Bemerkungen über unendlichdimensionale, separierte Limesvektorräume und Limesgruppen.

von K. Kutzler

Nr. 6 (1971)

Diese Arbeit entstand aus einem Teil der Dissertation des Verfassers .

Bemerkungen über unendlichdimensionale, separierte Limesvektorräume und Limesgruppen.

von Kurt Kutzler

Im Folgenden sei K stets der Körper der reellen oder der komplexen Zahlen. Die Dimension eines Vektorraumes V über K sei definiert durch die Kardinalzahl einer (Hamel-) Basis von V.

Für zwei Limitierungen τ_1 und τ_2 auf einer Menge E gelte $\tau_1 \geqq \tau_2$ genau dann, wenn die identische Abbildung $id_E:(E,\tau_1) \longrightarrow (E,\tau_2)$ stetig ist. τ_1 heißt feiner als τ_2 bzw. τ_2 heißt gröber als τ_1.

Das erste Ziel dieser Arbeit ist es, auf jedem unendlichdimensionalen K-Vektorraum V eine bezüglich $\geqq$ nach unten gerichtete Familie von lokalkonvexen, separierten Vektorraumtopologien auf V zu konstruieren, deren Mächtigkeit abzählbar ist und die zudem die Eigenschaft besitzt, daß eine Vektorraumtopologie auf V, ob lokalkonvex oder nicht, die gröber als jede Topologie der Familie ist, die indiskrete Topologie auf V sein muß. In anderen Worten: Zu V wird ein induktives System lokalkonvexer, separierter, topologischer Vektorräume mit den folgenden Eigenschaften konstruiert:

(a) Für jedes Element des induktiven Systems ist der unterliegende Vektorraum mit V identisch.

(b) Die Mächtigkeit des induktiven Systems ist abzählbar.

(c) Der induktive Limes dieses Systems in der Kategorie der topologischen und somit erst recht in der Kategorie der lokalkonvexen, topologischen Vektorräume ist V versehen mit der indiskreten Topologie. In der Kategorie der Limesvektorräume hingegen ist der induktive Limes dieses Systems separiert.

Ein weiteres Ziel dieser Arbeit ist es, die Richtigkeit des Satzes von Fischer ([3] , p. 294 , Satz 6) , daß auf jeder Limesgruppe die zur Gruppenlimitierung nächstgröbere Topologie mit der Gruppenstruktur verträglich sei, zu überprüfen. Es waren von Frölicher und Bucher [4] Zweifel über die Richtigkeit des Satzes angedeutet worden. Bucher wies in [2] nach, daß der Beweis von Fischer falsch ist. Es soll hier nun auch nachgewiesen werden, daß der Satz selbst falsch ist. Dies wird mit Hilfe der oben angedeuteten Mittel geschehen.

Beachtet man, daß der nach (a) - (c) zu definierende Limesvektorraum ein Marinescu-Raum im Sinne von H. Jarchow ([5],[6]) ist, so erhält man gleichzeitig ein sehr pathologisches Beispiel für eine Marinescu-Limitierung auf einem beliebigen unendlichdimensionalen Vektorraum.

Es war vom Verf. in einer früheren Note [8] gezeigt worden, daß die endlichdimensionalen Vektorräume die Eigenschaft besitzen, nur eine separierte Vektorraumlimitierung zuzulassen, nämlich die natürliche Topologie. In diesem Zusammenhang erkennt man, daß diese Eigenschaft für endlichdimensionale K-Vektorräume charakteristisch ist. Für separierte, topologische Vektorräume charakterisiert die Lokalkompaktheit des Vektorraumes auch dessen endliche Dimension, d.h., die endlichdimensionalen, separierten topologischen Vektorräume stimmen genau mit den lokalkompakten, separierten, topologischen Vektorräumen überein. Nun ist der Begriff der Lokalkompaktheit im Zusammenhang mit Untersuchungen über Algebren stetiger, reellwertiger Funktionen auf Limesräumen von F.T.M.Schroder für Limesräume verallgemeinert worden. In diesem Zusammenhang ist es von Interesse zu wissen, ob das Analogon des soeben zitierten Charakterisierungssatzes endlichdimensionaler, separierter, topologischer Vektorräume auch für separierte Limesvektorräume oder wenigstens für Marinescu-Räume gilt. Wiederum wird anhand einer speziellen Marinescu-Limitierung gezeigt werden, daß auf jedem unendlichdimensionalen Vektorraum V eine Limitierung τ derart existiert, daß (V,τ) ein separierter, lokalkompakter Marinescu-Raum ist. Das bedeutet, daß diese Charakterisierung endlichdimensionaler Vektorräume kaum zu verallgemeinern ist.

1. Begriffe.

Im Folgenden seien:

(1.1) L die Kategorie der Limesräume mit den stetigen Abbildungen als Morphismen.

(1.2) T die Kategorie der topologischen Räume mit den stetigen Abbildungen als Morphismen.

Bemerkung: T ist aufgrund der Axiomatik der Limesräume eine volle Unterkategorie von L.

(1.3) Es sei LV die Kategorie der Limesvektorräume über dem Körper K .

(1.4) TV sei die Kategorie der topologischen Vektorräume über K .

(1.5) KV sei die Kategorie der lokalkonvexen, topologischen Vektorräume über K .

In diesen Kategorien seien jeweils die stetigen, linearen Abbildungen die Morphismen.

Bemerkung: TV und KV sind volle Unterkategorien von LV .

Von Fischer [3] wurden die Begriffe der nächstgröberen Topologie für eine Limitierung und der nächstgröberen lokalkovexen Topologie für eine Vektorraumlimitierung eingeführt:

(1.6) Sei (E,τ) ein Limesraum. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Topologie $\omega\tau$ auf E derart, daß für jeden topologischen Raum (F,Λ) und jede stetige Abbildung $f:(E,\tau) \longrightarrow (F,\Lambda)$ das folgende Diagramm in L kommutiert:

$$\begin{tikzcd}(E,\tau) \arrow[r, "id_E"] \arrow[dr, "f"'] & (E, \omega\tau) \arrow[d, "f"] \\ & (F,\Lambda)\end{tikzcd}$$

$\omega\tau$ wird die zu τ nächstgröbere Topologie genannt. Ist $f:(E,\tau) \longrightarrow (F,\tau')$ ein Morphismus aus L , so ist $f:(E, \omega\tau) \longrightarrow (F, \omega\tau')$ aus T . Man kann demnach die Operation ω , die jeder Limitierung die nächstgröbere Topologie zuordnet, als einen Funktor $\omega: L \longrightarrow T$ interpretieren, der definiert ist durch

$$\omega(E,\tau) = (E, \omega\tau)$$

für jeden Limesraum (E,τ) und

$$\omega(f:(E,\tau) \longrightarrow (F,\tau')) = f:(E,\omega\tau) \longrightarrow (F,\omega\tau')$$

für jeden Morphismus $f:(E,\tau) \longrightarrow (F,\tau')$ aus L.

Bemerkung: Fischer [3] hat bewiesen, daß τ genau dann dem ersten Trennungsaxiom genügt, wenn die Topologie $\omega\tau$ dem ersten Trennungsaxiom genügt.

