Eine interne Charakterisierung von Marinescu-Räumen.

von K.Kutzler

Nr. 3 (1970)

Diese Arbeit entstand aus einem Teil der Dissertation des Verfassers, die im Jahre 1969 bei der Math.-Nat. Fakultät der Freien Universität Berlin eingereicht und von der Fakultät angenommen wurde.

Eine interne Charakterisierung von Marinescu-Räumen.

von K. Kutzler

In seinem Buch "Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions" sowie in vorangegangenen Arbeiten hat G. Marinescu bei der Untersuchung des Raumes $L(E,F)$ der stetigen, linearen Abbildungen eines lokalkonvexen, topologischen Vektorraumes E in den lokalkonvexen, topologischen Vektorraum F den Begriff des pseudotopologischen Vektorraumes definiert. Hierbei sind die betrachteten Vektorräume stets entweder reelle oder komplexe Vektorräume. Unter Zugrundelegung des Begriffs des induktiven Limes eines induktiven Systems von Limesräumen, wie er bei H.R. Fischer [1] definiert wird, ist ein pseudotopologischer Vektorraum definiert als induktiver Limes eines induktiven Systems von topologischen Vektorräumen in der Kategorie der Limesvektorräume über dem entsprechenden Skalarkörper. Hierbei hat das betrachtete induktive System die Eigenschaft, daß seine Abbildungen stetige Inklusionsabbildungen sind. Der Begriff des pseudotopologischen Vektorraumes ist identisch mit dem Begriff des fast induktiven Limes (lokalkonvexer, topologischer Vektorräume), wie er von J. Wloka [7] definiert wurde, wenn die Objekte des induktiven Systems lokalkonvexe, topologische Vektorräume sind. Limesvektorräume der soeben bezeichneten Art sind in den letzten Jahren besonders intensiv von H. Jarchow untersucht worden. Jarchow nannte dabei die induktiven Limites von induktiven Systemen lokalkonvexer, topologischer Vektorräume in der Kategorie der Limesvektorräume Marinescu-Räume. Die Limesvektorräume, die sich als induktive Limites topologischer Vektorräume darstellen lassen wurden von Jarchow pseudotopologische Vereinigungen genannt. Es werde hierbei betont, daß es sich stets um induktive Limites im oben definierten Sinne handelt.

Bei der Arbeit mit Marinescu- Räumen bzw. pseudotopologischen Vereinigungen wurde stets die Definition dieser Räume durch induktive Limites verwendet. Im Folgenden soll nun eine interne Charakterisierung von Marinescu-Räumen bzw. pseudotopologischen Vereinigungen angegeben werden.

Sei M eine Menge. N sei eine nichtleere Teilmenge von M. Ist Φ_N ein Filter auf N, so bildet Φ_N eine Filterbasis auf M. Der von Φ_N auf M erzeugte Filter werde mit $[\Phi_N]$ bezeichnet. Sei andererseits Φ ein Filter auf M, der die Eigenschaft besitze, daß für jede Menge F aus Φ gilt: $F \cap N \neq \emptyset$. Dann ist $\{F \cap N \mid F \in \Phi\}$ ein Filter auf N, der Spur von Φ auf N genannt und mit $Sp_N(\Phi)$ bezeichnet werde. Besitzt der Filter Φ auf N eine Spur, so gilt im allgemeinen : $[Sp_N(\Phi)] \supseteq \Phi$. Im Falle $N \in \Phi$ folgt $[Sp_N(\Phi)] = \Phi$. Für einen beliebigen Punkt x aus M werde der Ultrafilter aller Teilmengen von M, die x enthalten, mit $[x]$ bezeichnet.

Im Folgenden sei K stets entweder der Körper der reellen oder der komplexen Zahlen. $\mathfrak{V}$ sei der Nullumgebungsfilter in K.

Ist E ein K-Vektorraum und τ eine mit der Vektorraumstruktur kompatible Limitierung, so werde der hierdurch beschriebene Limesvektorraum mit (E,τ) bezeichnet.

Für einen Limesvektorraum (E,τ) über K besitzt die Klasse $\tau(o)$ aller bezüglich der Limitierung τ gegen o konvergenten Filter die folgenden charakteristischen Eigenschaften:

(L1) Aus $\Phi_1 \varepsilon \tau(o)$ und $\Phi_2 \varepsilon \tau(o)$ folgt $\Phi_1 + \Phi_2 \varepsilon \tau(o)$.

