die Zentralisatoren in G der zerfallenden K–Tori maximaler Dimension in $R(P)$. Insbesondere ist P genau dann minimal, wenn ihr Radikal einen zerfallenden K–Torus maximalen Ranges in G enthält.
Je zwei minimale, über K definierte parabolische Untergruppen sind über K konjugiert; sogar durch die über K definierten Elemente der Weylgruppe eines festen zerfallenden K–Torus maximalen Ranges im Radikal einer fixierten minimalen, über K definierten Parabolik. Als Konsequenz sind je zwei zerfallende K–Tori maximalen Ranges in G über K konjugiert.
Sei jetzt P_0 eine fixierte, minimale, über K definierte Parabolik in G und S ein maximalzerfallender K–Torus in $R(P_0)$. Dann ist jede über K definierte Teilgruppe parabolische Teilgruppe P in G, die P_0 enthält, über K zu genau einer der standard-parabolischen Teilgruppen $P_S(I)$ konjugiert.
Die über K definierten Levifaktoren einer über K definierten Parabolik sind über K konjugiert. Wir schließen so, daß jeder über K definierte Levifaktor über K zu genau einem der Standardlevifaktoren $L_S(I)$ konjugiert ist. Hier wie im folgenden stehe dabei 'Levifaktor' kurz für 'Levifaktor einer parabolischen Teilgruppe von G'.
Insbesondere ist es für die Konstruktion eines Repräsentantensystems der $G(K)$–Konjugationsklassen über K definierter Paraboliken und Levifaktoren unerheblich, welcher maximalzerfallende Torus S und welche Ordnung auf $\Phi(G,S)$ gewählt wurde.

2B Levifaktoren in der Gruppe $GSp(4)$

Im folgenden wollen wir ein System von Standardlevifaktoren in $G = GSp(4)$ berechnen. Sei dazu $T = T_{split}$ der zerfallende maximale K–Torus. Für jede kommutative K–Algebra E bestehen dessen E–wertigen Punkte aus den Diagonalmatrizen

(2.14) $$\operatorname{diag}(a, b, ca^{-1}, cb^{-1}) \qquad \text{mit } a, b, c \text{ in } E^*.$$

Um die Wurzeln von (G,T) zu berechnen bestimmen wir zunächst die Liealgebren von G und T sowie die Eigenwerte der Operation ad von $\operatorname{Lie} T$ auf $\operatorname{Lie} G$. Genau dann liegt eine Matrix aus $M(4,E)$ in $\operatorname{Lie} G$, wenn

$$\begin{aligned}(\mu+\epsilon\mu')\begin{pmatrix}0 & E_2\\ -E_2 & 0\end{pmatrix} &= \left(E_4+\epsilon\,{}^t\!\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0 & E_2\\ -E_2 & 0\end{pmatrix}\left(E_4+\epsilon\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}0 & E_2\\ -E_2 & 0\end{pmatrix}+\epsilon\begin{pmatrix}C-{}^tC & {}^tA+D\\ -(A+{}^tD) & {}^tB-B\end{pmatrix}\end{aligned}$$

über der Algebra $E[\epsilon]$ der dualen Zahlen gilt. Daher besteht $\operatorname{Lie} G(E)$ aus allen Matrizen in $M(4,E)$ der Form

(2.15) $$\begin{pmatrix}A & B\\ C & aE_2-{}^tA\end{pmatrix} \qquad \text{mit } a \text{ in } E,\ B={}^tB,\ C={}^tC.$$

Ein Element H von $\operatorname{Lie} G(E)$ liegt genau dann in $\operatorname{Lie} T(E)$, wenn es

$$E_4+\epsilon H = \operatorname{diag}(x+\epsilon x', y+\epsilon y', (a+\epsilon a')(x+\epsilon x')^{-1}, (a+\epsilon a')(y+\epsilon y')^{-1})$$

erfüllt. Beachtet man $(a+\epsilon b)^{-1} = a^{-1}+\epsilon(-ba^{-2})$, folgt somit, daß $\operatorname{Lie} T(E)$ aus allen Matrizen der Form

(2.16) $$H = \operatorname{diag}(a, b, c-a, c-b) \qquad \text{mit } a, b, c \text{ in} E$$

besteht. Mit E_{ij} den Standardbasiselementen von $M(4,E)$ gilt dann

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ad}H(E_{11}-E_{33}) = \mathrm{ad}H(E_{22}-E_{44}) = \mathrm{ad}H(E_{33}+E_{44}) = 0, \\
&\mathrm{ad}H(E_{12}-E_{43}) = (a-b)(E_{12}-E_{43}), && \mathrm{ad}H(E_{13}) = (2a-c)E_{13}, \\
&\mathrm{ad}H(E_{21}-E_{34}) = -(a-b)(E_{21}-E_{34}), && \mathrm{ad}H(E_{31}) = -(2a-c)E_{31}, \\
&\mathrm{ad}H(E_{14}+E_{23}) = (a+b-c)(E_{14}+E_{23}), && \mathrm{ad}H(E_{24}) = (2b-c)E_{24}, \\
&\mathrm{ad}H(E_{32}+E_{41}) = -(a+b-c)(E_{32}+E_{41}), && \mathrm{ad}H(E_{42}) = -(2b-c)E_{42}.
\end{aligned}$$

Explizites Rechnen zeigt, daß die Eigenvektoren von $\mathrm{ad}H$ auch Eigenvektoren für Ad sind. Als Wurzeln von (G,T) erhalten wir die für alle a,b,c aus E^* durch

$$(2.17) \qquad \begin{aligned}
&\alpha_1\big(\mathrm{diag}(a,b,ca^{-1},cb^{-1})\big) = ab^{-1}, && \alpha_3\big(\mathrm{diag}(a,b,ca^{-1},cb^{-1})\big) = b^2c^{-1}, \\
&\alpha_2\big(\mathrm{diag}(a,b,ca^{-1},cb^{-1})\big) = a^2c^{-1}, && \alpha_4\big(\mathrm{diag}(a,b,ca^{-1},cb^{-1})\big) = abc^{-1}.
\end{aligned}$$

gegebenen Morphismen $\alpha_i : T \longrightarrow \mathbf{G}_m$ und ihre Inversen. Sie sind alle über K definiert. Wir wählen $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ als positive Wurzeln. Die Relationen $2a-c = 2(a-b)+(2b-c)$ und $a+b-c = (a-b)+(2b-c)$ in additiver Notation zeigen, daß die Wurzeln $\alpha = \alpha_1$ und $\beta = \alpha_3$ dann die primitiven Wurzeln Δ für diese Ordnung sind. Sei $h = \mathrm{diag}(a,b,ca^{-1},cb^{-1})$ aus $T(E)$ fixiert. Genau dann ist $\alpha(h)=1$, wenn $a=b$ gilt. Somit ist

$$\big(\ker(\alpha)\big)(E) = \{\mathrm{diag}(a,a,ca^{-1},ca^{-1}) : a,c \text{ in } E^*\}.$$

Genau dann ist $\beta(h)=1$, wenn $b^2=c$ ist. Daher gilt

$$\big(\ker(\beta)\big)(E) = \{\mathrm{diag}(a,b,b^2a,b) : a,b \text{ in } E^*\}.$$

Die einzigen echten, nichtleeren Teilmengen von Δ sind $\{\alpha\}$ und $\{\beta\}$. Für sie ist $[\alpha]=\{\alpha,-\alpha\}$ und $[\beta]=\{\beta,-\beta\}$. Deshalb ist $L(\alpha)$ der Zentralisator in G von $\ker(\alpha)$ und $L(\beta)$ der Zentralisator in G von $\ker(\beta)$.
Wir berechnen zunächst $L(\alpha)$. Jedes Element aus $M(4,E)$, das $\big(\ker(\alpha)\big)(E)$ zentralisiert, ist von der Form $\mathrm{diag}(A,B)$ mit A,B aus $M(2,E)$. Genau dann liegt $\mathrm{diag}(A,B)$ in G, wenn $B = c\,{}^tA^{-1}$ für c in E^* ist. Daher gilt

$$(2.18) \qquad L(\alpha)(E) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & c\,{}^tA^{-1} \end{pmatrix} : \begin{matrix} A \text{ in } GL(2,E) \\ c \text{ in } GL(1,E) \end{matrix} \right\}.$$

für jede kommutative K-Algebra E. Weiter ist die für jede kommutative K-Algebra E durch

$$(2.19) \qquad \phi_\alpha : GL(2,E)\times(\mathbf{G}_m)_K(E) \longrightarrow L(\alpha)(E), \quad (A,c)\longmapsto (A,c\,{}^tA^{-1})$$

gegebene Abbildung ein Isomorphismus über K definierter algebraischer Gruppen. Folglich ist $L(\alpha)$ isomorph zu $GL(2)\times(\mathbf{G}_m)_K$. Für jedes Element $\mathrm{diag}(A,c\,{}^tA^{-1})$ aus $L(\alpha)(E)$ gelten

$$(2.20) \qquad I\big(\mathrm{diag}(A,c\,{}^tA^{-1})\big) = \mathrm{diag}(cA^{-1},\ {}^tA) \quad \text{und} \quad I\big(\mathrm{diag}(A,0)\big) = \mathrm{diag}(0,{}^tA).$$

Wir berechnen jetzt $L(\beta)$. Genau dann liegt ein Element

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

aus $GL(4,E)$ in $L(\beta)$, wenn

$$\begin{pmatrix} HA & HB \\ b^2H^{-1}C & b^2H^{-1}D \end{pmatrix} = X\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & b^2H^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & b^2H^{-1} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} AH & b^2BH^{-1} \\ CH & b^2DH^{-1} \end{pmatrix}$$

für alle Diagonalmatrizen $H = H(a,b) = \mathrm{diag}(a,b)$ aus $GL(2,E)$ gilt. Daher sind A und D Diagonalmatrizen. Aus

$$\begin{aligned}
b^2\begin{pmatrix} a^{-1}c_{11} & a^{-1}c_{12} \\ b^{-1}c_{21} & b^{-1}c_{22} \end{pmatrix} &= b^2\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac_{11} & c_{12}b \\ ac_{21} & c_{22}b \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

für alle a, b ungleich Null folgt $c_{11} = c_{12} = c_{21} = 0$. Daher hat X die Form

$$X = \mathrm{diag}(a_1,\, a_2,\, d_1,\, d_2).$$

Die Relation

$$\begin{pmatrix} a_1 d_1 & 0 \\ 0 & a_2 d_2 - bc \end{pmatrix} = {}^tAD - {}^tCB = d\; E_2$$

ist genau dann erfüllt, wenn $d = a_2 d_2 - bc$ und $d = a_1 d_1$ gelten. Daher ist die für jede kommutative K–Algebra E durch

$$\Phi_\beta : GL(2)(E) \times (\mathbf{G}_m)_K(E) \longrightarrow L(\beta)(E)$$

(2.21)
$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, x\right) \longmapsto \begin{pmatrix} x^{-1}\det\begin{pmatrix} a\, b \\ c\, d\end{pmatrix} & 0\,0\,0 \\ 0 & a\,0\,b \\ 0 & 0\,x\,0 \\ 0 & c\,0\,d \end{pmatrix}$$

gegebene Abbildung ein Isomorphismus über K definierter algebraischer Gruppen; $L(\beta)$ ist über K zu $GL(2) \times (\mathbf{G}_m)_K$ isomorph. Für jedes Element aus $L(\beta)$ ist

(2.22)
$$I\Big(\Phi_\beta\Big(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, x\Big)\Big) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Phi_\beta\Big({}^t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}, x^{-1}\Big).$$

Die oben angegebenen allgemeinen Resultate der Theorie reduktiver Gruppen zeigen daher

(2.23) Lemma: *Sei M ein über K definierter Levifaktor in $G = GSp(4)$. Dann gilt genau eine der folgenden Möglichkeiten*

(1) *M ist ein zerfallender maximaler K–Torus in $GSp(4)$ und es gibt ein Element g aus $G(K)$, so daß* Adg *aus der Weylgruppe von T_{split} in G ist und $M = \mathrm{Ad}g\big(T_{split}\big) = g\; T_{split}\; g^{-1}$ gilt.*

(2) *M ist durch ein Element aus $G(K)$ entweder zu $L(\alpha)$ oder zu $L(\beta)$ konjugiert.*

(3) *M ist identisch mit $GSp(4)$.*

Wenn M über K konjugiert zu $L(\alpha)$ oder $L(\beta)$ ist, dann ist M insbesondere über K zur algebraischen Gruppe $GL(2) \times (\mathbf{G}_m)_K$ isomorph.

Als nächstes sollen für den maximalzerfallenden Torus $T = T_{split}$ in G Repräsentanten der Weylgruppe $W(G,T) = N_G(T)/T$ berechnet werden. Mutatis mutandis reicht es hierfür nach [**Knapp**, pp.102-103] die Weylgruppe der Liealgebra zu berechnen. Hierzu versehen wir den Vektorraum Lie$T$ mit dem für alle X, Y aus Lie$T$ durch

$$< X,\; Y >= \mathrm{tr}(X.Y)$$

gegebenen inneren Produkt und identifizieren $\mathrm{Lie}\,T^* = \mathrm{Hom}(\mathrm{Lie}\,T, K)$ über $<\,,\,>$ mit Lie$T$. Die Weylgruppe von Lie$T$ wird dann erzeugt von allen durch

$$s(\alpha)(f) = f - 2\frac{< f, \alpha >}{< \alpha, \alpha >}\alpha \qquad \text{mit } \alpha \text{ in } \Phi(G,T)$$

gegebenen Spiegelungen $s(\alpha)$ von $\mathrm{Lie}\,T^*$ in sich. Ist $H(\alpha)$ aus Lie$T$ mit $< H, H(\alpha) >= \alpha(H)$ für alle H in Lie$T$, dann gelten $< f, \alpha > \alpha = \alpha(f)H(\alpha)$ und $< \alpha, \alpha >=< H(\alpha), H(\alpha) >$. Allgemein gilt

$$\mathrm{tr}\big(\mathrm{diag}(x, yz - x, z - y) \cdot \mathrm{diag}(a, b, c - a, c - b)\big) = 2zc - z(a + b) - c(x + y) + 2xa + 2yb$$

für alle Elemente $\mathrm{diag}(x, y, z - x, z - y), \mathrm{diag}(a, b, c - a, c - b)$ aus Lie$T$. Explizites Rechnen zeigt dann folgendes abschließende

(2.24) Lemma: *Die Weylgruppe $W(GSp(4), T_{split})$ besteht aus der identischen Abbildung und den für alle Elemente $\operatorname{diag}(a, b, ca^{-1}, cb^{-1})$ aus T_{split} wiefolgt gegebenen Abbildungen*

$$\begin{aligned}
s(\alpha_1)\big(\operatorname{diag}(a,b,ca^{-1},cb^{-1})\big) &= \operatorname{Int}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}\big(\operatorname{diag}(a,b,ca^{-1},cb^{-1})\big) \\
&= \operatorname{diag}(b,a,cb^{-1},ca^{-1}), \\
s(\alpha_2)\big(\operatorname{diag}(a,b,ca^{-1},cb^{-1})\big) &= \operatorname{Int}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\big(\operatorname{diag}(a,b,ca^{-1},cb^{-1})\big) \\
&= \operatorname{diag}(ca^{-1},b,a,cb^{-1}), \\
s(\alpha_3)\big(\operatorname{diag}(a,b,ca^{-1},cb^{-1})\big) &= \operatorname{Int}\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\big(\operatorname{diag}(a,b,ca^{-1},cb^{-1})\big) \\
&= \operatorname{diag}(a,cb^{-1},ca^{-1},b), \\
s(\alpha_4)\big(\operatorname{diag}(a,b,ca^{-1},cb^{-1})\big) &= \operatorname{Int}\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\big(\operatorname{diag}(a,b,ca^{-1},cb^{-1})\big) \\
&= \operatorname{diag}(cb^{-1},ca^{-1},b,a), \\
s_{21}\big(\operatorname{diag}(a,b,ca^{-1},cb^{-1})\big) &= \operatorname{Int}\begin{pmatrix} & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & & \end{pmatrix}\big(\operatorname{diag}(a,b,ca^{-1},cb^{-1})\big) \\
&= \operatorname{diag}(cb^{-1},a,b,ca^{-1}), \\
s_{21}^2\big(\operatorname{diag}(a,b,ca^{-1},cb^{-1})\big) &= \operatorname{Int}\begin{pmatrix} & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ -1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \end{pmatrix}\big(\operatorname{diag}(a,b,ca^{-1},cb^{-1})\big) \\
&= \operatorname{diag}(ca^{-1},cb^{-1},a,b), \\
s_{21}^3\big(\operatorname{diag}(a,b,ca^{-1},cb^{-1})\big) &= \operatorname{Int}\begin{pmatrix} & & & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & \end{pmatrix}\big(\operatorname{diag}(a,b,ca^{-1},cb^{-1})\big) \\
&= \operatorname{diag}(b,ca^{-1},cb^{-1},a).
\end{aligned}$$

Dabei ist $s_{21} = s(\alpha_2) \circ s(\alpha_1)$ und $\big(\operatorname{Int} g\big)(x) = gxg^{-1}$. Insbesondere ist die Weylgruppe isomorph zu der von den Elementen a und b mit

$$a^4 = e, \quad b^2 = e \qquad \text{und} \qquad ba = a^3 b$$

erzeugten achtelementigen Gruppe D_4.

Teil 2

Die gemittelten diskrete Serie Charaktere an der unendlichen Stelle

Kapitel 3 Der Faktor $\Phi_G(\gamma,\tau)$

Wir diskutieren in den folgenden Abschnitten die Funktionen $\Phi_M(\gamma,\tau)$ für die Standardlevifaktoren M über dem Körper $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen $L(\alpha)$, $L(\beta)$ und G der Gruppe $G = GSp(4)$. Ziel dieses Abschnittes ist es, eine Formel für $\Phi_G(\gamma,\tau)$ anzugeben.
In diesem Fall ist der Torus A_M identisch mit dem Zentrum der algebraischen Gruppe G. Insbesondere ist damit die Zusammenhangskomponente $A_G^\circ(\mathbf{R})$ der reellen Punkte von A_G gerade

$$A_G^\circ(\mathbf{R}) = \{\mathrm{diag}(a,a,a,a) : a > 0\}. \tag{3.1}$$

Sei B ein über $\mathbf{Q}$ definierter Torus in G, dessen reellen Punkte gegeben sind durch

$$B(\mathbf{R}) = \left\{c\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0\\ 0 & x & 0 & y\\ -b & 0 & a & 0\\ 0 & -y & 0 & x\end{pmatrix} : a^2+b^2 = x^2+y^2 = 1 \text{ und } c \neq 0\right\}. \tag{3.2}$$

Dann ist

$$Z(B) = \{\mathrm{diag}(\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon) : \epsilon = \pm 1\}. \tag{3.3}$$

An dieser Stelle erinnern wir daran, daß wegen der Iwasawazerlegung $G(\mathbf{R}) = K_\infty A(\mathbf{R})N(\mathbf{R})$ gilt $q(G) = \frac{1}{2}\mathrm{dim}(K_\infty A_G(\mathbf{R})\backslash G(\mathbf{R})) = \mathrm{dim}(A_G(\mathbf{R})\backslash A(\mathbf{R})N(\mathbf{R}))$. Jetzt ist $A_G(\mathbf{R})\backslash A(\mathbf{R})$ zweidimensional. Weiter bilden die Matrizen $E_{12}-E_{43}$, E_{13}, $E_{14}+E_{23}$ und E_{24} eine Basis der Liealgebra von $N(\mathbf{R})$. Folglich gilt

$$q(GSp(4)) = 3. \tag{3.4}$$

(3.5) Berechnung von Lie B: Wir berechnen zunächst die Liealgebra und die Weylgruppe von B, um dann insbesondere die Langlandsparametrisierung von τ explizit machen zu können. Genau dann liegt ein Element

$$H = \begin{pmatrix} A & B\\ C & \lambda E_2 - {}^tA\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2\\ b_2 & b_4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & c_2\\ c_2 & c_4\end{pmatrix} \text{ aus } M(2,\mathbf{R}) \text{ und } \lambda \text{ aus } \mathbf{R}$$

in $\mathrm{Lie}\, B(\mathbf{R})$, wenn gilt

$$\begin{pmatrix} 1+\epsilon a_1 & \epsilon a_2 & \epsilon b_1 & \epsilon b_2\\ \epsilon a_3 & 1+\epsilon a_4 & \epsilon b_2 & \epsilon b_4\\ \epsilon c_1 & \epsilon c_2 & 1+\epsilon(\lambda-a_1) & -\epsilon a_3\\ \epsilon c_2 & \epsilon c_4 & -\epsilon a_2 & 1+\epsilon(\lambda-a_4)\end{pmatrix}$$

$$= E_4 + \epsilon H = (\mu+\mu'\epsilon)\begin{pmatrix} a+a'\epsilon & 0 & b+b'\epsilon & 0\\ 0 & x+x'\epsilon & 0 & y+y'\epsilon\\ -(b+b'\epsilon) & 0 & a+a'\epsilon & 0\\ 0 & -(y+y'\epsilon) & 0 & x+x'\epsilon\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\mu+\epsilon(\mu'a+a'\mu) & 0 & \mu b+\epsilon(\mu b'+\mu' b) & 0\\ 0 & \mu x+\epsilon(\mu x'+x\mu') & 0 & \mu y+\epsilon(\mu y'+y\mu')\\ -b\mu+\epsilon(-(\mu' b+b'\mu)) & 0 & \mu a+\epsilon(\mu a'+\mu' a) & 0\\ 0 & -\mu y+\epsilon(-(\mu y'+y\mu')) & 0 & \mu x+\epsilon(\mu x'+x\mu')\end{pmatrix}$$

