Dualitäten in $\mathcal{C}_c(X)$

von H.-P. Butzmann

Nr. 4 (1970)

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Für einen $\mathbb{R}$-Limesvektorraum E bezeichne $\mathcal{L}_c E$ den Raum aller linearen, stetigen, reellwertigen Funktionale auf E, versehen mit der Limitierung der stetigen Konvergenz.
Der Raum E heißt c-reflexiv, wenn E in natürlicher Weise zu $\mathcal{L}_c \mathcal{L}_c E$ isomorph und homöomorph ist. Wir werden beweisen, daß $\mathcal{C}_c(X)$ - also der Raum aller stetigen, reellwertigen Funktionen auf X, versehen mit der Limitierung der stetigen Konvergenz - für jeden Limesraum X ein c-reflexiver Limesvektorraum ist.
Für eine abelsche Limesgruppe A bezeichne $G_c A$ die Menge aller stetigen Charaktere auf A, versehen mit der Limitierung der stetigen Konvergenz. Im 2. Teil dieser Arbeit werden wir zeigen, daß die Limesgruppe $\mathcal{C}_c(X)$ für jeden Limesraum X in natürlicher Weise zu $G_c G_c \mathcal{C}_c(X)$ homöomorph und isomorph ist.
Im einzelnen werden wir in der folgenden Weise vorgehen:

In Kapitel 0 werden die Definitionen und Sätze aus der Theorie der Limesräume zusammengestellt, die zum Verständnis der Arbeit notwendig sind.

In Kapitel 1 untersuchen wir einige funktionalanalytische Eigenschaften von $\mathcal{C}_c(X)$: Wir zeigen, daß für c-einbettbare Limesräume X die zur Limitierung der stetigen Konvergenz auf $\mathcal{C}(X)$ assoziierte lokalkonvexe Topologie die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von X ist. Daraus leiten wir dann

her, daß sich in diesem Falle jedes lineare, stetige Funktional auf $\mathcal{C}_c(X)$ als Integral über eine kompakte Menge bezüglich eines Borelmaßes darstellen läßt.
In Kapitel 2 werden wir die c-Reflexivität von $\mathcal{C}_c(X)$ für jeden Limesraum X beweisen.
In Kapitel 3 werden wir das Pontrjaginsche Dualitätstheorem ausdehnen: Es sei Γ eine abelsche Limesgruppe und $\mathcal{G}_c\Gamma$ die Charaktergruppe von Γ - also die Gruppe aller stetigen Gruppenhomomorphismen von Γ in den Einheitskreis der komplexen Zahlen - , versehen mit der Limitierung der stetigen Konvergenz. Ist Γ lokalkompakt und topologisch, so fallen die Limitierungen der stetigen Konvergenz auf $\mathcal{G}\Gamma$ und $\mathcal{G}\mathcal{G}_c\Gamma$ mit den kompakt-offenen Topologien auf $\mathcal{G}\Gamma$ bzw. $\mathcal{G}\mathcal{G}_c\Gamma$ zusammen. Das Pontrjaginsche Dualitätstheorem besagt dann, daß eine lokalkompakte, topologische Gruppe Γ in natürlicher Weise zu $\mathcal{G}_c\mathcal{G}_c\Gamma$ homöomorph und isomorph ist. Wir werden dieses Theorem auf eine Klasse von Limesgruppen ausdehnen, der $\mathcal{C}_c(X)$ für jeden Limesraum X angehört: Wir werden nämlich beweisen, daß $\mathcal{L}_cE$ und $\mathcal{G}_cE$ in natürlicher Weise isomorph und homöomorph sind, wenn E ein ausgeglichener Limesvektorraum ist, d.h. wenn in E mit jedem Filter Θ auch $[-1,1]\cdot\Theta$ gegen 0 konvergiert. Aus diesem Ergebnis folgt dann, daß ein c-reflexiver, ausgeglichener Limesvektorraum E in natürlicher Weise zu $\mathcal{G}_c\mathcal{G}_cE$ homöomorph ist.
In Kapitel 4 werden wir die Dualräume und Charakter-

gruppen von Unterräumen und Quotientenräumen bzw. von Untergruppen und Quotientengruppen untersuchen. Dabei wird sich herausstellen, daß ein Unterraum eines c-reflexiven, lokalkonvexen, topologischen Vektorraumes genau dann c-reflexiv ist, wenn er abgeschlossen ist. Also sind für einen lokalkompakten Limesraum X die c-reflexiven Unterräume von $\mathcal{C}_c(X)$ genau die abgeschlossenen.

(0) Einführung

In diesem Kapitel sollen die Definitionen und Sätze aus der Theorie der Limesräume zusammengestellt werden, die zum Verständnis der Arbeit notwendig sind. Beweise sollen nicht geführt werden, sie sind alle in den Arbeiten von E. Binz/ H.H. Keller und E. Binz ([2], [3], [4], [5]) enthalten.

(0.1) Limesräume

Es sei X eine Menge, und für jedes $x \in X$ sei $\Lambda(x)$ eine Familie von Filtern auf X, die den Bedingungen genügt:

(i) der von x erzeugte Ultrafilter gehört zu $\Lambda(x)$, d.h. $\dot{x} \in \Lambda(x)$ für alle $x \in X$

(ii) $\Phi \in \Lambda(x)$, $\Psi \in \Lambda(x) \Rightarrow \Phi \wedge \Psi \in \Lambda(x)$

(iii) $\Psi \geq \Phi$, $\Phi \in \Lambda(x) \Rightarrow \Psi \in \Lambda(x)$ für alle Filter Ψ auf X

Definiert man

$$\Lambda = \{\Lambda(x) \mid x \in X\},$$

so heißt das Paar (X,Λ) Limesraum. Für $\Phi \in \Lambda(x)$ sagt man auch, Φ konvergiere gegen x, oder in Zeichen:

$$\Phi \longrightarrow x \in (X,\Lambda)$$

oder kurz

$$\Phi \longrightarrow x$$

Schließlich werden wir für $\Phi \in \Lambda(x)$ auch die Ausdrucksweise

"(x,Φ) ist zulässiges Paar auf (X,Λ)" benutzen.

Ordnet man jedem Punkt $x \in X$ eines topologischen Raumes $(X,\mathcal{X})$ das System $\Lambda_{\mathcal{X}}(x)$ aller gegen x konvergenten Filter, d.h. aller Filter, die den Umgebungsfilter von x umfassen, zu, so bildet das Paar $(X,\Lambda_{\mathcal{X}})$, wobei $\Lambda_{\mathcal{X}} = \{\Lambda_{\mathcal{X}}(x) \mid x \in X\}$ gesetzt worden ist, einen Limesraum. Also ist jeder topologische Raum in natürlicher Weise ein Limesraum. Gibt es umgekehrt zu einem Limesraum (X,Λ) einen topologischen Raum $(X,\mathcal{X})$ so, daß für alle $x \in X$ gilt:

$$\Lambda(x) = \Lambda_{\mathcal{X}}(x) ,$$

so soll (X,Λ) topologisch heißen.

Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines Limesraumes (X,Λ) definiert man die Adhärenz $a(A)$ durch:

$x \in a(A) \Leftrightarrow$ es gibt ein zulässiges Paar (x,Φ) auf (X,Λ), für das gilt:
Φ besitzt eine Spur auf A, d.h.
$F \cap A \neq \emptyset$ für alle $F \in \Phi$.

$A \subseteq X$ heißt abgeschlossen in (X,Λ), wenn $a(A) = A$ gilt und offen, wenn $X \setminus A$ abgeschlossen ist, was äquivalent ist zu der Aussage:

$U \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn U zu jedem Filter gehört, der gegen einen Punkt aus U konvergiert, wenn also

$$x \in U,\ \Phi \in \Lambda(x) \Rightarrow U \in \Phi$$

gilt. Man beachte, daß der Adhärenzoperator i.a. nicht idempotent ist, i.a. ist $a(A) \subsetneqq a(a(A))$, jedoch bildet das System $\mathcal{O}_\Lambda$ der in (X,Λ) offenen Mengen eine Topologie auf X, deren induzierte Limitierung $\Lambda_{\mathcal{O}_\Lambda}$ mehr konvergente Filter enthält als Λ. Man nennt $(X,\mathcal{O}_\Lambda)$ den zu (X,Λ) assoziierten topologischen Raum.

Es seien (X,Λ) und (X',Λ') Limesräume. Eine Abbildung

$$f : X \longrightarrow X'$$

heißt genau dann $(\Lambda$-Λ'-$)$ stetig, wenn $\Phi \in \Lambda(x)$ stets $f(\Phi) \in \Lambda(f(x))$ für alle $x \in X$ impliziert, wobei $f(\Phi)$ der von

$$\{f(F) \mid F \in \Phi\}$$

erzeugte Filter ist.

Um die Schreibweise zu vereinfachen, werden wir häufiger einen Limesraum mit demselben Symbol bezeichnen wie die unterliegende Menge und eine Abbildung einfach "stetig" nennen, ohne die Limitierungen anzugeben.

(0.2) Spezielle Limesräume

Die folgenden Definitionen sind Übertragungen aus der Topologie und fallen im topologischen Fall mit den üblichen Begriffen zusammen:

Ein Limesraum (X,Λ) heißt

(i) hausdorffsch, wenn gilt

$$\Lambda(x) \cap \Lambda(y) \neq \emptyset \qquad \text{für } x \neq y\ .$$

(ii) regulär, wenn gilt

$$\Phi \in \Lambda(x) \Rightarrow a(\Phi) \in \Lambda(x) \qquad \text{für alle } x \in X,$$

dabei sei $a(\Phi)$ der von $\{a(F) \mid F \in \Phi\}$ erzeugte Filter.

(iii) quasikompakt, wenn jeder Ultrafilter in X konvergiert, d.h. wenn es zu jedem Ultrafilter Φ in X ein $x \in X$ mit $\Phi \in \Lambda(x)$ gibt.

(iv) kompakt, wenn er quasikompakt und hausdorffsch ist.

Um den Begriff der Quasikompaktheit anders zu beschreiben, brauchen wie die folgende

<u>Definition</u>

Ein System $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ von Teilmengen eines Limesraumes (X,Λ) heißt Überdeckungssystem (kurz: Üs) von X, wenn es zu jedem $x \in X$ und zu jedem $\Phi \in \Lambda(x)$ ein $U_{x,\Phi} \in \mathfrak{M}$ gibt mit $x \in U_{x,\Phi}$ und $U_{x,\Phi} \in \Phi$.

Damit können wir den folgenden Satz formulieren (s.[18]):

<u>Satz</u>

Ein Limesraum (X,Λ) ist genau dann quasikompakt, wenn es zu jedem Überdeckungssystem $\mathfrak{M}$ von X ein endliches Teilsystem $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$ gibt, dessen Elemente X überdecken.

(0.3) <u>Induzierte Limitierungen</u>

Man nennt eine Limitierung Λ auf einer Menge X feiner als eine Limitierung Λ', wenn $\Lambda(x) \subseteq \Lambda'(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Man sagt auch, Λ' sei gröber als Λ.

Ebenso wie im topologischen Fall kann man die initiale und die finale Limitierung bezüglich einer Familie von Abbildungen definieren:

Es seien X eine Menge, $(X_\alpha,\Lambda_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von Limesräumen und für jedes $\alpha \in I$ sei $f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ eine Abbildung.

Dann gibt es in der Menge der Limitierungen auf X, für die alle f_α stetig sind, eine gröbste Λ. Man nennt Λ die initiale Limitierung bezüglich der Familie (f_α) oder die von (f_α) induzierte Limitierung, und (X,Λ) besitzt die übliche universelle Eigenschaft. In analoger Weise ist die finale Limitierung definiert. Die wichtigsten Beispiele induzierter Limitierungen sind:

i) Versieht man eine Teilmenge $U \subseteq X$ eines Limesraumes (X,Λ) mit der von der Inklusionsabbildung induzierten Limitierung Λ_U, so heißt (U,Λ_U) Unterraum von (X,Λ).

ii) Es seien $(X_\alpha,\Lambda_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Familie von Limesräumen. Die auf dem kartesischen Produkt $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ von den Projektionen (p_α) induzierte Limitierung $\prod_{\alpha\in I} \Lambda_\alpha$ heißt die Produktlimitierung auf $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$.

iii) Es seien (X,Λ) ein Limesraum, Y eine Menge und $\nu : X \longrightarrow Y$ eine Surjektion. Man nennt Y, versehen mit der von ν induzierten Limitierung Quotientenraum von (X,Λ).

Falls nicht anders bemerkt, sollen Teilmengen, kartesische Produkte und Quotienten stets die induzierte Limitierung tragen.

Für zwei Filter Φ_1 und Φ_2 auf zwei Mengen X_1 bzw. X_2 bezeichne $\Phi_1 \times \Phi_2$ den von

$$\{F_1 \times F_2 \mid F_1 \in \Phi_1,\ F_2 \in \Phi_2\}$$

auf $X_1 \times X_2$ erzeugten Filter.

Es seien (X_1,Λ_1) und (X_2,Λ_2) zwei Limesräume,

$(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2$ und $\Theta \in (\Lambda_1 \times \Lambda_2)(x_1,x_2)$. Dann konvergieren $p_i(\Theta)$ gegen x_i, und es gilt:

$$p_1(\Theta) \times p_2(\Theta) \subseteq \Theta \ .$$

Sind umgekehrt (x_i,Φ_i) zulässige Paare auf (X_i,Λ_i), so gilt:

$$p_i(\Phi_1 \times \Phi_2) \supseteq \Phi_i ,$$

also konvergiert $\Phi_1 \times \Phi_2$ gegen (x_1,x_2).
Damit können wir sagen: Ist h eine Abbildung von $X_1 \times X_2$ in einen weiteren Limesraum Y, so ist h genau dann stetig, wenn für alle zulässigen Paare (x_i,Φ_i) auf X_i folgt, daß $h(\Phi_1 \times \Phi_2)$ gegen $h(x_1,x_2)$ konvergiert.

(0.4) <u>Die Limitierung der stetigen Konvergenz</u>
Es seien (X,Λ) und (X',Λ') zwei Limesräume, dann bezeichne $\mathcal{C}((X,\Lambda),(X',\Lambda'))$ oder kürzer $\mathcal{C}(X,Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von X in Y. Eine Limitierung Γ auf $\mathcal{C}(X,Y)$ heiße zulässig, wenn die Auswertungsabbildung

$$\omega_{X,Y} : \mathcal{C}(X,Y) \times X \longrightarrow Y$$

definiert durch:

$$\omega_{X,Y}(f,x) = f(x) \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{C}(X,Y) \text{ und alle } x \in X$$

$\Gamma \times \Lambda$-Λ'-stetig ist. Man kann nun fragen, ob es auf $\mathcal{C}(X,Y)$ eine gröbste zulässige Limitierung gibt. Diese Limitierung existiert in der Tat und heißt Limitierung der stetigen Konvergenz. Versieht man $\mathcal{C}(X,Y)$ mit dieser Limitierung, so nennt man diesen Limesraum $\mathcal{C}_c(X,Y)$.