(L2) Aus $\Phi \varepsilon \tau(o)$ folgt $\mathbb{V}.\Phi \varepsilon \tau(o)$.

(L3) Aus $x \varepsilon E$ folgt $\mathbb{V}.x = \mathbb{V}.[x] \varepsilon \tau(o)$.

(L4) Aus $\alpha \varepsilon K$ und $\Phi \varepsilon \tau(o)$ folgt $\alpha.\Phi \varepsilon \tau(o)$.

Wenn (E,τ) ein Limesvektorraum ist, so ist die Limitierung τ vollständig durch die Klasse $\tau(o)$ beschrieben. Aus der Stetigkeit der Addition folgt nämlich, daß für jeden Punkt x aus E die Klasse $\tau(x)$ aller Filter auf E, die bezüglich τ gegen x konvergieren, von der folgenden Form ist: $\tau(x) = \{\Phi + x \mid \Phi \varepsilon \tau(o)\}$.

Ist umgekehrt auf dem K-Vektorraum E eine Limitierung τ gegeben, so daß für $\tau(o)$ die Bedingungen (L1) - (L4) erfüllt sind und überdies für x aus E gilt :
$\tau(x) = \{\Phi + x \mid \Phi \varepsilon \tau(o)\}$, so ist τ eine mit der Vektorraumstruktur von E kompatible Limitierung .

Seien N und M nichtleere Mengen und $j : N \longrightarrow M$ eine Abbildung. Ferner sei Φ ein Filter auf N . Dann ist $\{ j(F) \mid F \varepsilon \Phi\}$ eine Filterbasis in M . Der von dieser Filterbasis erzeugte Filter werde mit $j(\Phi)$ bezeichnet.
Falls j eine Inklusionsabbildung ist, gilt $j(\Phi) = [\Phi]$.

Es sei im Folgenden I eine beliebige, durch eine Ordnung $\leqslant$ nach oben gerichtete Indexmenge . Für i aus I sei (E_i,τ_i) ein Limesvektorraum. (Die im Folgenden betrachteten Vektorräume sollen alle denselben Skalarkörper K besitzen.) Für zwei Indizes i_1 und i_2 aus I mit $i_1 \leqslant i_2$ gelte $E_{i_1} \subseteq E_{i_2}$; ferner sei die Inklussionsabbildung $j_{i_1 i_2}: E_{i_1} \longrightarrow E_{i_2}$ bezüglich der Limitierungen τ_{i_1} und τ_{i_2} stetig. Es ist klar, daß die Limesvektorräume (E_i,τ_i) zusammen mit den Inklusionen $j_{i_1 i_2}$ in der Kategorie der Limesvektorräume ein induktives System bilden. Wenn im Folgenden von einem induktiven System von Limesvektorräumen gesprochen wird, so soll darunter stets diese spezielle Art von induktivem System verstanden werden. Nach Fischer besitzt jedes induktive System von Limesvektorräumen einen induktiven Limes in der Kategorie der Limesvektorräume (, der sogar mit dem induktiven Limes in der Kategorie der Limesräume übereinstimmt).Das bedeutet: Es existieren ein Limesvektorraum $(E,\tau) =: \operatorname{ind}_I (E_i,\tau_i)$ und für jeden Index i aus I eine stetige, lineare Abbildung $j_i:(E_i,\tau_i) \longrightarrow (E,\tau)$ derart, daß hierdurch das folgende universelle Problem gelöst wird:

Sei (F,τ') ein Limesvektorraum. Für jeden Index i aus I sei $T_i:(E_i,\tau_i) \longrightarrow (F,\tau')$ eine stetige, lineare Abbildung. Das System der T_i sei außerdem mit dem induktiven System der Limesvektorräume kompatibel, d.h. für i_1 und i_2 aus I mit $i_1 \leqslant i_2$ gelte $T_{i_1} = T_{i_2} \circ j_{i_1 i_2}$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte, stetige und lineare Abbildung $T:(E,\tau) \longrightarrow (F,\tau')$ derart, daß das folgende Diagramm für jeden Index i aus I kommutiert:

$$\begin{tikzcd}(E_i,\tau_i) \arrow[r, "j_i"] \arrow[dr, "T_i"'] & (E,\tau) \arrow[d, "T"] \\ & (F,\tau')\end{tikzcd} \quad .$$