A priori sind $a_2 = a_3 = c_2 = b_2 = 0$. Aus der Gleichung $\epsilon b_4 = \mu y + \epsilon(\mu y' + y\mu')$ folgt $y = 0$. Aus $1+\epsilon(\lambda - a_4) = \mu x + \epsilon(\mu x' + x\mu')$ und

$$1 = \det\begin{pmatrix} x+x'\epsilon & y+y'\epsilon\\ -(y+y'\epsilon) & x+x'\epsilon\end{pmatrix} = (x^2+y^2) + \epsilon(2xx'+2yy')$$

folgt $x = \pm 1$ und $\mu = x$. Aus $2xx' = 0$ folgt $x' = 0$. Somit ist $\lambda - a_4 = x\mu'$. Wegen $\epsilon b_1 = \mu b + \epsilon(\mu b' + b\mu')$ ist $b = 0$ und $b_1 = xb'$. Aus $1+\epsilon(\lambda - a_1) = \mu a + \epsilon(\mu a' + a\mu')$ folgt zusammen mit der Determinantenbedingung $1 = (a^2+b^2)+\epsilon(2aa'+2bb')$ wie oben $a' = 0$ und $a = x = \pm 1$. Somit ist $\lambda - a_1 = x\mu'$. Aus $1+\epsilon a_4 = \mu x + \epsilon(\mu x' + x\mu')$ folgt $a_4 = x\mu'$. Wegen $\epsilon c_4 = -\mu y + \epsilon(-(\mu y' + y\mu'))$ ist $c_4 = -\mu y' = -xy'$. Aus $x\mu' = a_4 = \lambda - x\mu'$ erhalten wir $\lambda = 2x\mu'$. Wegen $1+\epsilon a_1 = \mu a + \epsilon(\mu a' + a\mu')$ gilt $a_1 = x\mu'$. Die Gleichung $\epsilon c_1 = -\mu b + \epsilon(-(\mu b' + b\mu'))$ impliziert $c_1 = -xb'$. Folglich gilt

$$(3.6)\quad \operatorname{Lie} B = \left\{ H(G)(x,a,b) = \begin{pmatrix} x & 0 & a & 0 \\ 0 & x & 0 & b \\ -a & 0 & x & 0 \\ 0 & -b & 0 & x \end{pmatrix} : a,b,c \text{ in } \mathbf{R} \right\} =< E_4,\ E_{13}-E_{31},\ E_{24}-E_{42} > .$$

In einem ersten Schritt wollen wir $\exp H(x,a,b)$ für komplexe Zahlen x,a,b berechnen. Da xE_4 im Zentrum von $M(4,\mathbf{C})$ liegt, ist zunächst $H(x,a,b) = \exp x \ \exp H(0,a,b)$. Für jede nichtnegative ganze Zahl k folgt induktiv

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}^{2k} = (-1)^k \begin{pmatrix} a^{2k} & 0 \\ 0 & a^{2k} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & a^{2k+1} \\ -a^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} \begin{pmatrix} a^{2k} & 0 \\ 0 & a^{2k} \end{pmatrix} + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & a^{2k+1} \\ -a^{2k+1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

Für alle komplexen Zahlen x,a,b erhalten wir somit insbesondere

$$(3.7)\qquad \exp\big(H(G)(x,a,b)\big) = \exp x \begin{pmatrix} \cos a & 0 & \sin a & 0 \\ 0 & \cos b & 0 & \sin b \\ -\sin a & 0 & \cos a & 0 \\ 0 & -\sin b & 0 & \cos b \end{pmatrix}.$$

(3.8) Berechnung von $\operatorname{ad} H(G)(x,a,b)$: In einem nächsten Schritt berechnen wir jetzt die Wurzeln und die Weylgruppe von (G,B). Explizites Rechnen zeigt, daß für alle x,a,b in $\mathbf{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{ad}H(G)(x,a,b)(E_4) &= \operatorname{ad}H(G)(x,a,b)(E_{13}-E_{31}) = \operatorname{ad}H(G)(x,a,b)(E_{24}-E_{42}) = 0,\\
\operatorname{ad}H(G)(x,a,b)(E_{14}+E_{23}) &= a(E_{21}-E_{34}) + b(E_{12}-E_{43}),\\
\operatorname{ad}H(G)(x,a,b)(E_{32}+E_{41}) &= a(E_{12}-E_{43}) + b(E_{21}-E_{34}),\\
\operatorname{ad}H(G)(x,a,b)(E_{12}-E_{43}) &= (-b)(E_{14}+E_{23}) + (-a)(E_{32}+E_{41}),\\
\operatorname{ad}H(G)(x,a,b)(E_{21}-E_{34}) &= (-a)(E_{14}+E_{23}) + (-b)(E_{32}+E_{41}),\\
\operatorname{ad}H(G)(x,a,b)(E_{11}-E_{33}) &= (-2a)(E_{13}-E_{31}) + (-4a)E_{31},\\
\operatorname{ad}H(G)(x,a,b)(E_{31}) &= a(E_{11}-E_{33}),\\
\operatorname{ad}H(G)(x,a,b)(E_{42}) &= bE_4 + (-b)(E_{11}-E_{33}) + (-2b)(E_{33}+E_{44}),\\
\operatorname{ad}H(G)(x,a,b)(E_{33}+E_{44}) &= a(E_{13}-E_{31}) + b(E_{24}-E_{42}) + (2a)E_{31} + (2b)E_{42}.
\end{aligned}$$

Bezüglich der so angeordneten Basis von $\operatorname{Lie} G$ hat $\operatorname{ad}H(G)(x,a,b)$ die darstellende Matrix

$$\operatorname{ad}H(G)(x,a,b) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & & & & & 0 & 0 & b & 0 \\
0 & 0 & 0 & & & & & -2a & 0 & 0 & a \\
0 & 0 & 0 & & & & & 0 & 0 & 0 & b \\
 & & & 0 & 0 & -b & -a & & & & \\
 & & & 0 & 0 & -a & -b & & & & \\
 & & & b & a & 0 & 0 & & & & \\
 & & & a & b & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & & & & 0 & a & -b & 0 \\
 & & & & & & & -4a & 0 & 0 & 2a \\
 & & & & & & & & & 0 & 2b \\
 & & & & & & & & & -2b & 0
\end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von $\mathrm{ad}H(G)(x,a,b)$ sind daher die Nullstellen des Polynoms

$$
\begin{aligned}
(3.9)\qquad & X^3\det\begin{pmatrix} -X & 0 & b & a \\ 0 & -X & a & b \\ b & a & X & 0 \\ a & b & 0 & X \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} X & -a \\ 4a & X \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} X & -b \\ 4b & X \end{pmatrix} \\
&= X^3\big(X^4+2(a^2+b^2)X^2+(a^2+b^2)^2\big)\big(X^2+4a^2\big)\big(X^2+4b^2\big) \\
&= X^3\big(X-i(a+b)\big)\big(X+i(a+b)\big)\big(X-i(a-b)\big)\big(X+i(a-b)\big) \\
&\qquad \big(X-2ia\big)\big(X+2ia\big)\big(X-2ib\big)\big(X+2ib\big)
\end{aligned}
$$

Insbesondere hat $B(\mathbf{R})$ keine reellen Wurzeln.

(3.10) Positive Wurzeln: Als positive Wurzeln seien die für alle komplexen Zahlen x, a, b durch

$$
\begin{aligned}
&\beta_1(H(G)(x,a,b)) = 2ib, && \beta_3(H(G)(x,a,b)) = 2ia, \\
&\beta_2(H(G)(x,a,b)) = i(a-b), && \beta_4(H(G)(x,a,b)) = i(a+b)
\end{aligned}
$$

definierten Funktionen $\beta_1, \ldots, \beta_4$ auf $\mathrm{Lie}\,B(\mathrm{C})$ gewählt. Wegen $2ia = 2ib+2i(a-b)$ und $i(a+b) = 2ib + i(a-b)$ sind β_1, β_2 die einfachen Wurzeln.

(3.11) Berechnung von $W(G,B)$**:** Bezeichnet μ den Ähnlichkeitscharakter von $GSp(4)$, dann ist $B_1 = B \cap \ker\mu$ ein maximaler Torus in $Sp(4)$, dessen Liealgebra $E_{13}-E_{31}$ und $E_{24}-E_{42}$ als Basis hat. Die für alle X, Y in $\mathrm{Lie}\,B_1(\mathbf{C})$ durch $\beta_1(X,Y) = -\,\frac{1}{2}\mathrm{tr}(X.Y)$ definierte Spurform ist ein inneres Produkt auf $\mathrm{Lie}\,B_1(\mathbf{C})$. Wegen

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}\big((a(E_{13}-E_{31})+b(E_{24}-E_{42}).(x(E_{13}-E_{31})+y(E_{24}-E_{42})\big) \\
= \mathrm{tr}\big(\mathrm{diag}(-ax,-bx,-ax,-bx)\big) = -2(ax+by)
\end{aligned}
$$

ist β_1 positiv definit auf $\mathrm{Lie}\,B_1(\mathbf{R})$. Wir versehen $\mathrm{Lie}\,B(\mathbf{C})$ mit dem für alle $H(x,a,b)$, $H(x',a',\ b')$ aus $\mathrm{Lie}\,B(\mathbf{C})$ durch

$$
(1)\qquad B_0\big(H(x,a,b),H(x',\ a',\ b')\big) = xx' + \beta_1\big(H(0,a,b),H(0,\ a',\ b')\big) = xx'+aa'+bb'
$$

gegebenen inneren Produkt. Dessen Restriktion auf $\mathrm{Lie}\,B(\mathbf{R})$ ist positiv definit, so daß das Paar $(\mathrm{Lie}\,B(\mathbf{R}), B_0)$ ein Euklidischer Vektorraum ist. Mittels Pullback induziert B_0 ein Skalarprodukt auf $\mathrm{Lie}\,B(\mathbf{C})^*$ und $\mathrm{Lie}\,B(\mathbf{R})^*$. Die Weylgruppe von $\mathrm{Lie}\,B(\mathbf{C})$ wird erzeugt von allen durch

$$
(2)\qquad s(\alpha)(f) = f - 2\frac{B_0(f,\alpha)}{B_0(\alpha,\alpha)}\alpha \qquad \text{mit} \qquad \alpha \text{ in } \Phi(G,B)
$$

gegebenen Spiegelungen $s(\alpha)$ von $\mathrm{Lie}\,B(\mathbf{C})^*$ in sich. Für $H(\alpha)$ aus $\mathrm{Lie}\,B(\mathbf{C})$ mit $B_0(H,H(\alpha)) = \alpha(H)$ für alle H in $\mathrm{Lie}\,B(\mathbf{C})$ ist dann $B_0(f,\alpha)\alpha = \alpha(f)H(\alpha)$ und $B_0(\alpha,\alpha) = B_0(H(\alpha),H(\alpha))$. Die Kowurzel zu α ist $\alpha^\vee = 2B_0(H(\alpha),H(\alpha))^{-1}H(\alpha)$. Sei s_i die zu den Wurzeln β_i korrespondierenden, für alle H in $\mathrm{Lie}\,B(\mathbf{C})$ durch

$$
(3)\qquad s_i(H) = s(\beta_i)(H) = H - 2\frac{\beta_i(H)}{B_0(H_i,H_i)}H_i \qquad \text{mit} \qquad H_i = H(\beta)
$$

gegebenen Spiegelungen in $\mathrm{Lie}\,B(\mathbf{C})$. Explizites Rechnen zeigt, daß sie für alle komplexen Zahlen x, a, b gegeben sind durch

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
&s_1\big(H(G)(x,a,b)\big) = H(G)(x,a,-b), && s_2\big(H(G)(x,a,b)\big) = H(G)(x,b,a), \\
&s_3\big(H(G)(x,a,b)\big) = H(G)(x,-a,b), && s_4\big(H(G)(x,a,b)\big) = H(G)(x,-b,-a).
\end{aligned}
$$

Als Kowurzeln $\beta_i^\vee$ zu den Wurzeln β_i erhalten wir weiter die Vektoren

$$
(5)\ \ \beta_1^\vee = H(G)(0,0,-i),\quad \beta_2^\vee = H(G)(0,-i,i),\quad \beta_3^\vee = H(G)(0,-i,0),\quad \beta_4^\vee = H(G)(0,-i,-i).
$$

Wir rechnen weiter

$$\begin{aligned}
s(H(x,a,b)) &= (s_3 \circ s_4)(H(x,a,b)) = s_3(H(x,-b,-a)) = H(x,b,-a),\\
s^2(H(x,a,b)) &= s(H(x,b,-a)) = H(x,-a,-b),\\
s^3(H(x,a,b)) &= s(H(x,-a,-b)) = H(x,-b,a),\\
s^4(H(x,a,b)) &= s(H(x,-b,a)) = H(x,a,b).
\end{aligned}$$

Um die Abbildungen s_i explizit als innere Automorphismen von $\operatorname{Lie} B(\mathbf{C})$ darzustellen, notieren wir zunächst

$$\left(\operatorname{Int}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -a\\ a & 0\end{pmatrix}$$

und

$$\left(\operatorname{Int}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$$

für alle komplexen Zahlen a, b. Deshalb ist insbesondere

$$s_1 = \operatorname{Int}\Big(\operatorname{diag}(\sqrt{-1},\, -1,\, \sqrt{-1},\, 1)\Big) \qquad \text{und} \qquad s_3 = \operatorname{Int}\Big(\operatorname{diag}(-1,\, \sqrt{-1},\, 1,\, \sqrt{-1})\Big).$$

Darüberhinaus rechnen wir für idempotente und symmetrische Matrizen A in $GL(2,\mathbf{C})$ und alle Matrizen B in $M(2,\mathbf{C})$, daß

$$\left(\operatorname{Int}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0 & B\\ -B & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & B\\ -B & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & ABA\\ -ABA & 0\end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$s_2 = \operatorname{Int}\left(\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}0\,1\\ 1\,0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\,1\\ 1\,0\end{pmatrix}\right)\right).$$

Wegen $s_4 = s_1 \circ s_3 \circ s_2$ ist weiter

$$s_4 = \operatorname{Int}\left[\operatorname{diag}(-\sqrt{-1},\, -\sqrt{-1},\, \sqrt{-1},\, \sqrt{-1})\operatorname{diag}\left[\begin{pmatrix}0\,1\\ 1\,0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\,1\\ 1\,0\end{pmatrix}\right]\right] = \operatorname{Int}\left[\operatorname{diag}\left[\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\,1\\ 1\,0\end{pmatrix}\right]\right]$$

und wegen $s = s_1 \circ s_2$ haben wir

$$s = \operatorname{Int}\left[\operatorname{diag}(\sqrt{-1}, -1, \sqrt{-1}, 1)\operatorname{diag}\left[\begin{pmatrix}0\,1\\ 1\,0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\,1\\ 1\,0\end{pmatrix}\right]\right] = \operatorname{Int}\left[\operatorname{diag}\left[\begin{pmatrix}0 & \sqrt{-1}\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & \sqrt{-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]\right].$$

Wegen

$$\begin{pmatrix}0 & \sqrt{-1}\\ \epsilon & 0\end{pmatrix}^2 = \epsilon\sqrt{-1}\, E_2 \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix}0 & \sqrt{-1}\\ \epsilon & 0\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}0 & -\epsilon\\ \sqrt{-1} & 0\end{pmatrix}$$

für $\epsilon = \pm 1$ erhalten wir somit

(3.12) Lemma: *Die Weylgruppe $W(G,B)$ von G bezüglich B besteht aus der identischen Abbildung von* $\operatorname{Lie} B(\mathbf{C})$ *und den für alle komplexen Zahlen x, a, b durch*

$$\begin{aligned}
s_1(H(x,a,b)) &= H(x,a,-b) = \big(\operatorname{Int}\, \operatorname{diag}(\sqrt{-1}, -1, \sqrt{-1}, 1)\big)(H(x,a,b)),\\
s_2(H(x,a,b)) &= H(x,b,a) = \left(\operatorname{Int}\, \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)\right)(H(x,a,b)),\\
s_3(H(x,a,b)) &= H(x,-a,b) = \big(\operatorname{Int}\, \operatorname{diag}(-1, \sqrt{-1}, 1, \sqrt{-1})\big)(H(x,a,b)),\\
s_4(H(x,a,b)) &= H(x,-b,-a) = \left(\operatorname{Int}\, \operatorname{diag}\left(-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)\right)(H(x,a,b)),\\
s(H(x,a,b)) &= H(x,b,-a) = \left(\operatorname{Int}\, \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & \sqrt{-1}\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & \sqrt{-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)\right)(H(x,a,b)),\\
s^2(H(x,a,b)) &= H(x,-a,-b) = \big(\operatorname{Int}\, \operatorname{diag}(-E_2, E_2)\big)(H(x,a,b)),\\
s^3(H(x,a,b)) &= H(x,-b,a) = \left(\operatorname{Int}\, \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ \sqrt{-1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ \sqrt{-1} & 0\end{pmatrix}\right)\right)(H(x,a,b))
\end{aligned}$$

gegebenen Automorphismen von $\operatorname{Lie} B(\mathbf{C})$. *Dabei ist*

$$H(x,a,b) = H(G)(x,a,b) = xE_4 + a(E_{13} - E_{31}) + b(E_{24} - E_{42})$$

und $(\operatorname{Int} g)(X) = gXg^{-1}$. *Insbesondere ist* $W(G(\mathbf{R}), B(\mathbf{R}))$ *vierelementig und besteht aus der identischen Abbildung,* s_2, s_4, *und* s^2.

Bezüglich der geordneten Basis $E_4, e_2 = E_{13} - E_{31}$ und $e_1 = E_{24} - E_{42}$ von $\operatorname{Lie} B(\mathbf{C})$ haben diese Automorphismen die Matrizendarstellungen

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad s_4 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & -1 \\ & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & 1 \\ & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deshalb folgt insbesondere die

(3.13) Bemerkung: *Es gilt* $\det(s_1) = \det(s_2) = \det(s_3) = \det(s_4) = -1$ *und* $\det(id) = \det(s) = \det(s^2) = \det(s^3) = 1$.

Wir bezeichnen mit $E_4^\wedge, (E_{13}-E_{31})^\wedge$ und $(E_{24}-E_{42})^\wedge$ die zu $E_4, e_2 = E_{13}-E_{31}$ und $e_1 = E_{24}-E_{42}$ duale Basis von $\operatorname{Lie} B(\mathbf{C})$. Insbesondere ist in den Bezeichnungen von (3.10) dann

$$\beta_1 = 2i(E_{24} - E_{42})^\wedge, \qquad \beta_3 = 2i(E_{13} - E_{31})^\wedge,$$
$$\beta_2 = i(E_{13} - E_{31})^\wedge - i(E_{24} - E_{42})^\wedge, \qquad \beta_4 = i(E_{13} - E_{31})^\wedge + i(E_{24} - E_{42})^\wedge.$$

In der von e_1 und e_2 aufgespannten Ebene im dreidimensionalen reellen Vektorraumm $\operatorname{Lie} B(\mathbf{R})$ liegen die nicht regulären Elemente von $\operatorname{Lie} B(\mathbf{R})$ auf den von $e_1, e_2, e_2 - e_1$ und $e_1 + e_2$ erzeugten Teilvektoräumen. Formaler gilt somit die

(3.14) Bemerkung: *Genau dann ist für komplexe Zahlen* x, a, b *ein Element* $H(G)(x,a,b)$ *aus* $\operatorname{Lie} B(\mathbf{C})$ *regulär, wenn* a *und* b *beide ungleich Null sind und* $a \neq \pm b$ *ist.*

Sei jetzt $f = a_1 E_4^\wedge + a_2(E_{13} - E_{31})^\wedge + a_3(E_{24} - E_{42})^\wedge$ ein lineares Funktional auf $\operatorname{Lie} B(\mathbf{C})$. Wir berechnen die Werte von f auf den Kowurzeln zu den positiven Wurzeln β_i wegen (3.11)(5) als

$$f(\beta_1^\vee) = f\big(H(0,0,-i)\big) = -ia_3, \qquad f(\beta_2^\vee) = f\big(H(0,-i,i)\big) = i(a_3 - a_2),$$
$$f(\beta_3^\vee) = f\big(H(0,-i,0)\big) = -ia_2, \qquad f(\beta_4^\vee) = f\big(H(0,-i,-i)\big) = -i(a_2 + a_3).$$

Folglich ist f nur dann positiv auf alle positiven Kowurzeln, wenn es positive reelle Zahlen b_2, b_3 gibt mit $a_2 = ib_2, a_3 = ib_3$. In diesem Fall ist $-i(a_2 + a_3)$ positiv und $ia_3 - ia_2 = -b_3 + b_2$. Wir haben damit gezeigt

(3.15) Bemerkung: *Genau dann ist ein lineares Funktional*

$$f = a_1 E_4^\wedge + a_2(E_{13} - E_{31})^\wedge + a_3(E_{24} - E_{42})^\wedge$$

auf $\operatorname{Lie} B(\mathbf{C})$ *positiv auf den positiven Kowurzeln* $\beta_1^\vee, \beta_2^\vee, \beta_3^\vee, \beta_4^\vee$, *wenn es reelle Zahlen* $0 < b_3 < b_2$ *gibt mit* $a_2 = ib_2$ *und* $a_3 = ib_3$.

Die hälftige Summe der positiven Wurzeln von (G, B) ist

(3.16) $$\rho_B = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4) = 2i(E_{13} - E_{31})^\wedge + i(E_{24} - E_{42})^\wedge.$$

Für alle komplexen Zahlen x, a, b rechnen wir somit $(f - \rho_B)(H(x,a,b)) = (a_1 E_4^\wedge + i(b_2 - 2)(E_{13} - E_{31})^\wedge + i(b_3 - 1)(E_{24} - E_{42})^\wedge)(H(x,a,b)) = a_1 x + i(b_2 - 2)a + i(b_3 - 1)b$ Daher ist durch $\exp(f - \rho_B)$

ein Quasicharakter auf $\exp \operatorname{Lie} B(\mathbf{R})$ definiert. Dessen Restriktion auf $A_G^\circ(\mathbf{R})$ ist für alle positiven reellen Zahlen x gegeben durch

$$\exp\big((f-\rho_B)\big)\big(H(x,0,0)\big) = \exp(a_1 x). \tag{3.17}$$

Für einen Quasicharakter g auf $Z(B) = \{\pm 1\}$ ist $1 = g(1) = g(-1)g(-1)$, sodaß g zum einen durch die Zahl $g(-1)$ bestimmt ist und zum anderen $g(-1)$ eine der Zahlen -1 oder 1 ist. Folglich ist g entweder der triviale Charakter oder der durch $g(-1) = -1$ definierte Signumcharakter auf $Z(B)$. Die komplexe Zahl a_1 und der Charakter g sind so zu wählen, daß

$$\xi(\epsilon x) = g(\epsilon)\exp(a_1 x) \tag{3.18}$$

für alle $\epsilon = \pm 1$ und $x > 0$ gilt.