Ein Paar (f,Θ) ist genau dann zulässig auf $\mathcal{C}_c(X,Y)$, wenn $\omega_{X,Y}(\Theta\times\Phi)$ für alle zulässigen Paare (x,Φ) auf X gegen $f(x)$ konvergiert, oder kurz:

$$\Theta \longrightarrow f_o \in \mathcal{C}_c(X) \iff (\Phi \longrightarrow x \in X \Rightarrow \omega_{X,Y}(\Theta\times\Phi) \longrightarrow f(x))$$

Es ist nun klar, daß eine Abbildung h von einem Limesraum Z in $\mathcal{C}_c(X,Y)$ genau dann stetig ist, wenn die Kompositionsabbildung $\omega_{X,Y}\circ(h\times id_X)$ stetig ist.Daraus folgt nun weiter, daß eine Abbildung h von einem Limesraum Z in einen Unterraum $U \subseteq \mathcal{C}_c(X)$ genau dann stetig ist, wenn die Abbildung $\omega_{X,Y}|U\times X\circ(h\times id_X)$ stetig ist. Daher nennen wir die Unterraumlimitierung auf U wiederum die Limitierung der stetigen Konvergenz.

Im Falle $Y = \mathbb{R}$ schreibt man für $\mathcal{C}(X,Y)$ kurz $\mathcal{C}(X)$ und entsprechend $\mathcal{C}_c(X)$ für $\mathcal{C}_c(X,\mathbb{R})$ und nennt $\mathcal{C}(X)$ die Funktionenalgebra von X. Bezeichnet $\mathcal{C}_k(X)$ die Menge X, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von X, so ist

$$id : \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathcal{C}_k(X)$$

für jeden Limesraum X stetig und ein Homöomorphismus, wenn X lokalkompakt ist.

Ist $X \neq \emptyset$, so wird $\mathcal{C}(X)$ durch punktweise definierte Operationen zu einer Algebra mit Einselement. Definiert man für $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ die Abbildung

$$\mathcal{C}_c(f) : \mathcal{C}_c(Y) \longrightarrow \mathcal{C}_c(X)$$

durch:

$$\mathscr{C}_c(f)(g) = g \circ f \qquad \text{für alle } g \in \mathscr{C}(Y),$$

so wird $\mathscr{C}_c$ mit diesen Definitionen zu einem Funktor von der Kategorie der Limesräume in sich.

In $\mathscr{C}(X)$ wollen wir noch die folgenden Bezeichnungen benutzen:

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\underline{\alpha} : \mathscr{C}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch:

$$\underline{\alpha}(f) = \alpha \qquad \text{für alle } f \in \mathscr{C}(X).$$

Durch

$$f \leq g \iff f(x) \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in X$$
$$(f,g \text{ aus } \mathscr{C}(X))$$

wird auf $\mathscr{C}(X)$ eine Halbordnung eingeführt, deren positiven Kegel ($= \{f \in \mathscr{C}(X) \quad f \geq \underline{0}\}$) wir $\mathscr{C}^+(X)$ nennen.

Außerdem definieren wir für f und g aus $\mathscr{C}(X)$ die Funktionen $f \vee g$ und $f \wedge g$ durch:

$$(f \vee g)(x) = \sup\{f(x), g(x)\} \qquad \text{für alle } x \in X$$

und

$$(f \wedge g)(x) = \inf\{f(x), g(x)\} \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Schließlich sei $\mathscr{C}^0(X)$ die Menge aller beschränkten Funktionen aus $\mathscr{C}(X)$.

(0.5) c-einbettbare Limesräume

Bekanntlich reicht es zum Studium der algebraischen Eigenschaften der Funktionenalgebra eines topologischen Raumes aus, die eines reellkompakten Raumes zu untersuchen und umgekehrt ist ein reellkompakter Raum durch seine Funktionenalgebra bestimmt (s.[12]). Nun gibt es eine Klasse von Limesräumen, die analoge Eigenschaften bezüglich der mit der Limitierung der stetigen Konvergenz versehenen Funktionenalgebren besitzen, die c-einbettbaren Räume.

Es sei B eine ($\mathbb{R}$ -) Algebra und Λ eine Limitierung auf B. Das Paar (B,Λ) heißt Limesalgebra, wenn die Algebrenoperationen stetig sind. Besitzt B ein Einselement, so bezeichne $\mathcal{H}om\, B$ die Menge aller stetigen, unitären Algebrenhomomorphismen von B in $\mathbb{R}$ und $\mathcal{H}om_c B$ die mit der Limitierung der stetigen Konvergenz versehene Menge $\mathcal{H}om\, B$. Für jeden nicht-leeren Limesraum X ist nach [2] der Raum $\mathcal{C}_c(X)$ eine Limesalgebra, und es gelten die folgenden Aussagen (s.[5]):

(i) Die Abbildung

$$d : \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathcal{C}_c(\mathcal{H}om_c\, \mathcal{C}_c(X))$$

definiert durch:

$$d(f)(\psi) = \psi(f) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{C}(X) \text{ und alle } \psi \in \mathcal{H}om\, \mathcal{C}_c(X)$$

ist ein Isomorphismus und ein Homöomorphismus.

ii) Die Abbildung

$$i_X : X \longrightarrow \mathcal{H}om_c\, \mathcal{C}_c(X)$$

definiert durch:

$$i_X(p)(f) = f(p) \quad \text{für alle } p \in X \text{ und alle } f \in \mathcal{C}(X)$$

ist stetig und surjektiv.

iii) $i_{\mathcal{H}om_c \mathcal{C}_c(X)}$ ist ein Homöomorphismus.

Die Aussage (i) zeigt, daß man $\mathcal{C}_c(X)$ und $\mathcal{C}_c(\mathcal{H}om_c\, \mathcal{C}_c(X))$ algebraisch und topologisch nicht unterscheiden kann.
Definiert man nun

<u>Definition</u>

Ein Limesraum X heißt c-einbettbar, wenn

$$i_X : X \longrightarrow \mathcal{H}om_c\, \mathcal{C}_c(X)$$

ein Homöomorphismus ist ,

so ist ein c-einbettbarer Raum X eindeutig durch $\mathcal{C}_c(X)$ bestimmt. Nach (iii) ist $\mathcal{H}om_c\, \mathcal{C}_c(X)$ für jeden Limesraum X c-einbettbar, so daß man die Diskussion der limitierten Funktionenalgebren von Limesräumen auf die c-einbettbarer beschränken kann.

Schließlich wollen wir noch bemerken, daß ein Unterraum eines c-einbettbaren Limesraumes c-einbettbar ist (s. [4], Kor. 22).

(0.6) Der assoziierte vollständig reguläre Raum

Manchmal erweist es sich als günstig, zu einem Limesraum X einen vollständig regulären Raum zu konstruieren, dessen Funktionenalgebra zu $\mathcal{C}(X)$ isomorph ist und dessen unterliegende Menge mit X eng zusammenhängt, in vielen Fällen sogar übereinstimmt.

Notwendig dafür, daß auf einem Limesraum X eine vollständig reguläre Topologie existiert, deren Funktionenalgebra mit $\mathcal{C}(X)$ übereinstimmt, ist, daß $\mathcal{C}(X)$ die Punkte von X trennt, d.h. daß es zu jedem Paar $(x,y) \in X \times X$ eine stetige Funktion $f \in \mathcal{C}(X)$ gibt, für die $f(x) \neq f(y)$ gilt.

Daher definieren wir auf einem Limesraum X eine Äquivalenzrelation π durch:

$$x \pi y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{C}(X) \qquad (x,y \in X)$$

Es bezeichne

$$\nu : X \longrightarrow X/\pi$$

die natürliche Projektion, und X/π trage die von ν induzierte Limitierung. Dann ist

$$\mathcal{C}(\nu) : \mathcal{C}(X/\pi) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$$

ein Isomorphismus. Versieht man nun X/π mit der von $\mathcal{C}(X/\pi)$ induzierten Topologie, so erhält man einen vollständig regulären Raum, den zu X assoziierten vollständig regulären Raum. Es ist klar, daß die von $\mathcal{C}(X/\pi)$ auf X/π induzierte Topologie gröber ist als die Quotiententopologie.

Trennt nun $\mathcal{C}(X)$ die Punkte von X, so ist π die Gleichheit und $\mathcal{C}(\nu)$ die Identität. In diesem Falle ist also der zu X assoziierte vollständig reguläre Raum die Menge X, versehen mit der von $\mathcal{C}(X)$ induzierten Topologie.

Zum Abschluß sei noch bemerkt, daß die von i_X induzierte Abbildung $\tilde{i}_X$, die das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i_X"] \arrow[dr, "\nu"'] & & \mathcal{H}om_s\,\mathcal{C}_c(X) \\ & X/\pi \arrow[ur, "\tilde{i}_X"'] & \end{tikzcd}$$

ein Homöomorphismus zwischen dem zu X assoziierten vollständig regulären Raum und $\mathcal{H}om_s\,\mathcal{C}_c(X)$ ist, wenn $X \neq \emptyset$ gilt. Dabei bezeichne $\mathcal{H}om_s\,\mathcal{C}_c(X)$ die mit der Topologie der punktweisen Konvergenz versehene Menge $\mathcal{H}om\,\mathcal{C}_c(X)$.

(1) Darstellung linearer, stetiger Funktionale auf $\mathcal{C}_c(X)$

In diesem Kapitel werden wir zeigen, daß sich für jeden c-einbettbaren Limesraum X jedes lineare, stetige Funktional auf $\mathcal{C}_c(X)$ als Integral bezüglich eines Borelmaßes auf einer kompakten Teilmenge von X darstellen läßt. Wesentlich beim Beweis dieses Satzes werden wir benutzen, daß der zu $\mathcal{C}_c(X)$ assoziierte lokalkonvexe Vektorraum im c-einbettbaren Fall $\mathcal{C}_k(X)$ ist, was wir daher zunächst beweisen wollen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wollen wir im folgenden Limesräume stets als nicht-leer voraussetzen.

Es sei (E,Λ) ein Limesvektorraum und P die Menge aller stetigen Halbnormen auf (E,Λ). Die Menge P induziert auf E eine lokalkonvexe Topologie τ, die gröber als Λ ist. In der Tat ist τ die feinste lokalkonvexe Topologie auf E, die gröber ist als Λ, und daher soll (E,τ) als der zu (E,Λ) assoziierte lokalkonvexe Vektorraum bezeichnet werden.

Für $(E,\Lambda) = \mathcal{C}_c(X)$ soll er $\mathcal{C}_{\tau c}(X)$ genannt werden. Es ist klar, daß τc feiner ist als die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von X. Es soll nun gezeigt werden, daß für einen c-einbettbaren Raum X die Identität von $\mathcal{C}_{\tau c}(X)$ in $\mathcal{C}_k(X)$ ein Homöomorphismus ist, d.h. in diesem Falle ist der zu $\mathcal{C}_c(X)$ assoziierte lokalkonvexe Vektorraum $\mathcal{C}_k(X)$.

Es sei X ein Limesraum und $K \subseteq X$ kompakt. Definiert man

$$p_K : \mathscr{C}_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)| \quad \text{für alle } f \in \mathscr{C}(X),$$

so ist p_K eine stetige Halbnorm auf $\mathscr{C}_c(X)$. Weiterhin erzeugt das System

$$\{p_K \mid K \subseteq X,\ K \text{ kompakt}\}$$

die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen auf $\mathscr{C}(X)$. Es bezeichne P wiederum die Menge der stetigen Halbnormen auf $\mathscr{C}_c(X)$, dann ist die Homöomorphie von

$$id : \mathscr{C}_{\tau c}(X) \longrightarrow \mathscr{C}_k(X)$$

äquivalent zu der Aussage:
Zu jedem $p \in P$ existieren eine kompakte Menge $K \subseteq X$ und eine reelle Zahl $\alpha > 0$ mit der Eigenschaft:

$$p \leq \alpha p_K .$$

Es sei $\tilde{P}$ die Menge aller Halbnormen $p \in P$, für die gilt:

(i) $\quad p(f) = p(|f|) \qquad$ für alle $f \in \mathscr{C}(X)$

(ii) $\quad p(f) \leq p(g) \qquad$ für alle f und g aus $\mathscr{C}^+(X)$ mit $f \leq g$.

Wir werden zunächst zeigen, daß die von P und $\tilde{P}$ erzeugten Topologien übereinstimmen.
Aus technischen Gründen beweisen wir die beiden folgenden Lemmata:

Lemma 1

Es sei X ein Limesraum. Definiert man für eine beliebige Teilmenge $F \subseteq \mathcal{C}(X)$

$$\urcorner F = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid \text{es existiert ein } g \in F \text{ mit } |f| \leq |g|\} ,$$

so gilt für jeden Filter Θ *auf* $\mathcal{C}_c(X)$:

$$\Theta \longrightarrow \underline{0} \iff \urcorner\Theta \longrightarrow \underline{0} ,$$

dabei sei $\urcorner\Theta$ *der von* $\{\urcorner F \mid F \in \Theta\}$ *erzeugte Filter.*

Beweis

Es konvergiere Θ gegen $\underline{0}$. Es sei (x,Φ) zulässiges Paar auf X und ε eine positive reelle Zahl. Nach Voraussetzung existieren dann Mengen $U_{\varepsilon,x,\Phi}$ Φ und $F_{\varepsilon,x,\Phi}$ Θ mit:

$|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in U_{\varepsilon,x,\Phi}$ und
für alle $f \in F_{\varepsilon,x,\Phi}$

$|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in U_{\varepsilon,x,\Phi}$ und
für alle $f \in \urcorner F_{\varepsilon,x,\Phi}$,

also konvergiert mit Θ auch $\urcorner\Theta$ gegen $\underline{0}$, die Umkehrung ist klar.

Lemma 2

Es sei ψ *eine positiv homogene, in* $\underline{0}$ *stetige Abbildung von* $\mathcal{C}(X)$ *in* $\mathbb{R}$, *dann ist* ψ *beschränkt, d.h. für jedes* $f_0 \in \mathcal{C}^+(X)$ *ist die Menge* $\psi\{f \in \mathcal{C}(X) \mid -f_0 \leq f \leq f_0\}$ *beschränkt.*

Beweis

Es sei $f_o \in \mathcal{C}^+(X)$ und $A_{f_o} = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid -f_o \leq f \leq f_o\}$.
Nehmen wir an, daß $\psi(A_{f_o})$ nicht beschränkt ist, dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $g_n \in A_{f_o}$ mit:

$$|\psi(g_n)| \geq n ,$$

also

$$|\psi(\frac{g_n}{n})| \geq 1 .$$

Andererseits gilt aber

$$-f_o \leq g_n \leq f_o \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{f_o}{n} \leq \frac{g_n}{n} \leq \frac{f_o}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} ,$$

woraus

$$\frac{g_n}{n} \longrightarrow \underline{0}$$

folgt. Da ψ stetig ist, erhalten wir daraus

$$\psi(\frac{g_n}{n}) \longrightarrow 0 ,$$

also einen Widerspruch zu

$$|\psi(\frac{g_n}{n})| \geq 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} .$$

Nun definieren wir für jedes $p \in P$

$$\tilde{p} : \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch:

$$\tilde{p}(f_o) = \sup\{p(f) \mid f \in \mathcal{C}(X), |f| \leq |f_o|\}$$

$$\text{für alle } f_o \in \mathcal{C}(X) .$$

Nach Lemma 2 ist $\tilde{p}$ wohldefiniert, im folgenden soll gezeigt werden, daß $\tilde{p}$ eine stetige Halbnorm auf $\mathcal{C}_c(X)$ ist:

(i) $\tilde{p}(f) = \tilde{p}(|f|)$ für alle $f \in \mathcal{C}(X)$

$\tilde{p}(f) \leq \tilde{p}(g)$ für alle f, g aus $\mathcal{C}^+(X)$ mit $f \leq g$

$p(f) \leq \tilde{p}(f)$ für alle $f \in \mathcal{C}(X)$

$\tilde{p}(\alpha f) = \alpha \tilde{p}(f)$ für alle $f \in \mathcal{C}(X)$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \geq 0$

Alle vier Aussagen folgen direkt aus der Definition von $\tilde{p}$.