Die Konstruktion des induktiven Limes verläuft wie folgt:

Setze $E := \bigcup_{i\varepsilon I} E_i$. Für i aus I definiere $j_i: E_i \longrightarrow E$ durch die Inklusionsabbildung. Ferner sei $\tau(o)$ gegeben durch

$\tau(o) = \{ \Phi \mid$ Es existieren ein Index i aus I und ein Filter Φ_i aus $\tau_i(o)$ mit $\Phi = j_i(\Phi_i) = [\Phi_i] \}$.

Für x aus E definiere man dann $\tau(x) := \{\Phi + x \mid \Phi \varepsilon \tau(o)\}$.

1) Definition: Ein Limesvektorraum (E,τ) *heiße pseudotopologische Vereinigung, wenn es ein induktives System* (E_i,τ_i) *derart gibt, daß*

a) alle τ_i *Vektorraumtopologien auf* E_i *sind und*

b) $(E,\tau) = \operatorname{ind}_I (E_i,\tau_i)$ *gilt .*

Ein Limesvektorraum (E,τ) *heiße Marinescu-Raum, wenn es ein induktives System* (E_i,τ_i) *derart gibt, daß*

a) alle τ_i *lokalkonvexe Vektorraumtopologien auf* E_i *sind und*

b) $(E,\tau) = \operatorname{ind}_I (E_i,\tau_i)$ *gilt.*

Zum Beweis des gewünschten Charakterisierungssatzes wird das folgende Lemma benötigt:

2) Lemma: Sei E *ein Vektorraum. Ferner sei* Φ *ein Filter auf* E *, der den folgenden Eigenschaften genügt:*

$$\Phi + \Phi = \Phi \quad \textit{und} \quad \mathbb{V}.\Phi = \Phi \quad .$$

Behauptung: Dann ist $E_\Phi := \bigcap_{F\,\varepsilon\Phi} K.F$ *ein Unterraum von* E .

Beweis: Es werde zuerst bemerkt, daß E_Φ nicht leer ist, da wegen der Relation $\mathbb{V}.\Phi = \Phi$ folgt : $o \in E_\Phi$. Seien x aus E_Φ und λ aus K . Für jedes F aus Φ folgt $x \in K.F$. Das impliziert $\lambda.x \in \lambda.K.F \subseteq K.F$ und $\lambda.x \in \bigcap_{F \in \Phi} K.F = E_\Phi$. Seien x und y aus E_Φ . Dann gilt für jede Menge F aus Φ stets $x \in K.F$ und $y \in K.F$. Wegen $\mathbb{V}.\Phi = \Phi$ und wegen $\Phi + \Phi = \Phi$ folgt die Existenz einer equilibrierten Menge F' aus Φ mit der Eigenschaft: $F' + F' \subseteq F$. Ferner sind die Relationen $x \in K.F'$ und $y \in K.F'$ erfüllt. Hieraus folgt wegen der Equilibriertheit der Menge F' , daß Zahlen $\alpha, \beta > 0$ derart existieren, daß $\alpha.x \in F'$ und $\beta.y \in F'$ gilt. Wähle nun $r = \min(\alpha, \beta)$. Wegen der Equilibriertheit von F' gilt dann auch $r.x \in F'$ und $r.y \in F'$, also $r.x + r.y = r.(x + y) \in F' + F' \subseteq F$, folglich $x + y \in K.F$. Da F aus Φ beliebig war, folgt $x + y \in \bigcap_{F \in \Phi} K.F = E_\Phi$. Also ist E_Φ ein Unterraum von E .

Es können nun pseudotopologische Vereinigungen wie folgt charakterisiert werden:

3) Satz: Sei (E, τ) *ein Limesvektorraum. Notwendig und hinreichend dafür, daß* (E, τ) *eine pseudotopologische Vereinigung ist, ist die Existenz einer Filterfamilie* Ω *auf* E *, die den folgenden Bedingungen genügt:*

$(\tilde{1})$ Für jeden Filter Φ *aus* Ω *gilt :*

(a) $\Phi \in \tau(o)$

(b) $\Phi + \Phi = \Phi$

(c) $\mathbb{V}.\Phi = \Phi$.

