Nr.73 - 1987

VERALLGEMEINERTE CARTAN-ZUSAMMENHÄNGE FÜR DREIDIMENSIONALE MANNIGFALTIGKEITEN VOM AUSNAHMETYP G_2

W. Menden
(Universität Mannheim)

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Von großem Interesse in der Differentialgeometrie ist die Frage, inwieweit die topologische Gestalt einer Riemannschen Mannigfaltigkeit durch ihre lokalen geometrischen Invarianten, vor allem durch die Krümmung, charakterisiert wird. Im allgemeinen muß man einschränkende Bedingungen an die Krümmung stellen, um globale topologische Aussagen zu erhalten. So setzt man etwa voraus, daß das Krümmungsverhalten des Raumes nur geringfügig von dem eines bekannten Standardraumes abweicht. Hier bieten sich vor allem die symmetrischen Räume als Vergleichsmodelle an. Charakteristisch ist etwa die Frage, ob eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit M, deren Krümmung nur wenig von der eines symmetrischen Modellraums $\bar{M}$ abweicht, homöomorph oder diffeomorph zu einem lokal symmetrischen Raum ist.

Für die Sphäre als Modell gab H.E. Rauch ([R_1]) hier 1951 die erste Antwort, die dann von M. Berger ([B],1960) und W. Klingenberg ([K],1961) vervollständigt wurde und als Sphärensatz in die Literatur einging, (siehe auch K. Grove und K. Shiohama ([GS],1977) für eine weitere Verallgemeinerung). Die erste differenzierbare Version des Sphärensatzes wurde 1966 von D. Gromoll ([Gr]) bewiesen. Gromolls Ergebnis wurde dann in einer Reihe von Arbeiten von H. Karcher, E.A. Ruh und vielen anderen verbessert und verallgemeinert.

Rauch ([R_2],1953) untersuchte auch als Erster die Situation für die anderen kompakten symmetrischen Räume als Modell, wobei er jedoch starke Holonomievoraussetzungen stellen mußte. Eine weitgehende Lösung des Rauchschen Programms wurde erst 1979 von Min-Oo und E.A. Ruh ([MR_1]) gegeben: Sie zeigten, daß eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit M bei sehr kleiner Abweichung vom Modellraum $\bar{M}$ diffeomorph zu einem lokal symmetrischen Raum $\Gamma\backslash\bar{M}$ ist, wobei als Modell jeder beliebige einfach-zusammenhängende kompakte irreduzible symmetrische Raum zugelassen ist. Unter Verwendung der gleichen Beweismethode erweiterten Min-Oo und Ruh ([MR_2], 1981) dieses Ergebnis bis auf einige Ausnahmen auch auf nicht-kompakte irreduzible symmetrische Modellräume.

Während in den meisten Beweisen des Sphärensatzes hauptsächlich das Verhalten der geodätischen Kurven untersucht wird, beruht der Beweis von Min-Oo und Ruh auf einer anderen Methode, nämlich der Lösung der Maurer-Cartanschen Strukturgleichung. Als Ausgangspunkt dient dabei ein fast-flacher Cartan-Zusammenhang, der dann zu einer Lösung dieser Gleichung deformiert wird. Diese Vorgehensweise beruht auf dem Grundgedanken, die Abweichung der lokalen Geometrie des vorgegeben Raumes M von der des Modells $\bar{M} = G/H$ als Krümmung eines geeigneten Cartan-Zusammenhangs ω zu interpretieren. Die 1-Form ω ist hierbei auf einem Prinzipalbündel P mit Basisraum M und Strukturgruppe H definiert. Ihre Werte liegen in $\mathfrak{g}$, der Liealgebra von G. Für das Modellbündel $G \longrightarrow \bar{M}$ hat man einen kanonischen flachen Cartan-Zusammenhang $\bar{\omega}: TG \longrightarrow \mathfrak{g}$, nämlich die linksinvariante

Maurer-Cartan-Form von G. Flachheit bedeuted, daß $\bar{\omega}$ die Maurer-Cartan-Gleichung löst. Diese Gleichung ist die kanonische Integrabilitätsbedingung für eine lokale Liegruppe. Die Krümmung von ω: $TP \longrightarrow \mathfrak{g}$ ist als Abweichung von der Maurer-Cartan-Gleichung definiert. Sie ist somit ein natürliches Maß dafür, wie weit P von einer lokalen Liegruppe (und M von einem lokal homogenen Raum) abweicht. Wir verweisen auch auf [M_1], [M_2],[Ru_1],[Ru_2],[Ru_3], wo dieser Aspekt herausgestellt wird und zum Tragen kommt.