(1.7) Sei (E,τ) ein Limesvektorraum. Dann gibt es eine (eindeutig bestimmte) lokalkonvexe Topologie $\psi^{O}\tau$ auf E dergestalt, daß für jeden lokalkonvexen, topologischen Vektorraum (F,Λ) und für jede stetige, lineare Abbildung $f:(E,\tau) \longrightarrow (F,\Lambda)$ das folgende Diagramm in LV kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
(E,\tau) \arrow[r, "id_E"] \arrow[dr, "f"'] & (E,\psi^{O}\tau) \arrow[d, "f"] \\
& (F,\Lambda)
\end{tikzcd}$$

Sind (E,τ) und (F,τ') zwei Limesvektorräume und ist $f:(E,\tau) \longrightarrow (F,\tau')$ linear und stetig, so ist auch die Abbildung $f:(E,\psi^{O}\tau) \longrightarrow (F,\psi^{O}\tau')$ linear und stetig. Dies gibt Anlaß zur Definition eines Funktors

$$\psi^{O}: LV \longrightarrow KV ,$$

der definiert ist durch:

$$\psi^{O}(E,\tau) = (E,\psi^{O}\tau)$$

für jeden Limesvektorraum (E,τ) und

$$\psi^{O}(f:(E,\tau) \longrightarrow (F,\tau')) = f:(E,\psi^{O}\tau) \longrightarrow (F,\psi^{O}\tau')$$

für jeden Morphismus $f:(E,\tau) \longrightarrow (F,\tau')$ aus LV.

(1.8) Man kann nun noch zusätzlich den Funktor der nächstgröberen Vektorraumtopologie ω^{O} auf LV mit Bild in TV einführen:

Für einen Limesvektorraum (E,τ) sei $\omega^{O}\tau$ die (eindeutig bestimmte) lineare (d.h.: mit der Linearstruktur von E verträgliche) Topologie auf E , so daß für jeden topologischen Vektorraum (F,Λ) und jede stetige, lineare Abbildung $f:(E,\tau) \longrightarrow (F,\Lambda)$ das folgende Diagramm in LV kommutiert:

$$\begin{tikzcd} (E,\tau) \arrow[r, "id_E"] \arrow[dr, "f"'] & (E,\omega^{o}\tau) \arrow[d, "f"] \\ & (F,\Lambda) \end{tikzcd} .$$

Die Topologie $\omega^{o}\tau$ wird wie folgt konstruiert:

Sei $\Omega = \{ \Lambda \mid \Lambda$ lineare Topologie auf E ,so daß

$id_E:(E,\tau) \longrightarrow (E,\Lambda)$ stetig$\}$.

Es gilt stets $\Omega \neq \emptyset$, denn wie man sofort sieht, ist die indiskrete Topologie stets in Ω enthalten. Man bilde nun das topologische Produkt $\prod_{\Lambda \in \Omega} (E,\Lambda)$ und betrachte die Diagonalabbildung $\Delta:E \longrightarrow \prod_{\Lambda\in\Omega} (E,\Lambda)$, die durch

$\Delta(x) = (x_\Lambda)_{\Lambda\in\Omega}$ mit $x_\Lambda = x$ für x aus E definiert ist. $\omega^{o}\tau$ definiere man nun als die von der linearen und injektiven Abbildung Δ und dem Produkt $\prod_{\Lambda\in\Omega} (E,\Lambda)$ auf E induzierte Initialtopologie, die linear ist, und rechnet nach:

i) $\omega^{o}\tau \in \Omega$.

ii) Für Λ aus Ω ist $id_E:(E,\omega^{o}\tau) \longrightarrow (E,\Lambda)$ stetig.

iii) Wenn für einen topologischen Vektorraum (F,Λ') die lineare Abbildung $f:(E,\tau) \longrightarrow (F,\Lambda')$ stetig ist und wenn Λ_f die (lineare) Initialtopologie der Abbildung $f:E \longrightarrow (F,\Lambda')$ ist, so folgt aus der Charakterisierung einer Initialtopologie die Stetigkeit von $id_E:(E,\tau) \longrightarrow (E,\Lambda_f)$.

und mithin $\Lambda_f \in \Omega$. Demnach ist $id_E:(E,\omega^o\tau) \longrightarrow (E,\Lambda_f)$ stetig, und man erhält die Stetigkeit von

$$f:(E,\omega^o\tau) \longrightarrow (F,\Lambda) .$$

Sind nun (E,τ) und (F,τ') zwei Limesvektorräume und ist $f:(E,\tau) \longrightarrow (F,\tau')$ sowohl stetig als auch linear, so ist auch $f:(E,\omega^o\tau) \longrightarrow (F,\omega^o\tau')$ stetig und linear. Das gibt Anlaß zur Definition des Funktors der nächstgröberen linearen Topologie $\omega^o: LV \longrightarrow TV$, der bestimmt wird durch:

$$\omega^o(E,\tau) = (E,\omega^o\tau)$$

für jeden Limesvektorraum (E,τ) und

$$\omega^o(f:(E,\tau) \longrightarrow (F,\tau')) = f:(E,\omega^o\tau) \longrightarrow (F,\omega^o\tau')$$

für jeden Morphismus $f:(E,\tau) \longrightarrow (F,\tau')$ aus LV.

Bemerkungen: Die Einschränkungen der soeben eingeführten Funktoren auf die Bildkategorien, die ja volle Unterkategorien der Definitionsbereiche der Funktoren sind, ergibt stets den identischen Funktor der Bildkategorie. Das bedeutet: Für jeden topologischen Raum (E,Λ) gilt stets:

$$\omega(E,\Lambda) = (E,\Lambda) .$$

Analog ergibt der Funktor ω angewendet auf eine stetige Abbildung eines topologischen Raumes in einen anderen topologischen Raum wieder dieselbe Abbildung mit derselben Quelle und demselben Ziel. Dasselbe gilt für den Funktor ω^o angewandt auf topologische Vektorräume und stetige, lineare Abbildungen zwischen topologischen Vektorräumen sowie für den Funktor ψ^o angewandt auf lokalkonvexe, topologische Vektorräume und stetige, lineare Abbildungen zwischen Räumen dieser Kategorie. Es werde noch erwähnt - was aus (1.7) und (1.8) unmittelbar ersichtlich ist - , daß für jeden Limesvektorraum (E,τ) stets $\psi^o\tau = \psi^o(\omega^o\tau)$ gilt und $id_E:(E,\omega^o\tau) \longrightarrow (E,\psi^o\tau)$ stetig ist.

(1.9) Induktive Limites:

Ein induktives System von Limesräumen werde wie folgt definiert: Sei I ein bezüglich einer Ordnung nach oben gerichtetes Indexsystem. $(E_i)_{i\varepsilon I}$ sei ein entsprechend der Ordnung von I gerichtetes Mengensystem, d.h., für i_1 und i_2 aus I mit $i_1 \leqq i_2$ sei $j_{i_1i_2}:E_{i_1} \longrightarrow E_{i_2}$ die Inklusionsabbildung. Für jeden Index i aus I sei τ_i eine Limitierung auf E_i derart, daß für $i_1 \leqq i_2$ die Abbildung $j_{i_1i_2}:(E_{i_1},\tau_{i_1}) \longrightarrow (E_{i_2},\tau_{i_2})$ stetig ist. Ferner sei $E = \bigcup_{i\varepsilon I} E_i$ der mengentheoretische induktive Limes des vorgegebenen induktiven Systems. Für jeden Index i aus I sei $j_i:E_i \longrightarrow E$ die Einbettungsabbildung. Fischer [3] hat bewiesen, daß es auf E eine eindeutig bestimmte Limitierung τ gibt , die man auch mit $\operatorname{ind}_I \tau_i$ bezeichnet, so daß für jeden Limesraum (F,τ') und jedes System von stetigen Abbildungen $f_i:(E_i,\tau_i) \longrightarrow (F,\tau')$, wo i aus I sei, das für $i_1 \leqq i_2$ den Bedingungen $f_{i_1} = f_{i_2} \circ j_{i_1i_2}$ genügt, genau eine stetige Abbildung $f:(E,\tau) \longrightarrow (F,\tau')$ existiert, so daß das folgende Diagramm in L kommutiert :

$$\begin{tikzcd}
(E_i,\tau_i) \arrow[r, "j_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & (E,\tau) \arrow[d, dashed, "f"] \\
& (F,\tau')
\end{tikzcd} \qquad (i \varepsilon I)$$