(3.19) Die Gruppe H: An dieser Stelle sei ein kurzer Exkurs eingeschoben. Wir bezeichnen mit H die über den ganzen Zahlen definierte Teilgruppe von $GSp(4)$, deren A–wertigen Punkte für jeden kommutativen Ring A gegeben sind durch

$$H(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & z & 0 & w \end{pmatrix} : \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \text{ aus } GL(2,A) \\ \text{mit } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \end{array} \right\} \tag{3.20}$$

und in der B als maximaler Torus enthalten ist. Vergleicht man Dimensionen, folgt, daß die Vektoren $E_4, E_{13} - E_{31}, E_{24} - E_{42}, E_{11} - E_{33}, E_{31}, E_{42}, E_{33} + E_{44}$ eine Basis von $\operatorname{Lie} H(\mathbf{C})$ bilden. Bezüglich dieser Basis hat für $Y = xE_4 + a(E_{13} - E_{31}) + b(E_{24} - E_{42})$ aus $\operatorname{Lie} B(\mathbf{C})$ der Endomorphismus $\operatorname{ad}Y$ von $\operatorname{Lie} H(\mathbf{C})$ die Matrizendarstellung

$$\operatorname{ad}Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2a & 0 & b & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & -b & 0 \\ & & & -4a & 0 & 0 & 2a \\ & & & & & 0 & 2b \\ & & & & & -2b & 0 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom von $\operatorname{ad}Y$ ist somit

$$\det(X - \operatorname{ad}Y|\operatorname{Lie} H) = X^3(X-2ia)(X+2ia)(X-2ib)(X+2ib).$$

Die Wurzeln von (H,B) sind daher β_1, β_3 und ihre Inversen. Die Weylgruppe von (H,B) enthält die Reflektionen s_1, s_3, also auch $s_1 \circ s_3 = s_3 \circ s_1 = s^2$. Zusammenfassend gilt also das

(3.21) Lemma: *Die Wurzeln von (H,B) sind β_1, β_3 und ihre Inversen.. Die Weylgruppe $W(H,B)$ ist vierelementig und besteht aus den Reflektionen id, s_1, s_3 und s^2. Die Gruppe $W\big(H(\mathbf{R}), B(\mathbf{R})\big)$ ist zweielementig und besteht aus der Identität und s^2.*

Das Zentrum von H besteht aus den Matrizen $\operatorname{diag}(a,a,b,b)$ mit $a^2 = b^2$. Folglich besteht $A_H^\circ(\mathbf{R})$ aus den Matrizen $\operatorname{diag}(a,a,a,a)$ mit einer positiven reellen Zahl a. Die Liealgebra von $(K_0 \cap H)A_H^\circ(\mathbf{R})$ hat somit die Vektoren $E_4, E_{13} - E_{31}, E_{24} - E_{42}$ als Basis. Der Quotient von $\operatorname{Lie} H$ nach diesem Teilraum ist vierdimensional. Folglich gilt

$$q(H) = \frac{1}{2}\dim\big(H/(K_0 \cap H)A_H^\circ(\mathbf{R})\big) = 2. \tag{3.22}$$

Wir beenden hier den Exkurs.

(3.23) Berechnung von $\Phi_G(\gamma,\tau)$ für reguläre Elemente γ: Wir haben alle Voraussetzungen, um für ein reguläres Element $H = H(x,a,b)$ in $\operatorname{Lie} B(\mathbf{R})$ den in (1.27) angegebenen Ausdruck für $\Phi_G(\gamma,\tau)$ zu berechnen. Dabei sei in der Notation oben (g,f) der normalisierte Langlandsparameter von τ. Zunächst ist

$$\Delta_B^G\big(H(G)(x,a,b)\big) = \big(e^{ia} - e^{-ia}\big)\big(e^{ib} - e^{-ib}\big)\big(e^{\frac{1}{2}(a+b)} - e^{-\frac{1}{2}(a+b)}\big)\big(e^{\frac{1}{2}(a-b)} - e^{-\frac{1}{2}(a-b)}\big).$$

Für $f = a_1 E_4^\wedge + ib_2(E_{13} - E_{31})^\wedge + ib_3(E_{24} - E_{42})^\wedge$ mit $0 < b_3 < b_2$ ist weiter

$$
\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{t\in W(G,B)} \det(t)\exp\big((f\circ t^{-1})(H(G)(x,a,b))\big)\\
&\quad= \det(id)\exp\big(f(H(G)(x,a,b))\big) + \det(s)\exp\big((f\circ s^3)(H(G)(x,a,b))\big)\\
&\qquad\qquad + \det(s^2)\exp\big((f\circ s^2)(H(G)(x,a,b))\big) + \det(s^3)\exp\big((f\circ s)(H(G)(x,a,b))\big)\\
&\qquad + \det(s_1)\exp\big((f\circ s_1)(H(G)(x,a,b))\big) + \det(s_2)\exp\big((f\circ s_2)(H(G)(x,a,b))\big)\\
&\qquad\qquad + \det(s_3)\exp\big((f\circ s_3)(H(G)(x,a,b))\big) + \det(s_4)\exp\big((f\circ s_4)(H(G)(x,a,b))\big)\\
&\quad= \exp\big(f(H(G)(x,a,b))\big) + \exp\big(f(H(G)(x,-b,a))\big)\\
&\qquad\qquad + \exp\big(f(H(G)(x,-a,-b))\big) + \exp\big(f(H(G)(x,b,-a))\big)\\
&\qquad - \big[\exp\big(f(H(G)(x,a,-b))\big) + \exp\big(f(H(G)(x,b,a))\big)\\
&\qquad\qquad + \exp\big(f(H(G)(x,-a,b))\big) + \exp\big(f(H(G)(x,-b,-a))\big)\big]\\
&\quad= \exp(a_1x)\big[\exp(ib_2a + ib_3b) + \exp(-ib_2b + ib_3a) + \exp(-ib_2a - ib_3b) + \exp(ib_2b - ib_3a)\\
&\qquad\qquad - \exp(ib_2a - ib_3b) - \exp(ib_2b + ib_3a) - \exp(-ib_2a + ib_3b) - \exp(-ib_2b - ib_3a)\big]\\
&\quad= \exp(a_1x)\big[\big(\exp(ib_3b) - \exp(-ib_3b)\big)\big(\exp(ib_2a) - \exp(-ib_2a)\big)\\
&\qquad\qquad - \big(\exp(ib_2b) - \exp(-ib_2b)\big)\big(\exp(ib_3a) - \exp(-ib_3a)\big)\big].
\end{aligned}
$$

Für $H(x,a,b)$ regulär und $z = \pm 1$ gilt damit

$$
\begin{aligned}
&\Phi_G\big(z.\exp(H(x,a,b)),\tau\big)\\
&= g(z)\ \exp(a_1x)\ \frac{\big(e^{ib_3b} - e^{-ib_3b}\big)\big(e^{ib_2a} - e^{-ib_2a}\big) - \big(e^{ib_2b} - e^{-ib_2b}\big)\big(e^{ib_3a} - e^{-ib_3a}\big)}{\big(e^{ia} - e^{-ia}\big)\big(e^{ib} - e^{-ib}\big)\big(e^{\frac{i}{2}(a+b)} - e^{-\frac{i}{2}(a+b)}\big)\big(e^{\frac{i}{2}(a-b)} - e^{-\frac{i}{2}(a-b)}\big)}.
\end{aligned}
$$

Wir bemerken, daß der Exponentialausdruck auf der rechten Seite symmetrisch in a und b ist und darüberhinaus nur von den Beträgen von a und b abhängt. Wir setzen daher im folgenden a und b als nichtnegativ voraus.

(3.24) In einem nächsten Schritt wollen wir das Verhalten dieser Abbildungen beim Passieren der singulären Hyperebenen analysieren. Dazu ist für positive reelle Zahlen b, c das Limesverhalten von $(\exp(ibx) - \exp(-ibx))(\exp(icx) - \exp(-icx))^{-1}$ mit $x > 0$ gegen Null zu untersuchen. Nach der Regel von l'Hôpital ist aber

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(2ibx) - 1}{\exp(2icx) - 1} = \frac{b}{c} \lim_{x\to 0} \frac{\exp(2ibx)}{\exp(2icx)} = \frac{b}{c}.$$

Damit haben wir das

(3.25) Lemma: *Für positive reelle Zahlen b, c gilt*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(ibx) - \exp(-ibx)}{\exp(icx) - \exp(-icx)} = \frac{b}{c}.$$

(3.26) Berechnung von $\Phi_G(\gamma,\tau)$ für singuläre Elemente γ: Deshalb gilt

$$
\begin{aligned}
&\Phi_G\big(z.\exp(H(x,0,b)),\tau\big)\\
&\quad= -g(z)\ \exp(a_1x)\ \frac{\big(e^{ib_2b} - e^{-ib_2b}\big)b_3 - \big(e^{ib_3b} - e^{-ib_3b}\big)b_2}{\big(e^{ib} - e^{-ib}\big)\big(e^{\frac{i}{2}b} - e^{-\frac{i}{2}b}\big)\big(e^{-\frac{i}{2}b} - e^{\frac{i}{2}b}\big)}\\
&\quad= -g(z)\ \exp(a_1x)\ \frac{\big(e^{ib_2b} - e^{-ib_2b}\big)b_3 - \big(e^{ib_3b} - e^{-ib_3b}\big)b_2}{\big(e^{ib} - e^{-ib}\big)\big(2 - e^{ib} - e^{-ib}\big)}
\end{aligned}
$$

und analog

$$\begin{aligned}
&\Phi_G\big(z.\exp(H(x,a,0)),\tau\big)\\
&= g(z)\ \exp(a_1x)\ \frac{\big(e^{ib_2a}-e^{-ib_2a}\big)b_3-\big(e^{ib_3a}-e^{-ib_3a}\big)b_2}{\big(e^{ia}-e^{-ia}\big)\big(e^{\frac12 a}-e^{-\frac12 a}\big)\big(e^{\frac12 a}-e^{-\frac12 a}\big)}\\
&= -g(z)\ \exp(a_1x)\ \frac{\big(e^{ib_2a}-e^{-ib_2a}\big)b_3-\big(e^{ib_3a}-e^{-ib_3a}\big)b_2}{\big(e^{ia}-e^{-ia}\big)\big(2-e^{ia}-e^{-ia}\big)}.
\end{aligned}$$

Wir untersuchen jetzt, ob der Limes a gegen b von $\Phi_G\big(z.\exp(H(x,a,b)),\tau\big)$ existiert. Dazu notieren wir zunächst

$$\begin{aligned}
&\lim_{a\to b}\frac{\big(e^{ib_3b}-e^{-ib_3b}\big)\big(e^{ib_2a}-e^{-ib_2a}\big)-\big(e^{ib_2b}-e^{-ib_2b}\big)\big(e^{ib_3a}-e^{-ib_3a}\big)}{e^{\frac i2(a-b)}-e^{-\frac i2(a-b)}}\\
&=\lim_{a\to b}\frac{ib_2\big(e^{ib_3b}-e^{-ib_3b}\big)\big(e^{ib_2a}+e^{-ib_2a}\big)-ib_3\big(e^{ib_2b}-e^{-ib_2b}\big)\big(e^{ib_3a}+e^{-ib_3a}\big)}{(i/2)\cdot\big(e^{\frac i2(a-b)}+e^{-\frac i2(a-b)}\big)}\\
&=\lim_{a\to b} b_2\big(e^{ib_3b}-e^{-ib_3b}\big)\big(e^{ib_2a}+e^{-ib_2a}\big)-b_3\big(e^{ib_2b}-e^{-ib_2b}\big)\big(e^{ib_3a}+e^{-ib_3a}\big)
\end{aligned}$$

wegen $\lim_{a\to b}(i/2)\cdot(e^{\frac i2(a-b)}+e^{-\frac i2(a-b)})=i$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{a\to b}\Phi_G\big(z.\exp(H(x,a,b)),\tau\big)\\
&= g(z)\exp(a_1x)\frac{b_2\big(e^{ib_3b}-e^{-ib_3b}\big)\big(e^{ib_2b}+e^{-ib_2b}\big)-b_3\big(e^{ib_2b}-e^{-ib_2b}\big)\big(e^{ib_3b}+e^{-ib_3b}\big)}{\big(\exp(ib)-\exp(-ib)\big)^3}.
\end{aligned}$$

Wir untersuchen, ob der Limes a gegen $-b$ existiert. Dazu notieren wir

$$\begin{aligned}
&\lim_{a\to -b}\frac{\big(e^{ib_3b}-e^{-ib_3b}\big)\big(e^{ib_2a}-e^{-ib_2a}\big)-\big(e^{ib_2b}-e^{-ib_2b}\big)\big(e^{ib_3a}-e^{-ib_3a}\big)}{\big(e^{ia}-e^{-ia}\big)\big(e^{ib}-e^{-ib}\big)\big(e^{\frac i2(a+b)}-e^{-\frac i2(a+b)}\big)\big(e^{\frac i2(a-b)}-e^{-\frac i2(a-b)}\big)}\\
&=\lim_{a\to b}\frac{\big(e^{ib_3b}-e^{-ib_3b}\big)\big(e^{-ib_2a}-e^{ib_2a}\big)-\big(e^{ib_2b}-e^{-ib_2b}\big)\big(e^{-ib_3a}-e^{ib_3a}\big)}{\big(e^{-ia}-e^{ia}\big)\big(e^{ib}-e^{-ib}\big)\big(e^{\frac i2(-a+b)}-e^{-\frac i2(-a+b)}\big)\big(e^{\frac i2(-a-b)}-e^{-\frac i2(-a-b)}\big)}\\
&=\frac{-1}{(-1)^3}\lim_{a\to b}\frac{\big(e^{ib_3b}-e^{-ib_3b}\big)\big(e^{ib_2a}-e^{-ib_2a}\big)-\big(e^{ib_2b}-e^{-ib_2b}\big)\big(e^{ib_3a}-e^{-ib_3a}\big)}{\big(e^{ia}-e^{-ia}\big)\big(e^{ib}-e^{-ib}\big)\big(e^{\frac i2(a+b)}-e^{-\frac i2(a+b)}\big)\big(e^{\frac i2(a-b)}-e^{-\frac i2(a-b)}\big)}
\end{aligned}$$

Deshalb gilt $\Phi_G\big(z.\exp(H(x,b,b)),\tau\big)=\Phi_G\big(z.\exp(H(x,-b,b)),\tau\big)$ für alle reellen Zahlen b.

(3.27) In einem letzten Schritt wollen wir jetzt x, $|a|$ und $|b|$ für reelle Zahlen x, a und b durch die Eigenwerte von $\exp H(G)(x,a,b)$ ausdrücken. In der Notation von (3.20) ist aber

$$s=\exp H(G)(x,a,b)=\exp x\left[\begin{pmatrix}\cos a & \sin a\\ -\sin a & \cos a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos b & \sin b\\ -\sin b & \cos b\end{pmatrix}\right]=[s_1,\,s_2].$$

Sei $y=\exp x$. Die Eigenwerte λ, μ von s_1 sind dann $y(\cos a\pm i\sin a)$, die Eigenwerte α, β von s_2 sind $y(\cos b\pm i\sin b)$. Ihr Produkt ergibt jweils y^2, also das Quadrat des Ähnlichkeitsfaktors $y=\mu(s)$ von s. Weiter haben wir $\lambda+\mu=2y\cos a$ und $\lambda-\mu=\pm 2iy\sin a$. Folglich gelten $\cos|a|=(\lambda+\mu)/2y$ und $\sin|a|=|\lambda-\mu|/2y$. Analoge Darstellungen ergeben sich für $\cos|b|$ und $\sin|b|$ in Termini von α und β.
Wie oben bemerkt ist $\Phi_G(s,\tau)$ symmetrisch in $|a|$ und $|b|$. Es reicht also zur Berechnung dieses Wertes festzulegen, welche Eigenwerte von s konjugiert komplexe Zahlen sind. Erreicht wird dies beispielsweise durch die Forderung $\lambda\mu=\alpha\beta=\mu(s)^2$. In diesem Fall wird dann x durch die Gleichung $\exp(2x)=\lambda\mu$ bestimmt.
Rechnet man die Exponentialausdrücke in $\Phi_G(s,\tau)$, wenn sinnvoll, mit Hilfe von $\exp(ix)=\cos x+i\sin x$ in trigonometrische Funktionen um, erhält man so zusammenfassend den abschließenden

(3.28) Satz: *Sei B ein modulo dem Zentrum von $G = GSp(4)$ maximal anisotroper* $\mathbf{Q}$*–Torus in G. Sei (g, f) ein normierter Langlandsparameter für die Darstellung τ und gelte $f = b_1 E_4^\wedge + ib_2(E_{13} - E_{31})^\wedge + ib_3(E_{24} - E_{42})^\wedge$ für reelle Zahlen b_2, b_3 mit $0 < b_3 < b_2$ und einer komplexen Zahl b_1. Seien H aus* $\mathrm{Lie}\, B(\mathbf{R})$ *und z aus $Z(B) = \{\pm 1\}$. Seien λ, μ, α und β mit $\lambda\mu = \alpha\beta = \mu(s)^2$ die Eigenwerte von $\exp H$, so daß*

$$z \cdot \exp H \sim \mathrm{diag}(\lambda,\, \alpha,\, \mu,\, \beta)$$

über den komplexen Zahlen gilt. Seien weiter x, a und b die reellen Zahlen

$$x = \log(\sqrt{\lambda\mu}), \quad a = \arccos\left(\frac{\lambda + \mu}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right) = \arcsin\left(\frac{|\lambda - \mu|}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right),$$

$$b = \arccos\left(\frac{\alpha + \beta}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right) = \arcsin\left(\frac{|\alpha - \beta|}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right).$$

Dann ist $\exp x$ der Anteil von $\exp H$ aus der Zusammenhangskomponente des Zentrums von $G(\mathbf{R})$. Ist H regulär in G, sind also a und b verschieden, dann gilt

$$\Phi_G(z \cdot \exp H,\, \tau) = \frac{1}{2}(2\sqrt{\lambda\mu})^3 \cdot g(z) \exp(b_1 x) \cdot \frac{\sin(b_2 b)\sin(b_3 a) - \sin(b_2 a)\sin(b_3 b)}{|\lambda - \mu| \cdot |\alpha - \beta| \cdot (|\alpha + \beta| - |\lambda + \mu|)}.$$

Sei H singulär in G, so daß $ab = 0$ oder $a = b$ gilt. Ist a von Null verschieden, dann gilt

$$\Phi_G(z \cdot \exp H,\, \tau) = \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{\lambda\mu})^2 \cdot g(z) \exp(b_1 x) \cdot \frac{b_2 \sin(b_3 a) - b_3 \sin(b_2 a)}{|\lambda - \mu| \cdot (2\sqrt{\lambda\mu} - |\lambda + \mu|)},$$

$$\Phi_G(z \cdot \exp H,\, \tau) = \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{\lambda\mu})^2 \cdot g(z) \exp(b_1 x) \cdot \frac{b_2 \sin(b_3 b) - b_3 \sin(b_2 b)}{|\alpha - \beta| \cdot (2\sqrt{\alpha\beta} - |\alpha + \beta|)}$$

gilt, wenn b von Null verschieden ist. Für $a = b$ ist

$$\Phi_G(z \cdot \exp H,\, \tau) = \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{\lambda\mu})^2 \cdot g(z) \exp(b_1 x) \cdot \frac{b_3 \sin(b_2 b)\cos(b_3 b) - b_2 \sin(b_3 b)\cos(b_2 b)}{|\lambda - \mu|^3}.$$

Kapitel 4 Der Faktor $\Phi_{L(\alpha)}(\gamma, \tau)$

Ziel dieses Abschnittes ist es für den Levifaktor $M = L(\alpha)$ eine Formel für $\Phi_{L(\alpha)}(\gamma, \tau)$ anzugeben. Sei zunächst daran erinnert, daß für jeden kommutativen Ring R die R-wertigen Punkte von $L(\alpha)$ gegeben sind duch

$$L(\alpha)(R) = M(R) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & c\,{}^t\!A^{-1} \end{pmatrix} : \begin{array}{c} A \text{ in } GL(2,R) \\ c \text{ in } GL(1,R) \end{array} \right\}. \tag{4.1}$$

Der Torus A_M ist identisch mit dem Zentrum von M. Seine R-wertigen Punkte sind

$$A_M(R) = \left\{ \mathrm{diag}(a, a, ca^{-1}, ca^{-1}) : a, c \text{ in} GL(1,R) \right\} \tag{4.2}$$

Insbesondere besteht damit die Zusammenhangskomponente $A_M^\circ(\mathbf{R})$ der reellwertigen Punkte von A_M aus allen Matrizen $\mathrm{diag}(a, a, ca^{-1}, ca^{-1})$ mit a und c positiven reellen Zahlen. Folglich ist

$$\dim(A_G \backslash A_M) = 1. \tag{4.3}$$

Sei schließlich $T = B(M)$ ein über den rationalen Zahlen definierter maximaler Torus in M, dessen reellwertigen Punkte gegeben sind durch

$$T(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} c \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & d\, c^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \end{pmatrix} : \begin{array}{c} c, d \text{ in } GL(1,\mathbf{R}) \\ a^2 + b^2 = 1 \end{array} \right\} \cong (\mathbf{R}^* SO(2,\mathbf{R})) \times \mathbf{R}. \tag{4.4}$$

(4.5) Berechnung von $\mathrm{Lie}\, M$**:** Wir berechnen zunächst wieder die Liealgebren von M und T. Wir notieren hierfür zunächst, daß

$$(a + \epsilon b)^{-1} = a^{-1} + \epsilon(-ba^{-1}) \text{ und } \begin{pmatrix} 1 + \epsilon a_1 & \epsilon a_2 \\ \epsilon a_3 & 1 + \epsilon a_4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon a_1 & -\epsilon a_2 \\ -\epsilon a_3 & 1 - \epsilon a_4 \end{pmatrix}$$

in der Algebra der dualen Zahlen über den komplexen Zahlen gelten. Weiter liegt ein Element der Liealgebra von $GSp(4)$ genau dann in der Liealgebra von M, wenn es D in $GL(2, \mathbf{C}[\epsilon])$ und eine Einheit $d + \epsilon d'$ in $\mathbf{C}[\epsilon]$ gibt mit

$$E_4 + \epsilon \begin{pmatrix} A & B \\ C & cE_2 - {}^tA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & (d + \epsilon d')^t D^{-1} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist dann $B = C = 0$ und es gilt

$$D = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon a_1 & \epsilon a_2 \\ \epsilon a_3 & 1 + \epsilon a_4 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 + \epsilon(c - a_1) & -\epsilon a_3 \\ -\epsilon a_2 & 1 + \epsilon(c - a_4) \end{pmatrix} &= (d + \epsilon d')^t D^{-1} \\ = (d + \epsilon d') \begin{pmatrix} 1 - \epsilon a_1 & -\epsilon a_3 \\ -\epsilon a_2 & 1 - \epsilon a_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d + \epsilon(d' - a_1 d) & -\epsilon(a_3 d) \\ -\epsilon(a_2 d) & d + \epsilon(d' - a_4 d) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies zeigt $d = 1, d' = c$. Folglich besteht $\mathrm{Lie}\, M(E)$ für den Körper E der reellen oder komplexen Zahlen aus allen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & cE_2 - {}^tA \end{pmatrix} \qquad \text{mit } A \text{ in } M(2,E) \text{ und } c \text{ in } E \tag{4.6}$$

und hat die Matrizen $E_4, E_{33} + E_{44}, E_{12} - E_{43}, E_{21} - E_{34}$ und $E_{11} - E_{33}$ als Basis.