Man kann sich die Frage stellen, inwieweit die oben skizzierten Betrachtungen noch Sinn machen und Deformationsmethoden wie die von Min-Oo und Ruh noch anwendbar sind, wenn man keinen Modellraum G/H, sondern lediglich eine Mannigfaltigkeit M und eine Liegruppe G vorgegeben hat, (wobei dim M < dim G vorausgesetzt sei). Es ist klar, daß es dann im allgemeinen keine Kandidaten für H, P und ω gibt, die der oben beschriebenen Ausgangssituation genügen, auch dann nicht, wenn man zunächst auf Symmetrie- und Krümmungsvoraussetzungen verzichtet und lediglich ein homogenes Modell G/H haben möchte. Der erste Schritt wäre nun, anstelle von G/H, P und ω eine allgemeinere Struktur zu beschreiben, auf die Deformationstechniken wie die in [MR_1] und [MR_2] angewendet werden können. Das Hauptanliegen dieser Arbeit ist es, im Fall einer gegebenen dreidimensionalen orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M und der normalen reellen Form der einfachen Liealgebra vom Ausnahmetyp G_2 eine solche Struktur zur Verfügung zu stellen.

Von Interesse ist dieser Problemkreis unter anderem auch deshalb, weil man zwangsläufig sein Augenmerk auf allgemeinere Strukturen als Prinzipalbündel und Cartan-Zusammenhänge richten muß, wenn man mit der oben erwähnten Methode Aussagen über Räume gewinnen will, die nicht lokal homogen sind. Wir werden daher den Begriff eines Cartan-Zusammenhangs auf beliebige Faserbündel auszudehnen. Nach wie vor macht es Sinn, die Krümmung eines solchen verallgemeinerten Cartan-Zusammenhangs $\omega\colon TB \longrightarrow g$ zu definieren und sie als Maß für die Abweichung des Bündels B von einer lokalen Liegruppe zu werten.

Das erste Kapitel dient vor allem der Einführung von Cartan-Zusammenhängen und einiger hiermit verbundener Begriffe. E. Cartan verwendete diese Zusammenhänge zur Untersuchung affiner, konformer und projektiver Strukturen, (siehe [C]). Später wurde die Theorie von C. Ehresmann ([E]) und S. Kobayashi ([Ko_1]) präzisiert und weiter ausgebaut. Durch die Arbeit von S. Sternberg und T. Ungar ([SU]) hat sie auch Eingang in die Physik gefunden und dort einen neuen Zugang zu den Bewegungsgleichungen ermöglicht, (siehe auch [GSt]).

Die weiter oben beschriebene Sichtweise verdeutlichen wir in Abschnitt 1.4 an einigen Beispielen. Sie dienen gleichzeitig als Grundlage für die spätere Konstruktion.

In Abschnitt 1.5 beschreiben wir die Ausgangssituation zum Studium projektiver Cartan-Zusammenhänge. Dabei folgen wir dem Buch von S. Kobayashi ([Ko_2]), in dem projektive und konforme Zusammenhänge gleichzeitig mit ein und derselben Methode behandelt werden. Basis für diese Vorgehensweise ist die Tatsache, daß man die relevanten Liealgebren wie folgt zerlegen kann:

$$\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{n^*}$$

$$\mathfrak{o}(n+1,1) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{co}(n,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{n^*}$$

Für die normale reelle Form $\mathfrak{g}$ vom Typ G_2 hat man eine ganz ähnliche Zerlegung:

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3 \oplus \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{3^*}$$

So drängt sich die Frage auf, ob die Methoden zur Untersuchung projektiver und konformer Zusammenhänge auch für Cartan-Zusammenhänge vom Typ G_2 genutzt werden können. Im Gegensatz zum projektiven und konformen Fall ist die Liealgebra $\mathfrak{g}$ aber nicht graduiert. Dies führt dazu, daß die oben gestellte Frage verneint werden muß. Wir werden darauf in Abschnitt 3.5 näher eingehen.