Fischer hat gezeigt: Wenn die (E_i,τ_i) zusätzlich Limesvektorräume sind, so ist auch, wenn man $E = \bigcup_{i\in I} E_i$ mit der in natürlicher Weise definierten Vektorraumstruktur versieht, $(E, \operatorname{ind}_I \tau_i)$ ebenfalls ein Limesvektorraum. Die Existenz von induktiven Limites in L impliziert also automatisch die Existenz von induktiven Limites in LV. Ferner ist $(E, \operatorname{ind}_I \tau_i)$ genau dann separiert, wenn jeder der Limesvektorräume (E_i,τ_i) separiert ist. Um einen induktiven Limes in der Kategorie LV zu bilden, braucht man ihn also nur in der Kategorie L zu berechnen. Im Folgenden werden der in der Kategorie LV gebildete induktive Limes eines induktiven Systems $((E_i,\tau_i),j_{i_1i_2})$ aus LV mit $\operatorname{ind}_I(LV)(E_i,\tau_i)$ und die induktive Limitierung des Mengenlimes mit $\operatorname{ind}_I(LV)\,\tau_i$ bezeichnet.

Sei nun $((E_i,\Lambda_i), j_{i_1i_2})$ ein induktives System topologischer Vektorräume. Dann kann $\operatorname{ind}(LV)(E_i,\Lambda_i) = (\bigcup_{i\in I} E_i, \operatorname{ind}_I(LV)\,\Lambda_i)$ gebildet werden. Sei nun (F,Λ') ein topologischer Vektorraum. Für i aus I seien lineare und stetige Abbildungen $f_i:(E_i,\Lambda_i) \longrightarrow (F,\Lambda')$ gegeben, die den Bedingungen $f_{i_1} = f_{i_2} \circ j_{i_1i_2}$, wo $i_1 \leq i_2$ gelte, genügen. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $f:(E, \operatorname{ind}_I(LV)\,\Lambda_i) \longrightarrow (F,\Lambda')$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(E_i,\Lambda_i) \arrow[r, "j_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & (E,\operatorname{ind}_I(LV)\,\Lambda_i) \arrow[d, "f"] \\
& (F,\Lambda')
\end{tikzcd}$$

für jeden Index i aus I in LV kommutiert. Hierbei wurde $E = \bigcup_{i\in I} E_i$ gesetzt. Die Anwendung des Funktors

ω^{o} führt diese kommutativen Diagramme in kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd}(E_i,\Lambda_i) \arrow[r, "j_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & (E,\omega^{o}(\operatorname{ind}_{I}(LV)\Lambda_i)) \arrow[d, "f"] \\ & (F,\Lambda')\end{tikzcd} \qquad (i \in I)$$

in der Katgeorie TV über. (Man beachte, daß $\omega^{o}\Lambda_i = \Lambda_i$ und $\omega^{o}\Lambda' = \Lambda'$ nach den Voraussetzungen gilt.) Nach der allgemeinen Definition des induktiven Limes folgt dann aber, daß $(E,\omega^{o}(\operatorname{ind}_{I}(LV)\Lambda_i))$ die Eigenschaften eines induktiven Limes in der Kategorie TV besitzt.

Analog zeigt man: Ist $((E_i,\Lambda_i), j_{i_1 i_2})$ ein induktives System lokalkonvexer, topologischer Vektorräume, so ist $(E,\psi^{o}(\operatorname{ind}_{I}(LV)\Lambda_i))$ der induktive Limes dieses Systems in der Kategorie KV der lokalkonvexen, topologischen Vektorräume. Ferner gilt in der Kategorie der Limesvektorräume das folgende Diagramm:

$$(E,\operatorname{ind}_{I}(LV)\Lambda_i) \xrightarrow{id_E} (E,\omega^{o}(\operatorname{ind}(LV)\Lambda_i)) \xrightarrow{id_E} (E,\psi^{o}(\operatorname{ind}(LV)\Lambda_i))$$

2. Ein Lemma über schwache Topologien.

(2.1) Lemma: Seien E ein Vektorraum über K, σ eine schwache Topologie und Λ eine lineare Topologie auf E derart, daß $id_E : (E,\sigma) \longrightarrow (E,\Lambda)$ stetig ist. Dann ist auch Λ eine schwache Topologie auf E. (Hierbei werde unter einer schwachen Topologie auf E die Initialtopologie von E bezüglich eines Teilraums des Dualraums von E verstanden.)

Beweis: Sei $(E,\sigma)' = E'$ der Dualraum von (E,σ). Es gilt $\sigma = \sigma(E,E')$, wobei $\sigma(E,E')$ die von der Dualität (E,E')

auf E erzeugte schwache Topologie bedeute. Um zu zeigen, daß Λ eine schwache Topologie ist, genügt es zu beweisen, daß es zu jeder Λ-Nullumgebung U Funktionale $e_1^{\prime},\dots,e_n^{\prime}$ aus $(E,\Lambda)'$ und $\delta > 0$ derart gibt, daß für x aus E, das den Relationen $|\langle x,e_i^{\prime}\rangle| < \delta$ für $i = 1,\dots,n$ genügt, stets $x \in U$ folgt.

Da jeder topologische Vektorraum regulär ist, kann man zu U stets eine Λ-Nullumgebung V finden, so daß ihre abgeschlossene Hülle V^- (bezüglich Λ !) die Relation $V^- + V^- \subseteq U$ erfüllt. Wegen der Stetigkeit von $id_E:(E,\sigma) \longrightarrow (E,\Lambda)$ ist die Λ- Nullumgebung V auch eine σ-Nullumgebung. Da σ eine schwache Topologie auf E ist, gibt es einen Unterraum F von E, der endliche Kodimension besitzt und für den $F \subseteq V$ gilt. Insbesondere liegt dann wegen $V^- \subseteq U$ auch die abgeschlossene Hülle F^- (bezüglich Λ !) von F in U. Es sei nun $(E/F^-, \Lambda_Q)$ der endlichdimensionale Quotientenraum von E nach F^- mit der linearen Quotiententopologie Λ_Q, die durch den natürlichen Homomorphismus $\upsilon:(E,\Lambda) \longrightarrow E/F^-$ induziert wird. Da F^- abgeschlossen ist, ist Λ_Q separiert. Da E/F^- endlichdimensional ist, stimmt Λ_Q nach dem Satz von Tychonoff mit der natürlichen Topologie Λ_{nat} von E/F^- überein. Ferner ist $\upsilon(U)$ Nullumgebung in $(E/F^-, \Lambda_{nat})$, denn $\upsilon(U)$ umfaßt $\upsilon(V^-)$, und es ist $\upsilon^{-1}(\upsilon(V^-)) = V^- + F^-$ eine Nullumgebung bezüglich Λ.