(4.7) **Berechnung von** $\operatorname{Lie} T$: Allgemein ist jetzt weiter

$$\det\begin{pmatrix} a+\epsilon a' & b+\epsilon b' \\ c+\epsilon c' & d+\epsilon d' \end{pmatrix} = (a^2+b^2)+2\epsilon(aa'+bb')$$

genau dann Eins, wenn $a^2+b^2=1$ und $aa'+bb'=0$ gelten. Um die Liealgebra von T zu bestimmen ist das durch

$$\begin{pmatrix} 1+\epsilon a_1 & \epsilon a_2 & & \\ \epsilon a_3 & 1-\epsilon a_4 & & \\ & & 1+\epsilon(g-a_1) & -\epsilon a_3 \\ & & -\epsilon a_2 & 1+\epsilon(g-a_4) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (c+\epsilon c')\begin{pmatrix} a+\epsilon a' & b+\epsilon b' \\ -(b+\epsilon b') & a+\epsilon a' \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & (d+\epsilon d')(c+\epsilon c')^{-1}\, {}^t\begin{pmatrix} a+\epsilon a' & b+\epsilon b' \\ -(b+\epsilon b') & a+\epsilon a' \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix}$$

gegebene Gleichungssystem zu lösen. Dabei gelten

$$(c+\epsilon c')\begin{pmatrix} a+\epsilon a' & b+\epsilon b' \\ -(b+\epsilon b') & a+\epsilon a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+\epsilon(a'c+ac') & bc+\epsilon(b'c+bc') \\ -(bc+\epsilon(b'c+bc')) & ac+\epsilon(a'c+ac') \end{pmatrix}$$

und

$$(d+\epsilon d')(c+\epsilon c')^{-1}\, {}^t\begin{pmatrix} a+\epsilon a' & b+\epsilon b' \\ -(b+\epsilon b') & a+\epsilon a' \end{pmatrix}^{-1} = \left(dc^{-1}+\epsilon(d'c^{-1}-dc'c^{-2})\right)\, {}^t\begin{pmatrix} a+\epsilon a' & b+\epsilon b' \\ -(b+\epsilon b') & a+\epsilon a' \end{pmatrix}^{-1}.$$

Aus dem ersten Gleichungssatz folgt sofort $ac=1$ und $b=0$. Aus der Determinantenbedingung $1=(a^2+b^2)+2\epsilon(aa'+bb')$ folgt jetzt $a=\pm1$ und $a'=0$. Daher gelten weiter $c=a, a_2=b'c=b'a=-a_3$ sowie $a_1=ac'=a_4$. Wir erhalten deshalb

$${}^t\begin{pmatrix} a+\epsilon a' & b+\epsilon b' \\ -(b+\epsilon b') & a+\epsilon a' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & \epsilon b' \\ -\epsilon b' & a \end{pmatrix}$$

und wegen $a=c=c^{-1}$ folglich

$$\left(dc^{-1}+\epsilon(d'c^{-1}-dc'c^{-2})\right)\begin{pmatrix} a & \epsilon b' \\ -\epsilon b' & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d+\epsilon(d'-dc'a) & \epsilon db'a \\ -\epsilon db'a & d+\epsilon(d'-dc'a) \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgen $d=1, a_2=db'a=b'a$ und $g=a_1-ac'+d'$. Die Liealgebra von T über E hat deshalb die Matrizen $E_4, E_{11}+E_{22}-(E_{33}+E_{44})$ und $E_{12}-E_{21}+E_{34}-E_{43}$ als Basis und besteht aus den Elementen

$$(4.8)\qquad H=H(M)(a,b,c)=aE_4+b\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&1&&\\-1&0&&\\&&0&1\\&&-1&0\end{pmatrix}=aE_4+\begin{pmatrix}b&c&&\\-c&b&&\\&&-b&c\\&&-c&-b\end{pmatrix}.$$

Der Schnitt $(K_0\cap M)(\mathbf{R})$ hat den Vektor $E_{12}-E_{21}+E_{34}-E_{43}$ als Basisvektor seiner Liealgebra. Die Liealgebra von $A_M^\circ(\mathbf{R})$ hat E_4 und $E_{11}+E_{22}-(E_{33}+E_{44})$ als Basisvektoren. Der Quotient der Liealgebra von M nach dem von diesen Teilalgebren erzeugten Unterraum ist daher zweidimensional. Folglich gilt

$$(4.9)\qquad q(L(\alpha))=\frac{1}{2}\dim\left(L(\alpha)/(K_0\cap L(\alpha)(\mathbf{R})A_M^\circ(\mathbf{R})\right)=1.$$

Wir wollen jetzt weiter $\exp H(a,b,c)$ für komplexe Zahlen a,b,c berechnen. Der Vektor $H(a,b,0)=aE_4+b\ \operatorname{diag}(1,1,-1,-1)$ ist aus dem Zentrum von $M(4,\mathbf{C})$. Daher kommutiert insbesondere

$H(0,0,c)$ mit diesem Vektor. Somit ist $\exp H(a,b,c) = \exp\ a\ \exp H(0,b,0)\ \exp H(0,0,c)$. Induktiv gelten

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}^{2k} = (-1)^k \begin{pmatrix} x^{2k} & 0 \\ 0 & x^{2k} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & x^{2k+1} \\ -x^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

für alle nichtnegativen ganzen Zahlen k und jede komplexe Zahl x. Deshalb ist

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Für alle komplexen Zahlen a, b, d erhalten wir daher

$$\begin{aligned} &\exp\big(H(M)(a,b,d)\big) \\ &= \exp(a)\ \operatorname{diag}\big(\exp(b)E_2, \exp(-b)E_2\big)\ \operatorname{diag}\Big(\begin{pmatrix} \cos d & \sin d \\ -\sin d & \cos d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos d & \sin d \\ -\sin d & \cos d \end{pmatrix}\Big). \end{aligned}$$

$$(4.10) \qquad = \begin{pmatrix} \exp(a+b) \begin{pmatrix} \cos d & \sin d \\ -\sin d & \cos d \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \exp(a-b) \begin{pmatrix} \cos d & \sin d \\ -\sin d & \cos d \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

(4.11) Berechnung von $\operatorname{ad} H(M)(a,b,c)$: Die adjungierte Darstellung von $\operatorname{Lie} T$ auf $\operatorname{Lie} G$ ist gegeben durch

$$\operatorname{ad} H(M)(a,b,c) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_3 & a_4 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & d-a_1 & -a_3 \\ c_2 & c_4 & -a_2 & d-a_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c(a_2+a_3) & c(a_4-a_1) & 2(b_1 b + b_2 c) & 2b_2 b + c(b_4 - b_1) \\ c(a_4-a_1) & -c(a_2+a_3) & 2b_2 b + c(b_4-b_1) & 2(b_4 b - b_2 c) \\ 2(c_2 c - c_1 b) & c(c_4-c_1) - 2c_2 b & -c(a_2+a_3) & c(a_1-a_4) \\ c(c_4-c_1) - 2c_2 b & -2(c_2 c + c_4 b) & c(a_1-a_4) & c(a_2+a_3) \end{pmatrix}$$

Somit gelten

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}H(E_4) &= \operatorname{ad}H(E_{11}+E_{22}-(E_{33}+E_{44})) = \operatorname{ad}H(E_{12}-E_{21}+E_{34}-E_{43}) = 0, \\ \operatorname{ad}H(E_{13}) &= (2b)E_{13} + (-c)(E_{14}+E_{23}), \\ \operatorname{ad}H(E_{14}+E_{23}) &= (2c)E_{13} + (2b)(E_{14}+E_{23}) + (-2c)E_{24}, \\ \operatorname{ad}H(E_{24}) &= c(E_{14}+E_{23}) + (2b)E_{24}, \\ \operatorname{ad}H(E_{31}) &= (-2b)E_{31} + (-c)(E_{32}+E_{41}), \\ \operatorname{ad}H(E_{32}+E_{41}) &= (2c)E_{31} + (-2b)(E_{32}+E_{41}) + (-2c)E_{42}, \\ \operatorname{ad}H(E_{42}) &= c(E_{32}+E_{41}) + (-2b)E_{42}, \\ \operatorname{ad}H(E_{11}-E_{33}) &= c(E_{12}-E_{21}+E_{34}-E_{43}) + (-2c)(E_{12}-E_{43}), \\ \operatorname{ad}H(E_{12}-E_{43}) &= (-c)(E_{11}+E_{22}-(E_{33}+E_{44})) + (2c)(E_{11}-E_{33}). \end{aligned}$$

Bezüglich der so angeordneten Basis von $\operatorname{Lie} G$ hat $\operatorname{ad}H$ die Matrizendarstellung

$$(1) \qquad \operatorname{ad}H(M)(a,b,c) = \left(\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 0 & 0 & & & & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & c & 0 \\ & & & 2b & 2c & 0 & & & & & \\ & & & -c & 2b & c & & & & & \\ & & & 0 & -2c & 2b & & & & & \\ & & & & & & -2b & 2c & 0 & & \\ & & & & & & -c & -2b & c & & \\ & & & & & & 0 & -2c & -2b & & \\ & & & & & & & & & 0 & 2c \\ & & & & & & & & & -2c & 0 \end{array}\right).$$

Für komplexe Zahlen A, B ist

$$\det\begin{pmatrix} X-A & -2B & 0 \\ B & X-A & -B \\ 0 & 2B & X-A \end{pmatrix} = (X-A)\big[(X-A)^2+2B^2\big] - B\big[-2B(X-A)\big]$$
$$= (X-A)(X^2-2AX+A^2+4B^2)$$
$$= (X-A)\big(X-(A+2iB)\big)\big(X-(A-2iB)\big).$$

Das charakteristische Polynom von $\mathrm{ad}H(a,b,c)$ ist daher

$$\begin{aligned} &\det(X-\mathrm{ad}H(a,b,c)) \\ \text{(2)}\qquad &= X^3(X-2b)\big(X-2(b-ic)\big)\big(X-2(b+ic)\big)(X+2b) \\ &\big(X+2(b+ic)\big)\big(X+2(b-ic)\big)(X-2ic)(X+2ic). \end{aligned}$$

Die Vektoren $E_4, E_{11}+E_{22}-(E_{33}+E_{44}), E_{12}-E_{21}+E_{34}-E_{43}, E_{11}-E_{33}, E_{12}-E_{43}$ bilden eine Basis der Liealgebra von M. Bezüglich derer hat $\mathrm{ad}H(a,b,c)$ die Matrizendarstellung

$$\text{(3)}\qquad \mathrm{ad}H(a,b,c) = \begin{pmatrix} 0\,0\,0 & 0 & 0 \\ 0\,0\,0 & 0 & -c \\ 0\,0\,0 & c & 0 \\ & 0 & 2c \\ & -2c & 0 \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\text{(4)}\qquad \det(X-\mathrm{ad}H(a,b,c)|\mathrm{Lie}\,M) = X^3(X-2ic)(X+2ic).$$

Die Wurzeln von (G, A_M) erhält man, indem man in den Rechnungen oben $c=0$ setzt. Für $H = \mathrm{ad}H(a,b,0)$ aus $\mathrm{Lie}\,A_M(\mathbf{C})$ ist genauer

$$\text{(5)}\qquad \begin{aligned} &\mathrm{ad}H(E_{13}) = (2b)E_{13}, && \mathrm{ad}H(E_{24}) = (2b)E_{24}, && \mathrm{ad}H(E_{14}+E_{23}) = (2b)(E_{14}+E_{23}), \\ &\mathrm{ad}H(E_{31}) = (-2b)E_{31}, && \mathrm{ad}H(E_{42}) = (-2b)E_{42}, && \mathrm{ad}H(E_{32}+E_{41}) = (-2b)(E_{32}+E_{41}). \end{aligned}$$

Alle anderen Basiselemente von $\mathrm{Lie}\,G(\mathbf{C})$ liegen im Kern von $\mathrm{ad}H$.

(4.12) Positive Wurzeln: Als positive Wurzel von $\mathrm{Lie}\,A_M(\mathbf{C})$ wählen wir die für alle komplexen Zahlen a, b durch

$$\text{(1)}\qquad \phi(H(M)(a,b,0)) = 2b$$

gegebene Abbildung. Als positive Wurzeln von $\mathrm{Lie}\,T(\mathbf{C})$ wählen wir die für alle komplexen Zahlen a, b, c durch

$$\text{(2)}\qquad \begin{aligned} &\beta_1(H(M)(x,a,b)) = 2(b+ic), && \beta_3(H(M)(x,a,b)) = 2ic, \\ &\beta_2(H(M)(x,a,b)) = 2(b-ic), && \phi(H(M)(x,a,b)) = 2b \end{aligned}$$

gegebenen Abbildungen. Die beiden Ordnungen sind dann kompatibel. Die reellen Wurzeln von T sind

$$\text{(4.13)}\qquad R = R(T) = \{\pm\phi\} \quad \text{und} \quad R^+ = \{\phi\}$$

ist die positive reelle Wurzel von T. Für reelle Zahlen a, b, c ist $H(a,b,c)$ genau dann regulär in G, wenn b und c von Null verschieden sind. Wir erhalten damit das

(4.14) Lemma: *Für reelle Zahlen a, b, c ist*

$$H = H(M)(a,b,c) = aE_4 + b(E_{11} + E_{22} - (E_{33} + E_{44})) + c(E_{12} - E_{21} + E_{34} - E_{43})$$

genau dann regulär in G, wenn b und c beide von Null verschieden sind. In diesem Fall ist

$$R^+(H) = \{\alpha \in R : \alpha(H) > 0\} = \begin{cases} \{\phi\} & b > 0 \\ \{-\phi\} & b < 0 \end{cases}$$

und

$$\epsilon_R(H) = (-1)^{|R^+(H) \cap (-R^+)|} = \begin{cases} 1 & b > 0 \\ -1 & b < 0. \end{cases}$$

(4.15) Die Kowurzeln und Spiegelungen zu den positiven Wurzeln: Wir berechnen weiter die Kowurzeln zu den positven Wurzeln von (G, T). Auf $\mathrm{Lie}\, T(\mathbf{C})$ definieren wir für alle komplexen Zahlen a, b, c, a', b', c' durch

$$\begin{aligned} B_1\big(H(a,b,c),\, H(a',b',c')\big) &= \frac{1}{4}\mathrm{tr}\big(H(a,b,c),\ H(a',b',c')\big) \\ &= \frac{1}{4}\mathrm{tr}\big(\mathrm{diag}(aa', bb' - cc', bb' - cc', bb' - cc', bb' - cc')\big) = \frac{aa'}{4} + bb' - cc' \end{aligned}$$

eine Bilinearform, deren Restriktion auf $\mathrm{Lie}\, T$ dort ein inneres Produkt definiert.
Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt genau dann $2b = \phi(H(a,b,c)) = \frac{aa'}{4} + bb' - cc'$, wenn $a' = c' = 0$ und $b' = 2$ sind. Somit ist $H(\phi) = H(0,2,0)$. Wegen $B_1(H(\phi), H(\phi)) = 4$ gilt

(1) $$\phi^\vee = \frac{1}{4}H(\phi) = H(0, \frac{1}{2}, 0) = \mathrm{diag}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$$

Insbesondere ist die Spiegelung $s(\phi)$ zu ϕ für alle komplexen Zahlen a, b, c gegeben durch

(2) $$\begin{aligned} s(\phi)(H(a,b,c)) &= H(a,b,c) - 2bH(0,1,0) \\ &= H(a,-b,c) = \left(\mathrm{Int}\begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}\right)\big(H(a,b,c)\big). \end{aligned}$$

Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt genau dann $2b + 2ic = \beta_1(H(a,b,c)) = \frac{aa'}{4} + bb' - cc'$, wenn $a' = 0$, $b' = 2$ und $c' = -2i$ sind. Somit ist $H(\beta_1) = H(0, 2, -2i)$. Wegen $B_1(H(\beta_1), H(\beta_1)) = 8$ ist

(3) $$\beta_1^\vee = \frac{1}{4}H(0, 1, -i).$$

Analog ergibt sich

(4) $$\beta_2^\vee = \frac{1}{4}H(0, 1, i).$$

Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt schließlich genau dann $2ic = \beta_3(H(a,b,c)) = \frac{aa'}{4} + bb' - cc'$, wenn $a' = b' = 0$ und $c' = -2i$ sind. Somit ist $H(\beta_3) = H(0,0,-2i)$. Wegen $B_1(H(\beta_3), H(\beta_3)) = 4$ ist

(5) $$\beta_3^\vee = \frac{1}{2}H(0, 0, -i).$$

Folglich ist die Spiegelung $s(\beta_3)$ zu β_3 für alle komplexen Zahlen a, b, c gegeben durch

(6) $$\begin{aligned} s(\beta_3)(H(a,b,c)) &= H(a,b,c) - 2cH(0,0,1) \\ &= H(a,b,-c) = \left(\mathrm{Int}\ \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)\right)\big(H(a,b,c)\big). \end{aligned}$$

Die Wurzeln von (M, T) sind $\pm\beta_3$. Deshalb erhalten wir insbesondere das

(4.16) Lemma : *Für den Levifaktor $M = L(\alpha)$ ist $W(M,T) = W(M(\mathbf{R}), T(\mathbf{R}))$. Sie wird erzeugt von der Spiegelung $s(\beta_3)$ zur Wurzel β_3.*

(4.17) Berechnung von Z mit $\mathrm{Ad}Z(\mathrm{Lie}\,T(\mathbf{C})) = \mathrm{Lie}\,B(\mathbf{C})$: Wir wollen im folgenden ein Element Z aus $GSp(4)$ berechnen mit $\mathrm{Ad}Z(\mathrm{Lie}\,T(\mathbf{C})) = \mathrm{Lie}\,B(\mathbf{C})$ oder dazu äquivalent mit

$$\mathrm{Ad}Z < E_{11} + E_{22} - (E_{33} + E_{44}), E_{12} - E_{21} + E_{34} - E_{43} > = < E_{13} - E_{31}, E_{24} - E_{42} > .$$

Sind a und b komplexe Zahlen, gilt zunächst

$$\det\big(X - H(G)(0,a,b)\big) = \det \begin{pmatrix} X & 0 & -a & 0 \\ 0 & X & 0 & -b \\ a & 0 & X & 0 \\ 0 & b & 0 & X \end{pmatrix}$$
$$= X(X^3 + b^2X) + (-a)(-a)(X^2 + b^2) = (X - ia)(X + ia)(X - ib)(X + ib).$$

Als normierte Eigenvektoren von $H(G)(0,a,b)$ berechnen wir

$$^t(-\frac{i}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \text{ mit Eigenwert } ia, \quad {}^t(0, -\frac{i}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ mit Eigenwert } ib,$$
$$^t(\frac{i}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \text{ mit Eigenwert } -ia, \quad {}^t(0, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ mit Eigenwert } -ib.$$

Die Matrix

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & i \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist aus $GSp(4)(\mathbf{C})$. Nach Konstruktion gilt

$$T^{-1} = T^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist

$$\mathrm{Ad}(T^{-1}) \begin{pmatrix} & & a & 0 \\ & & 0 & b \\ -a & 0 & & \\ 0 & -b & & \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(ia, ib, -ia, -ib).$$

Die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt

$$S \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & ib \\ ia & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b & -i(a-b) \\ i(a-b) & a+b \end{pmatrix}$$

und

$$S^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & -ib \\ -ia & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b & i(a-b) \\ -i(a-b) & a+b \end{pmatrix}$$

für alle komplexen Zahlen a, b. Insbesondere gilt somit

$$\mathrm{Ad}\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} \mathrm{diag}(ia, ib, -ia, -ib)$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} i(a+b) & a-b \\ -(a-b) & i(a+b) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i(a+b) & a-b \\ -(a-b) & -i(a+b) \end{pmatrix}\right).$$

Das Gleichungssystem $2x = i(a+b)$ und $2y = a-b$ hat $a = y - ix$ und $b = -(y+ix)$ als Lösungen.