(ii) $\tilde{p}(\alpha f) = |\alpha| \tilde{p}(f)$ für alle $f \in \mathcal{C}(X)$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$:

$\tilde{p}(\alpha f) = \tilde{p}(|\alpha||f|) = |\alpha| \tilde{p}(|f|) = |\alpha| \tilde{p}(f)$

(iii) $\tilde{p}$ ist subadditiv:

Seien f_o, g_o aus $\mathcal{C}^+(X)$ und $h \in \mathcal{C}(X)$ mit $|h| \leq |f_o+g_o| = f_o+g_o$, dann gilt:

$$|(h \wedge f_o) \vee (-f_o)| \leq |f_o|$$

und

$$|h - (h \wedge f_o) \vee (-f_o)| \leq |g_o| ,$$

woraus folgt:

$$p((h \wedge f_o) \vee (-f_o)) \leq \tilde{p}(f_o)$$

und

$$p(h - (h \wedge f_o) \vee (-f_o)) \leq \tilde{p}(g_o)$$

und daher:

$$p(h) \leq p((h \wedge f_o) \vee (-f_o)) + p(h - (h \wedge f_o) \vee (-f_o))$$

$$\leq \tilde{p}(f_o) + \tilde{p}(g_o) \quad ,$$

woraus

$$\tilde{p}(f_o+g_o) \leq \tilde{p}(f_o) + \tilde{p}(g_o)$$

für alle f_o und g_o aus $\mathcal{C}^+(X)$ folgt.
Für beliebige f_o und g_o aus $\mathcal{C}(X)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\tilde{p}(f_o+g_o) = \tilde{p}(|f_o+g_o|) &\leq \tilde{p}(|f_o|+|g_o|) \\ &\leq \tilde{p}(|f_o|) + \tilde{p}(|g_o|) \\ &= \tilde{p}(f_o) + \tilde{p}(g_o)\end{aligned}$$

(iv) $\tilde{p}$ ist stetig:

Es sei $(\underline{0},\Theta)$ zulässiges Paar auf $\mathcal{C}_c(X)$, dann folgt:

$$\urcorner\Theta \longrightarrow \underline{0} \in \mathcal{C}_c(X) .$$

Da p stetig ist, existiert zu jeder positiven reellen Zahl ε ein $F_\varepsilon \in \Theta$ mit den Eigenschaften:

$$F_\varepsilon = \urcorner F_\varepsilon$$

und

$$p(F_\varepsilon) \subseteq (-\varepsilon,\varepsilon) .$$

Sei $f_o \in F_\varepsilon$ und $|f| \leq |f_o|$, dann gilt $f \in F_\varepsilon$ und daher

$$p(f) < \varepsilon ,$$

woraus wir

$$\tilde{p}(f_o) \leq \varepsilon$$

erhalten.
Also gilt:

$$\tilde{p}(F_\varepsilon) \subseteq [-\varepsilon,\varepsilon] .$$

Daher gibt es zu jeder stetigen Halbnorm $p \in P$ eine stetige Halbnorm $\tilde{p} \in \tilde{P}$ mit der Eigenschaft:

$$p \leq \tilde{p} \quad ,$$

woraus folgt, daß P und $\tilde{P}$ in der Tat dieselbe Topologie auf $\mathcal{C}(X)$ erzeugen.

Das folgende, sehr einfach zu beweisende Lemma bildet den Schlüssel des Beweises:

Lemma 3

Für jedes $p \in \tilde{P}$ *ist der Kern von* p *ein abgeschlossenes Ideal in* $\mathcal{C}_c(X)$.

Beweis

Der Kern jeder stetigen Halbnorm auf $\mathcal{C}_c(X)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{C}_c(X)$, also bleibt zu zeigen, daß Ker p gegen Multiplikation mit Elementen aus $\mathcal{C}(X)$ abgeschlossen ist.

Sei also $p \in \tilde{P}$, $f_o \in$ Ker p und $g \in \mathcal{C}(X)$. Definiert man für $n \in \mathbb{N}$

$$g_n = (-\underline{n} \vee g) \wedge \underline{n} \quad ,$$

so konvergiert die Folge (g_n) gegen g und die Folge $(g_n f_o)$ gegen gf_o. Weiterhin gilt:

$$|f_o g_n| \leq n|f_o| \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \; p(f_o g_n) \leq p(nf_o) = np(f_o) = 0.$$

Also liegen alle $f_o g_n$ im Kern von p. Da p stetig ist, folgt, daß $f_o g \in \text{Ker } p$ gilt.

Unser Ziel ist es nun, für jeden c-einbettbaren Raum zu beweisen, daß $N(\text{Ker } p)$ für alle $p \in \tilde{P}$ kompakt ist und daß $p \leq p(\underline{1})\, p_{N(\text{Ker } p)}$ gilt. Zum Beweis der Kompaktheit brauchen wir ein vorbereitendes Lemma:

Lemma 4

Es sei X ein c-einbettbarer Limesraum und $(X,\mathcal{X})$ der assoziierte vollständig reguläre Raum. Weiter sei $\mathfrak{U}$ ein Überdeckungssystem von X. Dann gibt es ein Überdeckungssystem $\mathfrak{W}$ von X mit den Eigenschaften:

(i) $\mathfrak{W}$ *ist Verfeinerung von* $\mathfrak{U}$

(ii) $V \in \mathfrak{W} \Rightarrow X \setminus V \in \mathcal{X}$

Beweis

Es seien (x_o,Φ) zulässiges Paar auf X, $(\underline{O},\Theta)$ zulässiges Paar auf $\mathcal{C}_c(X)$ und $f_o \in \mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X,\mathcal{X})$, dann gilt:

$$\omega(\Theta + f_o \times \Phi) \longrightarrow f_o(x_o) \quad ,$$

also existieren zu jeder positiven reellen Zahl ε stets Mengen $F_\varepsilon \in \Theta + f_o$ und $U_\varepsilon \in \Phi$ mit:

$$f(U_\varepsilon) \subseteq f_o(x_o) + (-\varepsilon,\varepsilon) \qquad \text{für alle } f \in F_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad f(U_\varepsilon^-) \subseteq f_o(x_o) + [-\varepsilon,\varepsilon] \qquad \text{für alle } f \in F_\varepsilon,$$

wobei U_ε^- die abgeschlossene Hülle von U_ε in $(X,\mathcal{X})$ bezeichnet.

Es sei Φ^- der von $\{U^- \mid U \in \Phi\}$ erzeugte Filter, dann haben wir für alle $f_o \in \mathcal{C}(X)$ und alle gegen $\underline{0}$ konvergenten Filter Θ gezeigt:

$$\omega(\Theta + f_o \times \Phi^-) \longrightarrow f_o(x_o) \quad .$$

Da aber X ein c-einbettbarer Raum ist, folgt daraus:

$$\Phi^- \longrightarrow x \quad .$$

Sei nun $\mathfrak{U}$ ein Überdeckungssystem von X, dann gibt es zu jedem zulässigen Paar (x,Φ) auf X ein $U_{x,\Phi} \in \Phi^-$ mit:

$$x \in U_{x,\Phi} \in \mathfrak{U} \, ,$$

nach der Definition von Φ^- existieren dann $V_{x,\Phi} \in \Phi$ mit:

$$V_{x,\Phi} = V^-_{x,\Phi} \subseteq U_{x,\Phi} \quad ,$$

wählt man

$$\mathfrak{W} = \{V_{x,\Phi} \cup \{x\} \mid (x,\Phi) \text{ zulässiges Paar auf } X\} \quad ,$$

so ist $\mathfrak{W}$ ein Üs, das den Bedingungen (i) und (ii) genügt. Nun können wir die Kompaktheit von N(Ker p) im c-einbettbaren Fall beweisen:

<u>Lemma 5</u>

Es sei X *ein* c-*einbettbarer Limesraum,* $p \in \widetilde{P}$ *und*

$$K = N(\text{Ker } p) = \{x \in X \mid f(x) = 0 \text{ für alle } f \in \text{Ker } p\} \, ,$$

dann ist K *kompakt.*

Beweis

OBdA sei $K \neq \emptyset$. Nach (0.2) reicht es, zu zeigen, daß jedes Überdeckungssystem von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Sei also $\tilde{\mathfrak{U}}$ ein Üs von K. Da K abgeschlossen ist, bildet das System

$$\mathfrak{U} = \{U \cup (X \setminus K) \mid U \in \tilde{\mathfrak{U}}\}$$

ein Üs für X, denn sei (x,Φ) zulässiges Paar auf X, so gibt es drei Fälle:

(a) $x \in X \setminus K$

Da $X \setminus K$ offen ist, gilt:

$$X \setminus K \in \Phi,$$

also gilt:

$$(X \setminus K) \cup U \in \Phi,$$

wobei $U \in \tilde{\mathfrak{U}}$ beliebig ist; es folgt:

$$x \in (X \setminus K) \cup U \in \mathfrak{U} .$$

(b) $x \in K$, Φ besitzt eine Spur auf K

Es sei

$$\Phi_K = \{U \cap K \mid U \in \Phi\} .$$

Es gilt:

$$\Phi_K \longrightarrow x \in K ,$$

da $\tilde{\mathfrak{U}}$ ein Üs von K ist, existiert ein $U \in \Phi$ mit:

$$x \in U \cap K \in \tilde{\mathfrak{U}} ,$$

aus

$$U \subseteq (U \cap K) \cup (X \setminus K)$$

folgt:

$$x \in (U \cap K) \cup (X \setminus K) \in \Phi \cap \mathfrak{U} .$$

(c) $x \in K$, es gibt ein $U_0 \in \Phi$ mit $U_0 \cap K = \emptyset$

Wir erhalten:

$$U_0 \subseteq X \setminus K ,$$

also auch:

$$U_0 \subseteq (X \setminus K) \cup V_0 ,$$

wobei $V_0 \in \widetilde{\mathfrak{U}} \cap \dot{x}$ beliebig gewählt ist, daher ist

$$x \in (X \setminus K) \cup V_0 \in \Phi \cap \mathfrak{U} .$$

Sei nun $\mathfrak{W}$ ein Üs von X, für das die Bedingungen (i) und (ii) des Lemmas 4 gelten.
Für jedes $V \in \mathfrak{W}$ und jede positive reelle Zahl ε definiere man:

$$F_{V,\varepsilon} = \{ f \in \mathcal{C}(X) \mid f(V) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon) \} .$$

Es gilt $\underline{0} \in F_{V,\varepsilon}$ für alle $V \in \mathfrak{W}$ und alle $\varepsilon > 0$, also ist

$$\{ F_{V,\varepsilon} \mid V \in \mathfrak{W} , \varepsilon \in \mathbb{R} , \varepsilon > 0 \}$$

eine Filtersubbasis, der erzeugte Filter heiße Θ. Da $\mathfrak{W}$ ein Üs von X ist, konvergiert Θ gegen $\underline{0}$ und wegen der Stetigkeit von p konvergiert $p(\Theta)$ gegen 0. Also gibt es Mengen $V_i \in \mathfrak{W}$ $(i = 1,\dots,n)$ und eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ mit:

$$p(F_{V_1,\varepsilon} \cap \ldots \cap F_{V_n,\varepsilon}) \subseteq [-1,1] \; .$$

Nun wollen wir zeigen, daß

$$\bigcup_{i=1}^{n} V_i \supseteq K$$

gilt. Nehmen wir an, daß es ein $x_o \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ gibt.

Da alle V_i in dem zu X assoziierten vollständig regulären Raum abgeschlossen sind, existiert eine stetige Funktion $f_o \in \mathcal{C}(X)$, für die gilt:

$$f_o(\bigcup V_i) = \{0\}$$

und

$$f_o(x_o) = 1 \; .$$

Es folgt:

$$kf_o \in F_{V_i,\varepsilon} \quad \text{für } i=1,\ldots,n \text{ und alle } k \in \mathbb{N} \; ,$$

also

$$p(kf_o) \leq 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow p(f_o) = 0 \; .$$

Da Ker p ein abgeschlossenes Ideal ist, gilt nach [3], Thm 2:

$$f \in \text{Ker } p \Leftrightarrow f(N(\text{Ker } p)) = \{0\} \; .$$

Da $f_o(K) = \{0\}$ gilt, ist aber $f_o \notin \text{Ker } p$. Dieser Widerspruch zeigt, daß in der Tat

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i$$

gilt.

Da $\mathfrak{W}$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{U}$ ist, gibt es Elemente U_i $(i=1,\ldots,)$ aus $\mathfrak{U}$ mit:

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \quad ,$$

woraus folgt, daß $\widetilde{\mathfrak{U}}$ eine endliche Teilüberdeckung von K enthält.

Damit haben wir gezeigt, daß K kompakt ist. Das folgende Lemma beschließt diesen Teil des 1. Kapitels:

Lemma 6

Es sei X *ein* c-*einbettbarer Raum*, $p \in \widetilde{P}$ *und* K *wie oben. Dann gilt:*

$$p \leq p(\underline{1})p_K \quad .$$

Beweis

Zunächst bemerken wir, daß K nach Lemma 5 kompakt ist. Nun sei $f \in \mathcal{C}(X)$ und $f(K) \subseteq [-1,1]$. Definiert man

$$g = (f \wedge \underline{1}) \vee (-\underline{1}) \quad ,$$

so folgt

$$(f-g)(K) = \{0\}$$

und

$$|g| \leq \underline{1} \quad .$$

Erneut zeigt [3], Thm 2, daß $p(f-g) = 0$ gilt, wir erhalten:

$$p(f) \leq p(f-g) + p(g) \leq p(\underline{1}) \ .$$

Gilt nun $p_K(f) \neq 0$, so folgt:

$$p_K\left(\frac{f}{p_K(f)}\right) = 1$$

und damit:

$$p\left(\frac{f}{p_K(f)}\right) \leq p(\underline{1})$$

$$\Leftrightarrow \quad p(f) \leq p(\underline{1})\ p_K(f) \ .$$

Da $p(f) = 0$ äquivalent zu $p_K(f) = 0$ ist, ist damit die Behauptung bewiesen.

Zusammenfassend können wir also sagen:

<u>Satz 1</u>

Es sei X ein c-einbettbarer Limesraum, dann ist der zu $\mathcal{C}_c(X)$ assoziierte lokalkonvexe Vektorraum $\mathcal{C}_k(X)$.