Sei nun $\dim_K(E/F^-) = n$. Dann gibt es, da E/F^- die natürliche Topologie trägt, n linear unabhängige Funktionale $f_1^{\prime},\dots,f_n^{\prime}$ auf E/F^- und $\delta > 0$ derart, daß für jedes

Element z aus E/F^-, das für $i = 1,\dots,n$ den Relationen $|\langle z,f_i'\rangle| < \delta$ genügt, folgt, daß $z \in \upsilon(V^-)$ gilt. Man betrachte nun die stetigen, linearen Funktionale $e_i' = f_i' \circ \upsilon$ auf E. Für alle x aus E, die die Beziehungen $|\langle x,e_i'\rangle| < \delta$, wo $i = 1,\dots,n$, erfüllen, folgt nach Konstruktion der f_i', daß $\upsilon(x) \in \upsilon(V^-)$ gelten muß. Also ist $x \in \upsilon^{-1}(\upsilon(V^-)) = V^- + F^-$. Wegen $V^- + F^- \subseteq V^- + V^- \subseteq U$ folgt also $x \in U$. Damit ist bewiesen, daß Λ eine schwache Topologie ist.

3. Induktive Systeme schwacher Topologien.

Im folgenden Abschnitt soll nun das in der Einleitung erwähnte induktive System lokalkonvexer Topologien, dessen induktiver Limes sowohl in der Kategorie der topologischen Vektorräume als auch in der Kategorie der lokalkonvexen, topologischen Vektorräume die indiskrete Topologie ist, konstruiert und das gesuchte Gegenbeispiel zum erwähnten Satz von Fischer angegeben werden.

(3.1)Lemma: Sei B eine Menge, deren Kardinalzahl größer als $\aleph_0$ sei ($\mathrm{Cz}\, B > \aleph_0$). Dann existiert eine Partition $(C_j)_{j\in J}$ (, wo J eine Indexmenge sei,) von B derart, daß für alle j aus J gilt $\mathrm{Cz}\, C_j = \aleph_0$. Das bedeutet: Die Menge B läßt sich in ein System von paarweise disjunkten Teilmengen zerlegen, die alle von abzählbarer Mächtigkeit sind.

Beweis: Man definiere eine Klasse Σ von Mengensystemen wie folgt:

Σ bestehe aus allen Systemen $\mathfrak{N}$ von Teilmengen von B, die folgenden Bedingungen gehorchen:

a) Jedes Element von N ist von abzählbarer Mächtigkeit.

b) Je zwei verschiedene Elemente aus N sind disjunkt.

Die Klasse Σ ist nicht leer, denn nach Voraussetzung ist $\mathrm{Cz}\, B > \aleph_0$. Wie aus der Mengenlehre bekannt ist, enthält B eine abzählbare Teilmenge B_1. Dann ist aber $\{B_1\}$ aus Σ. Definiert man nun auf Σ eine Ordnung durch die Inklusion der Elemente aus Σ, so beweist man leicht, daß Σ induktiv geordnet ist. Bezüglich dieser Ordnung existieren nach dem Zornschen Lemma maximale Elemente in Σ. Sei M ein maximales Element. Es werde angenommen, daß M von der Form $M = \{B_j \mid j \in J\}$ ist, wo J eine Indexmenge sei. Dann muß $\mathrm{Cz}\,(B \setminus (\bigcup_{j \in J} B_j)) < \aleph_0$ gelten. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so ließe sich eine abzählbare Teilmenge B' aus $B \setminus (\bigcup_{j \in J} B_j)$ auswählen. Dann würde das System $M \cup \{B'\}$ in Σ liegen und M umfassen, was ein Widerspruch zur Maximalität von M wäre. Folglich muß für jedes maximale System $\{B_j \mid j \in J\}$ die obige Relation gelten. Mit Hilfe eines maximalen Systems M wird die gesuchte Partition konstruiert. Hierzu wähle man einen festen Index j_1 aus J und definiere $C_{j_1} = B_{j_1} \cup (B \setminus (\bigcup_{j \in J} B_j))$ sowie $C_j = B_j$ für alle j aus J mit $j \neq j_1$. Dann ist $(C_j)_{j \in J}$ eine Partition von B, die das Gewünschte leistet.

Im Folgenden sei P_0 der Raum aller Polynome, aufgefaßt als Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$, mit Koeffizienten in K und verschwindendem konstanten Term :

$$P_o = \{ f \mid f: [0,1] \longrightarrow K \ , \ f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \ \text{für} \ x \in [0,1] \} .$$

Ferner definiere man für eine natürliche Zahl k :

$$P_k = \{ g \mid g: [0,1] \longrightarrow K \ , \ g(x) = \sum_{i=2^k}^{m} a_i x^i \ , \ a_i \in K, \ m \geqq 2^k, \ x \in [0,1] \} .$$

Für jede natürliche Zahl k sind P_k und P_o Vektorräume über K, die, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf $[0,1]$, zu normierten Räumen werden. Dabei gilt stets $\dim_K P_k = \dim_K P_o = \aleph_o$.

<u>(3.2)Satz: Jeder Raum</u> P_k <u>ist dicht in</u> P_o $(k = 0,1,\dots)$.
<u>Ferner ist</u> $\bigcap_{k=0}^{\infty} P_k = \{0\}$.

<u>Beweis:</u> Es genügt zu zeigen, daß für $k = 0,1,\dots$ der Raum P_{k+1} dicht in P_k ist. Sei f aus P_k von der Form

$$f(x) = \sum_{i=2^k}^{m} a_i x^i \qquad (x \in [0,1]) .$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werde angenommen, daß $m \geqq 2^{k+1}$ gilt. Nach dem Approximationssatz von Weierstrass existiert eine Folge (g_n) von Polynomen auf $[0,1]$, die die Funktion $x \longmapsto x^{1/2}$ gleichmäßig approximiert. Hierbei kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß die Folge (g_n) in P_o liegt. Definiert man für natürliche Zahlen n und i das Polynom g_{ni} als Funktion auf $[0,1]$ durch $g_{ni}(x) = g_n(x^{2i})$, so impliziert dies, daß die Folge $(g_{ni})_{n\in N}$ auf $[0,1]$ gleichmäßig die Funktion $x \longmapsto x^i$ approximiert. Da für alle g_n die konstanten Koeffizienten verschwinden, folgt, daß für die g_{ni} die Koeffizienten aller Terme vom Grade $j < 2i$ verschwinden müssen. Insbesondere folgt für jede natürliche Zahl k und $i \geq 2^k$: Die Polynome g_{ni} liegen alle in P_{k+1} und approximieren gleichmäßig die Funktion $x \longrightarrow x^i$. Man definiere für jede natürliche Zahl n nun ein Polynom f_n aus P_{k+1} durch

$$f_n(x) = \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} a_i g_{ni}(x) + \sum_{i=2^{k+1}}^{m} a_i x^i \quad (x \varepsilon [0,1]) .$$

Man erkennt nun, daß die Folge (f_n) gleichmäßig das Polynom f auf $[0,1]$ approximiert. Infolgedessen ist P_{k+1} dicht in P_k und somit die erste Behauptung des Satzes bewiesen. Die zweite Behauptung zu verifizieren ist trivial.

<u>(3.3) Definition: Für einen K-Vektorraum E sei E^* der Raum aller K-linearen Funktionale auf E . Ein Unterraum M von E^* heiße total, wenn aus den Relationen $x \varepsilon E$ und $<x,m> = 0$ für alle m aus M folgt: $x = o$. (Äquivalent zur Totalität des Raumes M ist die Separiertheit der von M auf E induzierten schwachen Topologie $\sigma(E,M)$.)</u>

Auf $P_o \times P_o$ werde ein bilineares Funktional $b(.,.)$ definiert durch

$$b(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad ((f,g) \varepsilon P_o \times P_o) .$$

Dann ist die Abbildung $I : P_o \longrightarrow P_o^*$ definiert durch $I(g) = b(.,g)$ $(g \varepsilon P_o)$, wie man sich sofort überlegt, eine Einbettung von P_o in P_o^* , die die folgenden Eigenschaften besitzt:

a) Sie ist linear und injektiv.

b) Jeder bezüglich der Supremumsnorm auf $[0,1]$ dichte Unterraum F von P_o wird auf einen totalen Unterraum von P_o^* abgebildet; denn ist f aus P_o , so auch $\bar{f}$.