$(\tilde{2})$ Zu jedem Filter Ψ *aus* $\tau(o)$ *gibt es einen Filter* Φ *aus* Ω *mit* $\Psi \supseteq \Phi$.

$(\tilde{3})$ *Es gilt für jeden Filter* Φ *aus* Ω *stets* $\bigcap_{F\in\Phi} K.F \in \Phi$.

Beweis: Die Bedingung ist notwendig: Sei (E_i,τ_i) ein in unserem speziellen Sinne induktives System von topologischen Vektorräumen mit der Indexmenge I . Es sei $\Phi_i(o)$ der Nullumgebungsfilter in (E_i,τ_i) . Ferner sei $(E,\tau) := \operatorname{ind}_I (E_i,\tau_i)$. Wie man leicht nachrechnet, ist ein Filter Ψ auf E genau dann in $\tau(o)$, wenn es einen Index i aus I derart gibt, daß gilt:

$$\Psi \supseteq [\Phi_i(o)] = j_i(\Phi_i(o)) .$$

Da $\Phi_i(o)$ Nullumgebungsfilter des topologischen Vektorraumes (E_i,τ_i) ist, sind aufgrund der Axiome eines topologischen Vektorraumes die Relationen

$$\Phi_i(o) + \Phi_i(o) = \Phi_i(o) \quad \text{und} \quad \mathbb{V}.\Phi_i(o) = \Phi_i(o)$$

erfüllt. Wegen der Linearität der Inklusionsabbildung j_i folgt:

$$[\Phi_i(o)] + [\Phi_i(o)] = j_i(\Phi_i(o)) + j_i(\Phi_i(o)) = j_i(\Phi_i(o)) = [\Phi_i(o)]$$

und

$$\mathbb{V}.[\Phi_i(o)] = \mathbb{V}.j_i(\Phi_i(o)) = j_i(\mathbb{V}.\Phi_i(o)) = j_i(\Phi_i(o)) = [\Phi_i(o)] .$$

Damit ist die Familie Ω durch $\Omega := \{[\Phi_i(o)] \mid i \in I\}$ definiert. Sie genügt, wie soeben gezeigt wurde, den Bedingungen $(\tilde{1})$ und $(\tilde{2})$ des Satzes . Sei ferner U_i aus $\Phi_i(o)$. Da U_i Nullumgebung in (E_i,τ_i) ist, absorbiert U_i jeden Punkt aus E_i , d.h. , es gilt $K.U_i = E_i$. Da es aber zu jeder Menge F aus $[\Phi_i(o)]$ eine Menge U_i aus $\Phi_i(o)$ mit $U_i \subseteq F$ gibt, folgt $K.U_i = E_i \subseteq K.F$. Demnach gilt auf jeden Fall

$$\bigcap_{F\in[\Phi_i(o)]} K.F \supseteq E_i \quad .$$

Da aber $\Phi_i(o)$ ein Filter auf E_i ist, gilt $E_i \varepsilon \Phi_i(o)$.
Hieraus aber folgt:

$$E_i = \bigcap_{F \varepsilon [\Phi_i(o)]} K.F \ \varepsilon \ [\Phi_i(o)] .$$

Damit ist auch $(\tilde{3})$ bewiesen und folglich gezeigt, daß die im Satz aufgeführten Bedingungen für eine pseudotopologische Vereinigung notwendig sind.
Es werde nun angenommen, daß (E,τ) ein Limesvektorraum ist, so daß die Bedingungen $(\tilde{1})$ - $(\tilde{3})$ des Satzes erfüllt sind. Der Beweis dafür, daß (E,τ) eine pseudotopologische Vereinigung ist, wird durch die Beweise der folgenden Behauptungen geführt.

4) Behauptung: Sei Φ *aus* Ω . *Definiere* $E_\Phi : = \bigcap_{F \varepsilon \Phi} K.F$.
Dann läßt sich E_Φ *wie folgt charakterisieren:*

$$E_\Phi = \{x|\ x \varepsilon E\ ,\ \mathbb{V}.x \supseteq \Phi\} .$$

Beweis: Für eine positive Zahl r sei $S(0,r] =$
$= \{\lambda | \lambda \varepsilon K\ ,\ |\lambda| \leqq r\}$.