Für die Matrix

$$(4.18)\qquad Z^{-1} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} T^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -1 & 1 & i \\ i & i & i & 1 \\ -i & -1 & 1 & -i \\ -1 & -i & -i & 1 \end{pmatrix}$$

gilt deshalb

$$(4.19)\qquad \mathrm{Ad}Z \begin{pmatrix} b & c & & \\ -c & b & & \\ & & -b & c \\ & & -c & -b \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & & c-ib & 0 \\ & & 0 & -(c+ib) \\ ib-c & 0 & & \\ 0 & c+ib & & \end{pmatrix}.$$

für alle komplexen Zahlen b, c. Für alle komplexen Zahlen a, b, c ist daher insbesondere

$$(4.20)\qquad \mathrm{Ad}Z\big(H(M)(a,b,c)\big) = H(G)\big(a, c-ib, -(c+ib)\big).$$

(4.21) Berechnung von $(\mathrm{Ad}\,Z)(\beta_i^\vee)$: Als Bilder unter $\mathrm{Ad}Z$ der Kowurzeln zu den positiven Wurzeln von (G,T) erhalten wir

$$(4.22)\qquad \begin{aligned} \mathrm{Ad}Z\big(H(M)(0,\tfrac{1}{2},0)\big) &= H(G)\big(0,-\tfrac{i}{2},-\tfrac{i}{2}\big) = -\tfrac{i}{2}(E_{13}-E_{31}) - \tfrac{i}{2}(E_{24}-E_{42}), \\ \mathrm{Ad}Z\big(\tfrac{1}{4}H(M)(0,1,-i)\big) &= \tfrac{1}{4}H(G)\big(0,-2i,0\big) = -\tfrac{i}{2}(E_{13}-E_{31}), \\ \mathrm{Ad}Z\big(\tfrac{1}{4}H(M)(0,1,i)\big) &= \tfrac{1}{4}H(G)\big(0,0,-2i\big) = -\tfrac{i}{2}(E_{24}-E_{42}), \\ \mathrm{Ad}Z\big(\tfrac{1}{2}H(M)(0,0,-i)\big) &= \tfrac{1}{2}H(G)\big(0,-i,i\big) = -\tfrac{i}{2}(E_{13}-E_{31}) + \tfrac{i}{2}(E_{24}-E_{42}). \end{aligned}$$

(4.23) Berechnung von $(f \circ s^{-1} \circ \mathrm{Ad}\,Z)(H(M)(a,b,c))$: Sei (g,f) ein normierter Langlandsparameter für die Darstellung τ und gelte $f = b_1 E_4^\wedge + ib_2(E_{13}-E_{31})^\wedge + ib_3(E_{24}-E_{42})^\wedge$ für reelle Zahlen b_2, b_3 mit $0 < b_3 < b_2$ und einer komplexen Zahl b_1. Genau dann ist f positiv auf einem Vektor $ix(E_{13}-E_{31}) + iy(E_{24}-E_{42})$ mit reellen Zahlen x, y, wenn $-b_2x - b_3y > 0$, also $b_2x + b_3y < 0$ gilt. Diese Bedingung ist wegen $0 < b_3 < b_2$ für alle vier Bilder der Kowurzeln unter $\mathrm{Ad}Z$ erfüllt. Der normierte Langlandsparameter (g,f) bleibt daher unverändert. Für ein reguläres Element

$$H = H(M)(a,b,c) = aE_4 + b(E_{11}+E_{22}-(E_{33}+E_{44})) + c(E_{12}-E_{21}+E_{34}-E_{43})$$

aus $\mathrm{Lie}\,T(\mathbf{R})$ berechnen wir im folgenden für t in $W(G,B)$ die Terme $(f \circ t^{-1} \circ \mathrm{Ad}Z)(H)$. Dazu übernehmen wir die Bezeichnungen von (3.12). Es gilt $f(H(G)(x,y,z)) = b_1x + ib_2y + ib_3z$ nach Konstruktion. Wir rechnen

$$\begin{aligned} \big(f\circ \mathrm{id}^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z\big)\big(H(M)(a,b,c)\big) &= f\big(H(G)(a,c-ib,-(c+ib))\big) = b_1a + b(b_2+b_3) + ci(b_2-b_3), \\ \big(f\circ s_1^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z\big)\big(H(M)(a,b,c)\big) &= f\big(H(G)(a,c-ib,c+ib)\big) = b_1a + b(b_2-b_3) + ci(b_2+b_3), \\ \big(f\circ s_2^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z\big)\big(H(M)(a,b,c)\big) &= f\big(H(G)(a,-(c+ib),c-ib)\big) = b_1a + b(b_2+b_3) - ci(b_2-b_3), \\ \big(f\circ s_3^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z\big)\big(H(M)(a,b,c)\big) &= f\big(H(G)(a,ib-c,-(c+ib))\big) = b_1a - b(b_2-b_3) - ci(b_2+b_3), \\ \big(f\circ s_4^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z\big)\big(H(M)(a,b,c)\big) &= f\big(H(G)(a,c+ib,ib-c)\big) = b_1a - b(b_2+b_3) + ci(b_2-b_3), \\ \big(f\circ s^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z\big)\big(H(M)(a,b,c)\big) &= f\big(H(G)(a,c+ib,c-ib)\big) = b_1a - b(b_2-b_3) + ci(b_2+b_3), \\ \big(f\circ s^{-2}\circ \mathrm{Ad}Z\big)\big(H(M)(a,b,c)\big) &= f\big(H(G)(a,ib-c,c+ib)\big) = b_1a - b(b_2+b_3) - ci(b_2-b_3), \\ \big(f\circ s^{-3}\circ \mathrm{Ad}Z\big)\big(H(M)(a,b,c)\big) &= f\big(H(G)(a,-(c+ib),ib-c)\big) = b_1a + b(b_2-b_3) - ci(b_2+b_3). \end{aligned}$$

(4.24) Berechnung von $Q^+(f \circ s^{-1} \circ \mathrm{Ad}\,Z)$: Wir diskutieren jetzt die Patchingfaktoren $\bar{c}$ zu T. Aus den gerade berechneten Formeln erhalten wir insbesondere wegen (4.22) für die Kowurzel $\phi^\vee = H(M)(0,1/2,0)$ die Bilder

$$\begin{aligned} \big(f\circ \mathrm{id}^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z\big)(\phi^\vee) &= \tfrac{1}{2}(b_2+b_3), & \big(f\circ s_4^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z\big)(\phi^\vee) &= -\tfrac{1}{2}(b_2+b_3), \\ \big(f\circ s_1^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z\big)(\phi^\vee) &= \tfrac{1}{2}(b_2-b_3), & \big(f\circ s^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z\big)(\phi^\vee) &= -\tfrac{1}{2}(b_2-b_3), \\ \big(f\circ s_2^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z\big)(\phi^\vee) &= \tfrac{1}{2}(b_2+b_3), & \big(f\circ s^{-2}\circ \mathrm{Ad}Z\big)(\phi^\vee) &= -\tfrac{1}{2}(b_2+b_3), \\ \big(f\circ s_3^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z\big)(\phi^\vee) &= -\tfrac{1}{2}(b_2-b_3), & \big(f\circ s^{-3}\circ \mathrm{Ad}Z\big)(\phi^\vee) &= \tfrac{1}{2}(b_2-b_3). \end{aligned}$$

Wir erinnern daran, daß für ein lineares Funktional h auf $\mathrm{Lie}\,T(\mathbf{C})$, das auf den Kowurzeln Q zu R nicht verschwindet, $Q^+(h)$ definitionsgemäß aus allen den Kowurzeln in Q besteht, auf denen h positiv ist. Da insbesondere $b_2 - b_3$ positiv ist, erhalten wir deshalb

(4.25) Lemma: *Sei $f = b_1 E_4^\wedge + ib_2(E_{13} - E_{31})^\wedge + ib_3(E_{24} - E_{42})^\wedge$ für reelle Zahlen b_2, b_3 mit $0 < b_3 < b_2$ und einer komplexen Zahl b_1 ein normierten Langlandsparameter. Dann gelten*

$$Q^+(f \circ \mathrm{id}^{-1} \circ \mathrm{Ad}Z) = Q^+(f \circ s_1^{-1} \circ \mathrm{Ad}Z) = Q^+(f \circ s_2^{-1} \circ \mathrm{Ad}Z) = Q^+(f \circ s^{-3} \circ \mathrm{Ad}Z) = \{\phi^\vee\},$$
$$Q^+(f \circ s_3^{-1} \circ \mathrm{Ad}Z) = Q^+(f \circ s_4^{-1} \circ \mathrm{Ad}Z) = Q^+(f \circ s^{-1} \circ \mathrm{Ad}Z) = Q^+(f \circ s^{-2} \circ \mathrm{Ad}Z) = \{-\phi^\vee\}.$$

(4.26) Die Patchingfaktoren $\bar{c}$ zu T: Im folgenden wollen wir die möglichen Werte der Patchingfaktoren $\bar{c}$ bestimmen. Da R^+ aus ϕ und Q^+ aus $\phi^\vee$ besteht, gilt wegen $\phi(\phi^\vee) = 2$ zunächst

$$\mathbf{a}(R^+) = \{a\phi^\vee : \phi(a\phi^\vee) > 0\} = \{a\phi^\vee : a > 0\}, \qquad \mathbf{a}(Q^+) = \{a\phi : (a\phi)(\phi^\vee) > 0\} = \{a\phi : a > 0\},$$
$$\mathbf{a}(R^-) = \{a\phi^\vee : (-\phi)(a\phi^\vee) > 0\} = -\mathbf{a}(R^+), \qquad \mathbf{a}(Q^-) = \{a\phi : (a\phi)(-\phi^\vee) > 0\} = -\mathbf{a}(Q^+)$$

gilt für $R^- = \{\phi\}$ und $Q^- = \{-\phi^\vee\}$. Für eine Wurzel α in R sind definitionsgemäß in $R(\alpha)$ alle Wurzeln β in R mit $B_1(H(\alpha), H(\beta)) = 0$ zusammengefaßt. In unserer konkreten Situation ist aber $H(-\phi) = -H(\phi)$. Daher sind $R(\phi)$ und $R(-\phi)$ beide leer. Für jede Kowurzel $\alpha^\vee$ zu einer Wurzel in R besteht analog $Q(\alpha^\vee)$ aus allen zu $\alpha^\vee$ orthogonalen Kowurzeln in Q. Die Bemerkung oben zeigt auch, daß $Q(\phi^\vee)$ und $Q(-\phi^\vee)$ beide leer sind.
Für $Y = \pm\phi^\vee$ und $h = \pm\phi$ verschwindet $\bar{c}(Y, h)$ nach (1.20) nur dann nicht, wenn $h(Y)$ negativ ist. Deshalb gilt a priori $\bar{c}(\phi^\vee, \phi) = \bar{c}(-\phi^\vee, -\phi) = 0$.
Zu berechnen sind daher nur die Werte $\bar{c}(\phi^\vee, -\phi)$ und $\bar{c}(-\phi^\vee, \phi)$. Wir bemerken hierfür zunächst $s(\phi)(-\phi^\vee) = \phi^\vee$. Folglich ist $\bar{c}(s(\phi)(-\phi^\vee), \phi) = \bar{c}(s(-\phi)(-\phi^\vee), \phi) = \bar{c}(\phi^\vee, \phi) = 0$.
Weiter gilt $\phi \circ s(-\phi) = -\phi$. Folglich ist $\bar{c}(s(-\phi).(-\phi^\vee), s(-\phi).\phi) = \bar{c}(\phi^\vee, -\phi)$ Andererseits gilt $\bar{c}(s(-\phi).(-\phi^\vee), s(-\phi).\phi) = \bar{c}(-\phi^\vee, \phi)$ nach (1.19). Deshalb ist $\bar{c}(-\phi^\vee, \phi) = \bar{c}(\phi^\vee, -\phi)$.
Wie oben bemerkt sind $Q(\pm\phi^\vee)$ und $R(\pm\phi)$ beide leer. Nach (1.21) und (1.22) ist daher

$$\bar{c}(-\phi^\vee, \phi) = \bar{c}(-\phi^\vee, \phi) + \bar{c}(s(\phi).(-\phi^\vee), \phi) = 2\bar{c}(\{-\phi^\vee\} \cap Q(\phi^\vee), \{\phi)\} \cap R(\phi)) = 2\bar{c}(\emptyset, \emptyset) = 2.1 = 2.$$

Zusammenfassend haben wir daher sogar gezeigt

(4.27) Lemma: *Ist T für den Levifaktor M von G ein maximaler Torus über $\mathbf{Q}$, sodaß $T(\mathbf{R})$ anisotrop modulo $A_M^\circ(\mathbf{R})$ ist, und sind $\pm\phi$ die reellen Wurzeln von (G,T), dann gelten für die Patchingfaktoren $\bar{c}(Q^+, R^+)$ von T*

$$\bar{c}(\phi^\vee, \phi) = \bar{c}(-\phi^\vee, -\phi) = 0 \qquad \textit{und} \qquad \bar{c}(\phi^\vee, -\phi) = \bar{c}(-\phi^\vee, \phi) = 2.$$

(4.28) Berechnung von $\Phi_M(\gamma, \tau)$ für reguläre Elemente γ: Wir erinnern daran, daß β_3 die einzige positive Wurzel von (M,T) ist, und daher definitionsgemäß

$$\Delta_T^M(H(M)(a,b,c)) = e^{2ic} - e^{-2ic}$$

für alle regulären Elemente $H = H(M)(a,b,c) = aE_4 + b(E_{11} + E_{22} - (E_{33} + E_{44})) + c(E_{12} - E_{21} + E_{34} - E_{43})$ aus $\mathrm{Lie}\,T(\mathbf{R})$ gilt. Weiter sind

$$R^+(H) = \begin{cases} \{\phi\} & b > 0 \\ \{-\phi\} & b < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \epsilon_R(H) = (-1)^{|R^+(H) \cap (-R^+)|} = \begin{cases} 1 & b > 0 \\ -1 & b < 0. \end{cases}$$

Wir haben alle Voraussetzungen, um für z aus $Z(B) = \{\pm 1\}$ nach (1.27) die Charakterformel

$$\frac{\epsilon_R(H)}{\Delta_T^M(H)} g(z) \sum\nolimits_{t \in W(G,B)} \epsilon(t) \bar{c}(Q^+(f \circ t^{-1} \circ \mathrm{Ad}Z), R^+(H)) \exp\left((f \circ t^{-1} \circ \mathrm{Ad}Z)(H)\right)$$

für $\Phi_M(z.\exp H, \tau)$ zu berechnen. Wir unterscheiden dabei die Fälle $b > 0$ und $b < 0$.

(4.28.1) Der Fall $b > 0$: Sei zunächst $b > 0$. In diesem Fall ist $R^+(H) = \{\phi\}$ und $\epsilon_R(H) = 1$. Deshalb läuft die Summe über t in $W(G,B)$ mit $Q^+(f \circ t^{-1} \circ \mathrm{Ad} Z) = \{-\phi^\vee\}$, also über s_3, s_4, s und s^2. Nach (3.13) ist $\det(s_3) = \det(s_4) = -1$ und $\det(s) = \det(s^2) = 1$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{t \in W(G,B)} \epsilon(t) \bar{c}\big(Q^+(f \circ t^{-1} \circ \mathrm{Ad} Z), R^+(H)\big) \exp\left((f \circ t^{-1} \circ \mathrm{Ad} Z)(H)\right) \\
&\quad = 2\Big[\exp\left(b_1 a - b(b_2 - b_3) + ci(b_2 + b_3)\right) + \exp\left(b_1 a - b(b_2 + b_3) - ci(b_2 - b_3)\right) \\
&\qquad\qquad - \exp\left(b_1 a - b(b_2 - b_3) - ci(b_2 + b_3)\right) - \exp\left(b_1 a - b(b_2 + b_3) + ci(b_2 - b_3)\right)\Big] \\
&\quad = 2 \exp\left(b_1 a\right) \Big(\exp\left(-b(b_2 - b_3)\right) \left[\exp\left(ic(b_2 + b_3)\right) - \exp\left(-ic(b_2 + b_3)\right)\right] \\
&\qquad\qquad - \exp\left(-b(b_2 + b_3)\right) \left[\exp\left(ic(b_2 - b_3)\right) - \exp\left(-ic(b_2 - b_3)\right)\right]\Big).
\end{aligned}$$

Im Fall $b > 0$ ist also

$$\begin{aligned}
\Phi_M(z.\exp H, \tau) &= \frac{2g(z) \exp\left(b_1 a\right)}{\exp\left(2ic\right) - \exp\left(-2ic\right)} \\
&\quad \times \Big(\exp\left(-b(b_2 - b_3)\right) \left[\exp\left(ic(b_2 + b_3)\right) - \exp\left(-ic(b_2 + b_3)\right)\right] \\
&\qquad - \exp\left(-b(b_2 + b_3)\right) \left[\exp\left(ic(b_2 - b_3)\right) - \exp\left(-ic(b_2 - b_3)\right)\right]\Big).
\end{aligned}$$

(4.28.2) Der Fall $b < 0$: Sei jetzt $b < 0$. In diesem Fall ist $R^+(H) = \{-\phi\}$ und $\epsilon_R(H) = -1$. Deshalb läuft die Summe über t in $W(G,B)$ mit $Q^+(f \circ t^{-1} \circ \mathrm{Ad} Z) = \{\phi^\vee\}$, also über id, s_1, s_2 und s^3. Nach (3.13) ist $\det(s_1) = \det(s_2) = -1$ und $\det(\mathrm{id}) = \det(s^3) = 1$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{t \in W(G,B)} \epsilon(t) \bar{c}\big(Q^+(f \circ t^{-1} \circ \mathrm{Ad} Z), R^+(H)\big) \exp\left((f \circ t^{-1} \circ \mathrm{Ad} Z)(H)\right) \\
&\quad = 2\Big[\exp\left(b_1 a + b(b_2 + b_3) + ci(b_2 - b_3)\right) + \exp\left(b_1 a + b(b_2 - b_3) - ci(b_2 + b_3)\right) \\
&\qquad\qquad - \exp\left(b_1 a + b(b_2 - b_3) + ci(b_2 + b_3)\right) - \exp\left(b_1 a + b(b_2 + b_3) - ci(b_2 - b_3)\right)\Big] \\
&\quad = 2 \exp\left(b_1 a\right) \Big(\exp\left(b(b_2 + b_3)\right) \left[\exp\left(ic(b_2 - b_3)\right) - \exp\left(-ic(b_2 - b_3)\right)\right] \\
&\qquad\qquad - \exp\left(b(b_2 - b_3)\right) \left[\exp\left(ic(b_2 + b_3)\right) - \exp\left(-ic(b_2 + b_3)\right)\right]\Big).
\end{aligned}$$

Im Fall $b < 0$ ist also

$$\begin{aligned}
\Phi_M(z.\exp H, \tau) &= -\frac{2g(z) \exp\left(b_1 a\right)}{\exp\left(2ic\right) - \exp\left(-2ic\right)} \\
&\quad \times (-1) \Big(\exp\left(b(b_2 - b_3)\right) \left[\exp\left(ic(b_2 + b_3)\right) - \exp\left(-ic(b_2 + b_3)\right)\right] \\
&\qquad - \exp\left(b(b_2 + b_3)\right) \left[\exp\left(ic(b_2 - b_3)\right) - \exp\left(-ic(b_2 - b_3)\right)\right]\Big).
\end{aligned}$$

In beiden Fällen hängt Φ_M nach Konstruktion nur vom Betrag von c ab. Weiter ist $-|b| = b$ für $b < 0$ und $-|b| = -b$ für $b > 0$. Daher ist

$$\begin{aligned}
&\Phi_M(z.\exp H, \tau) \\
&= 2g(z) \exp\left(b_1 a\right) \frac{e^{-|b|(b_2 - b_3)}\left(e^{i|c|(b_2+b_3)} - e^{-i|c|(b_2+b_3)}\right) - e^{-|b|(b_2+b_3)}\left(e^{i|c|(b_2-b_3)} - e^{-i|c|(b_2-b_3)}\right)}{e^{2i|c|} - e^{-2i|c|}}
\end{aligned}$$

für alle regulären Elemente H in $\mathrm{Lie}\, T(\mathbf{R})$, also allen Elementen, in denen b und c beide von Null verschieden sind.

(4.29) Berechnung von $\Phi_M(\gamma, \tau)$ für singuläre Elemente γ: Wir untersuchen die Limiten der Abbildung ϕ_M für c und b gegen Null. Zuerst ist für alle c ungleich Null

$$\Phi_M(z.\exp H(a,0,c), \tau) = 2g(z) \exp\left(b_1 a\right) \frac{\left(e^{i|c|(b_2+b_3)} - e^{-i|c|(b_2+b_3)}\right) - \left(e^{i|c|(b_2-b_3)} - e^{-i|c|(b_2-b_3)}\right)}{e^{2i|c|} - e^{-2i|c|}}.$$

Nach Lemma (3.25) ist für positive reelle Zahlen B, C weiter

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(iBx) - \exp(-iBx)}{\exp(iCx) - \exp(-iCx)} = \frac{B}{C}.$$

Für alle reellen Zahlen a, b ist deshalb

$$\Phi_M(z.\exp H(a,b,0),\tau) = g(z)\exp\left(b_1 a\right)\left((b_2+b_3)e^{-|b|(b_2-b_3)} - (b_2-b_3)e^{-|b|(b_2+b_3)}\right).$$

(4.30) In einem letzten Schritt wollen wir die oben berechneten Charakterformeln in invarianter Form schreiben. Dazu sei

$$s = \exp H(M)(a,b,c) = \operatorname{diag}\left(\exp(a+b)\begin{pmatrix}\cos c & \sin c\\ -\sin c & \cos c\end{pmatrix}, \exp(a-b)\begin{pmatrix}\cos c & \sin c\\ -\sin c & \cos c\end{pmatrix}\right)$$

in der Notation von (4.10) mit reellen Zahlen a, b und c. Seien λ, μ und α, β die beiden Paare konjugiert komplexer Eigenwerte von s. Dann ist a eindeutig durch die Gleichung $\lambda\mu\alpha\beta = \exp(4a)$ festgelegt.
Wir nehmen an, daß λ, μ die Eigenwerte $\exp(a+b)(\cos c \pm i\sin c)$ der ersten Matrix auf der Diagonalen von s sind. Als Konsequenz sind α, β die Eigenwerte $\exp(a-b)(\cos c \pm i \sin c)$ der zweiten Matrix. Wir rechnen $\lambda\mu(\alpha\beta)^{-1} = \exp(4b)$. Vertauscht man die Rollen von $\{\lambda,\mu\}$ und $\{\alpha,\beta\}$, erhält man $\exp(4(-b))$ als Quotienten.
Wir haben weiter $\lambda+\mu = 2\exp(a+b)\cos c$ und $|\lambda-\mu| = 2\exp(a+b)\sin|c|$. Wegen $\exp(a+b) = \sqrt{\lambda\mu}$ folgt $\cos c = (\lambda+\mu)/2\sqrt{\lambda\mu}$ und $\sin|c| = |\lambda-\mu|/2\sqrt{\lambda\mu}$. Diese Ausdrücke bleiben als ganzes unverändet, wenn man die Rollen von $\{\lambda,\mu\}$ und $\{\alpha,\beta\}$ vertauscht. Beachtet man $\exp(ix) = \cos x + i\sin x$ und $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, erhält man somit zusammenfassend den abschließenden

(4.31) Satz: *Sei $T = B(L(\alpha))$ ein modulo dem Zentrum von $L(\alpha)$ maximal anisotroper $\mathbf{Q}$-Torus in $L(\alpha)$. Sei (g,f) ein normierter Langlandsparameter für die Darstellung τ und gelte $f = b_1E_4^\wedge + ib_2(E_{13}-E_{31})^\wedge + ib_3(E_{24}-E_{42})^\wedge$ für reelle Zahlen b_2, b_3 mit $0 < b_3 < b_2$ und einer komplexen Zahl b_1. Seien H aus $\operatorname{Lie}T(\mathbf{R})$ und z aus $Z(B) = \{\pm 1\}$. Seien λ, μ und α, β die beiden Paare konjugiert komplexer Eigenwerte von $\exp H$, so daß*

$$z\cdot\exp H \sim z\cdot\operatorname{diag}(\lambda,\mu,\alpha,b)$$

über den komplexen Zahlen gilt. Seien weiter a, b und c die reellen Zahlen

$$\exp(4a) = \lambda\mu\alpha\beta, \qquad b = \frac{1}{4}\cdot\left|\log\left(\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta}\right)\right|,$$

$$c = \arccos\left(\frac{\lambda+\mu}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right) = \arcsin\left(\frac{|\lambda-\mu|}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right) = \arccos\left(\frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}}\right) = \arcsin\left(\frac{|\alpha-\beta|}{2\sqrt{\alpha\beta}}\right).$$

Dann ist speziell $\exp a$ der Anteil von $\exp H$ aus der Zusammenhangskomponente des Zentrums von $GSp(4)(\mathbf{R})$. Ist H regulär in $GSp(4)$, sind also b und c von Null verschieden, dann gilt

$$\Phi_{L(\alpha)}(z\cdot\exp H,\tau) = (2\sqrt{\lambda\mu})^2\cdot g(z)\exp\left(b_1 a\right)\cdot\frac{e^{(b_3-b_2)b}\sin\left((b_2+b_3)c\right) - e^{-(b_2+b_3)b}\sin\left((b_2-b_3)c\right)}{|\lambda+\mu|\cdot|\lambda-\mu|}.$$

Sei H singulär in $GSp(4)$, gelte also $bc = 0$. Dann ist

$$\Phi_{L(\alpha)}(z\cdot\exp H,\tau) = g(z)\exp\left(b_1 a\right)\cdot\left((b_2+b_3)e^{-(b_2-b_3)b} - (b_2-b_3)e^{-(b_2+b_3)b}\right)$$

im Fall $c = 0$.