(Hierbei sei $\bar{f} = f$, falls K der Körper der rellen Zahlen ist. Falls K der Körper der komplexen Zahlen ist, sei $\bar{f}$ die zu f konjugiert komplexe Funktion.) Dann aber gibt es eine Folge (h_n) aus F, die gleichmäßig gegen $\bar{f}$ konvergiert. Daraus folgt aber, daß

$$b(f,h_n) = \int_0^1 f(x)h_n(x)dx$$

gegen

$$b(f,\bar{f}) = \int_0^1 |f(x)|^2 dx$$

konvergiert. Nun gilt $b(f,\bar{f}) = 0$ genau dann, wenn $f = o$ gilt. Aus $f \in P_o$ und $b(f,h) = 0$ für alle h aus F folgt somit wegen der Dichte von F in P_o, daß $f = o$ gelten muß, daß also I(F) total ist.

Es werden also die Räume P_k durch die Abbildung I auf totale Unterräume $P_k' = I(P_k)$ von P_o abgebildet. Wegen der Injektivität von I gilt:

$$P_{k+1}' \subsetneq P_k' \qquad \text{und} \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} P_k' = \{o\} .$$

Das Ergebnis dieser Betrachtung kann zu folgendem Korollar zusammengefaßt werden:

<u>(3.4) Korollar: Es existiert eine Folge</u> (P_k') <u>totaler Unterräume von</u> P_o <u>derart, daß gilt:</u>

a) $P_{k+1}' \subsetneq P_k'$.

b) $\bigcap_{k=1}^{\infty} P_k' = \{o\}$.

Ist nun E ein beliebiger K-Vektorraum mit $\dim_K E = \aleph_o$, so existiert wegen $\dim_K P_o = \aleph_o$ ein K-Isomorphismus $Is : E \longrightarrow P_o$. Die adjungierte Abbildung $(Is)^* : P_o^* \longrightarrow E^*$ ist dann ebenfalls ein Isomorphismus. Durch $(Is)^*$ werden totale Unterräume auf totale Unterräume abgebildet. Da $(Is)^{*}$ bijektiv ist, erhält man, wenn man $E'_k = (Is)^{*}(P'_k)$ setzt, ($k = 0,1,\ldots$) :

(3.5) Korollar: Zu jedem K-Vektorraum E mit $\dim_K E = \aleph_0$ existiert eine Folge (E'_k) totaler Unterräume von E mit den folgenden Eigenschaften:

a) $E'_{k+1} \underset{\infty}{\subsetneq} E'_k$ ($k = 0,1,\ldots$).

b) $\bigcap_{k=1} E'_k = \{o\}$.

Dieses Ergebnis soll nun auf unendlichdimensionale K- Vektorräume beliebiger Dimension übertragen werden:

(3.6) Satz: Sei E ein beliebiger K-Vektorraum mit $\dim_K E \geqq \aleph_0$. Dann existiert eine Folge (E'_k) totaler Unterräume von E^{*}, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) $E'_{k+1} \subsetneq E'_k$ ($k = 0,1,\ldots$) .

b) $\bigcap_{k=1}^{\infty} E'_k = \{o\}$.

Beweis: Für den Fall $\dim_K E = \aleph_0$ stimmt die Aussage (3.6) mit der von (3.5) überein. Es genügt also, den Fall $\dim_K E > \aleph_0$ zu betrachten. Sei B eine Basis von E. Dann ist $\mathrm{Cz}\, B = \dim_K E$. Ferner sei $(B_j)_{j \in J}$ eine Partition dieser Basis in abzählbare Teilmengen, die nach (3.1) existiert. Es sei für jeden Index j aus J stets E_j der von B_j in E aufgespannte Unterraum. Es gilt $\dim_K E_j = \aleph_0$. Dann läßt sich E wie folgt als direkte Summe der E_j darstellen:

$$E = \bigoplus_{j \in J} E_j .$$

Nach (3.5) existiert für E_j eine Folge $(E'_{j,n})_{n \in \mathbb{N}}$ totaler Unterräume von E_j^{*}, die den Bedingungen (a) und

(b) von (3.5) genügt .

Nach bekannten Sätzen aus der linearen Algebra läßt sich der Dualraum E^* von E als direktes Produkt der Dualräume E_j^* von E_j darstellen:

$$E^* = \prod_{j \in J} E_j^* .$$

Für $k = 0,1,\ldots$ definiere man nun Unterräume E_k' von E^* durch:

$$E_k' = \prod_{j \in J} E_{j,k}' .$$

Da nach Wahl der Räume $E_{j,k}'$ jeder dieser Räume total in E_j^* ist, folgt, daß E_k' für $k = 0,1,\ldots$ total in E^* sein muß. Aus der Konstruktion der Räume E_k' folgt nun unmittelbar, daß für $k = 0,1,\ldots$ gelten muß:

$$E_{k+1}' \subseteq E_k' .$$

Ferner folgt aus $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{j,k}' = \{o\}$ für jeden Index j aus J nach Konstruktion der Räume E_k' :

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k' = \{o\}.$$

Aufgrund dieses Satzes ist nun jedem unendlichdimensionalen K-Vektorraum E eine Folge (E_k') totaler Unterräume von E^* so zugeordnet, daß die Bedingungen (a) und (b) in (3.6) erfüllt sind.

Jeder der Dualitäten (E,E_k') ($k = 0,1,\ldots$) entspricht nun in eindeutiger Weise eine schwache Topologie $\sigma_k = \sigma(E,E_k')$; die wegen der Totalität von E_k' in E^* separiert ist. Für natürliche Zahlen k und k' mit $k \leqq k'$ gilt $E_{k'}' \subseteq E_k'$. Aufgrund der Eigenschaft einer schwachen Topologie, Initialtopologie zu sein, folgt

die Stetigkeit der Abbildung $id_E:(E,\sigma_k) \longrightarrow (E,\sigma_{k'})$.
Damit ist ein induktives System $((E,\sigma_k), id_E)$ definiert.
Dieses System ist abzählbar.
Sei nun $(E,\tau_E) = \underset{N}{ind}(LV)(E,\sigma_k)$.
Nach der Bemerkung in (1.9) ist (E,τ_E) ein separierter Limesvektorraum (Marinescu-Raum), von dem nun gezeigt werden soll, daß sowohl $\omega^o\tau_E$ als auch $\psi^o\tau_E$ die indiskrete Topologie auf E sind.
Für jede natürliche Zahl k ist die Abbildung

$$id_E:(E,\sigma_k) \longrightarrow (E,\omega^o\tau_E)$$

stetig. Da die Vektorraumtopologien σ_k schwache Topologien sind, folgt nach (2.1) , daß auch $\omega^c\tau_E$ eine schwache Topologie und somit lokalkonvex sein muß. Hieraus folgt nach (1.9) , daß $\omega^o\tau_E = \psi^o\tau_E$ gelten muß . Es bleibt also zu zeigen, daß $\psi^o\tau_E$ die indiskrete Topologie auf E ist. Hierbei werde berücksichtigt, daß nach soeben durchgeführtem Schluß $\psi^o\tau_E$ eine schwache Topologie ist.
Um die Behauptung zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß das Nullfunktional o das einzige bezüglich $\psi^o\tau_E$ stetige, lineare Funktional ist .
Wegen der Stetigkeit von $id_E:(E,\sigma_k) \longrightarrow (E,\psi^o\tau_E)$ für jede natürliche Zahl k (siehe (1.9)) folgt wegen $E_k' = (E,\sigma_k)'$ für jedes stetige, lineare Funktional e' aus $(E,\psi^o\tau_E)'$ auch $e' \varepsilon E_k'$.
Also gilt $e' \varepsilon \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k' = \{o\}$ und folglich $e' = o$.
Aus den soeben angestellten Betrachtungen ergibt sich dann das folgende Ergebnis:

<u>(3.7) Satz: Sei</u> E <u>ein unendlichdimensionaler</u> K-<u>Vektorraum.</u>

Dann existiert auf E eine separierte, mit der Linearstruktur von E kompatible Limitierung τ_E derart, daß die nächstgröbere mit der Vektorraumstruktur von E verträgliche Topologie von E die indiskrete Topologie ist.