(I) Sei $\mathbb{V}.x \supseteq \Phi$. Dann gibt es zu jedem F aus Φ eine Zahl $r > 0$ derart, daß $S(0,r].x \subseteq F$ gilt. Insbesondere ist dann $r.x \varepsilon F$, folglich $x = \frac{1}{r}(r.x) \varepsilon K.F$. Da F aus Φ beliebig war, folgt $x \varepsilon \bigcap_{F\varepsilon\Phi} K.F = E_\Phi$. Also ist:
$\{x\ |x \varepsilon E\ ,\ \mathbb{V}.x \supseteq \Phi\} \subseteq E_\Phi$.

(II) Sei andererseits x aus E_Φ . Ferner sei F aus Φ . Wegen der Relation $\mathbb{V}.\Phi = \Phi$ gibt es eine equilibrierte Menge F' aus Φ derart, daß $F' \subseteq F$ gilt. Es ist zu zeigen, daß $\mathbb{V}.x \supseteq \Phi$ gilt, d.h. , daß es zu F aus Φ eine Zahl $r > 0$ derart gibt, daß $S(o,r].x \subseteq F$ folgt. Wegen der Equilibriertheit von F' genügt es, die

die Existenz von $r > 0$ derart nachzuweisen, daß $r.x \in F'$ gilt. Da F' equilibriert ist, folgt dann nämlich

$$S(0,1].r.x = S(0,r].x \subseteq F' \subseteq F \quad .$$

Nach Definition von E_Φ ist aber $E_\Phi \subseteq K.F'$. Da F' equilibriert ist und da x aus E_Φ ist, existiert $r > 0$ derart, daß $r.x \in F'$ gilt, was zu beweisen war.

5) Man versehe das vorgegebene Filtersystem Ω mit der zur Inklusion dualen Ordnung. So ist Ω ein nach oben gerichtetes System. Bezüglich diesem System ist dann $\{ E_\Phi \mid \Phi \in \Omega \}$ ein induktives System von Vektorräumen mit $E = \bigcup_{\Phi\in\Omega} E_\Phi$.

Beweis: Nach den Limitierungsaxiomen und nach den Voraussetzungen über Ω ist Ω gerichtet. Der Einfachheit halber werde im Folgenden bei den Relationen, in denen die Ordnung von Ω eingeht, die bisher verwandte Schreibweise für die Ordnung benützt.

Es ist zu zeigen, daß aus Φ_1 und Φ_2 aus Ω mit $\Phi_1 \supseteq \Phi_2$ folgt: $E_{\Phi_1} \subseteq E_{\Phi_2}$. Nach (4) ist x genau dann aus E_{Φ_1} , wenn $\mathbb{V}.x \supseteq \Phi_1$ gilt. Hieraus folgt $\mathbb{V}.x \supseteq \Phi_2$ nach Voraussetzung über Φ_1 und Φ_2 . Also folgt nach (4) $x \in E_{\Phi_2}$ und somit $E_{\Phi_1} \subseteq E_{\Phi_2}$.

Es bleibt die Relation $E = \bigcup_{\Phi\in\Omega} E_\Phi$ zu beweisen. Da (E,τ) ein Limesvektorraum ist, gilt für jedes x aus E stets $\mathbb{V}.x \in \tau(o)$. Nach den Voraussetzungen über Ω gibt es dann einen Filter Φ aus Ω derart, daß $\mathbb{V}.x \supseteq \Phi$ gilt. Nach (4) folgt $x \in E_\Phi$ und erst recht $x \in \bigcup_{\Phi\in\Omega} E_\Phi$. Folglich ist, da die E_Φ alle in E enthalten sind : $E = \bigcup_{\Phi \in \Omega} E_\Phi$. Man beachte, daß nach (2) alle

E_Φ lineare Unterräume von E sind.

6) Behauptung: Für die Spur des Filters Φ auf E_Φ folgt:

$$[Sp_{E_\Phi}(\Phi)] = \Phi \quad .$$

Beweis: Das folgt unmittelbar aus der Forderung $E_\Phi \in \Phi$.

7) Behauptung: Setze für Φ aus Ω : $\Phi' = Sp_{E_\Phi}(\Phi)$. Dann gilt auf E_Φ sowohl $\Phi' + \Phi' = \Phi'$ als auch $\mathbb{V}.\Phi' = \Phi'$.