Im letzten Abschnitt des ersten Kapitels erweitern wir dann den Begriff eines Cartan-Zusammenhangs auf den Fall, wo das zugrunde liegende Bündel kein Prinzipalbündel mehr ist.

Kapitel 2 beschäftigt sich mit den einfachen Ausnahmealgebren und -gruppen vom Typ G_2. Das hier verwendete Modell für die komplexe Liealgebra ist dem Buch von J.E. Humphreys ([Hu]) entnommen. Für diese Liealgebra bestimmen wir explizit die Killingform, eine Cartan-Unteralgebra, das zugehörige Wurzelsystem und eine Weylbasis. Diese Daten liefern uns dann auf bekannte Weise eine normale reelle Form $\mathfrak{g}$ (und eine kompakte) wie auch eine Cartan-Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Die Liealgebra $\mathfrak{k}$ ist isomorph zur Liealgebra der schiefadjungierten Endomorphismen des $\mathbb{R}^4$, einen expliziten Isomorphismus geben wir in Abschnitt 2.4 an. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels dient der Beschreibung der Liegruppen vom Typ G_2, wobei wir vor allem SO(4) als Untergruppe der adjungierten Gruppe G von $\mathfrak{g}$ realisieren.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns im dritten Kapitel der Konstruktion verallgemeinerter G_2-Cartan-Zusammenhänge für eine dreidimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit M zu. Zuerst benötigen wir ein geeignetes Faserbündel B über M. Wir geben hierfür in Abschnitt 3.2 zwei Beschreibungen an. Einen Isomorphismus zwischen den beiden Bündeln erhalten wir mit Hilfe der in 3.1 definierten Projektion des relevanten (durch die Riemannsche Volumenform definierten) $SL(3,\mathbb{R})$-Bündels über M auf das SO(3)-Unterbündel P der positiv orientierten Orthonormalbasen in TM. Eine geeignete Einbettung j von B in das zu P assoziierte Prinzipalbündel mit Strukturgruppe G erlaubt uns dann, die Menge C(B) aller verallgemeinerter Cartan-Zusammenhänge auf B vom Typ (G,j) (im Sinne der Definition aus 1.6) zu untersuchen. Als erstes Ergebnis erhalten wir in Abschnitt 3.3 eine Charakterisierung von C(B) als Menge gewisser $\mathfrak{g}$-wertiger 1-Formen auf P. Insbesondere hat man damit ein notwendiges und hinreichendes Kriterium, das angibt, unter welchen Bedingungen eine vorgegebene 1-Form ω_0: TP $\longrightarrow \mathfrak{g}$ einen verallgemeinerten Cartan-Zusammenhang ω: TB $\longrightarrow$ g vom Typ (G,j) induziert. Wir zeigen dann, daß jeder Cartan-Zusammenhang auf P vom Typ (SO(4),SO(3)) diese Bedingungen erfüllt. Setzt man die Krümmungen von ω und ω_0 zueinander in Beziehung, so sieht man, daß diese nur gemeinsam verschwinden können. Dies liefert insbesondere für jede sphärische Raumform M einen flachen Cartan-Zusammenhang. Um ein analoges Ergebnis auch für die hyperbolischen Raumformen zu erhalten, betrachten wir in 3.6 und 3.7 die komplexifizierte Situation. Die Ergebnisse aus den vorhergehenden Abschnitten lassen sich dann problemlos auf komplexe Cartan-Zusammenhänge ausweiten.

Der Abschnitt 3.5 dient der Beschreibung der Strukturgleichungen von ω und der Bianci-Identitäten in Bezug auf eine geeignete Basis. Wir vergleichen die vorliegende Situation mit der projektiven aus Abschnitt 1.5.

Die hier beschriebene Konstruktion beruht im wesentlichen auf einer Cartan-Zerlegung von g. Sie kann deshalb in analoger Art und Weise durchgeführt werden, wenn man anstelle von g eine beliebige andere nicht-kompakte, halbeinfache Liealgebra betrachtet, (vorausgesetzt, man hat ein geeignetes Ausgangsbündel zur Verfügung). Wir skizzieren dies im letzten Abschnitt.