4. Gegenbeispiel zu einem Satz von Fischer.

Im Folgenden sei E ein unendlichdimensionaler K-Vektorraum. τ_E sei eine nach dem im Abschnitt 3 angegebenen Konstruktionsverfahren gewonnene separierte Vektorraumlimitierung auf E. Betrachtet man E nur mit der additiven Struktur als einziger algebraischer Struktur, so ist (E,τ_E) eine limitierte Gruppe. Es soll nun bewiesen werden:

(4.1) Satz: $(E,\omega\tau_E)$ ist keine topologische Gruppe, da die Addition nicht bezüglich $\omega\tau_E$ stetig ist.

Beweis: Hierzu wird das folgende Lemma benötigt:

(4.2) Lemma: Sei (E,τ) ein Limesvektorraum. Die Addition auf E sei bezüglich $\omega\tau$ stetig. Dann ist die abgeschlossene Hülle F^- eines Unterraumes F von E bezüglich der Topologie $\omega\tau$ wieder ein Unterraum von E.

Beweis: Sei λ aus K. x sei aus F^-. Für $\lambda = 0$ folgt $\lambda\cdot x \in F \subseteq F^-$. Für $\lambda \neq 0$ ist die Homothetie $j_\lambda : x \longmapsto \lambda\cdot x$ auf Grund der Stetigkeit der Skalarmultiplikation ein Homöomorphismus bezüglich τ. Nach (1.6) folgt, daß j_λ auch bezüglich $\omega\tau$ ein Homöomorphismus von E auf sich selbst sein muß. Da F ein linearer Raum ist, gilt $j_\lambda(F) = F$. Dann folgt wegen der Homöomorphieeigenschaft von j_λ :

$$\lambda\cdot F^{-} = j_{\lambda}(F^{-}) = j_{\lambda}(F)^{-} = \lambda\cdot F^{-} .$$

Demnach gilt für x aus F^{-} stets $\lambda\cdot x \in F^{-}$.
Insbesondere ist die Abbildung $j_{-1}: x \longmapsto -x \quad (x \in E)$ bezüglich $\omega\tau$ stetig. Interpretiert man nun E als abelsche Gruppe, so ist $(E,\omega\tau)$ nach der Voraussetzung über die Stetigkeit der Addition bezüglich $\omega\tau$ eine topologische, abelsche Gruppe. Da F als linearer Unterraum von E eine Untergruppe ist, ist - wie aus der Theorie der topologischen Gruppen bekannt - die abgeschlossene Hülle F^{-} von F bezüglich $\omega\tau$ wieder eine Untergruppe von E. Für x und y aus F^{-} gilt also stets $x + y \in F^{-}$.
Aus diesen Betrachtungen folgt aber, daß F^{-} ein linearer Unterraum von E ist.
Es werde nun (4.1) bewiesen. Hierzu werde angenommen, daß die Addition auf E bezüglich $\omega\tau_E$ stetig sei, und diese Annahme zu einem Widerspruch geführt. Da (E,τ_E) separiert ist, genügt $\omega\tau_E$ (siehe (1.6)) dem ersten Trennungsaxiom. Da die Addition auf E mit $\omega\tau_E$ nach Voraussetzung kompatibel sein sollte, folgt aus der Beweisführung zu (4.2), daß $(E,\omega\tau_E)$ eine topologische Gruppe ist. Nach bekannten Sätzen aus der Theorie der topologischen Gruppen ist dann aber $(E,\omega\tau_E)$ separiert.
Sei nun k eine beliebige natürliche Zahl. Nach der Konstruktion von τ_E im Abschnitt 3 und nach (1.6) sowie (1.9) ist $id_E:(E,\sigma_k) \longrightarrow (E,\omega\tau_E)$ stetig.
Da jede topologische Gruppe regulär ist, kann man nun eine

$\omega\tau_E$ - Nullumgebung U wählen, so daß die abgeschlossene Hülle U^- von U bezüglich $\omega\tau_E$ die Bedingung $U^- \neq E$ erfüllt. Dann ist U auch Nullumgebung bezüglich jeder der Topologien σ_k, wo k eine beliebige natürliche Zahl sei. Demnach muß U einen Unterraum F von endlicher Kodimension enthalten. Nach (4.2) ist die abgeschlossene Hülle F^- von F bezüglich $\omega\tau_E$ ein echter linearer Unterraum von E. Wiederum wegen der Stetigkeit von $id_E:(E,\sigma_k) \longrightarrow (E,\omega\tau_E)$ für jede natürliche Zahl k folgt, daß F^- auch bezüglich jeder der Topologien σ_k abgeschlossen ist. Dann ist für k aus N der Quotientenraum $(E/F^-,(\sigma_k)_Q)$ ein endlichdimensionaler, separierter topologischer Vektorraum . . Da nach dem Satz von Tychonoff auf E/F^- aber nur eine separierte, kompatible Topologie Λ_{nat} existieren kann, folgt für jedes k, daß $(\sigma_k)_Q = \Lambda_{nat}$ gilt. Bezeichnet man den natürlichen Homomorphismus $E \longrightarrow E/F^-$ mit υ, so folgt für jede natürliche Zahl k die Stetigkeit der Abbildung

$$\upsilon:(E,\sigma_k) \longrightarrow (E/F^-, \Lambda_{nat}) .$$

Da $(E/F^-, \Lambda_{nat})$ ein topologischer Vektorraum ist, folgt nach der Charakterisierung des induktiven Limes in (1.9) die Stetigkeit der Abbildung

$$\upsilon:(E,\omega^o\tau_E) = \omega^o(\underset{N}{\mathrm{ind}}(LV)(E,\sigma_k)) \longrightarrow (E/F^-,\Lambda_{nat}) .$$

Wegen der Endlichdimensionalität von E/F^- und wegen $E/F^- \neq \{o\}$ folgt, daß mindestens ein nichtverschwindendes, stetiges, lineares Funktional f' auf $(E/F^-,\Lambda_{nat})$ existiert. Da υ surjektiv und stetig ist, ist dann aber $f' \circ \upsilon$ ein nichtverschwindendes, stetiges, lineares Funktional auf $\operatorname{ind}_N(\mathcal{L}V)(E,\sigma_k)$. Da dieser Raum aber, wie im Abschnitt 3 gezeigt worden war, keine stetigen linearen Funktionale, die nicht identisch Null sind, besitzt, ergibt sich der gewünschte Widerspruch.