<u>Beweis</u>

Für $p \in P$ definiere man $\tilde{p}$ und K durch:

$$\tilde{p}(f_o) = \sup\{p(f) \mid f \in \mathcal{C}(X),\ |f| \leq |f_o|\} \qquad \text{für alle } f_o \in \mathcal{C}(X)$$

und

$$K = N(\operatorname{Ker} \tilde{p}) \ .$$

Nach den obigen Erläuterungen ist $\tilde{p}$ eine stetige Halbnorm auf $\mathcal{C}_c(X)$, die Menge K kompakt und es gilt:

$$p \leq \tilde{p}(\underline{1})\ p_K \ .$$

Nun können wir das Darstellungsproblem in einfacher Weise auf den kompakten Fall zurückführen und lösen:

Satz 2

Es sei X *ein* c-*einbettbarer Raum und* ψ *ein lineares, stetiges Funktional auf* $\mathcal{C}_c(X)$. *Dann gibt es eine kompakte (topologische) Menge* $K_\psi \subseteq X$ *und zwei nichtnegative, endliche, reguläre Borelmaße* μ_1 *und* μ_2 *auf* K_ψ *so, daß gilt:*

Für jedes $f \in \mathcal{C}(X)$ *ist* $f|K_\psi$ *integrabel bezüglich* $\mu_1 - \mu_2$ *und*

$$\psi(f) = \int_{K_\psi} f|K_\psi \, d(\mu_1 - \mu_2) \, .$$

Beweis

Aus der Voraussetzung folgt, daß $|\psi|$ eine stetige Halbnorm auf $\mathcal{C}_c(X)$ ist. Sei $p = \widetilde{|\psi|}$ und $K_\psi = N(\mathrm{Ker}\ p)$. Nach Satz 1 ist K_ψ kompakt und die folgende Ungleichung ist richtig:

$$|\psi| \leq p \leq p(\underline{1}) \, p_K \, .$$

Defininiert man nun

$$\chi : \mathcal{C}(K_\psi) \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$\chi(f) = \psi(\hat{f}) \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{C}(K_\psi) \, ,$$

wobei $\hat{f}$ eine beliebige Fortsetzung von f auf X ist, so sieht man leicht, daß χ wohldefiniert ist.

Wegen

$$|\chi(f)| = |\psi(\hat{f})| \leq p(\underline{1})\, p_{K_\psi}(\hat{f}) = p(\underline{1}) \sup_{x \in K_\psi} |f(x)|$$

ist χ stetig bezüglich der Supremumsnorm auf $\mathcal{C}(K_\psi)$.
Da K_ψ als Unterraum eines c-einbettbaren Limesraumes wieder c-einbettbar ist, ist K_ψ nach [3], Satz 4 topologisch. Wir haben also für χ die bekannten Darstellungssätze (s. z.B. [10] und [13]) zur Verfügung. Es gibt also Maße μ_1 und μ_2 auf K_ψ, die den Bedingungen des Satzes genügen und für die gilt:
Jedes $f \in \mathcal{C}(K\ )$ ist integrierbar bezüglich $\mu_1 - \mu_2$ und

$$\chi(f) = \int_{K_\psi} f \, d(\mu_1 - \mu_2) \quad .$$

Aus der Definition von χ folgt nun sofort, daß sich ψ in der behaupteten Weise darstellen läßt.
Zum Abschluß wollen wir noch einige Bemerkungen anfügen, die in diesem Zusammenhang nützlich sind:

(1) Ist ψ nichtnegativ, so ist $\mu_2 = \underline{0}$, d.h. ψ läßt sich durch ein nichtnegatives Maß darstellen.

(2) Die Abbildungen ψ_+ bzw. ψ_- definiert durch:

$$\psi_+(f) = \int_{K_\psi} f|K_\psi \, d\mu_1$$

und

$$\psi_-(f) = \int_{K_\psi} f|K_\psi \, d\mu_2$$

sind nichtnegative, lineare, stetige Funktionale auf $\mathscr{C}_c(X)$ und es gilt:

$$\psi = \psi_+ - \psi_- .$$

Also läßt sich jedes lineare, stetige Funktional auf $\mathscr{C}_c(X)$ in die Differenz zweier nichtnegativer Funktionale derselben Art zerlegen.

(3) Es sei ψ nichtnegativ und K_ψ wie oben, dann gilt für alle $f \in \mathscr{C}^+(X)$:

$$f(K_\psi) \neq \{0\} \Leftrightarrow \psi(f) > 0 .$$

Beweis

Aus $f(K_\psi) \neq \{0\}$ folgt $p(f) > 0$, also gibt es eine Funktion $g \in \mathscr{C}(X)$ mit:

$$|g| \leq f$$

und

$$|\psi(|g|)| = \psi(|g|) > 0 ,$$

also gilt:

$$0 < \psi(|g|) \leq \psi(f) ,$$

da ψ nichtnegativ ist.

Die Umkehrung der Aussage folgt aus der Darstellung von ψ als Integral über K_ψ.

(4) Ist ψ nichtnegativ, so ist K_ψ eine minimale kompakte Menge, über die sich ψ als Integral darstellen läßt.

Beweis

Sei $K \subseteq K_\psi$ eine kompakte Menge in X und ν ein Maß auf K so, daß $f|K$ für alle $f \in \mathcal{C}(X)$ bezüglich ν integrabel ist und daß gilt:

$$\psi(f) = \int_K f|K \, d\nu \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{C}(X) .$$

Nehmen wir an, es gebe ein $x_o \in K_\psi \setminus K$. Da K kompakt ist, ist K in dem zu X assoziierten vollständig regulären Raum abgeschlossen. Da X ein c-einbettbarer Raum ist, trennt $\mathcal{C}(X)$ die Punkte von X, also gibt es eine stetige Funktion $f_o \in \mathcal{C}^+(X)$, für die gilt:

$$f_o(K) = \{0\}$$

und

$$f_o(x_o) = 1 .$$

Aus der Darstellung von ψ als Integral über K folgt:

$$\psi(f_o) = 0 ,$$

was jedoch (3) widerspricht, da f_o auf K_ψ nicht verschwindet.

(2) Die c-Reflexivität von $\mathcal{C}_c(X)$

Ein Vektorraum heiße Limesvektorraum, wenn er eine Limitierung trägt, bezüglich derer Addition und Skalarmultiplikation stetig sind.

Für einen ($\mathbb{R}$-) Limesvektorraum E bezeichne $\mathcal{L}_c E$ die Menge aller linearen, stetigen Funktionale auf E, versehen mit der Limitierung der stetigen Konvergenz.
Nach [2], Satz 15 ist $\mathcal{L}_c E$ ebenfalls ein Limesvektorraum, so daß der Raum $\mathcal{L}_c \mathcal{L}_c E$ wohldefiniert ist. Nun gibt es einen stetigen Homomorphismus von E in $\mathcal{L}_c \mathcal{L}_c E$, dessen Existenz wir in dem folgenden Lemma etablieren wollen:

Lemma 1

Für jeden Limesvektorraum E *ist die Abbildung*

$$j_E : E \longrightarrow \mathcal{L}_c \mathcal{L}_c E$$

definiert durch:

$$j_E(f)(\psi) = \psi(f) \qquad \text{für alle } f \in E \text{ und alle } \psi \in \mathcal{L}_c E$$

ein stetiger Homomorphismus.

Beweis

Es sei $f \in E$ und $(\underline{O},\Phi)$ zulässiges Paar auf $\mathcal{L}_c E$. Dann konvergiert $(\omega_X | \mathcal{L}_c E \times E)(\Phi \times \dot{f})$ gegen 0. Das heißt aber, daß $j_E(f)$ stetig ist.

j_E ist genau dann stetig, wenn die Abbildung

$$(\omega_{\mathcal{L}_c E} | \mathcal{L}_c \mathcal{L}_c E \times \mathcal{L}_c E) \circ (j_E \times id_{\mathcal{L}_c E}) : E \times \mathcal{L}_c E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f, \psi) \longmapsto \psi(f)$$

stetig ist, was jedoch direkt aus der Definition der stetigen Konvergenz folgt.
Die Homomorphiebeweise lassen sich durch einfaches Ausrechnen führen und sollen daher übergangen werden.
Wie üblich definiert man nun:

<u>Definition</u>

Ein Limesvektorraum E *heißt* c-*reflexiv, wenn* j_E *ein Homöomorphismus ist.*

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, daß für jeden Limesraum X der Limesvektorraum $\mathcal{C}_c(X)$ ein c-reflexiver Raum ist. Dazu betrachten wir zunächst die Abbildung

$$i_X : X \longrightarrow \mathcal{L}_c \mathcal{C}_c(X)$$

definiert durch:

$$i_X(p)(f) = f(p) \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{C}(X) \text{ und alle } p \in X .$$

Aus der Definition der stetigen Konvergenz folgt sofort, daß i_X wohldefiniert und stetig ist.
Es gilt nun der folgende Satz:

<u>Satz 1</u>

Für jeden Limesraum X liegt die lineare Hülle des Bildes von i_X *dicht in* $\mathcal{L}_c \mathcal{C}_c(X)$.

Der Beweis zerfällt in zwei Teile:

(1) Der Raum X sei c-einbettbar

Aus der Bemerkung 2 in Kapitel 1, Satz 2 können wir schließen, daß wir uns darauf beschränken können, nichtnegative, lineare, stetige Funktionale zu approximieren. Sei nun $\psi \in \mathcal{L}\mathcal{C}_c(X)$ ein nichtnegatives Funktional und es gelte

$$\psi\{\underline{\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{0\} \quad ,$$

dann verschwindet ψ auf $\mathcal{C}^0(X)$ und da für jedes $f \in \mathcal{C}(X)$ die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch:

$$f_n = ((-\underline{n}) \vee f) \wedge \underline{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gegen f konvergiert, folgt aus der Stetigkeit von ψ, daß ψ identisch 0 ist. Aus diesen Erwägungen heraus sei im folgenden $\psi_o \in \mathcal{L}\mathcal{C}_c(X)$ ein nichtnegatives Funktional mit $\psi_o(\underline{1}) = 1$. Nach Kapitel 1, Satz 2 existiert dann eine kompakte Menge $K \subseteq X$ und ein nichtnegatives Borelmaß γ_K auf K, für das gilt:

Für alle $f \in \mathcal{C}(X)$ ist $f|K$ integrabel bezüglich γ_K und

$$\psi_o(f) = \int_K f|K \, d\gamma_K \quad .$$

Es ist $\gamma_K(K) = 1$, da $\psi_o(\underline{1}) = 1$ gilt. Es sei

$$\mathcal{R}(X) = \{f^{-1}(\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}) \mid f \in \mathcal{C}(X)\} ,$$

dann definieren wir eine Indexmenge I durch:

$$\{P_1,\ldots,P_n\} \in I \iff P_i \in \mathcal{R}(X) \quad \text{für } i=1,\ldots,n$$
$$\text{und} \quad \bigcup_{i=1}^{n} P_i \supseteq K .$$

I wird geordnet, indem wir für zwei Elemente $\{P_1,\ldots,P_n\}$ und $\{Q_1,\ldots,Q_m\}$ aus I definieren:

$$\{P_1,\ldots,P_n\} \succ \{Q_1,\ldots,Q_m\}$$

$$\iff \quad \text{zu jedem } i \in \{1,\ldots,n\} \text{ gibt es ein } j_i \in \{1,\ldots,m\} \text{ mit } P_i \subseteq Q_{j_i}$$

Man sieht leicht, daß I mit diesen Definitionen ein gerichtetes System ist.

Nun werden wir zu jedem $\alpha \in I$ ein ψ_α aus der linearen Hülle von $i_X(X)$ konstruieren:

Sei $\alpha = \{P_1,\ldots,P_n\} \in I$, dann gibt es (wie wir gleich zeigen werden) Borelmengen $Q_1(\alpha),\ldots,Q_{m_\alpha}(\alpha)$ mit:

(i) $Q_i(\alpha) \subseteq P_{j_i}$ für $i=1,\ldots,m_\alpha$

(ii) $Q_i(\alpha) \cap Q_j(\alpha) = \emptyset$ für $i \neq j$

(iii) $Q_i(\alpha) \cap K \neq \emptyset$ für $i=1,\ldots,m_\alpha$

(iv) $\bigcup_{i=1}^{m} Q_i(\alpha) \supseteq K$

(Man erhält die $Q_i(\alpha)$ z.B. dadurch, daß man

$$\tilde{P}_i = P_i \setminus \bigcup_{i>j} P_j$$

setzt und die $\tilde{P}_i$, die K nicht schneiden, wegläßt.)

Nun seien für jedes $\alpha \in I$ das System $Q_1(\alpha),\ldots,Q_m(\alpha)$ und $x_\nu(\alpha) \in Q_\nu(\alpha) \cap K$ $(\nu=1,\ldots,m_\alpha)$ fest gewählt. Dann definiere man:

$$\psi_\alpha = \sum_{\nu=1}^{m} \gamma_K(K \cap Q_\nu(\alpha))\, i_X(x_\nu(\alpha)) \;.$$

Es sei Φ der von der Moore-Smith-Folge $(\psi_\alpha)_{\alpha\in I}$ erzeugte Filter.

Behauptung: $\Phi \longrightarrow \psi_o \in \mathcal{L}_c\, \mathcal{C}_c(X)$

Beweis:

Es sei (f_o,Θ) zulässiges Paar auf $\mathcal{C}_c(X)$. Sei weiterhin ε eine positive reelle Zahl, dann muß gezeigt werden:

Es existieren $\alpha_\varepsilon \in I$ und $F_\varepsilon \in \Theta$ mit:

$$|\psi_\alpha(f) - \psi_o(f_o)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } \alpha \geqslant \alpha_\varepsilon \text{ und alle } f \in F_\varepsilon .$$

Nun gilt:

(i) $$\Theta \longrightarrow f_o \in \mathcal{C}_c(X)$$

$$\Theta \longrightarrow f_o \in \mathcal{C}_k(X) \quad ,$$

also existiert eine Menge $F_1 \in \Theta$ mit:

$$|f(x) - f_o(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{für alle } f \in F_1 \text{ und alle } x \in K .$$

(ii)

$$\Theta \longrightarrow f_o \in \mathcal{C}_c(X)$$

$$\psi_o(\Theta) \longrightarrow \psi_o(f_o) \in \mathbb{R} ,$$

also existiert eine Menge $F_2 \in \Theta$ mit:

$$|\psi_o(f) - \psi_o(f_o)| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{für alle } f \in F_2 .$$

(iii) Es ist $f_o \in \mathcal{C}(X)$ und $K \subseteq X$ kompakt, also existiert ein $\alpha_o = \{P'_1, \ldots, P'_m\} \in I$ mit:

$$f_o(P'_i \cap K) - f_o(P'_i \cap K) \subseteq \left(-\frac{\varepsilon}{4} , \frac{\varepsilon}{4} \right) \qquad \text{für } i=1,\ldots,m .$$

Sei $\alpha = \{P_1, \ldots, P_n\} \succ \alpha_o$, dann gilt:

$$P_k \subseteq P'_{j_k} \qquad \text{für } k=1,\ldots,n$$

und

$$Q_i(\alpha) \subseteq P_{l_i} \qquad \text{für } i=1,\ldots,m_\alpha .$$

Also gibt es zu jedem $i \in \{1,\ldots,m_\alpha\}$ ein $s_i \in \{1,\ldots,m\}$ mit:

$$Q_i(\alpha) \subseteq P'_{s_i} .$$

Ais (iii) folgt dann für $i \in \{1,\ldots,m_\alpha\}$:

$$f_o(Q_i(\alpha)\ K) - f_o(Q_i(\alpha)\ K) \subseteq \left(-\frac{\varepsilon}{4} , \frac{\varepsilon}{4} \right) .$$

Definiert man nun $F_\varepsilon = F_1 \cap F_2$, so gilt für alle $\alpha \succ \alpha_o$, alle $f \in F_\varepsilon$ und jedes $x \in Q_i(\alpha) \cap K$:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_i(\alpha))| &< |f(x) - f_o(x)| \\ &\quad + |f_o(x) - f_o(x_i(\alpha))| \\ &\quad + |f_o(x_i(\alpha)) - f(x_i(\alpha))| \\ &< \tfrac{3}{4}\varepsilon\end{aligned}$$

nach (i) und den obigen Erörterungen, da $x_i(\alpha) \in Q_i(\alpha) \cap K$ nach Definition gilt.