Beweis: Seien F aus Φ' und $\lambda \neq 0$. Wegen (6) und wegen $\mathbb{V}.\Phi = \Phi$ folgt $\lambda.F \in \Phi$. Da E_Φ ein Vektorraum ist, gilt $\lambda.F \subseteq E_\Phi$. Also folgt aus $F \in \Phi'$ und $\lambda \neq 0$ stets $\lambda.F \subseteq \Phi'$. Wenn $F \in \Phi'$ gilt, so gilt wegen (6) auch $F \in \Phi$. Wegen $\mathbb{V}.\Phi = \Phi$ gibt es eine equilibrierte Menge F' aus Φ mit $F' \subseteq F$. Aus $F \in \Phi'$ und $F' \subseteq F$ folgt wegen $F' \in \Phi$ aber $F' \in \Phi'$. Wie man leicht nachprüft sind die beiden soeben verifizierten Bedingungen aber notwendig und hinreichend dafür, daß $\mathbb{V}.\Phi' = \Phi'$ gilt. Für jedes F aus Φ' gilt wegen $\mathbb{V}.\Phi' = \Phi'$ stets $o \in F$. Daraus folgt: $\Phi' \supseteq \Phi' + \Phi'$. Sei andererseits F aus Φ'. Wegen $\Phi + \Phi = \Phi$ gibt es F' aus Φ derart, daß $F' + F' \subseteq F$ gilt. Wegen $o \in F'$ folgt insbesondere $F' \subseteq F' + F' \subseteq F \subseteq E_\Phi$, d.h. $F' \in \Phi'$.
Hieraus folgt $\Phi' + \Phi' \supseteq \Phi'$ und mithin $\Phi' + \Phi' = \Phi'$.

8) Definition: Definiere die Limitierung τ_Φ auf E_Φ durch:

$(x \in E_\Phi)$ $\quad \tau_\Phi(x) := \{\Psi \mid \Psi$ Filter auf E_Φ mit $\Psi - x \supseteq \Phi' \}$.

9) Behauptung: Durch τ_Φ ist auf dem Vektorraum E_Φ eine kompatible Topologie definiert.

Beweis: Es werde zuerst bewiesen, daß durch τ_Φ auf E_Φ eine kompatible Limitierung definiert ist. Da der Filter $[o]$ auf E_Φ feiner als der Filter Φ' ist, ist es nicht schwierig nachzuweisen, daß τ_Φ wirklich eine Limitierung auf E_Φ ist. Insbesondere gehen die Filterklassen $\tau_\Phi(x)$, wo x aus E_Φ beliebig ist, durch Translation aus der Filterklasse $\tau_\Phi(o)$ hervor. Folglich genügt es nachzuweisen, daß $\tau_\Phi(o)$ die Bedingungen (L1) - (L4) erfüllt.

(L1) : Es gelte $\Psi_i \varepsilon \tau_\Phi(o)$, wo $i = 1,2$. Das ist äquivalent zu $\Psi_i \supseteq \Phi'$. Dann folgt $\Psi_1 + \Psi_2 \supseteq \Phi' + \Phi' = \Phi'$ und somit $\Psi_1 + \Psi_2 \varepsilon \tau_\Phi(o)$.

(L2) : Sei $\Psi \varepsilon \tau_\Phi(o)$. Dann folgt $\mathbb{V}.\Psi \geq \mathbb{V}.\Phi' = \Phi'$, also $\mathbb{V}.\Psi \varepsilon \tau_\Phi(o)$.

(L3) : Für jedes x aus E_Φ folgt wegen (4) $\mathbb{V}.x \geq \Phi'$ und somit $\mathbb{V}.x \varepsilon \tau_\Phi(o)$.

(L4) : Seien λ aus K und Ψ aus $\tau_\Phi(o)$. Dann folgt $\lambda.\Psi \supseteq \lambda.\Phi' \geq \Phi'$ und somit $\lambda.\Psi \varepsilon \tau_\Phi(o)$.

Damit ist gezeigt, daß τ_Φ eine mit der Vektorraumstruktur von E_Φ verträgliche Limitierung ist. Da andererseits $\tau_\Phi(o)$ einen gröbsten Filter, nämlich Φ' enthält, ist diese Limitierung eine Hauptideallimitierung und somit wegen der Kompatibilität mit der Vektorraumstruktur von E_Φ nach Fischer eine Vektorraumtopologie. Der Nullumgebungsfilter dieser Vektorraumtopologie ist Φ'.