Berücksichtigt man, daß für jeden endlichdimensionalen, separierten Limesvektorraum (E,τ) die Limitierung τ schon eine Topologie ist, d.h., daß $\omega\tau = \tau$ gilt (siehe [8]), so erhält man zusammen mit (4.1) die folgende Charakterisierung von endlichdimensionalen Vektorräumen über K :

(4.3) Der K-Vektorraum E ist genau dann endlichdimensional, wenn für jede separierte, kompatible Limitierung τ auf E der Raum $(E,\omega\tau)$ ein topologischer Vektorraum ist.

Mit (3.7) erhält man:

(4.4) Der K-Vektorraum E ist genau dann endlichdimensional, wenn für jede separierte, kompatible Limitierung τ auf E die Topologien $\omega^{o}\tau$ und $\psi^{o}\tau$ separiert sind.

5. Lokalkompakte Limesvektorräume.

Sei E eine Menge, $E \neq \emptyset$. $\mathcal{B}$ sei eine Filterbasis in E . Dann werde der von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter mit $[\mathcal{B}]$ bezeichnet. Seien E und F nichtleere Mengen, $f:E \longrightarrow F$ eine Abbildung, Θ ein Filter auf E . Dann sei der Bildfilter $f(\Theta)$ von Θ unter f auf F definiert durch:

$$f(\Theta) = [\{ f(T) \mid T \in \Theta \}] .$$

Lokalkompakte, topologische Räume lassen sich durch ihre Algebren stetiger, reellwertiger Funktionen wie folgt charakterisieren: Ein topologischer Raum (E,Λ) ist genau dann lokalkompakt, wenn die R-Algebra $C((E,\Lambda),R)$ aller stetigen Funktionen auf (E,Λ) mit Werten in R eine gröbste Topologie Λ_{co} besitzt, so daß die Evaluationsabbildung $\omega:(C((E,\Lambda),R),\Lambda_{co}) \times (E,\Lambda) \longrightarrow R$ stetig ist. Diese Topologie ist die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von (E,Λ).

Ein Limesraum (E,τ) heiße kompakt (siehe Fischer [3]), wenn jeder Ultrafilter auf E bezüglich τ konvergiert. Eine Teilmenge M eines Limesraums (E,τ) heiße kompakt, wenn M versehen mit der Relativlimitierung τ_M bezüglich τ kompakt ist.

Bei Untersuchungen über die stetige Konvergenz auf den Algebren stetiger reellwertiger Funktionen, die auf Limesräumen definiert sind (siehe Binz [1]) entdeckte Schroder, daß es auch Limesräume geben kann, die keine topologischen Räume sind, so daß die stetige Konvergenz auf der Algebra der stetigen, reellwertigen Funktionen dieser Limesräume eine Topologie ist. Dies veranlaßte Schroder zur Definition des lokalkompakten Limesraumes, die nun angegeben werde:

(5.1) Definition: Ein Limesraum (E,τ) heiße lokalkompakt, wenn jeder in (E,τ) konvergente Filter eine kompakte Menge enthält.

Wie man sofort erkennt, stimmt diese Definition im Falle eines topologischen Raumes mit der üblichen Definition eines lokalkompakten, topologischen Raumes überein.

In der Kategorie der Limesräume lassen sich nun die folgenden beiden Sätze beweisen, die in der Kategorie der topologischen

Räume nicht gelten:

(5.2) Satz: Sei $((E_i,\tau_i))_{i\in I}$ (I *eine nichtleere Indexmenge) eine Familie von lokalkompakten Limesräumen.* E *sei eine Menge mit* $E \neq \emptyset$. *Ferner sei zu jedem Index* i *aus* I *eine Abbildung* $f_i : E_i \longrightarrow E$ *gegeben, so daß gilt:* $\bigcup_{i\in I} f_i(E_i) = E$. *Die Finallimitierung, die von den Limesräumen* (E_i,τ_i) *und den Abbildungen* f_i *auf* E *induziert wird, werde mit* τ *bezeichnet.*

Behauptung: (E,τ) *ist lokalkompakt.*

Beweis: Sei y aus E . Ein Filter Θ auf E konvergiert bezüglich τ gegen y (siehe Fischer [3]), wenn es Indizes $i_1,\ldots,i_n$ aus I , Elemente x_{i_k} aus E_{i_k} (wo $k = 1,\ldots,n$) und Filter Φ_{i_k} aus $\tau_{i_k}(x_{i_k})$ derart gibt, daß gilt:

$$f_{i_k}(x_{i_k}) = y \quad \text{und} \quad \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}(\Phi_{i_k}) \subseteq \Theta \; .$$

τ ist charakterisiert als die feinste Limitierung auf E mit der Eigenschaft, daß die Abbildungen f_i ,wo i aus I beliebig sei, stetig sind.

Da jeder Raum (E_i,τ_i) lokalkompakt ist, gibt es kompakte Teilmengen K_{i_k} von (E_{i_k},τ_{i_k}) mit $K_{i_k} \in \Phi_{i_k}$.

Nun ist

$$\bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}(\Phi_{i_k}) = \{ T_1 \cup \ldots \cup T_n \mid T_k \in f_{i_k}(\Phi_{i_k}) \} \subseteq \Theta \; .$$

Wegen der Stetigkeit der Abbildungen f_i sind die Mengen $f_{i_k}(K_{i_k})$ kompakte Teilmengen von (E,τ) . Da die Vereinigung von endlich vielen kompakten Mengen wieder kompakt ist, ist $\bigcup_{k=1}^{n} f_{i_k}(K_{i_k})$ eine kompakte Teilmenge von (E,τ) , die im Filter Θ enthalten ist. Da Θ ein beliebiger konvergenter Filter aus (E,τ) war, folgt, daß (E,τ) lokalkompakt sein muß.

Betrachtet man induktive Systeme lokalkompakter Limesräume (definiert nach (1.9)), so ergibt sich hieraus unmittelbar:

(5.3) Korollar: Der induktive Limes von lokalkompakten Limesräumen ist lokalkompakt.

Weiter erhält man allgemein:

(5.4) Satz: Jeder lokalkompakte Limesraum läßt sich als induktiver Limes seiner kompakten Teilmengen, versehen mit der Relativlimitierung, darstellen.

Beweis: Sei (E,τ) ein lokalkompakter Limesraum. Definiere:

$$\mathcal{K} = \{ K \mid K \subseteq E \text{ , } K \text{ kompakte Teilmenge von } (E,\tau) \} .$$

Da die endliche Vereinigung von kompakten Mengen wiederum kompakt ist und da jeder Punkt des Limesraumes (E,τ) kompakt ist, folgt, daß $\mathcal{K}$ ein bezüglich der Inklusion gerichtetes Überdeckungssystem von E ist. Folglich kann man $\mathcal{K}$ zusammen mit den in natürlicher Weise gegebenen Inklusionsabbildungen als ein induktives System kompakter Limesräume betrachten. Der mengentheoretische induktive Limes dieses Systems ist E . Für K aus $\mathcal{K}$ sei τ_K die von τ auf K induzierte Relativlimitierung; $j_K:(K,\tau_K) \longrightarrow (E,\tau)$ sei die Einbettungsabbildung. Bezeichnet man die Limitierung auf E , die durch das induktive System als Limitierung des induktiven Limes definiert ist, mit τ', so folgt unmittelbar die Stetigkeit der Abbildung

$$id_E:(E,\tau') \longrightarrow (E,\tau) .$$

Sei nun x aus E . Θ sei aus $\tau(x)$. Da (E,τ)

lokalkompakt war, gibt es eine kompakte Menge K in (E,τ), die x enthält und die in Θ enthalten ist. Es sei Θ_K die Spur von Θ auf K. Nach Definition der Relativlimitierung konvergiert Θ_K in (K,τ_K) gegen x. Da (K,τ_K) ein Element des betrachteten induktiven Systems ist, folgt nach Definition des induktiven Limes, daß der Filter $j_K(\Theta_K) = [\Theta_K] = \Theta$ in (E,τ') gegen x konvergiert. Da x aus E und Θ aus $\tau(x)$ beliebig waren, ist damit die Stetigkeit von $id_E:(E,\tau) \longrightarrow (E,\tau')$ bewiesen. Zusammen mit dem zu Beginn Gezeigten folgt nun $\tau = \tau'$.

