Bemerkungen über eine Klasse von $\mathbb{R}$-Algebrentopologien auf $C(X)$.

von

E. Binz, H.-P. Butzmann und K. Kutzler

Nr. 9 (1971)

Bemerkungen über eine Klasse von $\mathbb{R}$- Algebrentopologien auf $C(X)$.

von E. Binz , H.-P. Butzmann und K.Kutzler

Für einen vollständig regulären [3] topologischen Raum X bezeichne $C(X)$ die $\mathbb{R}$- Algebra (mit den punktweise definierten Operationen) aller stetigen, reellwertigen Funktionen auf X .

Bei der Untersuchung von $\mathbb{R}$-Algebrenlimitierungen auf $C(X)$ stießen wir auf die folgende Frage:

Gibt es auf $C(X)$ eine $\mathbb{R}$-Algebrentopologie T , die folgenden Bedingungen genügt:

(a) Die Evaluationsabbildung

$$\omega : C_T(X) \times X \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

definiert durch $\omega(f,p) = f(p)$ für alle f aus $C(X)$ und für alle p aus X , ist stetig.

(b) Die abgeschlossenen, maximalen Ideale von $C_T(X)$ sind genau die fixierten.

(Ein maximales Ideal M von $C(X)$ heißt fixiert, wenn es einen Punkt p aus X so gibt, daß

$$M = \{ f \mid f \in C(X) , f(p) = 0 \}$$ gilt .)

Zur Lösung unseres Problems verwenden wir den Begriff der Limitierung der stetigen Konvergenz [1] . Diese ist auf einer Teilmenge $\mathcal{H}(Y,Z)$ der Menge aller stetigen Abbildungen von einem Limesraum Y in einen Limesraum Z wie folgt charakterisiert:

Sie ist unter allen Limitierungen Λ auf $\mathcal{H}(Y,Z)$, für die die Evaluationsabbildung $\omega : \mathcal{H}_\Lambda(Y,Z) \times Y \longrightarrow Z$.

stetig ist, die gröbste. $\mathcal{H}(Y,Z)$ versehen mit der Limitierung der stetigen Konvergenz werde mit $\mathcal{H}_c(Y,Z)$ bezeichnet.

Sei T eine $\mathbb{R}$-Algebrentopologie auf $C(X)$, die (a) und (b) erfüllt. Dann ist wegen (a)

$$id : C_T(X) \longrightarrow C_c(X)$$

stetig. Bezeichnen wir für eine $\mathbb{R}$-Limesalgebra A mit Einselement die Menge aller stetigen, reellwertigen, unitären $\mathbb{R}$-Algebrenhomomorphismen mit $\mathrm{Hom}\, A$, so ist die Abbildung

$$id^* : \mathrm{Hom}_c C_c(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_c C_T(X) \quad ,$$

die jedes h aus $\mathrm{Hom}_c C_c(X)$ auf sich selbst abbildet, stetig. Jeder Punkt p aus X induziert eine stetige Abbildung

$$i_X(p) : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definiert durch

$$i_X(p)(f) = f(p)$$

für alle f aus $C(X)$.

In [2] wurde gezeigt, daß für einen vollständig regulären topologischen Raum X die Abbildung

$$i_X : X \longrightarrow \mathrm{Hom}_c C_c(X)$$

ein Homöomorphismus ist. Damit ergibt sich das folgende kommutative Diagramm stetiger Abbildungen:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_c C_c(X) \arrow[rr, "id^*"] & & \mathrm{Hom}_c C_T(X) \\
& X \arrow[ul, "i_X"] \arrow[ur, "id^* \circ i_X"'] &
\end{tikzcd}$$

Die Bedingung (b) impliziert die Bijektivität von $id^* \circ i_X$. Da die Limitierung der stetigen Konvergenz auf $\mathrm{Hom}\, C_T(X)$ feiner als die Topologie der punktweisen Konvergenz ist, folgt aus der vollständigen Regularität von X die Bistetigkeit von $id^{*} \circ i_X$.

Den Schlüssel zur Lösung unseres Problems liefert der folgende Satz von M. Schroder : Sei A eine assoziative, kommutative, topologische $\mathbb{R}$-Algebra mit Einselement. Dann ist $\mathrm{Hom}_c A$ ein lokalkompakter Limesraum, d.h., jedem konvergenten Filter in $\mathrm{Hom}_c A$ gehört eine kompakte Menge an . [4]

Also ist $\mathrm{Hom}_c C_T(X)$ und daher X lokalkompakt.

Ist umgekehrt X lokalkompakt, so ist die Limitierung der stetigen Konvergenz eine Topologie auf $C(X)$, die (a) und (b) erfüllt. Zusammenfassend können wir sagen:

Satz: Ein vollständig regulärer topologischer Raum X ist genau dann lokalkompakt, wenn auf $C(X)$ eine $\mathbb{R}$-Algebrentopologie T existiert, die (a) und (b) genügt.

Unsere eingangs gestellte Frage wird durch das folgende Korollar beantwortet:

Korollar: Wenn ein vollständig regulärer topologischer Raum X nicht lokalkompakt ist, dann gibt es auf $C(X)$ keine $\mathbb{R}$-Algebrentopologie mit den Eigenschaften (a) und (b) .

Läßt man die Bedingung (b) fallen, so findet sich ein vollständig regulärer, nicht lokalkompakter topologischer Raum X und eine $\mathbb{R}$-Algebrentopologie auf $C(X)$, die (a) erfüllt. Als Beispiel wähle man einen nicht lokalkompakten aber pseudokompakten , vollständig regulären topologischen Raum X und versehe $C(X)$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf X .

Einen solchen Raum können wir etwa wie folgt erhalten:

Das Produkt $W \times \mathbb{N}^{*}$ von W - der Menge aller Ordinalzahlen, die kleiner als die erste überabzählbare Ordinalzahl sind, versehen mit der Intervalltopologie – und der Einpunktkompaktifizierung $\mathbb{N}^*$ von $\mathbb{N}$ – der Menge der natürlichen Zahlen versehen mit der diskreten Topologie – ist lokalkompakt und pseudokompakt [3]. Jedoch ist

$$Y = \beta(W \times \mathbb{N}^*) \setminus (W \times \mathbb{N}^*)$$

zwar abzählbar aber nicht diskret ([3], p. 133). Man wähle also eine nichtabgeschlossene Menge C in Y und bilde

$$X = \beta(W \times \mathbb{N}^*) \setminus C .$$

Der Raum X ist ein vollständig regulärer, pseudokompakter topologischer Raum, der nicht lokalkompakt sein kann.

Literaturverzeichnis

[1] E. Binz und H.H. Keller : " Funktionenräume in der Kategorie der Limesräume." Ann. Acad. Sci. Fenn. A, I, 383, pp. 1 - 21, 1966.

[2] E. Binz : "Zu den Beziehungen zwischen c-einbettbaren Limesräumen und ihren limitierten Funktionenalgebren." Math. Ann. 181, pp. 45 - 52, 1969.

[3] L. Gillman and M. Jerison : " Rings of continuous functions." Van Nostrand, Princeton, 1960.

[4] M. Schroder: Dissertation, Queen's University, Kingston, Ontario, 1971.