Also gilt für alle $\alpha \succ \alpha_o$ und alle $f \in F_\varepsilon$:

(Es wird stets von i=1 bis m_α summiert :)

$$\begin{aligned}&|\psi_\alpha(f) - \psi_c(f)| \\ &= |\int_K f|K \, d\gamma_K - (\sum \gamma_K(K \cap Q_i(\alpha))\, i_X(x_i(\alpha)))(f)| \\ &= |\sum \int_{K \cap Q_i(\alpha)} f|K \, d\gamma_K - \sum \gamma_K(K \cap Q_i(\alpha)) f(x_i(\alpha))| \\ &= |\sum \int_{K \cap Q_i(\alpha)} (f|K - \underline{f(x_i(\alpha))}) \, d\gamma_K | \\ &\leq \sum \int_{K \cap Q_i(\alpha)} |(f|K - \underline{f(x_i(\alpha))})| d\gamma_K < \tfrac{3}{4}\varepsilon \sum \int_{K \cap Q_i(\alpha)} d\gamma_K \\ &= \tfrac{3}{4}\varepsilon \, .\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir für alle $f \in F_\varepsilon$ und alle $\alpha \succ \alpha_o$:

$$
\begin{aligned}
|\psi(f) - \psi_o(f_o)| &\leq |\psi(f) - \psi_o(f)| + |\psi_o(f) - \psi_o(f_o)| \\
&< \tfrac{3}{4}\varepsilon + |\psi_o(f) - \psi_o(f_o)| \\
&< \tfrac{3}{4}\varepsilon + \tfrac{\varepsilon}{4} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

nach (ii).

Damit ist der Satz im c-einbettbaren Fall bewiesen.

Bevor wir uns dem allgemeinen Fall zuwenden, bemerken wir das Folgende:

Sind E und F Limesvektorräume und ist f eine lineare, stetige Abbildung von E in F, so gilt:

$$\mathcal{T}_c(f)(\mathcal{L}_c F) \subseteq \mathcal{L}_c E \quad .$$

Definieren wir daher

$$\mathcal{L}_c f : \mathcal{L}_c F \longrightarrow \mathcal{L}_c E$$

durch:

$$(\mathcal{L}_c f)(\psi) = (\mathcal{T}_c f)(\psi) \qquad \text{für alle } \psi \in \mathcal{L}_c F,$$

so wird $\mathcal{L}_c$ ein Funktor von der Kategorie der Limesvektorräume in sich.

(2) Für einen beliebigen Limesraum X ist $\mathcal{H}om_c \mathcal{T}_c(X)$ c-einbettbar, und das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "\tilde{i}_X"] & \mathcal{L}_c\mathcal{C}_c(X) \arrow[d, "\mathcal{L}_c\mathcal{C}_c(\tilde{i}_X)"] \\
\mathcal{H}om_c\mathcal{C}_c(X) \arrow[r, "i_{\mathcal{H}om_c\mathcal{C}_c(X)}"] & \mathcal{L}_c\mathcal{C}_c(\mathcal{H}om_c\mathcal{C}_c(X))
\end{tikzcd}$$

(Zur Definition von i_X s. (0.6).)

Nun ist $\mathcal{L}_c\mathcal{C}_c(\tilde{i}_X)$ ein Homöomorphismus und i_X surjektiv (s. (0.6)). Bezeichnet man mit V( ) die lineare Hülle und setzt zur Abkürzung $i = \mathcal{L}_c\mathcal{C}_c(i_X)$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
a(V(i_X(X))) &= i^{-1}(i(aV(i_X(X)))) \\
&= i^{-1}(aV(i(i_X(X)))) \\
&= i^{-1}(aV(i_{\mathcal{H}om_c\mathcal{C}_c(X)}(\tilde{i}_X(X)))) \\
&= i^{-1}(aV(i_{\mathcal{H}om_c\mathcal{C}_c(X)}(\mathcal{H}om_c\mathcal{C}_c(X)))) \\
&= i^{-1}(\mathcal{L}_c\mathcal{C}_c(\mathcal{H}om_c\mathcal{C}_c(X))) \\
&= \mathcal{L}_c\mathcal{C}_c(X),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Mit Hilfe des Satzes 1 können wir nun die c-Reflexivität von $\mathcal{C}_c(X)$ leicht beweisen:

Satz 2

Für jeden Limesraum X ist die Abbildung

$$j_{\mathcal{C}_c(X)} : \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathcal{L}_c\mathcal{L}_c\mathcal{C}_c(X)$$

ein Homöomorphismus mit der Inversen

$\mathcal{C}_c(i_X)|\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c\mathcal{C}_c(X)$, *d.h.* $\mathcal{C}_c(X)$ *ist c-reflexiv.*

Beweis

Wir setzen $i^* = \mathcal{C}_c(i_X)|\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c\mathcal{C}_c(X)$, dann gilt für alle $f \in \mathcal{C}(X)$ und alle $x \in X$:

$$\begin{aligned} i^*(j_{\mathcal{C}_c(X)}(f)(x) &= j_{\mathcal{C}_c(X)}(f)(i_X(x)) \\ &= i_X(x)(f) \\ &= f(x) , \end{aligned}$$

es folgt:

$$i^* \circ j_{\mathcal{C}_c(X)} = id_{\mathcal{C}_c(X)} .$$

Für $T \in \mathcal{L}_c\mathcal{L}_c\mathcal{C}_c(X)$ und $x \in X$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} j_{\mathcal{C}_c(X)}(i^*(T))(i_X(x)) &= i_X(x)(i^*(T)) \\ &= i^*(T)(x) \\ &= T(i_X(x)), \end{aligned}$$

also stimmen $j_{\mathcal{C}_c(X)}(i^*(T))$ und T auf $i_X(X)$ überein. Da beide Abbildungen linear und stetig sind, folgt aus Satz 1, daß $j_{\mathcal{C}_c(X)}(i^*(T))$ und T übereinstimmen. Es gilt also:

$$j_{\mathcal{C}_c(X)}(i^*(T)) = T \quad \text{für alle } T \in \mathcal{L}_c\mathcal{L}_c\mathcal{C}_c(X)$$

und daher

$$j_{\mathcal{C}_c(X)} \circ i^* = id_{\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c\mathcal{C}_c(X)} \quad .$$

(3) <u>D u a l i t ä t</u>

Für eine lokalkompakte, abelsche Gruppe Γ sei $\hat{\Gamma}$ die Charaktergruppe von Γ, d.h. die Gruppe aller stetigen Gruppenhomomorphismen von Γ in den Einheitskreis $\mathbb{D}$ ($= \{z\in\mathbb{C} \mid |z| = 1\}$). Versieht man Γ mit der kompakt-offenen Topologie, so erhält man wiederum eine lokalkompakte, abelsche Gruppe, deren Charaktergruppe wir mit $\hat{\hat{\Gamma}}$ bezeichnen. Nun besagt das Pontrjaginsche Dualitätstheorem, daß $\hat{\hat{\Gamma}}$ in natürlicher Weise zu Γ isomorph und homöomorph ist. Diese Theorie soll in diesem Kapitel in der folgenden Weise ausgedehnt werden:
Es sei E ein Limesvektorraum und $\mathcal{G}_c E$ die Gruppe der stetigen Gruppenhomomorphismen von der E unterliegenden Limesgruppe in $\mathbb{D}$, versehen mit der Limitierung der stetigen Konvergenz. Weiterhin sei $\mathcal{G}_c\mathcal{G}_c E$ die Charaktergruppe von $\mathcal{G}_c E$, jedoch mit der stetigen Konvergenz versehen. Ist dann E ausgeglichen (d.h. konvergiert mit jedem Filter Θ auf E, der gegen 0 konvergiert, auch $[-1,1]\cdot\Theta$ gegen 0) und c-reflexiv, so ist die kanonische Einbettung von E in $\mathcal{G}_c\mathcal{G}_c E$ ein Homöomorphismus (und also auch ein Gruppenisomorphismus). Aus Kapitel 2 folgt dann leicht, daß $\mathcal{G}_c\mathcal{G}_c\mathcal{C}_c(X)$ für jeden Limesraum X in natürlicher Weise zu $\mathcal{C}_c(X)$ homöomorph ist.

<u>Definition</u>

Für eine abelsche Limesgruppe A *sei* $\mathcal{G}A$ *die Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen von* A *in den Einheitskreis* $\mathbb{D}$*, und* $\mathcal{G}_c A$ *bezeichne die Menge* $\mathcal{G}A$*, versehen mit der Limitierung der stetigen Konvergenz.*

Zusammen mit der punktweisen Multiplikation wird $\mathcal{G}A$ zu einer abelschen Gruppe und $\mathcal{G}_c A$ zu einer Limesgruppe (s.[2], Satz 13).

Zunächst wollen wir die Existenz eines Morphismus von A in $\mathcal{G}_c \mathcal{G}_c A$ zeigen:

<u>Lemma 1</u>

Für jede abelsche Limesgruppe A *ist die kanonische Abbildung*

$$\kappa_A : A \longrightarrow \mathcal{G}_c \mathcal{G}_c A$$

definiert durch:

$$(\kappa_A(f)(\chi) = \chi(f) \qquad \text{für alle } f \in A \text{ und alle } \chi \in \mathcal{G}A$$

ein stetiger Gruppenhomomorphismus.

Der Beweis der Stetigkeit von $\kappa_A(f)$ und κ_A folgt direkt aus der Definition der stetigen Konvergenz, die Homomorphieeigenschaften sind trivial.

Um weitere Aussagen zu gewinnen, werden wir im folgenden den Fall betrachten, daß die abelsche Gruppe die einem $\mathbb{R}$ -Limesvektorraum unterliegende Gruppe ist. Um die Bezeichnungsweise zu vereinfachen, definieren wir:

Definition

Für einen $\mathbb{R}$ *-Limesvektorraum* E *sei*

$$\mathcal{G}_c E = \{\psi \in \mathcal{C}(E,\mathbb{D}) \mid \psi(f + g) = \psi(f)\cdot\psi(g) \quad \text{für alle f und g aus } E\} .$$

Ein wichtiges Hilfsmittel bei unserer Untersuchung stellt die Reflexivitätstheorie dar. Die Verbindung liefert die Abbildung

$$T_E : \mathcal{L}_c E \longrightarrow \mathcal{G}_c E$$

definiert durch

$$(T_E\psi)(f) = e^{i\psi(f)} \quad \text{für alle } \psi \in \mathcal{L}E \text{ und alle } f \in E .$$

Es ist klar, daß $T_E\psi$ für alle $\psi \in \mathcal{L}E$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Die Stetigkeit von $T_E\psi$ sieht man so ein:

$$\Theta \longrightarrow f \in E$$

$$\Rightarrow \psi(\Theta) \longrightarrow \psi(f) \quad \text{für alle } \psi \in \mathcal{L}E$$

$$\Rightarrow e^{i\psi(\Theta)} \longrightarrow e^{i\psi(f)} \quad \text{für alle } \psi \in \mathcal{L}E,$$

also ist $T_E\psi$ für alle $\psi \in \mathcal{L}E$ stetig.

T_E ist Gruppenhomomorphismus, wie man leicht sieht und stetig:

Wie üblich verifiziert man, daß T_E genau dann stetig ist, wenn die Abbildung

$$P : \mathcal{L}_c E \times E \longrightarrow \mathbb{D}$$

definiert durch:

$$P(\psi,f) = e^{i\psi(f)} \qquad \text{für alle } \psi \in E \text{ und alle } f \in E$$

stetig ist. P ist jedoch nichts anderes als

$$h \circ (\omega | \mathcal{L}_c E \times E),$$

wobei

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{D}$$

durch

$$h(t) = e^{it} \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

definiert ist.

Also ist P als Komposition stetiger Abbildungen stetig.

Außerdem ist T_E injektiv, denn sei $\psi \in \mathcal{L}_c E$ und

$$T_E\psi = \underline{1} \ ,$$

so erhalten wir:

$$(T_E\psi)(f) = e^{i\psi(f)} = 1 \qquad \text{für alle } f \in E,$$

also

$$\psi(f) = 2h_f\pi \qquad \text{mit } h_f \in \mathbb{N} \ .$$

Gilt nun $h_f \neq 0$ für ein $f \in E$, dann erhalten wir:

$$\psi\left(\frac{f}{2h_f}\right) = \pi \quad ,$$

also einen Widerspruch. Es folgt $\psi = \underline{0}$. Damit haben wir das folgende Lemma bewiesen:

Lemma 2

Es sei E *ein Limesvektorraum. Dann ist* T_E *ein injektiver, stetiger Gruppenhomomorphismus.*

Wir werden nun zeigen, daß dieser Homomorphismus für eine große Klasse von Limesvektorräumen ein Homöomorphismus ist:

Definition

Ein $\mathbb{R}$ *-Limesvektorraum* E *heißt ausgeglichen, wenn mit jedem Filter* Θ *in* E, *der gegen* 0 *konvergiert, auch* $[-1,1]\cdot\Theta$ *gegen* 0 *konvergiert.*

Es gilt der folgende

Satz 1

Für einen ausgeglichenen Limesvektorraum E *ist* T_E *ein Homöomorphismus und also auch ein Isomorphismus.*

Zum Beweis werden wir die Umkehrabbildung konstruieren. Seien

$$\mathbb{D}_1 = \{z \in \mathbb{D} \mid |\arc z| < \tfrac{\pi}{2}\} \quad ,$$

$\chi \in \mathbb{G} E$ und $f \in E$. Die Folge $(\frac{1}{n} f)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in E gegen 0, also auch der von

$$F_n = \{\alpha f \mid |\alpha| < \frac{1}{n}\} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

erzeugte Filter. Da χ stetig ist und da $\mathbb{D}_1$ eine Umgebung von $\chi(0) = 1$ ist, gibt es eine natürliche Zahl n_1 mit der Eigenschaft:

$$\text{(i)} \quad |\alpha| \leq \frac{1}{n_1} \Rightarrow \chi(\alpha f) \in \mathbb{D}_1 \quad .$$

Unser Ziel ist es nun, zu beweisen, daß die Abbildung

$$S_E : \mathbb{G}_c E \longrightarrow \mathcal{L}_c E$$

definiert durch:

$$(S_E \chi)(f) = n_f \text{ arc } \chi(\frac{1}{n_f} \cdot f) \quad ,$$

wobei n_f die minimale natürliche Zahl ist, die (i) genügt, wohldefiniert und stetig ist. Dazu wollen wir zunächst zeigen, daß $(S_E \chi)(f)$ von dieser speziellen Wahl von n_f nicht abhängt:

Es sei $f \in E$ und für m und n aus $\mathbb{N}$ gelte:

$$|\alpha| \leq \frac{1}{m} \Rightarrow \chi(\alpha f) \in \mathbb{D}_1$$

und

$$|\alpha| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \chi(\alpha f) \in \mathbb{D}_1 \quad ,$$

dann folgt

$$n \text{ arc } \chi(\frac{1}{n} f) = m \text{ arc } \chi(\frac{1}{m} f) \ .$$

Beweis

Für $\nu \in \{1,\ldots,n\}$ gilt:

$$\left|\frac{\nu}{mn}\right| \leq \frac{1}{m} ,$$

also

$$\chi(\frac{\nu f}{mn}) = (\chi(\frac{f}{mn}))^{\nu} \in \mathbb{D}_1$$

und damit

$$\operatorname{arc} \chi(\frac{nf}{mn}) = \operatorname{arc}(\chi(\frac{f}{mn}))^{n} = n \operatorname{arc} \chi(\frac{f}{mn}) ,$$

also

$$\operatorname{arc} \chi(\frac{f}{m}) = n \operatorname{arc} \chi(\frac{f}{mn}) ,$$

schließlich erhalten wir:

$$m \operatorname{arc} \chi(\frac{f}{m}) = mn \operatorname{arc} \chi(\frac{f}{mn}) .$$

Da die Voraussetzungen in m und n symmetrisch sind, folgt die Behauptung.