10) Behauptung: Es gilt $(E,\tau) = \operatorname*{ind}_{\Omega} (E_\Phi,\tau_\Phi)$. *Damit ist dann bewiesen, daß* (E,τ) *eine pseudotopologische Vereinigung ist und die in (3) angebenen Bedingungen (3)($\tilde{1}$) - (3)($\tilde{3}$) auch hinreichend sind. Dies beschließt den Beweis von (3).*

Beweis: Wegen (5) genügt es zu beweisen, daß $\tau(o) = (\operatorname*{ind}_{\Omega}\tau_\Phi)(o)$ gilt, da wegen der Kompatibilität der beiden Limitierungen mit der Vektorraumstruktur von E folgt, daß sie in jedem Punkt aus E dieselbe Klasse konvergenter Filter besitzen und somit identisch sind. Sei Ψ aus $\tau(o)$. Dann gibt es einen Filter Φ aus Ω derart, daß $\Psi \supseteq \Phi$ gilt. Hieraus folgt $E_\Phi \varepsilon \Psi$ und $Sp_{E_\Phi}(\Psi) \supseteq \Phi'$, also $Sp_{E_\Phi}(\Psi) \varepsilon \tau_\Phi(o)$. Dann folgt aber wegen der Bemerkung zu Beginn dieser Arbeit und insbesondere wegen (6) :

$\Phi \subseteq [Sp_{E_\Phi}(\Psi)] = j_\Phi(Sp_{E_\Phi}(\Psi)) = \Psi \ \varepsilon \ (\underset{\Omega}{\mathrm{ind}}\tau_\Phi)(o)$.

Sei andererseits Ψ aus $(\underset{\Omega}{\mathrm{ind}}\tau_\Phi)(o)$. Dann gibt es Φ aus Ω mit $\Psi \supseteq [\Phi'] = \Phi$. Hieraus folgt aber aufgrund der Axiome einer Limitierung $\Psi \ \varepsilon \ \tau(o)$.

Als ein Korollar zu der Charakterisierung pseudotopologischer Vereinigungen ergibt sich nun die Charakterisierung von Marinescu-Räumen:

<u>*11) Korollar : Ein Limesvektorraum*</u> (E,τ) <u>*ist genau dann ein Marinescu-Raum, wenn eine Familie*</u> Ω <u>*von Filtern auf*</u> E <u>*existiert, die die folgenden Eigenschaften besitzt:*</u>

<u>*$(\tilde{1})$ Wenn*</u> $\Phi \ \varepsilon \ \Omega$, <u>*so*</u>

(a) $\Phi \ \varepsilon \ \tau(o)$,

(b) Φ <u>*besitzt eine Filterbasis aus absolutkonvexen Mengen.*</u>

(c) <u>*Für jeden Skalar*</u> $\lambda \neq 0$ <u>*aus*</u> K <u>*gilt*</u> $\lambda . \Phi = \Phi$.

<u>*$(\tilde{2})$ Zu jedem Filter*</u> Ψ <u>*aus*</u> $\tau(o)$ <u>*existiert ein Filter*</u> Φ <u>*aus*</u> Ω <u>*mit*</u> $\Psi \supseteq \Phi$.

<u>*$(\tilde{3})$ Für jeden Filter*</u> Φ <u>*aus*</u> Ω <u>*gilt*</u> $\bigcap_{F \varepsilon \Phi} K.F \ \varepsilon \ \Phi$.

<u>Beweis:</u> Wenn (E,τ) ein Marinescu-Raum ist, so definiert man die Familie Ω wie im Beweis zu (3) . Jeder Nullumgebungsfilter $\Phi_i(o)$ besitzt eine Basis aus absolutkonvexen Mengen, die dann aber auch eine Basis von $[\Phi_i(o)]$ ist. Es gilt also $(\tilde{1})$(b) . Die Bedingung $(\tilde{1})$(a) stimmt mit der in (3) überein und ist automatisch erfüllt. Da $\Phi_i(o)$ Nullumgebungs-

filter in (E_i,τ_i) ist, folgt für jeden Skalar $\lambda \neq 0$

$\lambda.\Phi_i(o) = \Phi_i(o)$. Hieraus folgt dann aber auch $\lambda.[\Phi_i(o)] = [\Phi_i(o)]$. Also gilt auch $(\tilde{1})(c)$. Die Bedingungen $(\tilde{2})$ und $(\tilde{3})$ sind mit denen in (3) identisch. Also sind die angegebenen Charakterisierungsbedingungen für Marinescu-Räume notwendig.