Kapitel 5 Der Faktor $\Phi_{L(\beta)}(\gamma,\tau)$

Ziel dieses Abschnittes ist es für den Levifaktor $M = L(\beta)$ eine Formel für $\Phi_{L(\beta)}(\gamma,\tau)$ anzugeben. Sei zunächst daran erinnert, daß für jeden kommutativen Ring R die R–wertigen Punkte von $L(\beta)$ gegeben sind duch

$$(5.1)\qquad L(\beta)(R) = \left\{ \begin{pmatrix} Dx^{-1} & & & \\ & a & & b \\ & & x & \\ & c & & d \end{pmatrix} : \begin{matrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ in } GL(2,R) \text{ mit } D = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ x \text{ in } GL(1,R) \end{matrix} \right\}.$$

Der Torus A_M ist identisch mit dem Zentrum von M. Seine R–wertigen Punkte sind gegeben durch

$$(5.2)\qquad A_M(R) = \{\operatorname{diag}(a^2x^{-1}, a, x, a) : a, x \text{ in} GL(1,R)\}$$

Insbesondere besteht damit die Zusammenhangskomponente $A_M^\circ(\mathbf{R})$ der reellwertigen Punkte von A_M aus allen Matrizen $\operatorname{diag}(a^2x^{-1}, a, x, a)$ mit a und x positiven reellen Zahlen. Folglich ist

$$(5.3)\qquad \dim(A_G \backslash A_M) = 1.$$

Sei schließlich $T = B(M)$ ein über den rationalen Zahlen definierter maximaler Torus in M, dessen reellwertigen Punkte gegeben sind durch

$$(5.4)\qquad T(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a^2x^{-1} & & & \\ & ab & & ac \\ & & x & \\ & -ca & & ba \end{pmatrix} : \begin{matrix} a, x \text{ in } GL(1,\mathbf{R}) \\ b^2 + c^2 = 1 \end{matrix} \right\} \cong (\mathbf{R}^* SO(2,\mathbf{R})) \times \mathbf{R}$$

und für den $T = (T \cap B)A_M$ gilt. Wir berechnen zunächst wieder die Liealgebren von M und T.

(5.5) Berechnung von Lie M: Wir notieren hierfür zuerst, daß

$$(a+\epsilon b)^{-1} = a^{-1} + \epsilon(-ba^{-2}) \text{ und } \det\begin{pmatrix} 1+\epsilon a & \epsilon b \\ \epsilon c & 1+\epsilon(d-a) \end{pmatrix} = 1 + \epsilon d$$

in der Algebra der dualen Zahlen über den komplexen Zahlen gelten. Um die Liealgebra von M zu berechnen, ist das durch

$$\begin{pmatrix} 1+\epsilon a_1 & \epsilon a_2 & \epsilon b_1 & \epsilon b_2 \\ \epsilon a_3 & 1+\epsilon a_4 & \epsilon b_2 & \epsilon b_4 \\ \epsilon c_1 & \epsilon c_2 & 1+\epsilon(d-a_1) & -\epsilon a_3 \\ \epsilon c_2 & \epsilon c_4 & -\epsilon a_2 & 1+\epsilon(d-a_4) \end{pmatrix} = E_4 + \epsilon \begin{pmatrix} A & B \\ C & dE_2 - {}^tA \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \det(\cdot)(x+\epsilon y)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1+\epsilon B_1 & 0 & A_2+\epsilon B_2 \\ 0 & 0 & x+\epsilon y & 0 \\ 0 & A_3+\epsilon B_3 & 0 & A_4+\epsilon B_4 \end{pmatrix}$$

gegebene Gleichungssystem zu lösen. Dabei sind notwendigerweise $a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = A_2 = A_3 = 0$, $A_1 = A_4 = 1$, $a_4 = B_1$, $B_2 = b_4$, $B_3 = c_4$, $x = 1$. Insbesondere ist daher

$$(x+\epsilon y)^{-1} \det\begin{pmatrix} A_1+\epsilon B_1 & A_2+\epsilon B_2 \\ A_3+\epsilon B_3 & A_4+\epsilon B_4 \end{pmatrix}$$
$$= (x+\epsilon y)^{-1} \det\begin{pmatrix} 1+\epsilon a_4 & \epsilon b_4 \\ \epsilon c_4 & 1+\epsilon(d-a_4) \end{pmatrix} = (1+\epsilon d)(1-\epsilon y) = 1 + \epsilon(d-y).$$

Somit ist $1+\epsilon(d-y) = 1+\epsilon a_1$, also $d-y = a_1$. Weiter erhalten wir $y = d-a_1$ aus $1+\epsilon(d-a_1) = x+\epsilon y$ und $d - a_4 = B_4$. Folglich besteht Lie $M(E)$ für den Körper E der komplexen oder reellen Zahlen aus allen Matrizen der Form

$$(5.6)\qquad \begin{pmatrix} A & B \\ C & dE_2 - {}^tA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & d-y & 0 \\ 0 & c & 0 & d-a \end{pmatrix} \qquad \text{mit Elementen } y, a, b, c, d \text{ in } E$$

(5.7) Berechnung von Lie T: Weiter notieren wir, daß

$$\det \begin{pmatrix} a+\epsilon a' & b+\epsilon b' \\ c+\epsilon c' & d+\epsilon d' \end{pmatrix} = (a^2+b^2) + 2\epsilon(aa'+bb')$$

genau dann Eins ist, wenn $a^2 + b^2 = 1$ und $aa' + bb' = 0$ gelten. Um die Liealgebra von T zu bestimmen ist das durch

$$\begin{pmatrix} 1+\epsilon a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\epsilon a_4 & 0 & \epsilon b_4 \\ 0 & 0 & 1+\epsilon(d-a_1) & 0 \\ 0 & \epsilon c_4 & 0 & 1+\epsilon(d-a_4) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (a+\epsilon b)^2(x+\epsilon y)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a+\epsilon b)(z+\epsilon z') & 0 & (a+\epsilon b)(w+\epsilon w') \\ 0 & 0 & x+\epsilon y & 0 \\ 0 & -(a+\epsilon b)(w+\epsilon w') & 0 & (a+\epsilon b)(z+\epsilon z') \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (a^2+\epsilon(2ab))(x^{-1}+\epsilon(-yx^{-2})) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & az+\epsilon(az'+bz) & 0 & aw+\epsilon(aw'+bw) \\ 0 & 0 & x+\epsilon y & 0 \\ 0 & -(aw+\epsilon(aw'+bw)) & 0 & az+\epsilon(az'+bz) \end{pmatrix}$$

gegebene Gleichungssystem zu lösen. So folgt $az = 1$ und $a_4 = az'+bz$. Aus $\epsilon b_4 = aw+\epsilon(aw'+bw)$ folgt $w = 0$ und $b_4 = aw'$. Aus $\epsilon c_4 = -(aw + \epsilon(aw' + bw))$ folgt $c_4 = -aw' = -b_4$ Wegen $1 + \epsilon(d - a_4) = az + \epsilon(az' + bz)$ ist $a_4 = d - (az' + ba^{-1})$. Wegen $1 + \epsilon(d - a_1) = x + \epsilon y$ ist $x = 1$ und $y = d - a_1$. Subtrahiert man die zwei Ausdrücke für a_4, erhält man $d = 2(az' + ba^{-1})$. Weiter ist $1 + \epsilon a_1 = (a^2 + \epsilon(2ab))(x^{-1} + \epsilon(-yx^{-2}) = (a^2 + \epsilon(2ab))(1 - \epsilon y) = a^2 + \epsilon(-a^2y + 2ab)$. Somit ist $a = \pm 1$ und $a_1 = 2ab - y$. Wegen $a_1 = d - y = 2ab - y + 2az'$ ist $z' = 0$. Wir rechnen

$$\begin{pmatrix} z+\epsilon z' & w+\epsilon w' \\ -(w+\epsilon w') & z+\epsilon z' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & \epsilon w' \\ -\epsilon w' & a \end{pmatrix} = a^2 = 1.$$

Die Liealgebra von T über E besteht deshalb aus allen Matrizen

$$(5.8)\qquad H = H(M)(a,b,c) = aE_4 + (a-b)(E_{11} - E_{33}) + c(E_{24} - E_{42}) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & c \\ 0 & 0 & 2b-a & 0 \\ 0 & -c & 0 & b \end{pmatrix}.$$

mit a, b, c in E.

(5.9) Rechnungen in Lie M: Der Schnitt $(K_0 \cap M)(\mathbf{R})$ hat den Vektor $E_{24} - E_{42}$ als Basisvektor seiner Liealgebra. Die Liealgebra von $A_M^\circ(\mathbf{R})$ hat $E_{11} - E_{33}$ und $E_{22} + 2E_{33} + E_{44}$ als Basisvektoren. Der Quotient der Liealgebra von M nach dem von diesen Teilalgebren erzeugten Unterraum ist daher zweidimensional. Folglich gilt

$$(5.10)\qquad q(L(\beta)) = \frac{1}{2}\dim\big(L(\beta)/(K_0 \cap L(\beta)(\mathbf{R})A_M^\circ(\mathbf{R})\big) = 1.$$

Wir wollen in einem nächsten Schritt $\exp H(a,b,c)$ für komplexe Zahlen a, b, c berechnen. Jetzt liegt bE_4 im Zentrum von $M(4, \mathbf{C})$ und weiter ist $(E_{11} - E_{33}).(E_{24} - E_{42}) = 0$. Daher ist

$\exp H(a,b,c) = \exp\ b.\exp(a-b)(E_{11}-E_{33}).\exp\ c(E_{24}-E_{42})$. Folglich reicht es die beiden letzten Exponentialausdrücke zu berechnen. Induktiv gelten hierfür zunächst

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}^{2k} = (-1)^k \begin{pmatrix} x^{2k} & 0 \\ 0 & x^{2k} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & x^{2k+1} \\ -x^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

für alle nichtnegativen ganzen Zahlen k und jede komplexe Zahl x. Deshalb ist speziell

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Für alle komplexen Zahlen a, b, d erhalten wir daher

$$\begin{aligned} \exp\big(H(M)(a,b,d)\big) &= \exp\big(bE_4 + (a-b)(E_{11}-E_{33}) + c(E_{24}-E_{42})\big) \\ &= \exp(b) \begin{pmatrix} \exp(a-b) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(c) & 0 & \sin(c) \\ 0 & 0 & \exp(b-a) & 0 \\ 0 & -\sin(c) & 0 & \cos(c) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

(5.12) Berechnung von $\mathrm{ad}\,H(M)(a,b,c)$**:** In einem nächsten Schritt berechnen wir die adjungierte Darstellung von $\mathrm{Lie}\,T$ auf $\mathrm{Lie}\,G$ und ihre Wurzeln. Hierfür notieren wir allgemein

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}H(M)(a,b,c) & \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_3 & a_4 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & d-a_1 & -a_3 \\ c_2 & c_4 & -a_2 & d-a_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & cb_2 + a_2(a-b) & 2b_1(a-b) & b_2(a-b) - ca_2 \\ a_3(b-a) + cc_2 & c(b_4+c_4) & b_2(a-b) - ca_2 & (d-2a_4)c \\ 2c_1(b-a) & c_2(b-a) - a_3c & 0 & a_3(a-b) - cc_2 \\ (b-a)c_2 - ca_3 & -c(2a_4+d) & a_2(b-a) - cb_2 & -c(b_4+c_4) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für $H = H(M)(a,b,c)$ gelten somit

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}H(E_{11}-E_{33}) &= \mathrm{ad}H(E_{22}+2E_{33}+E_{44}) = \mathrm{ad}H(E_{24}-E_{42}) = 0, \\ \mathrm{ad}H(E_{12}-E_{43}) &= (a-b)(E_{12}-E_{43}) - c(E_{14}+E_{23}), \\ \mathrm{ad}H(E_{14}+E_{23}) &= c(E_{12}-E_{43}) + (a-b)(E_{14}+E_{23}), \\ \mathrm{ad}H(E_{32}+E_{41}) &= (b-a)(E_{32}+E_{41}) + c(E_{21}-E_{34}), \\ \mathrm{ad}H(E_{21}-E_{34}) &= (-c)(E_{32}+E_{41}) + (b-a)(E_{21}-E_{34}), \\ \mathrm{ad}H(E_{33}+E_{44}) &= c(E_{24}-E_{42}) + (2c)E_{42}, \\ \mathrm{ad}H(E_{42}) &= c(E_{22}+2E_{33}+E_{44}) + (-2c)(E_{33}+E_{44}), \\ \mathrm{ad}H(E_{13}) &= 2(a-b)E_{13}, \\ \mathrm{ad}H(E_{31}) &= (-2(a-b))E_{31}. \end{aligned}$$

Bezüglich der so angeordneten Basis von $\mathrm{Lie}\,G$ hat $\mathrm{ad}H$ die Matrizendarstellung

$$\mathrm{ad}H(M)(a,b,c) = \begin{pmatrix} 0&0&0&&&&&0&0&& \\ 0&0&0&&&&&0&c&& \\ 0&0&0&&&&&c&0&& \\ &&&a-b&c&&&&&& \\ &&&-c&a-b&&&&&& \\ &&&&&b-a&-c&&&& \\ &&&&&c&b-a&&&& \\ &&&&&&&0&-2c&& \\ &&&&&&&2c&0&& \\ &&&&&&&&&2(a-b)&0 \\ &&&&&&&&&0&2(b-a) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Das charakteristische Polynom von $\mathrm{ad}H(a,b,c)$ ist daher

$$\begin{aligned}
&\det(X - \mathrm{ad}H(a,b,c)) \\
(2) \qquad &= X^2\big(X-((a-b)+ic)\big)\big(X-((a-b)-ic)\big)\big(X-(-(a-b)+ic)\big) \\
&\quad \big(X-(-(a-b)-ic)\big)\big(X-2ic\big)\big(X+2ic\big)\big(X-2(a-b)\big)\big(X+2(a-b)\big).
\end{aligned}$$

Die Vektoren $E_{11}-E_{33}$, $E_{22}+2E_{33}+E_{44}$, $E_{24}-E_{42}$, $E_{33}+E_{44}$ und E_{42} bilden eine Basis der Liealgebra von M. Bezüglich derer hat $\mathrm{ad}H(a,b,c)$ die Matrizendarstellung

$$(3) \qquad \mathrm{ad}H(a,b,c) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&c \\ 0&0&0&c&0 \\ &&&0&-2c \\ &&&2c&0 \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$(4) \qquad \det(X - \mathrm{ad}H(a,b,c)|\mathrm{Lie}\,M) = X^3(X-2ic)(X+2ic).$$

Die Wurzeln von (G, A_M) erhält man, indem man in den Rechnungen oben $c=0$ setzt. Für $H = \mathrm{ad}H(a,b,0)$ aus $\mathrm{Lie}\,A_M(\mathbf{C})$ ist genauer

$$(5) \qquad \begin{aligned}
\mathrm{ad}H(E_{13}) &= 2(a-b)E_{13}, & \mathrm{ad}H(E_{31}) &= -2(a-b)E_{31}, \\
\mathrm{ad}H(E_{14}+E_{23}) &= (a-b)(E_{14}+E_{23}), & \mathrm{ad}H(E_{12}-E_{43}) &= (a-b)(E_{12}-E_{43}) \;, \\
\mathrm{ad}H(E_{21}-E_{34}) &= -(a-b)(E_{21}-E_{34}), & \mathrm{ad}H(E_{32}+E_{41}) &= -(a-b)(E_{32}+E_{41}).
\end{aligned}$$

Alle anderen Basiselemente von $\mathrm{Lie}\,G(\mathbf{C})$ liegen im Kern von $\mathrm{ad}H$.

(5.13) Positive Wurzeln: Als positive Wurzel von $\mathrm{Lie}\,A_M(\mathbf{C})$ wählen wir die für alle komplexen Zahlen a, b durch

$$(1) \qquad \phi(H(M)(a,b,0)) = 2(a-b) \quad \text{und} \quad \chi(H(M)(a,b,0)) = a-b$$

gegebenen Abbildungen. Als positive Wurzeln von $\mathrm{Lie}\,T(\mathbf{C})$ wählen wir die für alle komplexen Zahlen a, b, c durch

$$(2) \qquad \begin{aligned}
\beta_1(H(M)(x,a,b)) &= (a-b)+ic, & \beta_3(H(M)(x,a,b)) &= 2ic, \\
\beta_2(H(M)(x,a,b)) &= (a-b)-ic, & \phi(H(M)(x,a,b)) &= 2(a-b)
\end{aligned}$$

gegebenen Abbildungen. Die beiden Ordnungen sind dann kompatibel. Die reellen Wurzeln von T sind

$$(5.14) \qquad R = R(T) = \{\pm\phi\} \quad \text{und} \quad R^+ = \{\phi\}$$

ist die positive reelle Wurzel von T. Für reelle Zahlen a, b, c ist $H(a,b,c)$ genau dann regulär in G, wenn $a-b$ und c von Null verschieden sind. Wir erhalten damit das

(5.15) Lemma: *Für reelle Zahlen a, b, c ist*

$$H = H(M)(a,b,c) = a(E_{11}-E_{33}) + b(E_{22}+2E_{33}+E_{44}) + c(E_{24}-E_{42})$$

genau dann regulär in G, wenn $a-b$ und c beide von Null verschieden sind. In diesem Fall ist

$$R^+(H) = \{\alpha \in R : \alpha(H) > 0\} = \begin{cases} \{\phi\} & a > b \\ \{-\phi\} & a < b \end{cases}$$

und

$$\epsilon_R(H) = (-1)^{|R^+(H)\cap(-R^+)|} = \begin{cases} 1 & a > b \\ -1 & a < b. \end{cases}$$

(5.16) Die Kowurzeln und Spiegelungen zu den positiven Wurzeln: Wir berechnen weiter die Kowurzeln zu den positven Wurzeln von (G,T). Auf $\mathrm{Lie}\,T(\mathbf{C})$ definieren wir für alle komplexen Zahlen a,b,c,a',b',c' durch

$$\begin{aligned}B_1\big(H(a,b,c),\ H(a',b',c')\big) &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(H(a,b,c),\ H(a',b',c')\big)\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(\mathrm{diag}(aa',bb'-cc',(2b-a)(2b'-a'),bb'-cc')\big) = aa'+3bb'-cc'-ba'-b'a\end{aligned}$$

eine Bilinearform, deren Restriktion auf $\mathrm{Lie}\,T$ dort ein inneres Produkt definiert.
Für alle reellen Zahlen a,b,c gilt genau dann $2(a-b)=\phi(H(a,b,c))=aa'+3bb'-cc'-ba'-b'a$, wenn $b'=c'=0$ und $a'=2$ sind. Somit ist $H(\phi)=H(2,0,0)$. Wegen $B_1(H(\phi),H(\phi))=4$ gilt

(1) $$\phi^\vee = \frac{1}{2}H(\phi) = H(1,0,0) = \mathrm{diag}(1,0,-1,0).$$

Insbesondere ist die Spiegelung $s(\phi)$ zu ϕ für alle komplexen Zahlen a,b,c gegeben durch

(2) $$\begin{aligned}s(\phi)(H(a,b,c)) &= s(\phi)(bE_4+(a-b)(E_{11}-E_{33})+c(E_{24}-E_{42}))\\ &= H(a,b,c)-2(a-b)H(1,0,0)\\ &= bE_4-(a-b)(E_{11}-E_{33})+c(E_{24}-E_{42})\\ &= \left(\mathrm{Int}\begin{pmatrix}0&0&1&\\0&\sqrt{-1}&0&\\1&0&0&\\&&&\sqrt{-1}\end{pmatrix}\right)\big(H(a,b,c)\big).\end{aligned}$$

Für alle reellen Zahlen a,b,c gilt genau dann $(a-b)+ic=\beta_1(H(a,b,c))=aa'+3bb'-cc'-ba'-b'a$, wenn $a'=1$, $b'=0$ und $c'=-i$ sind. Somit ist $H(\beta_1)=H(1,0,-i)$. Wegen $B_1(H(\beta_1),H(\beta_1))=1+1=2$ ist

(3) $$\beta_1^\vee = H(1,0,-i) = \begin{pmatrix}1&&&\\&0&&-i\\&&-1&\\&i&&0\end{pmatrix}.$$

Analog ergibt sich

(4) $$\beta_2^\vee = h(\beta_2) = H(1,0,i) = \begin{pmatrix}1&&&\\&0&&i\\&&-1&\\&-i&&0\end{pmatrix}.$$

Für alle reellen Zahlen a,b,c gilt schließlich genau dann $2ic=\beta_3(H(a,b,c))=aa'+3bb'-cc'-ba'-b'a$, wenn $a'=b'=0$ und $c'=-2i$ sind. Somit ist $H(\beta_3)=H(0,0,-2i)$. Wegen $B_1(H(\beta_3),H(\beta_3))=4$ ist

(5) $$\beta_3^\vee = H(0,0,-i).$$

Folglich ist die Spiegelung $s(\beta_3)$ zu β_3 für alle komplexen Zahlen a,b,c gegeben durch

(6) $$\begin{aligned}s(\beta_3)(H(a,b,c)) &= s(\phi)(bE_4+(a-b)(E_{11}-E_{33})+c(E_{24}-E_{42}))\\ &= H(a,b,c)-2ic\,H(0,0,-i)\\ &= bE_4+(a-b)(E_{11}-E_{33})-c(E_{24}-E_{42}) = H(a,b,-c)\\ &= \left(\mathrm{Int}\ \mathrm{diag}\,(\sqrt{-1},-1,\sqrt{-1},1)\right)\big(H(a,b,c)\big).\end{aligned}$$

Die Wurzeln von (M,T) sind $\pm\beta_3$. Deshalb erhalten wir insbesondere das

(5.17) Lemma : *Für den Levifaktor $M=L(\beta)$ ist $W\big(M(\mathbf{R}),T(\mathbf{R})\big)$ trivial. Die zweielementige Gruppe $W\big(M,T\big)$ wird erzeugt von der Spiegelung $s(\beta_3)$ zur Wurzel β_3.*