Damit können wir uns von der speziellen Wahl von n_f lösen und sagen:

$$(S_E\chi)(f) = n \operatorname{arc} \chi(\frac{f}{n}) ,$$

wobei n eine natürliche Zahl ist, die der Bedingung

$$|\alpha| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \chi(\frac{f}{n}) \in \mathbb{D}_1$$

genügt.

Nun wollen wir die Eigenschaften von $S_E\chi$ verifizieren:

(1) $S_E\chi$ ist linear:

Beweis

Es seien f und g aus E und $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß gilt:

$$|\alpha| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \begin{cases} \chi(\alpha f) \in \mathbb{D}_2 = \{z \in \mathbb{D} \mid |\text{arc } z| < \frac{\pi}{4}\} \\ \chi(\alpha g) \in \mathbb{D}_2 \end{cases},$$

dann folgt:

$$\chi(\alpha(f + g)) = \chi(\alpha f + \alpha g) = \chi(\alpha f)\chi(\alpha g) \in \mathbb{D}_1$$

$$\text{für alle } |\alpha| \leq \frac{1}{n} .$$

Insgesamt erhalten wir damit:

$$\begin{aligned}(S_E\chi)(f + g) &= n \text{ arc } \chi(\frac{f + g}{n}) \\ &= n \text{ arc}(\chi(\frac{f}{n})\chi(\frac{g}{n})) \\ &= n \text{ arc } \chi(\frac{f}{n}) + n \text{ arc } \chi(\frac{g}{n}) \\ &= (S_E\chi)(f) + (S_E\chi)(g) .\end{aligned}$$

(2) $S_E\chi$ ist stetig:

Es reicht, zu zeigen, daß $S_E\chi$ stetig in $0 \in E$ ist.

Beweis

Es sei Θ Filter in E, Θ konvergiere gegen 0, dann muß gezeigt werden, daß

$$(S_E\chi)(\Theta) \longrightarrow 0 \in \mathbb{R}$$

gilt.

Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, dann gibt es ein $\delta > 0$ mit:

$$|z| < \delta \Rightarrow |\operatorname{arc} z| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

OBdA sei

$$\mathbb{D}_\delta = \{z \in \mathbb{D} \mid |z| < \delta\} \subseteq \mathbb{D}_1 \quad .$$

Aus

$$\Theta \longrightarrow 0 \in E$$

folgt

$$[-1,1] \cdot \Theta \longrightarrow 0 \in E$$

und daher

$$\chi([-1,1] \cdot \Theta) \longrightarrow 1 \in \mathbb{D} \quad ,$$

also gibt es ein $F_\varepsilon \in \Theta$ mit:

$$\text{(a)} \quad F_\varepsilon = [-1,1] \cdot F_\varepsilon$$

und

$$\text{(b)} \quad \chi(F_\varepsilon) \subseteq \mathbb{D}_\delta \quad .$$

Nach (a) wissen wir:

$$(S_E\chi)(f) = \operatorname{arc} \chi(f) \quad \text{für alle } f \in F_\varepsilon \quad ,$$

(b) liefert dann:

$$|(S_E\chi)(f)| < \varepsilon \quad \text{für alle } f \in F_\varepsilon \quad .$$

Damit haben wir gezeigt, daß $S_E\chi$ für jedes $\chi \in G\,E$ ein additives, stetiges Funktional ist. Also ist $S_E\chi$ auch homogen.

Nun soll noch die Stetigkeit von S_E bewiesen werden, die äquivalent ist zur Stetigkeit der Abbildung

$$P : \mathcal{G}_c E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

definiert durch:

$$P(\chi, f) = (S_E \chi)(f) \qquad \text{für alle } \chi \in \mathcal{G} E \text{ und alle } f \in E \quad .$$

Der Beweis zerfällt in zwei Teile:

(a) Für jedes zulässige Paar (ψ_o, Φ) auf $\mathcal{G}_c E$ und für jedes $f_o \in E$ gilt:

$$P(\Phi \times \dot{f}_o) \longrightarrow P(\psi_o, f_o) \in \mathbb{R} \quad .$$

(b) Für jedes zulässige Paar (ψ_o, Φ) auf $\mathcal{G}_c E$ und jedes zulässige Paar $(0, \Theta)$ auf E gilt:

$$P(\Phi \times \Theta) \longrightarrow 0 \in \mathbb{R} \quad .$$

Eine leichte Rechnung zeigt, daß (a) und (b) hinreichend für die Stetigkeit von P sind, da E eine Limesgruppe ist.

Beweis von (a)

Es sei (ψ_o, Φ) zulässiges Paar auf $\mathcal{G}_c E$ und $f_o \in E$. Für den Umgebungsfilter $\mathbb{V}$ von 0 in $\mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbb{V} \cdot f_o \longrightarrow 0 \in E \quad ,$$

also folgt:

$$\omega(\Phi \times \mathbb{V}\cdot f_o) \longrightarrow 1 \quad ,$$

daher gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ und ein $F_1 \in \Phi$ mit:

$$\psi(\alpha f_o) \in \mathbb{D}_1 \quad \text{für alle } |\alpha| < \frac{1}{n_1} \text{ und alle } \psi \in F_1 \ .$$

OBdA gelte

$$\psi_o(\alpha f_o) \in \mathbb{D}_1 \quad \text{für alle } |\alpha| < \frac{1}{n_1} \quad ,$$

dann wissen wir:

$$(S_E\psi)(f_o) = n_1 \text{ arc } \psi(\frac{f_o}{n_1}) \quad \text{für alle } \psi \in F_1$$

und

$$(S_E\psi_o)(f_o) = n_1 \text{ arc } \psi_o(\frac{f_o}{n_1}) \quad .$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit:

$$|z-z'| < \delta \Rightarrow |\text{arc } z - \text{arc } z'| < \frac{\varepsilon}{n_1}$$

$$\text{für alle } z \text{ und } z' \text{ aus } \mathbb{D}_1 \ .$$

Da (ψ_o, Φ) zulässiges Paar ist, folgt:

$$\omega(\Phi \times (\frac{1}{n_1} \cdot f_o)) \longrightarrow \psi_o(\frac{f_o}{n_1}) \quad ,$$

also gibt es ein $F_2 \in \Phi$ mit:

$$|\psi(\frac{f_o}{n_1}) - \psi_o(\frac{f_o}{n_1})| < \delta \qquad \text{für alle } \psi \in F_2 .$$

Für $\psi \in F_1 \cap F_2$ erhalten wir schließlich:

$$|(S_E\psi)(f_o) - (S_E\psi_o)(f_o)| = |n_1 \text{ arc } \psi(\frac{f_o}{n_1}) - n_1 \text{ arc } \psi_o(\frac{f_o}{n_1})|$$

$$< n_1 \frac{\varepsilon}{n_1} = \varepsilon \ .$$

Beweis von (b)

Es seien (ψ_o, Φ) und $(0, \Theta)$ zulässige Paare auf $G_c E$ bzw. auf E. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit:

$$|z-1| < \delta \Rightarrow |\mathrm{arc}\ z| < \varepsilon \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}_1 .$$

OBdA sei

$$\mathbb{D}_\delta = \{z \in \mathbb{D} \mid |z-1| < \delta\} \subseteq \mathbb{D}_1 .$$

Aus

$$\Theta \longrightarrow 0 \in E$$

folgt

$$[-1,1] \cdot \Theta \longrightarrow 0 \in E$$

und daher:

$$\omega(\Phi \times [-1,1] \cdot \Theta) \longrightarrow 1 \subset \mathbb{D} ,$$

also gibt es Mengen $U_\varepsilon \in \Phi$ und $F_\varepsilon \in \Theta$ mit:

$$F_\varepsilon = [-1,1] F_\varepsilon$$

und

$$|\psi(f) - 1| < \delta \qquad \text{für alle } \psi \in U_\varepsilon \text{ und alle } f \in F_\varepsilon .$$

Es folgt:

$$|\psi(\alpha f) - 1| < \delta \qquad \text{für alle } \psi \in U_\varepsilon, \text{ alle } f \in F_\varepsilon \text{ und alle } |\alpha| \leq 1$$

und daher:

$$(S_E \psi)(f) = \mathrm{arc}\ \psi(f)$$

und

$$|\mathrm{arc}\ \psi(f)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } \psi \in U_\varepsilon \text{ und alle } f \in F_\varepsilon ,$$

woraus

$$|(S_E\psi)(f)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } \psi \in U_\varepsilon \text{ und alle } f \in F_\varepsilon$$

folgt, was zu beweisen war.

Zum Abschluß wollen wir zeigen, daß

$$T_E \circ S_E = \mathrm{id}_{\mathcal{G}_c E}$$

gilt. Da T_E nach Lemma 2 injektiv ist, folgt dann, daß T_E ein Homöomorphismus mit der Inversen S_E ist.

Sei $\psi \in \mathcal{G}_c E$ und $f \in E$, dann erhalten wir, wenn wir

$$\exp(z) = e^z \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}$$

setzen:

$$(T_E \circ S_E)(\psi)(f) = \exp(i(S_E\psi)(f))$$

$$= \exp(i \cdot n \cdot \operatorname{arc} \psi(\tfrac{f}{n}))$$

für eine geeignete natürliche Zahl n, es folgt:

$$(T_E \circ S_E)(\psi)(f) = (\exp(i \operatorname{arc} \psi(\tfrac{f}{n})))^n$$

$$= (\psi(\tfrac{f}{n}))^n = \psi(f),$$

also folgt in der Tat:

$$T_E \circ S_E = \mathrm{id}_{\mathcal{G}_c E} .$$

Für einen Limesvektorraum E sei $\kappa_E = \kappa_{\tilde{E}}$, wobei $\tilde{E}$ die E unterliegende abelsche Limesgruppe bezeichnet. Bevor wir nun beweisen, daß κ_E ein Homöomorphismus ist, wenn E ausgeglichen und c-reflexiv ist, bemerken wir das Folgende:

Definiert man für einen stetigen Gruppenhomomorphismus f von der abelschen Limesgruppe A in die abelsche Limesgruppe B die Abbildung

$$\mathcal{G}_c f : \mathcal{G}_c B \longrightarrow \mathcal{G}_c A$$

durch:

$$(\mathcal{G}_c f)(\chi) = \chi \circ f \qquad \text{für alle } \chi \in \mathcal{G} B,$$

so wird $\mathcal{G}_c$ mit diesen Definitionen zu einem Funktor der Kategorie der abelschen Limesgruppen in sich.

Für einen beliebigen Limesvektorraum E ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\kappa_E} & \mathcal{G}_c \mathcal{G}_c E \\ \big\downarrow j_E & T_{\mathcal{L}_c E} & \big\downarrow \mathcal{G}_c T_E \\ \mathcal{L}_c \mathcal{L}_c E & \longrightarrow & \mathcal{G}_c \mathcal{L}_c E \end{array}$$

Der Beweis erfolgt durch einfaches Ausrechnen.
Ist E ausgeglichen, so ist T_E und daher $\mathcal{G}_c T_E$ ein Homöomorphismus. In diesem Falle ist κ_E genau dann ein Homöomorphismus, wenn j_E ein Homöomorphismus ist. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

<u>Satz 2</u>

Es sei E *ein ausgeglichener Limesvektorraum. Dann ist die kanonische Abbildung*

$$\kappa_E : E \longrightarrow \mathcal{G}_c\, \mathcal{G}_c E$$

genau dann ein Homöomorphismus, wenn E *ein* c*-reflexiver Limesvektorraum ist.*

Aus der Definition der stetigen Konvergenz folgt sofort, daß $\mathcal{C}_c(X)$ für jeden Limesraum X ausgeglichen ist. Da $\mathcal{C}_c(X)$ nach Satz 2 in Kapitel 2 stets c-reflexiv ist, folgt aus Satz 2:

<u>Korollar</u>

Für jeden Limesraum X *ist die Abbildung*

$$\kappa_{\mathcal{C}_c(X)} : \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathcal{G}_c\, \mathcal{G}_c\, \mathcal{C}_c(X)$$

ein Homöomorphismus.

(4) Reflexivitäts- und Dualitätstheorie von Unter- und Quotientenräumen

In diesem Kapitel wollen wir die Dualräume von Unter- und Quotientenräumen von Limesvektorräumen untersuchen. Davon ausgehend werden wir die c-Reflexivität bestimmter Unterräume von c-reflexiven Limesvektorräumen beweisen. Den Abschluß bilden einige Bemerkungen über die Charaktergruppen von Unter- und Quotientengruppen von Limesgruppen.
Zunächst jedoch wollen wir kurz Annihilatoren von Unterräumen betrachten:
Im folgenden sei E stets ein Limesvektorraum und $A \subseteq E$ ein Unter(vektor)raum. Dann definiert man:

Definition
Unter dem Annihilator $A^{\perp}$ *von* A *versteht man die Menge*

$$A^{\perp} = \{\psi \in \mathcal{L}E \mid \psi(A) = \{0\}\} .$$

$A^{\perp}$ ist ein Unterraum von $\mathcal{L}E$, wir setzen

$$A^{\perp\perp} = (A^{\perp})^{\perp} = \{T \in \mathcal{L}\mathcal{L}_c E \mid T(A^{\perp}) = \{0\}\} .$$

Es ist klar, daß

$$j_E(A) \subseteq A^{\perp\perp} ,$$

also

$$A \subseteq j_E^{-1}(A^{\perp\perp})$$

gilt. Wir können $j_E^{-1}(A^{\perp\perp})$ exakt berechnen:

Lemma 1

Es sei E *ein* c-*reflexiver Limesvektorraum und* (E,τ) *der zu* E *assoziierte lokalkonvexe Vektorraum. Dann gilt:*

$$j_E^{-1}(A^{\perp\perp}) = A^- \quad ,$$

wobei A^- *die abgeschlossene Hülle von* A *in* (E,τ) *bezeichnet.*

Beweis

Zunächst bemerken wir, daß

$$\mathscr{L}E = \mathscr{L}(E,\tau)$$

gilt, denn sei $\psi \in \mathscr{L}E$, dann ist $|\psi|$ eine stetige Halbnorm auf E, also ist ψ stetig auf (E,τ). Weiterhin gilt:

$$j_E^{-1}(A^{\perp\perp}) = \{f \in E \mid \psi(f) = 0 \quad \text{für alle } \psi \in A^{\perp}\}$$

$$= \bigcap_{\psi \in A^{\perp}} \psi^{-1}(\{0\}) \quad ,$$

und da

$$A^{\perp} \subseteq \mathscr{L}(E,\tau)$$

gilt, ist $j_E^{-1}(A^{\perp\perp})$ eine τ-abgeschlossene Menge.
Aus der c-Reflexivität von E folgt, daß (E,τ) hausdorffsch ist. Nehmen wir nun an, es existiere ein

$$f \in j_E^{-1}(A^{\perp\perp}) \setminus A^- \quad ,$$

so gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein Funktional $\psi \in \mathscr{L}E$, für das

$$\psi(f) = 1$$

und

$$\psi(A) = \{0\}$$

gilt. Dann folgt aber:

$$j_E(f) \notin A^{\perp\perp}.$$

Dieser Widerspruch vervollständigt den Beweis.