Ist andererseits die Filterfamilie Ω so vorgegeben, daß die Bedingungen $(\tilde{1})$ - $(\tilde{3})$ erfüllt sind, so folgen die Bedingungen $(\tilde{1})(b)$ und $(\tilde{1})(c)$ - wie man sehr leicht verifiziert - auch für die in (7) definierten Filter Φ' auf E_Φ . Dann ist aber nach Definition eines lokalkonvexen, topologischen Vektorraumes Φ' Nullumgebungsfilter einer lokalkonvexen Topologie auf E_Φ , die mit τ_Φ identisch ist. Nach dem Charakterisierungssatz (3) gilt dann aber

$$(E,\tau) = \operatorname*{ind}_{\Omega} (E_\Phi,\tau_\Phi) .$$

Diese Charakterisierungen lassen sich nun auch auf induktive Limites von topologischen, bzw. lokalkonvexen, topologischen K-Algebren wie folgt erweitern:

12) Korollar: Sei (E,τ) *eine pseudotopologische Vereinigung. Es sei* E *zusätzlich eine Algebra,* τ *sei mit der Algebrenstruktur kompatibel, d.h. die Multiplikation der Algebra sei bezüglich* τ *stetig.*

Behauptung: (E,τ) *ist genau dann pseudotopologische Vereinigung von topologischen K-Algebren, wenn ein System* Ω *von Filtern in* $\tau(o)$ *so existiert, daß die Bedingungen* $(\tilde{1})$ - $(\tilde{3})$ *in (3) erfüllt sind und zusätzlich für jeden Filter* Φ *aus* Ω *gilt:*

$(\tilde{4})$ $\Phi.\Phi \supseteq \Phi$.

$(\tilde{5})$ *Für* x *aus* E *impliziert* $\mathcal{V}.x \geq \Phi$ *stets* $\Phi.x \geq \Phi$

und $x.\Phi \supseteq \Phi$.

Beweis: Die Bedingung $(\tilde{4})$ impliziert, daß die Räume E_Φ Unteralgebren von E werden, denn für x und y aus E_Φ folgt $\mathcal{V}.xy = \mathcal{V}.x.\mathcal{V}.y \supseteq \Phi.\Phi \supseteq \Phi$ und somit $xy \in E_\Phi$. Ferner implizieren $(\tilde{4})$ und $(\tilde{5})$, daß die Topologie τ_Φ auf E_Φ eine Algerentopologie wird .

13) Bemerkung: In Analogie hierzu läßt sich eine Limesalgebra (E,τ) *als induktiver Limes von lokalkonvexen, topologischen K-Algebren darstellen, wenn die Voraussetzungen von (11) erfüllt sind und das System* Ω *zusätzlich noch den Bedingungen* $(\tilde{4})$ *und* $(\tilde{5})$ *von (12) genügt.*

Literaturverzeichnis.

[1] H.R.Fischer:"Limesräume", Math. Ann. 137 ,(1959) , pp. 269 - 303 .

[2] A.Frölicher und W.Bucher:"Calculus in vector spaces without norm" , Lecture Notes in Mathematics 56 , Berlin-Heidelberg-New York, 1967 .

[3] H. Jarchow:"Marinescu-Räume", Comm. Math. Helv. 44 (2), (1969) , pp. 138 - 163 .

[4] H. Jarchow:"Dualität und Marinescu-Räume", Math. Ann. 182, (1969) , pp.134 - 144.

[5] G. Köthe : "Lineare topologische Räume I .", Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen 107 , Berlin-Heidelberg-New York, 1966 .

[6] G. Marinescu:"Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions.", VEB Verlag Deutscher Wissenschaften, Berlin, 1963 .

[7] J. Wloka: "Limesräume und Distributionen.", Math. Ann. <u>152</u>, (1963), pp. 351 - 409 .