(5.18) Berechnung von Z mit $\mathrm{Ad}Z(\mathrm{Lie}\,T(\mathbf{C})) = \mathrm{Lie}\,B(\mathbf{C})$: Wir wollen im folgenden ein Element Z aus $GSp(4)$ berechnen mit $\mathrm{Ad}Z(\mathrm{Lie}\,T(\mathbf{C})) = \mathrm{Lie}\,B(\mathbf{C})$. Nach Wahl von T gibt es bereits ein Element mit dieser Eigenschaft im Zentralisator des Schnittes von $\mathrm{Lie}\,T(\mathbf{C}))$ und $\mathrm{Lie}\,B(\mathbf{C})$. Dieser hat die Vektoren E_4 und $E_{24} - E_{42}$ als Basis. Wir behaupten, daß es bereits ein Element Z aus dem Zentralisator von $E_{24} - E_{42}$ in $Sp(4,\mathbf{C})$ mit dieser Eigenschaft gibt. Explizites Rechnen zeigt, daß der Zentralisator in $Sp(4,\mathbf{C})$ von $E_{24} - E_{42}$ aus allen Elementen der Form

$$(1)\qquad Y(a,b,c,d,x,y) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & -y & 0 & -x \end{pmatrix} \qquad \text{mit } ad - bc = y^2 - x^2 = 1$$

besteht. In diesem Fall gilt insbesondere

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & -y & 0 & -x \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & 0 & -b & 0 \\ 0 & -x & 0 & -y \\ -c & 0 & a & 0 \\ 0 & y & 0 & x \end{pmatrix}.$$

Genau dann hat ein solches Element die für Z^{-1} geforderte Eigenschaft, wenn es Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -bw & 0 & aw & 0 \\ 0 & -zy & 0 & xz \\ -dw & 0 & cw & 0 \\ 0 & zx & 0 & -yz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & -y & 0 & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & w & 0 \\ & & 0 & z \\ -w & 0 & & \\ 0 & -z & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & -A & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & -y & 0 & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa & 0 & Ab & 0 \\ 0 & -By & 0 & -Bx \\ -Ac & 0 & -Ad & 0 \\ 0 & -Bx & 0 & -By \end{pmatrix}$$

mit $w,\ z \neq 0$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn zusätzlich zu $1 = ad - bc = y^2 - x^2$ die Bedingungen $Aa = -bw$, $Ac = dw$, $aw = Ab$, $cw = -Ad$ und $zy = -Bx$ erfüllt sind. Wegen der ersten Determinantenbedingung sind aber a oder b ungleich Null und c oder d ungleich Null. Der erste Gleichungssatz zeigt, daß dann a, b, c, d und A alle ungleich Null sind und darüberhinaus $A = -a^{-1}bw = b^{-1}aw = c^{-1}dw = -d^{-1}cw$ gelten. Damit ist $ad = -bc$. Weiter folgt $ab^{-1} = -ba^{-1}$, also $a^2 = -b^2$. Somit ist $a = \epsilon i d$ für $\epsilon = \pm 1$. Analog gilt $c = \gamma i d$ für $\gamma = \pm 1$. Wegen $A = -a^{-1}bw = c^{-1}dw$ ist $\gamma = -\epsilon$ und wir erhalten $c = -\epsilon i d$, $a = \epsilon i b$, $A = \epsilon i w$. Aus der ersten Determinantenbedingung $1 = 2ad = 2\epsilon i b d$ folgt $b = -\epsilon i/2d$ und somit $a = 1/2d$. Sei $y = 0$. Dann ist $x = \pm i$ wegen der zweiten Determinantenbedingung. Wählt man $y = 1$, $d = 1$, $\epsilon = 1$ als Parameter, erhält man $x = 0$, $a = 1/2$, $b = -i/2$, $c = -i$, $B = z$ und $A = iw$.
Für die Inverse $Z = Y(1, i/2, i, 1/2, 0, -1)$ des so konstruierten Elementes $Y(1/2, -i/2, -i, 1, 0, 1)$ gilt folglich

$$(5.19)\qquad \mathrm{Ad}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ i & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iw & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & -iw & 0 \\ 0 & -z & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & w & 0 \\ & & 0 & z \\ -w & 0 & & \\ 0 & -z & & \end{pmatrix}.$$

Speziell folgt mit $H(M)(a,b,c) = bE_4 + (a-b)(E_{11} - E_{33}) + c(E_{24} - E_{42})$ für alle a, b, c in $\mathbf{C}$

$$\mathrm{Ad}Z(H(M)(a,b,c)) = \mathrm{Ad}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ i & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & & & \\ & b & & c \\ & & 2b-a & \\ & -c & & b \end{pmatrix}$$

$$(5.20)\qquad = bE_4 + \begin{pmatrix} & & -i(a-b) & 0 \\ & & 0 & c \\ i(a-b) & 0 & & \\ 0 & -c & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 & -i(a-b) & 0 \\ 0 & b & 0 & c \\ i(a-b) & 0 & b & 0 \\ 0 & -c & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$= H(G)(b, -i(a-b), c).$$

(5.21) Berechnung von $(\mathrm{Ad}Z)(\beta_i^\vee)$**:** Als Bilder unter $\mathrm{Ad}Z$ der Kowurzeln zu den positiven Wurzeln von (G,T) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ad}Z\big(H(M)(1,0,0)\big) &= H(G)(0,-i,0) = (-i)(E_{13}-E_{31}),\\
\mathrm{Ad}Z\big(H(M)(1,0,-i)\big) &= H(G)(0,-i,-i) = (-i)(E_{13}-E_{31}) + (-i)(E_{24}-E_{42}),\\
\mathrm{Ad}Z\big(H(M)(1,0,i)\big) &= H(G)(0,-i,i) = (-i)(E_{13}-E_{31}) + i(E_{24}-E_{42}),\\
\mathrm{Ad}Z\big(H(M)(0,0,-i)\big) &= H(G)(0,0,-i) = (-i)(E_{24}-E_{42}).
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

(5.23) Berechnung von $(f\circ s^{-1}\circ \mathrm{Ad}\,Z)(H(M)(a,b,c))$**:** Sei (g,f) ein normierter Langlandsparameter für die Darstellung τ und gelte $f = b_1E_4^\wedge + ib_2(E_{13}-E_{31})^\wedge + ib_3(E_{24}-E_{42})^\wedge$ für reelle Zahlen b_2,b_3 mit $0<b_3<b_2$ und einer komplexen Zahl b_1. Genau dann ist f positiv auf einem Vektor $ix(E_{13}-E_{31})+iy(E_{24}-E_{42})$ mit reellen Zahlen x,y, wenn $-b_2x-b_3y>0$, also $b_2x+b_3y<0$ gilt. Diese Bedingung ist wegen $0<b_3<b_2$ für alle vier Bilder der Kowurzeln unter $\mathrm{Ad}Z$ erfüllt. Der normierte Langlandsparameter (g,f) bleibt daher unverändert. Für ein reguläres Element

$$H = H(M)(a,b,c) = bE_4 + (a-b)(E_{13}-E_{31}) + c(E_{24}-E_{42})$$

aus $\mathrm{Lie}\,T(\mathbf{R})$ berechnen wir im folgenden für t in $W(G,B)$ die Terme $(f\circ t^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z)(H)$. Dazu übernehmen wir die Bezeichnungen von (3.12). Es gilt $f(H(G)(x,y,z)) = b_1x+ib_2y+ib_3z$ nach Konstruktion. Wir rechnen

$$
\begin{aligned}
(f\circ \mathrm{id}^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z)\big(H(M)(a,b,c)\big) &= f\big(H(G)(b,-i(a-b),c)\big) = b_1b + b_2(a-b) + ib_3c,\\
(f\circ s_1^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z)\big(H(M)(a,b,c)\big) &= f\big(H(G)(b,-i(a-b),-c)\big) = b_1b + b_2(a-b) - ib_3c,\\
(f\circ s_2^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z)\big(H(M)(a,b,c)\big) &= f\big(H(G)(b,c,-i(a-b))\big) = b_1b + ib_2c + b_3(a-b),\\
(f\circ s_3^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z)\big(H(M)(a,b,c)\big) &= f\big(H(G)(b,i(a-b),c)\big) = b_1b - b_2(a-b) + ib_3c,\\
(f\circ s_4^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z)\big(H(M)(a,b,c)\big) &= f\big(H(G)(b,-c,i(a-b))\big) = b_1b - ib_2c - b_3(a-b),\\
(f\circ s^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z)\big(H(M)(a,b,c)\big) &= f\big(H(G)(b,-c,-i(a-b))\big) = b_1b - ib_2c + b_3(a-b),\\
(f\circ s^{-2}\circ \mathrm{Ad}Z)\big(H(M)(a,b,c)\big) &= f\big(H(G)(b,i(a-b),-c)\big) = b_1b - b_2(a-b) - ib_3c,\\
(f\circ s^{-3}\circ \mathrm{Ad}Z)\big(H(M)(a,b,c)\big) &= f\big(H(G)(b,c,i(a-b))\big) = b_1b + ib_2c - b_3(a-b).
\end{aligned}
$$

(5.24) Berechnung von $Q^+(f\circ s^{-1}\circ \mathrm{Ad}\,Z)$**:** Wir diskutieren jetzt die Patchingfaktoren $\bar{c}$ zu T. Aus den gerade berechneten Formeln erhalten wir insbesondere wegen (5.22) für die Kowurzel $\phi^\vee = H(M)(1,0,0)$ die Bilder

$$
\begin{aligned}
&(f\circ \mathrm{id}^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z)(\phi^\vee) = b_2, &&(f\circ s_4^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z)(\phi^\vee) = -b_3,\\
&(f\circ s_1^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z)(\phi^\vee) = b_2, &&(f\circ s^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z)(\phi^\vee) = b_3,\\
&(f\circ s_2^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z)(\phi^\vee) = b_3, &&(f\circ s^{-2}\circ \mathrm{Ad}Z)(\phi^\vee) = -b_2,\\
&(f\circ s_3^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z)(\phi^\vee) = -b_2, &&(f\circ s^{-3}\circ \mathrm{Ad}Z)(\phi^\vee) = -b_3.
\end{aligned}
$$

Wir erinnern daran, daß für ein lineares Funktional h auf $\mathrm{Lie}\,T(\mathbf{C})$, das auf den Kowurzeln Q zu R nicht verschwindet, $Q^+(h)$ definitionsgemäß aus allen den Kowurzeln in Q besteht, auf denen h positiv ist. Da b_2 und b_3 beide positiv sind, erhalten wir deshalb

(5.25) Lemma: *Für den Langlandsparameter* $f = b_1E_4^\wedge + ib_2(E_{13}-E_{31})^\wedge + ib_3(E_{24}-E_{42})^\wedge$ *für reelle Zahlen* b_2,b_3 *mit* $0<b_3<b_2$ *und einer komplexen Zahl* b_1 *gelten*

$$Q^+(f\circ \mathrm{id}^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z) = Q^+(f\circ s_1^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z) = Q^+(f\circ s_2^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z) = Q^+(f\circ s^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z) = \{\phi^\vee\},$$
$$Q^+(f\circ s_3^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z) = Q^+(f\circ s_4^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z) = Q^+(f\circ s^{-2}\circ \mathrm{Ad}Z) = Q^+(f\circ s^{-3}\circ \mathrm{Ad}Z) = \{-\phi^\vee\}.$$

Da $\pm\phi$ die einzigen reellen Wurzeln von (G,T) sind, folgt aus Lemma (4.27) das

(5.26) Lemma: *Für die Patchingfaktoren* $\bar{c}(Q^+,R^+)$ *von* T *gelten*

$$\bar{c}(\phi^\vee,\phi) = \bar{c}(-\phi^\vee,-\phi) = 0 \qquad \textit{und} \qquad \bar{c}(\phi^\vee,-\phi) = \bar{c}(-\phi^\vee,\phi) = 2.$$

(5.27) Berechnung von $\Phi_M(\gamma,\tau)$ für reguläre Elemente γ: Wir erinnern daran, daß β_3 die einzige positive Wurzel von (M,T) ist, und daher definitionsgemäß

$$\Delta_T^M(H(M)(a,b,c)) = e^{2ic} - e^{-2ic}$$

für alle regulären Elemente $H = H(M)(a,b,c) = bE_4 + (a-b)(E_{13}-E_{31}) + c(E_{24}-E_{42})$ aus $\mathrm{Lie}\,T(\mathbf{R})$ gilt. Weiter sind

$$R^+(H) = \begin{cases} \{\phi\} & a>b \\ \{-\phi\} & a<b \end{cases} \quad \text{und} \quad \epsilon_R(H) = (-1)^{|R^+(H)\cap(-R^+)|} = \begin{cases} 1 & a>b \\ -1 & a<b. \end{cases}$$

Schließlich ist $f = b_1 E_4^\wedge + ib_2(E_{13}-E_{31})^\wedge + ib_3(E_{24}-E_{42})^\wedge$ für reelle Zahlen b_2, b_3 mit $0<b_3<b_2$ und einer komplexen Zahl b_1 wie oben Teil des normierten Langlandsparameters (g,f) von τ. Wir haben alle Voraussetzungen, um für z aus $Z(B)=\{\pm 1\}$ die Charakterformel

$$\frac{\epsilon_R(H)}{\Delta_T^M(H)} g(z) \sum\nolimits_{t\in W(G,B)} \epsilon(t)\bar{c}(Q^+(f\circ t^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z), R^+(H)) \exp\left((f\circ t^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z)(H)\right)$$

für $\Phi_M(z.\exp H;\tau)$ zu berechnen. Wir unterscheiden dabei die Fälle $a>b$ und $a<b$.

(5.27.1) Der Fall $a>b$: Sei zunächst $a>b$. In diesem Fall ist $R^+(H)=\{\phi\}$ und $\epsilon_R(H)=1$. Deshalb läuft die Summe über t in $W(G,B)$ mit $Q^+(f\circ t^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z) = \{-\phi^\vee\}$, also über s_3, s_4, s^2 und s^3. Nach (3.13) ist $\det(s_3)=\det(s_4)=-1$ und $\det(s^2)=\det(s^3)=1$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{t\in W(G,B)} \epsilon(t)\bar{c}(Q^+(f\circ t^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z), R^+(H)) \exp\left((f\circ t^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z)(H)\right)\\
&= 2\exp(b_1 b)\Big[\exp(-ib_3c - b_2(a-b)) + \exp(ib_2c - b_3(a-b))\\
&\qquad - \exp(-b_2(a-b)+b_3ic) - \exp(-b_2ic - b_3(a-b))\Big]\\
&= -2\exp(b_1 b)\Big(\exp(-b_2(a-b))\left[\exp(ib_3c) - \exp(-ib_3c)\right]\\
&\qquad - \exp(-b_3(a-b))\left[\exp(ib_2c) - \exp(-ib_2c)\right]\Big).
\end{aligned}$$

Im Fall $a>b$ ist also

$$\begin{aligned}
\Phi_M(z.\exp H,\tau) &= -\frac{2g(z)\exp(b_1a)}{\exp(2ic)-\exp(-2ic)}\\
&\times\Big(\exp(-b_2(a-b))\left[\exp(ib_3c)-\exp(-ib_3c)\right] - \exp(-b_3(a-b))\left[\exp(ib_2c)-\exp(-ib_2c)\right]\Big).
\end{aligned}$$

(5.27.2) Der Fall $a<b$: Für $a<b$ ist $R^+(H)=\{-\phi\}$ und $\epsilon_R(H)=-1$. Deshalb läuft die Summe über t in $W(G,B)$ mit $Q^+(f\circ t^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z)=\{\phi^\vee\}$, also über id, s_1, s_2 und s. Nach (3.13) ist $\det(s_1)=\det(s_2)=-1$ und $\det(\mathrm{id})=\det(s)=1$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{t\in W(G,B)} \epsilon(t)\bar{c}(Q^+(f\circ t^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z), R^+(H)) \exp\left((f\circ t^{-1}\circ \mathrm{Ad}Z)(H)\right)\\
&= 2\exp(b_1 b)\Big[\exp(b_2(a-b)+ib_3c) + \exp(-ib_2c + b_3(a-b))\\
&\qquad - \exp(b_2(a-b) - ib_3c) - \exp(ib_2c + b_3(a-b))\Big]\\
&= 2\exp(b_1 b)\Big(\exp(b_2(a-b))\left[\exp(ib_3c) - \exp(-ib_3c)\right]\\
&\qquad - \exp(b_3(a-b))\left[\exp(ib_2c) - \exp(-ib_3c)\right]\Big).
\end{aligned}$$

Im Fall $a<b$ ist also

$$\begin{aligned}
\Phi_M(z.\exp H,\tau) &= -\frac{2g(z)\exp(b_1b)}{\exp(2ic)-\exp(-2ic)}\\
&\times\Big(\exp(b_2(a-b))\left[\exp(ib_3c)-\exp(-ib_3c)\right] - \exp(b_3(a-b))\left[\exp(ib_2c)-\exp(-ib_2c)\right]\Big).
\end{aligned}$$

In beiden Fällen hängt Φ_M nach Konstruktion nur vom Betrag von c ab. Weiter ist $-|a-b| = a-b$ für $a < b$ und $-|a-b| = -(a-b)$ für $a > b$. Daher ist

$$\Phi_M(z.\exp H, \tau) = 2g(z)\exp\left(b_1 b\right)\frac{e^{-b_3|a-b|}\left(e^{ib_2|c|}-e^{-ib_2|c|}\right)-e^{-b_2|a-b|}\left(e^{ib_3|c|}-e^{-ib_3|c|}\right)}{e^{2i|c|}-e^{-2i|c|}}$$

für alle regulären Elemente H in $\mathrm{Lie}\,T(\mathbf{R})$, also allen Elementen, in denen $a-b$ und c beide von Null verschieden sind.

(5.28) Berechnung von $\Phi_M(\gamma,\tau)$ für singuläre Elemente γ: Wir untersuchen die Limiten der Abbildung Φ_M für c und $a-b$ gegen Null. Klar ist dabei

$$\Phi_M(z.\exp H(a,a,c),\tau) = 2g(z)\exp\left(b_1 a\right)\frac{\left(e^{ib_2|c|}-e^{-ib_2|c|}\right)-\left(e^{ib_3|c|}-e^{-ib_3|c|}\right)}{e^{2i|c|}-e^{-2i|c|}}$$

für alle c ungleich Null. Nach Lemma (3.25) ist für positive reelle Zahlen B, C weiter

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(iBx)-\exp(-iBx)}{\exp(iCx)-\exp(-iCx)} = \frac{B}{C}.$$

Für alle reellen Zahlen a, b ist deshalb

$$\Phi_M(z.\exp H(a,b,0),\tau) = g(z)\exp\left(b_1 b\right)\left(b_2 e^{-b_3|a-b|} - b_3 e^{-b_2|a-b|}\right).$$

(5.29) In einem letzten Schritt wollen wir die oben berechneten Charakterformeln in invarianter Form schreiben. Dazu sei

$$s = \exp H(M)(a,b,c) = \exp b\cdot\left[\begin{pmatrix}\exp(a-b) & 0\\ 0 & \exp(b-a)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cos c & \sin c\\ -\sin c & \cos c\end{pmatrix}\right] = [s_1,\, s_2]$$

in der Notation von (3.20) für reelle Zahlen a, b, c. Sei $y = \exp b$. Seien λ, μ die beiden komplex konjugierten Eigenwerte $y(\cos c \pm i\sin c)$ von s_2. Seien α, β die beiden reellen Eigenwerte $\exp(a)$, $\exp(2b-a)$ von s.
Dann wird b durch die Gleichung $\lambda\mu = y^2 = \exp(2b)$ bestimmt. Der Betrag von c wird durch $\lambda+\mu = 2y\cos c$ und $|\lambda-\mu| = 2y\sin|c|$ festgelegt. Darzustellen bleibt $|a-b|$. Sei zuerst $\alpha = \exp a$ und $\beta = \exp(2b-a)$. Dann gilt $\alpha^{-1}\beta = \exp(2(b-a))$. Für $\alpha = \exp(2b-a)$ und $\beta = \exp a$ ist $\alpha\beta^{-1} = \exp(2(b-a))$. Dies zeigt $|a-b| = |\log(\alpha\beta^{-1})|/2$. Beachtet man $\exp(ix) = \cos x + i\sin x$ und $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$, erhält man somit zusammenfassend den abschließenden

(5.30) Satz: *Sei $T = B(L(\beta))$ ein modulo dem Zentrum von $L(\beta)$ maximal anisotroper* **Q**-*Torus in $L(\beta)$. Sei (g,f) ein normierter Langlandsparameter für die Darstellung τ und gelte $f = b_1E_4^\wedge + ib_2(E_{13}-E_{31})^\wedge + ib_3(E_{24}-E_{42})^\wedge$ für reelle Zahlen b_2, b_3 mit $0 < b_3 < b_2$ und einer komplexen Zahl b_1. Seien H aus $\mathrm{Lie}\,T(\mathbf{R})$ und z aus $Z(B) = \{\pm 1\}$. Seien λ, μ die beiden komplex konjugierten Eigenwerte und α, β die beiden reellen Eigenwerte von $\exp H$, so daß*

$$z\cdot\exp H \sim z\cdot\mathrm{diag}(\alpha,\,\lambda,\,\beta,\,\mu)$$

über den komplexen Zahlen gilt. Seien a, b, c die reellen Zahlen

$$a = \frac{1}{2}\cdot\left|\log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right|,\qquad b = \frac{1}{2}\cdot\log(\lambda\mu),\qquad c = \arccos\left(\frac{\lambda+\mu}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right) = \arcsin\left(\frac{|\lambda-\mu|}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right).$$

Dann ist $\exp b$ der Anteil von $\exp H$ aus der Zusammenhangskomponente des Zentrums von $GSp(4)(\mathbf{R})$ und $\exp(2b)$ ist der Ähnlichkeitsfaktor von $\exp H$.
Ist H regulär in $GSp(4)$, sind also a und c von Null verschieden, dann gilt

$$\Phi_{L(\beta)}(z\cdot\exp H,\tau) = (2\sqrt{\lambda\mu})^2\cdot g(z)\exp\left(b_1 b\right)\cdot\frac{e^{-b_3 a}\sin(b_2 c\,) - e^{-b_2 a}\sin(b_3 c)}{|\lambda-\mu|\cdot|\lambda+\mu|}.$$

Sei H singulär in $GSp(4)$, gelte also $ac = 0$. Dann ist

$$\Phi_{L(\beta)}(z\cdot\exp H,\tau) = g(z)\exp\left(b_1 b\right)\cdot\left(b_2 e^{-b_3 a} - b_3 e^{-b_2 a}\right)$$

im Fall $c = 0$.

Kapitel 6 Die Charakterformeln $\Phi_M(\gamma, \mu)$ im Fall einer eindimensionalen Darstellung

Die irreduzible, endlichdimensionale Darstellung (V, μ) von $G = GSp(4)$ bestimmt den Langlandsparameter (g, f), der eine der Unbekannten in den Charakterformeln $\Phi_M(\cdot, \mu)$ in (3.28), (4.31) und (5.30) ist. Ziel dieses Appendix ist es explizitere Formeln für den Spezialfall bereitzustellen, in dem μ eine eindimensionale Darstellung von G ist. Vor der eigentlichen Berechnung des Langlandsparameters und der $\Phi_M(\cdot, \mu)$ erinnern wir an die zugrundeliegende Situation.