Definiert man nun:

$$\tilde{j}_A : A \longrightarrow A^{\perp\perp}$$

durch:

$$\tilde{j}_A(f) = j_E(f) \quad \text{für alle } f \in A ,$$

so ist j_A ein Homöomorphismus, wenn A eine τ-abgeschlossene Teilmenge des c-reflexiven Limesvektorraumes E ist. Nun können wir zunächst den Dualraum des Quotientenraumes bestimmen:

Lemma 2

Es sei $\nu_{E,A}$ *die natürliche Projektion von* E *auf* E/A. *Dann ist*

$$\mathcal{L}_c\nu_{E/A} : \mathcal{L}_c(E/A) \longrightarrow \mathcal{L}_c E$$

ein Homöomorphismus auf $A^{\perp}$.

Zum Beweis werden wir die Umkehrabbildung zu $\mathcal{L}_c\nu_{E,A}$ konstruieren:

Man definiere

$$\lambda_{E,A} : A^{\perp} \longrightarrow \mathcal{L}_c(E/A)$$

durch

$$\lambda_{E,A}(\psi)([f]) = \psi(f) \quad \text{für alle } \psi \in A^{\perp} \text{ und alle } f \in E \quad ,$$

dabei bezeichnen wir für alle $f \in E$ mit $[f]$ die Nebenklasse, in der f liegt, d.h. es ist $[f] = \nu_{E,A}(f)$. $\lambda_{E,A}(\psi)$ ist für alle $\psi \in A$ wohldefiniert und linear. Wir wollen nun die Stetigkeit von $\lambda_{E,A}(\psi)$ und von $\lambda_{E,A}$ zeigen, dabei setzen wir zur Abkürzung $\lambda = \lambda_{E,A}$ und $\nu = \nu_{E,A}$:

Es sei $([0],\tilde{\Theta})$ ein zulässiges Paar auf E/A, dann gibt es auf E zulässige Paare $(f_1,\Theta_1),\ldots,(f_n,\Theta_n)$ mit:

$$\nu(\Theta_1)\cap\ldots\cap\nu(\Theta_n) \subseteq \tilde{\Theta}$$

und

$$f_i \in A \qquad \text{für } i=1,\ldots,n \quad .$$

Aus

$$\Theta_i \longrightarrow f_i \qquad \text{für } i=1,\ldots,n$$

folgt

$$\psi(\Theta_i) \longrightarrow \psi(f_i) \qquad \text{für } i=1,\ldots,n$$

und daher

$$\psi(\Theta_1)\cap\ldots\cap\psi(\Theta_n) \longrightarrow 0,$$

also

$$\psi(\Theta_1\cap\ldots\cap\Theta_n) \longrightarrow 0 \quad .$$

Daher gibt es zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ Mengen $F_i \in \Theta_i$ so, daß gilt:

$$\psi(F_1 \cup \ldots \cup F_n) \subseteq (-\varepsilon,\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad \psi(\nu^{-1}(\nu(F_1) \cup \ldots \cup \nu(F_n)) \subseteq (-\varepsilon,\varepsilon) \quad ,$$

also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\tilde{F}_\varepsilon \in \tilde{\Theta}$ mit:

$$\psi(\nu^{-1}(\tilde{F}_\varepsilon)) \subseteq (-\varepsilon,\varepsilon) \quad ,$$

woraus

$$\lambda(\psi)([f]) \in (-\varepsilon,\varepsilon) \qquad \text{für alle } [f] \in \tilde{F}_\varepsilon$$

folgt.

Um die Stetigkeit von λ nachzuweisen, müssen wir zeigen, daß die Abbildung

$$\omega \circ (\lambda \times \mathrm{id}_{E/A}) \; : \; A^\perp \times E/A \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\psi,[f]) \longmapsto \psi(f)$$

stetig ist. Seien also (ψ_o,Φ) bzw. $([f_o],\tilde{\Theta})$ zulässige Paare auf $A^\perp$ bzw. E/A. Dann gibt es wiederum zulässige Paare $(f_1,\Theta_1),\ldots,(f_n,\Theta_n)$ auf E, für die gilt:

$$\nu(\Theta_1) \cap \ldots \cap \nu(\Theta_n) \subseteq \tilde{\Theta}$$

und

$$[f_i] = [f_o] \qquad \text{für } i=1,\ldots,n \quad .$$

Es folgt:

$$\omega(\Phi \times \Theta_i) \longrightarrow \psi_o(f_i) = \psi_o(f_o) \qquad \text{für } i=1,\ldots,n \quad ,$$

also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Mengen $U_i \in \Phi$ und $F_i \in \Theta_i$ mit:

$$|\psi(f) - \psi_o(f_o)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } \psi \in U_i \text{ und alle } f \in F_i$$

$$\Rightarrow \quad |\lambda(\psi)([f]) - \lambda(\psi_o)([f_o])| < \varepsilon \qquad \text{für alle } \psi \in U_i \text{ und alle } [f] \in \nu(F_i) \,.$$

Definiert man nun:

$$U := \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \Phi$$

und

$$\tilde{F} := \bigcup_{i=1}^{n} \nu(F_i) \in \nu(\Theta_1) \cap \ldots \cap \nu(\Theta_n) \subseteq \tilde{\Theta},$$

so erhält man:

$$|\lambda(\psi)([f]) - \lambda(\psi_o)([f_o])| < \varepsilon \qquad \text{für alle } \psi \in U \text{ und alle } [f] \in \tilde{F} \,.$$

Man rechnet leicht nach, daß die folgenden Gleichungen richtig sind:

$$\lambda_{E,A}(\mathcal{L}_c \nu_{E,A}(\psi)) = \psi \qquad \text{für alle } \psi \in \mathcal{L}_c(E/A)$$

$$\mathcal{L}_c \nu_{E,A}(\lambda_{E,A}(\psi)) = \psi \qquad \text{für alle } \psi \in A^{\perp} \,.$$

Dies schließt den Beweis des Lemmas 2 ab.

Die Bestimmung des Dualraumes von A gestaltet sich wegen des Fehlens eines geeigneten Fortsetzungssatzes schwieriger. Es gilt das

Lemma 3

Definiert man

$$\mu_{E,A} : \mathcal{L}_c E/A^{\perp} \longrightarrow \mathcal{L}_c A$$

durch

$$\mu_{E,A}([\psi])(f) = \psi(f) \quad \text{für alle } \psi \in \mathcal{L}_c E \text{ und alle } f \in A \quad ,$$

so ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_c E/A^{\perp} \arrow[r, "j_{\mathcal{L}_c E/A}"] \arrow[d, "\mu_{E,A}"] & \mathcal{L}_c \mathcal{L}_c(\mathcal{L}_c E/A^{\perp}) \arrow[d, "\mathcal{L}_c(\lambda_{\mathcal{L}_c E/A^{\perp}})"] \\
\mathcal{L}_c A & \mathcal{L}_c(A^{\perp\perp}) \arrow[l, "\mathcal{L}_c \tilde{j}_A"']
\end{tikzcd}$$

Zum Beweis setzen wir $j = j_{\mathcal{L}_c E/A}$ und $\lambda = \lambda_{\mathcal{L}_c E/A}$,

dann gilt für alle $\psi \in \mathcal{L}_c E$ und alle $f \in A$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_c \tilde{j}_A(\mathcal{L}_c \lambda(j([\psi])))(f) &= (j([\psi]) \circ \lambda \circ \tilde{j}_A)(f) \\
&= \lambda(\tilde{j}_A(f))([\psi]) \\
&= \tilde{j}_A(f)(\psi) \\
&= \psi(f) \\
&= \mu_{E,A}([\psi])(f)
\end{aligned}$$

Also ist $\mu_{E,A}$ ein stetiger Homomorphismus. Man sieht leicht, daß $\mu_{E,A}$ injektiv ist. Nun ist $\mu_{E,A}$ genau dann ein Isomorphismus, wenn sich jedes lineare, stetige Funktional auf A linear und stetig auf E fortsetzen läßt. Deshalb definieren wir:

Definition

Es sei E *ein Limesvektorraum und* $A \subseteq E$ *ein Unterraum. Dann besitzt* A *die Hahn-Banach Eigenschaft (kurz HBE) bezüglich* E, *wenn sich jedes lineare, stetige Funktional auf* A *zu einem linearen, stetigen Funktional auf* E *fortsetzen läßt.*

Ist E ein c-reflexiver Limesvektorraum und A in (E,τ) abgeschlossen, so ist $\mathcal{L}_c\tilde{j}_A$ ein Homöomorphismus und daher $\mathcal{L}_c A$ homöomorph zu $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c(\mathcal{L}_c E/A^{\perp})$. Besitzt A außerdem die HBE bezüglich E, so ist $\mathcal{L}_c A$ homöomorph zu $\mathcal{L}_c E/A^{\perp}$ mit der von $j_{\mathcal{L}_c E/A^{\perp}}$ induzierten Limitierung.

Bei der Betrachtung c-reflexiver Limesvektorräume erweist sich das Konzept der Vollständigkeit als sehr nützlich. Ein Filter Θ in einem Limesvektorraum E heißt Cauchy-Filter, wenn der von

$$\{F - F' \mid F \in \Theta,\ F' \in \Theta\}$$

erzeugte Filter $\Theta - \Theta$ gegen 0 konvergiert. Man nennt einen Limesvektorraum vollständig, wenn in ihm jeder

Cauchy-Filter konvergiert. Wie üblich ist ein vollständiger Unterraum eines hausdorffschen Limesvektorraumes abgeschlossen und ein abgeschlossener Unterraum eines vollständigen Limesvektorraumes vollständig. Nach [7], Thm 2 ist $\mathcal{C}_c(X)$ für jeden Limesraum X vollständig. Als abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{C}_c(\mathcal{L}_c E)$ ist also $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E$ für jeden Limesvektorraum E vollständig. Da lineare Homöomorphismen die Vollständigkeit erhalten, folgt daher das

Lemma 4

Wenn ein Limesvektorraum c-reflexiv ist, dann ist er vollständig, also sind c-reflexive Unterräume von hausdorffschen Limesvektorräumen abgeschlossen.

Leider können wir nur die c-Reflexivität spezieller abgeschlossener Unterräume von c-reflexiven Limesvektorräumen beweisen. Bevor wir dieses Problem näher studieren, wollen wir einige Beispiele c-reflexiver Limesvektorräume vorausschicken:

Lemma 5

Es sei $j_E(E) \subseteq \mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E$ *dicht, dann ist* $j_{\mathcal{L}_c E}$ *ein Homöomorphismus. Die inverse Abbildung ist* $\mathcal{L}_c j_E$.

Der Beweis erfolgt durch einfaches Ausrechnen.

Lemma 6

Es sei X *ein Limesraum und* $A \subseteq \mathcal{C}_c(X)$ *ein Unterraum. Dann ist* j_A *ein Homöomorphismus auf* $j_A(A)$.

Beweis

Man definiere

$$i : X \longrightarrow \mathcal{L}_c A$$

durch

$$i(x)(f) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in X \text{ und alle } f \in A \quad .$$

Man verifiziert leicht, daß i wohldefiniert ist.

Sei $T \in j_A(A)$, dann gibt es ein $f \in A$ mit:

$$T = j_A(f)$$

$$\Longrightarrow \quad T(i(x)) = j_A(f)(i(x)) \qquad \text{für alle } x \in X$$

$$\Longrightarrow \qquad T \circ i = f \in A \quad .$$

Damit ist das folgende Diagramm sinnvoll:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}_c \mathcal{L}_c A \arrow[r, "i^*"] & \mathcal{C}_c(X) \\ j_A(A) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\hat{i}^*"] & A \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Dabei seien:

$$i^* = \mathcal{C}_c(i) | \mathcal{L}_c \mathcal{L}_c A$$

$$\hat{i}^*(T) = i^*(T) \qquad \text{für alle } T \in j_A(A) \quad .$$

Eine leichte Rechnung zeigt, daß $\hat{i}^*$ und j_A in der Tat invers zueinander sind.

Daraus folgt direkt das

Lemma 7

Es sei X *ein Limesraum und* $A \subseteq \mathcal{C}_c(X)$ *ein Unterraum, für den* j_A *bijektiv ist. Dann ist* A *ein* c-*reflexiver Limesvektorraum.*

Lemma 8

Es sei X *ein Limesraum und* $A \subseteq \mathcal{C}(X)$ *eine* k-*abgeschlossene Unteralgebra. Dann ist* A *ein* c-*reflexiver Limesvektorraum.*

Beweis

Man definiere

$$d : A \longrightarrow \mathcal{C}_c(\mathcal{H}om_c A)$$

durch

$$d(f)(\psi) = \psi(f) \quad \text{für alle } f \in A \text{ und alle } \psi \in \mathcal{H}om\, A$$

und

$$i : X \longrightarrow \mathcal{H}om_c A$$

durch:

$$i(x)(f) = f(x) \quad \text{für alle } x \in X \text{ und alle } f \in A\,,$$

dann ist d ein stetiger Homomorphismus, i stetig und das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "d"] \arrow[dr] & & \mathcal{C}_k(\mathcal{H}om_c A) \arrow[dl, "\mathcal{C}_k(i)"] \\ & \mathcal{C}_k(X) & \end{tikzcd}$$

Aus der Kommutativität folgt:

$$\mathcal{C}_k(i)^{-1}(\mathcal{C}_k(i)(d(A))) = \mathcal{C}_k(i)^{-1}(A) \quad .$$

Nach [18] ist i aber surjektiv, $\mathcal{C}_k(i)$ also injektiv und daher gilt:

$$d(A) = \mathcal{C}_k(i)^{-1}(A) \quad .$$

Also ist d(A) eine punktetrennende, abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{C}_k(\mathcal{H}om_c A)$. Dann folgt aber aus dem Satz von Weierstrass-Stone, daß

$$d(A) = \mathcal{C}_k(\mathcal{H}om_c A)$$

gilt. (Man beweist diese Form des Satzes von W-S z.B. dadurch, daß man zum assoziierten vollständig regulären Raum übergeht und Thm 1 aus [16], §17 anwendet.) Es folgt nun:

$$\mathcal{C}_k(i)(\mathcal{C}_k(\mathcal{H}om_c A)) \subseteq A$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{C}_c(i)(\mathcal{C}_c(\mathcal{H}om_c A)) \subseteq A \quad .$$

Aus diesen Ergebnissen folgt sofort, daß d ein Homöomorphismus von A auf $\mathcal{C}_c(\mathcal{H}om_c A)$ ist. Das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d"] \arrow[d, "j_A"] & \mathcal{C}_c(\mathcal{H}om_c A) \arrow[d, "j_{\mathcal{C}_c(\mathcal{H}om_c A)}"] \\ \mathcal{L}_c\mathcal{L}_c A \arrow[r, "\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c d"] & \mathcal{L}_c\mathcal{L}_c\mathcal{C}_c(\mathcal{H}om_c A) \end{tikzcd}$$

Nach den vorherigen Erörterungen sind d und daher $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c d$ Homöomorphismen. Nach Kapitel 2, Satz 2 ist $j_{\mathcal{C}_c(\mathcal{H}om_c A)}$ ein Homöomorphismus, also ist auch j_A ein Homöomorphismus, A also c-reflexiv.