Sei nun (E,τ) ein beliebiger Limesvektorraum über dem Körper K. Ferner sei F ein endlichdimensionaler Unterraum von E. τ_F sei die Relativlimitierung, die von τ auf F induziert wird. Wie aus [8] hervorgeht, ist τ_F stets gröber als die natürliche Topologie Λ_{nat}, die F als endlichdimensionaler Vektorraum trägt. Folglich ist die Einbettungsabbildung $j_F:(F,\Lambda_{nat}) \longrightarrow (E,\tau)$ stetig.

Sei nun $\mathcal{F}$ das System aller endlichdimensionalen Unterräume von E. Zusammen mit den Inklusionsabbildungen ist dieses System ein induktives System von Vektorräumen, dessen induktiver Limes in der Kategorie der K-Vektorräume E ist. Man versehe nun jeden Vektorraum F aus $\mathcal{F}$ mit der natürlichen Topologie. Zusammen mit den Inklusionsabbildungen erhält man so ein induktives System von lokalkonvexen, topologischen Vektorräumen, dessen induktiver Limes in der Kategorie der Limesvektorräume (E,τ_o) ist, wobei τ_o die durch das induktive System auf E erzeugte Vektorraumlimi-

tierung ist. (E,τ_o) besitzt die folgende charakteristische Eigenschaft :
Für jeden Limesvektorraum (E',τ') und für jede lineare Abbildung $f:E \longrightarrow E'$ ist $f:(E,\tau_o) \longrightarrow (E',\tau')$ stetig. Das bedeutet: τ_o ist die feinste Vektorraumlimitierung, die E tragen kann. (Als induktiver Limes von lokalkonvexen, topologischen Vektorräumen ist (E,τ_o) ein Marinescu-Raum.) Da es nun gleichgültig ist, ob der induktive Limes in der Kategorie der Limesräume oder in der Kategorie der Limesvektorräume berechnet wird (siehe (1.9)) und da jeder endlichdimensionale Vektorraum, versehen mit der natürlichen Topologie, lokalkompakt ist, folgt nach (5.3) , daß (E,τ_o) lokalkompakt sein muß. Man erhält also:

(5.5) Satz: Sei E ein beliebiger K-Vektorraum. τ_o sei die feinste Vektorraumlimitierung, die E besitzt. Dann ist (E,τ_o) lokalkompakt.

Bemerkung: Die hier betrachtete feinste Limitierung eines Vektorraumes tritt, wenn auch unbenannt, in Arbeiten von F.E.Browder et al. bei der Definition von endlichstetigen Operatoren auf. Die endlichstetigen Operatoren sind in reflexiven Banach-Räumen definierte Operatoren, die stetig sind, wenn man den Definitionsbereich mit der von der feinsten Vektorraumlimitierung induzierten Konvergenzstruktur und den Bildbereich mit der von der schwachen Topologie induzierten Topologie versieht.

(5.6) Bemerkung: Man könnte nun vermuten, daß die Limitierung τ_o die einzige separierte Vektorraumlimitierung auf einem unendlichdimensionalen Vektorraum ist, mit der

der Vektorraum lokalkompakt ist. Ein hier nur angedeutetes Beispiel zeigt, daß es noch weitere lokalkompakte Vektorraumlimitierungen auf unendlichdimensionalen Vektorräumen gibt:

Sei $(E, |\cdot|)$ ein unendlichdimensionaler, reflexiver Banach-Raum. Für jede natürliche Zahl n sei $S(o,n]$ die abgeschlossene Kugel um den Nullpunkt mit dem Radius n. σ sei die schwache Topologie von E bezüglich $(E, |\cdot|)$. Da $(E, |\cdot|)$ reflexiv ist, ist $(S(o,n], \sigma_{S(o,n]})$ ein kompakter, topologischer Raum. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß zusammen mit den in natürlicher Weise gegebenen Einbettungsabbildungen die Familie $((S(o,n], \sigma_{S(o,n]}))_{n \in N}$ ein induktives System kompakter, topologischer Räume bildet. Mengentheoretisch ist der induktive Limes dieses Systems der Vektorraum E. Sei $(E,\tau) = \operatorname{ind}_N(L)(S(o,n], \sigma_{S(o,n]})$. Dann ist nach (5.3) (E,τ) ein lokalkompakter Limesraum. Man rechnet nun leicht die folgende äquivalente Definition der Limitierung τ nach:

Ein Filter Θ auf E konvergiert genau dann bezüglich τ gegen ein Element x aus E, wenn er bezüglich σ gegen x konvergiert und zusätzlich eine beschränkte Menge enthält. Diese Definition wiederum ermöglicht es, ohne Schwierigkeiten zu verifizieren, daß τ eine Vektorraumlimitierung ist. (E,τ) ist also ein lokalkompakter Limesvektorraum. Da nach Konstruktion τ feiner als die separierte schwache Topologie σ ist, folgt, daß (E,τ) separiert ist. Da ferner jeder bezüglich der Norm konvergente Filter auf E auch in der schwachen Topologie konvergiert und außerdem stets beschränkte Mengen enthält, folgt, daß τ gröber als die Normtopologie sein muß. Da E nach Voraussetzung unendlichdimensional ist, ist die Normtopologie stets echt gröber als die feinste Vektorraumlimitierung von E, da es bezüglich der Normtopologie unstetige lineare Funktionale gibt; bezüglich der feinsten Vektorraumlimitierung muß aber nach deren universeller Charakterisierung jedes lineare Funktional auf E stetig sein. Folglich ist die Normtopologie und somit auch τ echt gröber als die feinste Vektorraumlimitierung.

Literaturverzeichnis.

[1] E. Binz:"Bemerkungen zu limitierten Funktionenalgebren." Math. Annalen 175, 1968, pp. 169 - 184.

[2] W. Bucher:"Différentiabilité de la composition et complétitude de certains espaces fonctionnels." Comm. Math. Helv. 43, 1968, pp. 256 - 288.

[3] H.R. Fischer:"Limesräume." Math. Annalen 137, 1959, pp. 269 - 303.

[4] A. Frölicher und W. Bucher:"Calculus in vector spaces without norm." Lecture Notes in Mathematics 30, Berlin-Heidelberg-New York, 1967.

[5] H. Jarchow:"Marinescu-Räume." Comm. Math. Helv. 44, 1969, pp. 138 - 163.

[6] H. Jarchow:"Dualität und Marinescu-Räume." Math. Annalen 182, pp. 134 - 144.

[7] G. Köthe:" Topologische lineare Räume I." Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen 107, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.

[8] K.Kutzler:"Eine Bemerkung über endlichdimensionale,sepa-

rierte, limitierte Vektorräume." Arch. d. Math. 20 , 1969, pp. 165 - 168 .

[9] F.T.M. Schroder: Dissertation , Queen's University, Kingston.

[10] H. Schubert:"Topologie", Teubner-Verlag, Stuttgart, 1964.