(6.1) Sei $(\overline{G}, \eta)$ eine kompakte reelle Form von $G(\mathbf{C})/A_G(\mathbf{C})$. Seien also $\overline{G}$ eine über den reellen Zahlen definierte reduktive Gruppe und $\eta : \overline{G} \longrightarrow G$ ein über den komplexen Zahlen definierter Isomorphismus, so daß $\eta^\sigma \circ \eta^{-1}$ für alle σ in $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}|\mathbf{R})$ ein innerer Automorphismus von G ist. Wir identifizieren A_G mit der über den reellen Zahlen zerfallenden Komponente des Zentrums von $\overline{G}$. und verlangen, daß der Quotient $Q(\mathbf{R}) = \overline{G}(\mathbf{R})/A_G(\mathbf{R})$ kompakt ist. Bezeichne p die kanonische Projektion von $\overline{G}$ auf Q. Seien $B^* = \eta^{-1}(B)$ und $\overline{B} = (p \circ \eta^{-1})(B)$ mit B dem modulo A_G maximal anisotropen $\mathbf{Q}$–Torus in G aus (3.2). Die Pullbacks der positiven Wurzeln β_1, β_2, β_3, β_4 aus (3.10) unter η bilden ein System positiver Wurzeln von $(\overline{G}, B^*)$. Sie sind trivial auf A_G, induzieren daher ein System positiver Wurzeln von $(Q, \overline{B})$. Nach (3.16) gilt für deren hälftige Summe

(1) $$\overline{\rho} = (2i(E_{13} - E_{31})^\wedge + i(E_{24} - E_{42})^\wedge) \circ \eta$$

in additiver, also logarithmischer Notation. Sei $\eta^*(\mu)$ der Pullback unter η von μ zu einer Darstellung von $\overline{G}$. Der Twist $\overline{\mu}$ von $\eta^*(\mu)$ mit dem Inversen der Restriktion $\xi|A_G$ des zentralen Charakters $\xi \circ \eta$ von $\eta^*(\mu)$ auf $A_G(\mathbf{R})$ ist eine Darstellung der kompakten Gruppe $Q(\mathbf{R})$ mit Höchstgewicht $\Lambda(\overline{\mu})$ und Infinitesimalcharakter $\chi(\overline{\mu})$. Dieser ist gleich dem Differential von $(\xi|A_G)^{-1} \otimes (\xi \circ \eta)$. Nach [**Knapp**, p.225, Example] gilt

(2) $$\chi(\overline{\mu}) = \Lambda(\overline{\mu}) + \overline{\rho}.$$

(6.2) Sei (μ, V) eine irreduzible endlichdimensionale Darstellung von $G = GSp(4)$ mit zentralem Charakter ξ. Wir wollen im folgenden allgemein ihren Langlandsparameter (g, f) bestimmen. Zunächst wird ξ durch seine Werte auf dem Zentrum A_G von G determiniert. Dessen reellen Punkte haben zwei Zusammenhangskomponenten in der reellen Topologie. Dabei besteht die Zusammenhangskomponente der Eins $A_G^\circ(\mathbf{R})$ aus dem Schnitt von $A_G(\mathbf{R})$ mit dem Bild von $\mathrm{Lie}\, B(\mathbf{R})$ unter der Exponentialabbildung. Der Quotient von $A_G(\mathbf{R})$ nach ihr ist $Z(B) = \{\pm 1\}$. Der Quasicharakter g von $Z(B)$ ist daher der durch $g(-1) = \mu(-1)$ festgelegte Charakter.
Wir erinnern, daß das Funktional f auf $\mathrm{Lie}\, B(\mathbf{C})$ durch den Harish–Chandra Isomorphismus bestimmt wird. Genauer besitzt die Restriktion von μ auf die reelle Zusammenhangskomponente der Eins von $G(\mathbf{R})$ einen Infinitesimalcharakter $\chi(\mu)$. Sei ρ die in (3.16) berechnete hälftige Summe der positiven Wurzeln auf (G, B). Nach Konstruktion des Harish–Chandra Isomorphismus γ in [**Knapp**, pp.219ff] gilt $\gamma(H) = H - \rho(H)$ für alle H in $\mathrm{Lie}\, B(\mathbf{C})$. Der Parameter f ist speziell wegen [**Knapp**, p.310, Theorem 9.20] dann eindeutig durch die Vorschriften

(1) $$\chi(\mu) = f - \rho \qquad \text{und} \qquad f(\beta_i^\vee) > 0 \text{ für } i = 1, \ldots, 4$$

bestimmt. Als Basis von $\mathrm{Lie}\, B(\mathbf{C})$ fixieren wir E_4, $E_{13} - E_{31}$, $E_{24} - E_{42}$. Kombiniert man (3.15) und (3.16) folgt dann

(2) $$f = \chi(\mu) + 2i(E_{13} - E_{31})^\wedge + i(E_{24} - E_{42})^\wedge.$$

Dabei ist f eindeutig modulo der Operation der Weylgruppe $W(G, B)$ bestimmt. Wir rigidifizieren f durch die Positivitätsbedingung $f(\beta_i^\vee) > 0$ für alle $i = 1, \ldots 4$. Nach (3.15) ist dies äquivalent zu

(3) $$f = b_1 E_4^\wedge + b_2 i(E_{13} - E_{31})^\wedge + i b_3 (E_{24} - E_{42})^\wedge \qquad \text{mit} \quad 0 < b_3 < b_2.$$

(6.3) Betrachten wir jetzt in den Bezeichnungen von (6.1) die spezielle Situation, in der μ eine eindimensionale Darstellung ist. Dann ist μ trivial auf dem Quotienten B/A_G. Als Differential des trivialen Charakters ist somit der Infinitesimalcharakter von $\overline{\mu}$ identisch Null. Es folgt $\Lambda(\overline{\mu}) = -\overline{\rho}$ aus (6.1)(2).

Wir behaupten, daß das Höchstgewicht $\Lambda(\overline{\mu})$ regulär ist. Zu zeigen ist dafür nur, daß das Funktional ρ aus (3.16) auf allen Kowurzeln zu positiven Wurzeln nicht verschwindet. Dies folgt aber durch explizites Einsetzen der Werte von $\beta_i^\vee$ aus (3.11)(5). Wie in [**ArL2**, p.283] bemerkt, sind breits in dieser Situation die L^2–Spurformeln (1.29) und (1.30) gültig.

(6.4) Sei (ξ, V) eine irreduzible eindimensionale Darstellung von $G = GSp(4)$. Ihre Restriktion auf die reelle Zusammenhangskomponente der Eins von $G(\mathbf{R})$ hat den infinitesimalen Charakter $\chi(\xi)$. Wie in (6.3) bemerkt, ist $\chi(\xi)$ trivial auf der von $E_{13}-E_{31}$, $E_{24}-E_{42}$ erzeugten Liealgebra von $B(\mathbf{R})/A_G(\mathbf{R})$. Er ist also für alle reellen Zahlen x, a, b durch

$$(1)\qquad \exp\big(\chi(\xi)(xE_4 + a(E_{13}-E_{31}) + b(E_{24}-E_{42})\big) = \xi(\exp x) = \exp\big(b_1 \cdot \log|a|\big)$$

mit einer komplexen Zahl b_1 gegeben. Als Quasicharakter auf $A_G(\mathbf{R}) \cong GL(1)(\mathbf{R})$ ist ξ nämlich das Produkt aus einer ganzzahligen Potenz des Signumcharakters und einer komplexen Potenz des reellen Betrages. Wegen (6.2)(2) ist mithin

$$(2)\qquad f = b_1 E_4^\wedge + 2i(E_{13}-E_{31})^\wedge + i(E_{24}-E_{42})^\wedge .$$

Offenbar besitzt f die in (6.2)(3) geforderten Eigenschaften. In unserer bisherigen Notation für den Langlandsparameter f ist damit $b_2 = 2$ und $b_3 = 1$. Wir notieren weiter, daß

$$(3)\qquad \xi(z.\exp H) = g(z)\exp\big(b_1 p_Z(H)\big)$$

für alle Elemente H aus $\operatorname{Lie} G(\mathbf{R})$ und alle z in $Z(B)$ gilt. Dabei bezeichnet p_Z die Projektion der Liealgebra von G auf die von E_4 erzeugte Liealgebra ihres Zentrums. Wir haben jetzt alle Voraussetzungen um die Charakterformeln $\Phi_M(\gamma,\xi)$ zu berechnen.

(6.5) Berechnung von $\Phi_G(\gamma,\xi)$: Wir übernehmen dafür die Bezeichnungen von (3.28). Für alle reellen Zahlen x gilt $\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$. Weiter ist $p_Z(H) = xE_4$ für alle H in $\operatorname{Lie} G(\mathbf{R})$ mit p_Z der Projektion auf die Liealgebra des Zentrums von G. Daher ist $g(z)\exp(b_1 x) = \xi(z\exp H)$. Für z in $Z(B)$ und alle regulären Elemente H aus $\operatorname{Lie} B(\mathbf{R})$ gilt deshalb

$$\begin{aligned}
\Phi_G(z\cdot\exp H,\,\xi) &= \frac{1}{2}\xi(z.\exp H)\cdot\frac{\sin(b_2 b)\sin(b_3 a) - \sin(b_2 a)\sin(b_3 b)}{\sin(a)\cdot\sin b\cdot(\cos a - \cos b)}\\
&= \frac{1}{2}\xi(z.\exp H)\cdot\frac{\sin(2b)\sin(a) - \sin(2a)\sin(b)}{\sin(a)\cdot\sin b\cdot(\cos a - \cos b)}\\
&= \frac{1}{2}\xi(z.\exp H)\cdot\frac{2\sin(b)\cos(b)\sin(a) - 2\sin(a)\cos(a)\sin(b)}{\sin(a)\cdot\sin b\cdot(\cos a - \cos b)} = -\xi(z.\exp H).
\end{aligned}$$

Wir überlassen es dem Leser, sich davon zu überzeugen, daß die in (3.28) angegebenen Formeln für singuläre Elemente H sich ebenfalls zu $-\xi(z.\exp H)$ vereinfachen.

(6.6) Berechnung von $\Phi_{L(\alpha)}(\gamma,\xi)$: Wir übernehmen dafür die Bezeichnungen von (4.31). Für alle reellen Zahlen x gilt $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3(x)$. Weiter ist $p_Z(H) = aE_4$ für alle H in $\operatorname{Lie} T(\mathbf{R})$ mit p_Z der Projektion auf die Liealgebra des Zentrums von $G(\mathbf{R})$. Speziell gilt somit $g(z)\exp(b_1 a) = \xi(z.\exp H)$. Für alle z in $Z(B)$ und alle regulären Elemente H aus $\operatorname{Lie} T(\mathbf{R})$ gilt deshalb

$$\begin{aligned}
\Phi_{L(\alpha)}(z\cdot\exp H,\xi) &= \xi(z.\exp H)\cdot\frac{e^{(b_3-b_2)b}\sin\big((b_2+b_3)c\big) - e^{-(b_2+b_3)b}\sin\big((b_2-b_3)c\big)}{\sin c\cdot\cos c}\\
&= \xi(z.\exp H)\cdot e^{-2b}\cdot\frac{e^b\sin(3c) - e^{-b}\sin(c)}{\sin c\cdot\cos c}\\
&= \xi(z.\exp H)\cdot e^{-2b}\cdot\frac{e^b\big(3-4\sin^2 c\big) - e^{-b}}{\cos c}\\
&= \xi(z.\exp H)\cdot e^{-b}\cdot\frac{\big(3-e^{-2b}\big) - 4\sin^2 c}{\cos c} = \xi(z.\exp H)\cdot\frac{2e^{-b}}{\sqrt{\lambda\mu}}\cdot\frac{\big(3-e^{-2b}\big)(\lambda\mu) - |\lambda-\mu|^2}{|\lambda+\mu|}
\end{aligned}$$

wegen $4\sin^2 c = 4(|\lambda-\mu|/2\sqrt{\lambda\mu})^2 = |\lambda-\mu|^2 \cdot (\lambda\mu)^{-1}$. Wir notieren weiter, daß im Fall $c = 0$

$$\Phi_{L(\alpha)}(z \cdot \exp H, \xi) = \xi(z.\exp H) \cdot \left(3e^{-b} - e^{-3b}\right)$$

gilt. Abschließend bemerken wir $\exp(-b) = \min\{\sqrt[4]{\lambda\mu(\alpha\beta)^{-1}}, \sqrt[4]{\alpha\beta(\lambda\mu)^{-1}}\}$.

(6.7) Berechnung von $\Phi_{L(\beta)}(\cdot,\xi)$: Wir übernehmen dafür die Bezeichnungen von (5.30). Wegen $p_Z(H) = bE_4$ für alle H in $\mathrm{Lie}\, T(\mathbf{R})$ mit p_Z der Projektion auf die Liealgebra des Zentrums von $G(\mathbf{R})$ ist $g(z)\exp(b_1 b) = \xi(z.\exp H)$. Für alle z in $Z(B)$ und alle regulären Elemente H in $\mathrm{Lie}\, T(\mathbf{R})$ gilt daher

$$\begin{aligned}\Phi_{L(\beta)}(z \cdot \exp H, \xi) &= \xi(z.\exp H) \cdot \frac{e^{-b_3 a}\sin(b_2 c) - e^{-b_2 a}\sin(b_3 c)}{\sin c \cdot \cos c} \\ &= \xi(z.\exp H) \cdot \frac{e^{-a}\sin(2c) - e^{-2a}\sin(c)}{\sin c \cdot \cos c} \\ &= \xi(z.\exp H) \cdot e^{-a} \cdot \frac{2\cos c - e^{-a}}{\cos c} = \xi(z.\exp H) \cdot (2e^{-a}) \cdot \frac{|\lambda+\mu| - e^{-a}\sqrt{\lambda\mu}}{|\lambda+\mu|}\end{aligned}$$

Im Fall $c = 0$ geht dies über in $\xi(z.\exp H) \cdot 2e^{-a} \cdot (e^{-2a} - 2e^{-a})$, also in die korrespondierende Formel aus (5.30). Wir notieren $\exp(-a) = \min\{\sqrt{\alpha\beta^{-1}}, \sqrt{\beta\alpha^{-1}}\}$. Zusammenfassend erhalten wir daher abschließend den

(6.8) Satz: *Sei (V,ξ) eine irreduzible eindimensionale Darstellung von $GSp(4)$. Sei B ein modulo dem Zentrum von $GSP(4)$ maximal anisotroper $\mathbf{Q}$-Torus in $GSp(4)$. Für alle Elemente z in $Z(B) = \{\pm 1\}$ und H in $\mathrm{Lie}\, B(\mathbf{R})$ gilt dann*

$$\Phi_{GSp(4)}(z \cdot \exp H, \xi) = -\xi(z \cdot \exp H).$$

Sei $T = B(L(\alpha))$ ein modulo dem Zentrum des Levifaktors $L(\alpha)$ von $GSp(4)$ maximal anisotroper $\mathbf{Q}$-Torus in $L(\alpha)$. Seien z in $Z(B)$ und H in $\mathrm{Lie}\, T(\mathbf{R})$. Sind λ, μ und α, β die beiden Paare komplex konjugierter Eigenwerte von $\exp H$, dann gilt

$$\Phi_{L(\alpha)}(z.\exp H, \xi) = \xi(z.\exp H) \cdot \frac{2b}{\sqrt{\lambda\mu}} \cdot \frac{(3-b^2)\cdot(\lambda\mu) - |\lambda-\mu|^2}{|\lambda+\mu|} \quad \mathit{mit}\ b = \min\left\{\sqrt[4]{\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta}}, \sqrt[4]{\frac{\alpha\beta}{\lambda\mu}}\right\}.$$

Sei $T = B(L(\beta))$ ein modulo dem Zentrum des Levifaktors $L(\beta)$ von $GSp(4)$ maximal anisotroper $\mathbf{Q}$-Torus in $L(\beta)$. Seien z in $Z(B)$ und H in $\mathrm{Lie}\, T(\mathbf{R})$. Sind λ, μ die beiden komplex konjugierten Eigenwerte und α, β die beiden reellen Eigenwerte von $\exp H$, dann gilt

$$\Phi_{L(\beta)}(z.\exp H, \xi) = \xi(z.\exp H) \cdot (2a) \cdot \frac{|\lambda+\mu| - a\sqrt{\lambda\mu}}{|\lambda+\mu|} \quad \mathit{mit} \quad a = \min\left\{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right\}.$$

Auf allen anderen Punkten der jeweiligen Tori verschwinden die Charaktere $\Phi(\cdot,\xi)$.

Literatur

[An] A.N. Andrianov: *Quadratic Forms and Hecke Operators*, Grundlehren der math. Wissenschaften 286, Springer 1987

[ArMUV] J. Arthur: A Measure on the Unipotent Variety, *Canadian J. Math.* **37**(1985), 1237-1274

[ArFD] J. Arthur: On a Family of Distributions Obtained from Orbits, *Canadian J. Math.* **38**(1986), 179-214

[ArLBWOI] J. Arthur: The Local Behaviour of Weighted Orbital Integrals, *Duke Math. J.* **56**(1988), 223-293

[ArITF] J. Arthur: The Invariant Trace Formula I: Local Theory, II Global Theory, *J. of the AMS* **1**(1988), 323-383, 501-554

[ArIOR] J. Arthur: Intertwining Operators and Residues I: Weighted Characters, *J. Funct. Anal.* **84**(1989), 19-84; II Invariant Distributions, *Comp. Math.* **70**(1989), 51-99

[ArL2] J. Arthur: The L^2–Lefschetz Numbers of Hecke Operators, *Inv. Math* **97**(1989), 257-290

[Asch] M. Aschbacher: *Finite Group Theory*, Cambridge Univ. Press 1986

[Ba] H.-J. Bartels: Zur Arithmetik von Konjugationsklassen in algebraischen Gruppen, *J. of Algebra* **70**(1981), 179-199

[Bo] A. Borel: *Linear Algebraic Groups*, 2nd ed., GTM 126, Springer 1991

[Cart] R.W. Carter: *Finite Groups of Lie Type*, Wiley–Intersience 1985

[CF] J.W.S. Cassels, A. Fröhlich [eds]: *Algebraic Number Theory*, Academic Press 1967

[Fr] E. Freitag: *Siegelsche Modulfunktionen*, Grundlehren der math. Wissenschaften 254, Springer 1984

[Gold] L.J. Goldstein: *Analytic Number Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs 1971

[G] L.C. Grove: *Algebra*, Academic Press 1983

[Ha] K. Haberland: *Galois Cohomology of Algebraic Number Fields*, VEB Dt. Vlg. der Wissenschaften, Berlin 1978

[He] I.N. Herstein: *Noncommutative Rings*, Carus Monographs 15, MAA 1968

[Hu] J.E. Humphreys: *Linear Algebraic Groups*, 2nd printing, GTM21, Springer 1981

[Jac] N. Jacobson: *Basic Algebra II*, W.H. Freeman, San Francisco 1980

[JL] H. Jacquet, R.P. Langlands: *Automorphic Forms on* $GL(2)$, LN in Mathematics 114, Springer 1970

[Knapp] A.W. Knapp: *Representation Theory of semisimple Groups*, Princeton Univ. Press, Princeton 1986

[Kn] M. Kneser: *Lectures on Galois Cohomology of Classical Groups*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1969

[Ku] E. Kunz: *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Birkhäuser, Boston 1985

[KoOrb] R. Kottwitz: Orbital Integrals on $GL(3)$, *Am. J. Math.* **102**(1980), 327-384

[KoRC] R. Kottwitz: Rational Conjugacy Classes in Reductive Groups, *Duke Math. J.* **49**(1982), 785-806

[KoSTC] R. Kottwitz: Stable Trace Formula: Cuspidal Tempered Terms, *Duke Math. J.* **51**(1984), 611-650

[LaEF] S. Lang: *Elliptic Functions*, 2nd ed., GTM 112, Springer 1987

[Mil] J.S. Milne: *Arithmetic Duality Theorems*, Perspectives in Mathematics 1, Academic Press 1986

[Nar] W. Narkiewicz: *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*, 2nd ed., Springer 1990

[Neu] J. Neukirch: *Class Field Theory*, Grundlehren der math. Wissenschaften 280, Springer 1986

[NeuA] J. Neukirch: *Klassenkörpertheorie*, Bibl. Institut, Mannheim 1969

[Oe] J. Oesterlé: Nombres de Tamagawa et Groupes Unipotentes en Charactéristique p, *Inv. Math.* **78**(1984), 13-88

[O'Mea] O.T. O'Meara: *Introduction to quadratic forms*, Grundlehren der math. Wissenschaften 117, Springer 1963

[Ono1] T. Ono: Arithmetic of Algebraic Tori, *Annals of Math.* **74**(1961), 101-139

[Ono2] T. Ono: On the Tamagawa Number of Algebraic Tori, *Annals of Math.* 78(1963), 47-73

[Ono3] T. Ono: On the Relative Theory of Tamagawa Numbers, *Annals of Math.* **82**(1965), 88-111

[Ono4] T. Ono: On Tamagawa Numbers, in Borel, Mostow [eds], *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups*, Proceedings of Symp. in Pure Math. IX, AMS 1966

[Sat] I. Satake: Theory of Spherical Functions on Reductive Algebraic Groups over p–adic Fields, *IHES Publ. Math.* **18**(1963), 1–69

[Se] J.-P. Serre: *Cours d'Arithmétique*; 2^e édition, Presses universitaires de France, Paris 1977

[SeANF] J.-P. Serre: Modular Forms of Weight One and Galois Representations, in A.Fröhlich [ed] *Algebraic Number Fields*, Academic Press 1977

[SCG] J.-P. Serre: *Cohomologie Galoisienne*, 4^e éd., LN in Mathematics 8, Springer 1986

[SeLF] J.-P. Serre: *Local Fields*, GTM 67, Springer 1979

[Sh] S.S. Shatz: *Profinite Groups, Arithmetic, and Geometry*, Annals of Mathematics Studies 67, Princeton Univ. Press, Princeton 1972

[Sp–St] T. Springer, R. Steinberg: Conjugacy Classes, in Borel et al. [eds] *Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups*, LN in Mathematics 131, Springer 1970

[St] R. Steinberg: Regular Elements of Semisimple Algebraic Groups, *IHES Publ. Math.* **25**(1965), 49-80

[Wal] N. Wallach: *Real Reductive Groups I*, Academic Press 1988

[Wa] G. Warner: *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups*, Grundlehren der math. Wissenschaften 188, 189, Springer 1972

[WBN] A. Weil: *Basic Number Theory*, 3rd ed., Grundlehren der math. Wissenschaften 144, Springer 1974

[WAAG] A. Weil: *Adeles and Algebraic Groups*, Progress in Math. 23, Birkhäuser 1982