Bemerkung

Der Beweis des Lemmas 8 zeigt, daß jede Unteralgebra $A \subseteq \mathcal{C}_c(X)$, für die die Abbildung

$$d : A \longrightarrow \mathcal{C}_c(\mathcal{H}om_c A)$$

ein Homöomorphismus ist, c-reflexiv ist.

Sei E ein c-reflexiver Limesvektorraum, dann können wir eine notwendige und hinreichende Bedingung für die c-Reflexivität τ-abgeschlossener Unterräume angeben:

Lemma 8

Es sei A ein τ-abgeschlossener Unterraum eines c-reflexiven Limesvektorraumes E. Der Raum A ist dann und nur dann c-reflexiv, wenn $\mathcal{L}_c(\mathcal{L}_c E/A^{\perp})$ ein c-reflexiver Limesvektorraum ist.

Beweis

Das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\tilde{j}_A"] \arrow[d, "j_A"] & A^{\perp\perp} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "j_{A^{\perp\perp}}"] & \mathcal{L}_c(\mathcal{L}_c E/A\ ) \arrow[d, "j"] \\
\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c A \arrow[r, "\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c\tilde{j}_A"] & \mathcal{L}_c\mathcal{L}_c A^{\perp\perp} \arrow[r, "\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c\lambda"] & \mathcal{L}_c\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c(\mathcal{L}_c E/A^{\perp})
\end{tikzcd}$$

Dabei haben wir zur Abkürzung

$$j = j_{\mathcal{L}_c(\mathcal{L}_c E/A^{\perp})}$$

und

$$\lambda = \lambda_{\mathcal{L}_c E/A^{\perp}}$$

gesetzt.

Aus der Voraussetzung folgt, daß $\tilde{j}_A$ und daher auch $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c\tilde{j}_A$ Homöomorphismen sind. Nach Lemma 2 ist λ ein Homöomorphismus, also auch $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c\lambda$. Daher ist j_A genau dann ein Homöomorphismus, wenn $j_{\mathcal{L}_c(\mathcal{L}_c E/A^{\perp})}$ ein Homöomorphismus ist.

Im folgenden wollen wir eine hinreichende Bedingung dafür angeben, daß $\mathcal{L}_c(\mathcal{L}_c E/A^{\perp})$ ein c-reflexiver Raum ist, wenn E ein c-reflexiver Limesvektorraum ist. Nach Lemma 5 reicht es dazu, zu zeigen, daß das Bild von $j_{\mathcal{L}_c E/A^{\perp}}$ in $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c(\mathcal{L}_c E/A^{\perp})$ dicht liegt. Ist $A \subseteq E$ ein τ-abgeschlossener Unterraum und ist E ein c-reflexiver Limesvektorraum, so ist $\tilde{j}_A$ ein Homöomorphismus, also müssen wir nach Lemma 2 beweisen, daß

$$a(\mu_{E,A}(\mathcal{L}_c E/A^{\perp})) = \mathcal{L}_c A$$

gilt. Das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_c E \arrow[rr, "\mathcal{L}_c i_{E,A}"] \arrow[dr, "\nu"'] & & \mathcal{L}_c A \\
& \mathcal{L}_c E/A \arrow[ur, "\mu_{E,A}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dabei seien ν die natürliche Projektion und

$$i_{E,A} : A \longrightarrow E$$

die Einbettung.

Da ν surjektiv ist, stimmen die Bilder von $\mu_{E,A}$ und von $\mathcal{L}_c i_{E,A}$ überein. Damit haben wir gezeigt:

Satz 1

Es sei E *ein* c-*reflexiver Limesvektorraum und* $A \subseteq E$ *ein in dem zu* E *assoziierten lokalkonvexen Vektorraum abgeschlossener Unterraum. Die Abbildung*

$$\mathcal{L}_c i_{E,A} : \mathcal{L}_c E \longrightarrow \mathcal{L}_c A$$

definiert durch

$$\mathcal{L}_c i_{E,A}(\psi) = \psi|A \quad \text{für alle } \psi \in \mathcal{L}_c E$$

bilde $\mathcal{L}_c E$ *auf einen dichten Unterraum von* $\mathcal{L}_c A$ *ab. Dann ist* A *ein* c-*reflexiver Limesvektorraum.*

Aus Satz 1 folgt unmittelbar:

Korollar 1

Es seien E *ein* c-*reflexiver Limesvektorraum und* $A \subseteq E$ *ein* τ-*abgeschlossener Unterraum, der bezüglich* E *die HBE besitzt. Dann ist* A *ein* c-*reflexiver Limesvektorraum.*

Aus Lemma 4, Satz 1 und dem Satz von Hahn-Banach erhalten wir:

Korollar 2

Ein Unterraum eines c-*reflexiven, lokalkonvexen, topologischen Vektorraumes ist genau dann* c-*reflexiv, wenn er abgeschlossen ist.*

Wenn $\mathscr{C}_c(X)$ für einen Limesraum X topologisch ist, dann ist $\mathscr{C}_c(X)$ nach [18] ein lokalkonvexer, topologischer Vektorraum. Daher folgt aus Korollar 2:

Korollar 3

Es sei X ein Limesraum, für den $\mathscr{C}_c(X)$ topologisch ist. Dann ist ein Unterraum von $\mathscr{C}_c(X)$ genau dann c-reflexiv, wenn er abgeschlossen ist.

Bemerkung

M. Schroder konnte in [18] zeigen, daß $\mathscr{C}_c(X)$ topologisch ist, wenn X ein lokalkompakter Limesraum ist und daß umgekehrt der zu X assoziierte c-einbettbare Limesraum $\mathscr{H}om_c\,\mathscr{C}_c(X)$ lokalkompakt ist, wenn $\mathscr{C}_c(X)$ topologisch ist. (Ein Limesraum X heißt lokalkompakt, wenn es ein Überdeckungssystem von X gibt, das aus quasikompakten Mengen besteht.)

Zum Abschluß wollen wir noch ein weiteres Kriterium für die c-Reflexivität von Unterräumen von Funktionenalgebren angeben:

Satz 2

Es sei X ein Limesraum. Ein Unterraum $A \subseteq \mathscr{C}_c(X)$ ist genau dann c-reflexiv, wenn er abgeschlossen ist und wenn sich jedes lineare, stetige Funktional auf $\mathscr{L}_c A$ stetig und linear auf $\mathscr{C}_c(A)$ fortsetzen läßt.

Zum Beweis betrachten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i_A"] \arrow[dr, "j_A"'] & & \mathcal{L}_c \mathcal{C}_c(A) \arrow[dl, "\mathcal{L}_c e"] \\ & \mathcal{L}_c \mathcal{L}_c A & \end{tikzcd}$$

Dabei sei e die Einbettung von $\mathcal{L}_c A$ in $\mathcal{C}_c(A)$ und i_A wie in Kapitel 2 definiert.

Nach Lemma 4 ist A abgeschlossen, wenn A ein c-reflexiver Limesvektorraum ist. $\mathcal{L}_c e$ ist außerdem surjektiv, wenn j_A ein Homöomorphismus ist, da das obige Diagramm kommutiert.

Ist umgekehrt $\mathcal{L}_c e$ surjektiv, dann folgt mit Hilfe von (2), Satz 1:

$$\mathcal{L}_c e(a(V(i_A(A)))) = \mathcal{L}_c \mathcal{L}_c A$$

$$\Rightarrow a(\mathcal{L}_c e(V(i_A(A)))) \supseteq \mathcal{L}_c e(a(V(i_A(A)))) = \mathcal{L}_c \mathcal{L}_c A$$

$$\Rightarrow \quad a(V(\mathcal{L}_c e(i_A(A)))) = \mathcal{L}_c \mathcal{L}_c A$$

$$\Rightarrow \quad a(j_A(A)) = \mathcal{L}_c \mathcal{L}_c A \quad ,$$

wobei V( ) wie üblich die lineare Hülle bezeichnet. Also liegt $j_A(A)$ dicht in $\mathcal{L}_c \mathcal{L}_c A$. Nach Lemma 6 ist j_A ein Homöomorphismus von A auf $j_A(A)$.

Ist A abgeschlossen, so ist A vollständig, also auch $j_A(A)$. Daher ist $j_A(A)$ in $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c A$ abgeschlossen. Also ist j_A bijektiv, und daher ist A nach Lemma 7 ein c-reflexiver Limesvektorraum.

Wenden wir uns nun dem Problem der Charaktergruppen zu, so können wir feststellen, daß sich die meisten Ergebnisse übertragen lassen. Da die Beweise ähnlich sind, wollen wir sie übergehen. Es gelten:

<u>Lemma 9</u>

Es sei Γ eine Limesgruppe, $U \subseteq \Gamma$ eine Untergruppe und $\nu_{\Gamma,U}$ die natürliche Projektion von Γ auf Γ/U. Dann ist

$$\mathcal{G}_c\nu_{\Gamma,U} : \mathcal{G}_c(\Gamma/U) \longrightarrow \mathcal{G}_c\Gamma$$

ein Homöomorphismus auf

$$U^\top = \{\chi \in \mathcal{G}_c\Gamma \mid \chi(A) = \{1\}\} .$$

Die Umkehrabbildung ist

$$1_{\Gamma,U} : U^\top \longrightarrow \mathcal{G}_c(\Gamma/U)$$

definiert durch

$$1_{\Gamma,U}(\chi)([f]) = \chi(f) \quad \text{für alle } \chi \in U^\top \text{ und alle } f \in \Gamma.$$

Lemma 10

Es seien Γ *und* U *wie in Lemma 9 und*

$$m_{\Gamma,U} : \mathcal{G}_c\Gamma/U \longrightarrow \mathcal{G}_cU$$

definiert durch:

$$m_{\Gamma,U}([\chi])(f) = \chi(f) \qquad \text{für alle } \chi \in \mathcal{G}_c\Gamma \text{ und alle } f \in U \quad ,$$

so ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_c\Gamma/U^\tau \arrow[r, "\kappa_{\mathcal{G}_c\Gamma/U^\tau}"] \arrow[d, "m_{\Gamma,U}"] & \mathcal{G}_c\mathcal{G}_c(\mathcal{G}_c\Gamma/U^\tau) \arrow[d, "\mathcal{G}_c(1_{\mathcal{G}_c\Gamma,U^\tau})"] \\
\mathcal{G}_cU & \mathcal{G}_c(U^{\tau\tau}) \arrow[l, "\mathcal{G}_c\tilde{\kappa}_U"']
\end{tikzcd}$$

Dabei sei

$$\tilde{\kappa}_U : U \longrightarrow U^{\tau\tau}$$

definiert durch:

$$\tilde{\kappa}_U(f) = \kappa_\Gamma(f) \qquad \text{für alle } f \in U \; .$$

Läßt sich nun jeder stetige Charakter auf U zu einem stetigen Charakter auf Γ fortsetzen und ist κ_U ein Homöomorphismus, so ist $\mathcal{G}_cU$ homöomorph zu $\mathcal{G}_c\Gamma/U^\tau$ mit der von $\kappa_{\mathcal{G}_c\Gamma/U^\tau}$ induzierten Limitierung.

Lemma 11

Reflexive Untergruppen von hausdorffschen Limesgruppen sind abgeschlossen.

Lemma 12

Ist $\tilde{\kappa}_U$ *ein Homöomorphismus und ist* $m_{\Gamma,U}$ *surjektiv, so ist* κ_U *ein Homöomorphismus.*

Zum Abschluß wollen wir daran erinnern, daß nach Kapitel 3, Satz 2 ein ausgeglichener Limesvektorraum A genau dann in natürlicher Weise zu $\mathcal{G}_c \mathcal{G}_c A$ homöomorph ist, wenn er c-reflexiv ist. Also läßt sich für ausgeglichene Unterräume c-reflexiver Limesvektorräume die Theorie des 1. Teils dieses Kapitels anwenden.

Literaturverzeichnis

[1] H. Bauer: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie
Walter de Gruyter & Co., Berlin 1968

[2] E. Binz / H.H. Keller: Funktionenräume in der Kategorie der Limesräume
Ann. Academiae Scientiarum Fennicae AI, S. 383 (1966)

[3] E. Binz: Kompakte Limesräume und limitierte Funktionenalgebren
Commentarii Mathematici Helvetici Vol. 43, Fasc. 2, S. 195 - 203 (1968)

[4] - : Bemerkungen zu limitierten Funktionenalgebren
Math. Annalen 175, S. 169 - 184 (1968)

[5] - : Zu den Beziehungen zwischen c-einbettbaren Limesräumen und ihren Funktionenalgebren
Math. Annalen 181, S. 45 - 52 (1969)

[6] - : On Closed Ideals in Convergence Function Algebras
Math. Annalen 182, S. 145 - 153 (1969)

[7] - : Notes on a Caracterization of Function Algebras
Math. Annalen 186, S. 314 - 326 (1970)

[8] N. Bourbaki: Elements of Mathematics, General Topology

[9] N. Bourbaki: Eléments de Mathématique, Integration 1-4

[10] R.E. Edwards: Functional Analysis
Holt, Rinehart and Winston, New York 1965

[11] H.R. Fischer: Limesräume
Math. Annalen 137, S. 269 - 303 (1959)

[12] L. Gillman and M. Jerison: Rings of Continuous Functions
Van Nostrand, Princeton 1960

[13] E. Hewitt - K.A. Stromberg: Real and Abstract Analysis
Springer Verlag, Berlin 1963

[14] J.L. Kelley: General Topology
Van Nostrand, Princeton 1968

[15] G. Köthe: Topologische Lineare Räume I
Springer Verlag, Berlin 1966

[16] L. Nachbin: Elements of Approximation Theory
Van Nostrand Mathematical Studies 14, Princeton 1967

[17] W. Rudin: Fourier Analysis on Groups
Interscience Publishers, New York

[18] M. Schroder: Doctoral thesis
Queen's University, Kingston/Ont. 1971