1. CARTAN-ZUSAMMENHÄNGE

1.1 Äquivariante Differentialformen

Wir betrachten ausschließlich endlich-dimensionale Mannigfaltigkeiten der Klasse C^∞. "Differenzierbar" bedeutet stets "glatt", d.h. "unendlich oft differenzierbar". Für allgemeine differentialgeometrische Grundlagen verweisen wir auf [KNo]. Die Tangentialabbildung einer differenzierbaren Abbildung f zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N bezeichnen wir mit

$$f_*: TM \longrightarrow TN ,$$

faserweise auch mit

$$(f_*)_x: T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N .$$

Unter einem <u>Faserbündel</u> $\pi: B \longrightarrow M$ verstehen wir ein lokal triviales C^∞-Bündel. Wir schreiben ΓB für die glatten Schnitte von B. Das Vektorbündel der <u>vertikalen</u> Tangentenvektoren von B wird mit VB notiert:

$$VB = \ker \pi_* \subset TB .$$

Ist E ein reeller Vektorraum, so bezeichnet $A(B,E)$ den Raum der E-wertigen glatten Differentialformen auf B und $A^k(B,E)$ den Unterraum der k-Formen. Eine Form $\alpha \in A(B,E)$ heißt <u>horizontal</u>, wenn $X \lrcorner \alpha$ für jedes vertikale Vektorfeld $X \in \Gamma VB$ verschwindet. Hierbei ist

$$X \lrcorner \ : A^k(B,E) \longrightarrow A^{k-1}(B,E)$$

die innere Multiplikation mit X.

Sei nun $\pi: P \to M$ ein Prinzipalbündel, wobei die Strukturgruppe G von rechts auf P operiert. Ist F eine weitere Mannigfaltigkeit, auf der G differenzierbar von links operiert, so hat man das zu P <u>assoziierte</u> Bündel

$$B := P \times_G F \ .$$

B ist der Quotientenraum der durch

$$(p,f)\cdot g := (pg, g^{-1}f) \ , \ (p \in P, \ f \in F, \ g \in G),$$

definierten Rechtsoperation von G auf $P \times F$. Den Orbit durch (p,f) bezeichnen wir mit

$$[(p,f)] = \{(pg, g^{-1}f) \in P \times F \mid g \in G\} \ .$$

B ist ein Faserbündel über M vom Fasertyp F, die Projektion $\pi_B: B \to M$ ist durch $\pi_B([(p,f)]) = \pi(p)$ gegeben. Jedes $p \in P$ induziert einen Diffeomorphismus von F auf die Faser $\pi_B{}^{-1}(\pi(p))$, den wir auch mit p bezeichnen wollen:

$$p: F \longrightarrow \pi_B{}^{-1}(\pi(p)) \ , \ p(f) = [(p,f)] \ .$$

Wir betrachten den Fall, wo F = E ein reeller Vektorraum ist und G durch eine Darstellung

$$\rho: G \longrightarrow GL(E)$$

auf E operiert. Das assoziierte Bündel $\mathbb{E} = P \times_G E$ trägt jetzt eine kanonische Vektorbündelstruktur, derart, daß

$$p: E \longrightarrow \pi_E^{-1}(\pi(p))$$

für jedes $p \in P$ ein linearer Isomorphismus ist.

Eine Differentialform $\alpha \in A(P,E)$ heißt <u>äquivariant</u> (oder genauer ρ-äquivariant), wenn

$$R_g^* \alpha = \rho(g^{-1})\ \alpha$$

für alle $g \in G$ gilt. Hierbei bezeichnet R_g die Rechtsoperation von g auf P und $R_g^*\alpha$ die mit R_g zurückgezogene Form.

Jede k-Form $\tilde{\alpha}$ auf M mit Werten im Vektorbündel $\mathbb{E}$ induziert eine E-wertige horizontale, äquivariante k-Form α auf P, punktweise definiert durch

$$\alpha(v_1,\ldots,v_k) = p^{-1}\ (\tilde{\alpha}(\pi_* v_1,\ldots,\pi_* v_k))$$

für alle $v_1,\ldots,v_k \in T_pP$ und $p \in P$. Offenbar gilt:

1.1.1 Lemma: *Die Zuordnung* $\tilde{\alpha} \longmapsto \alpha$ *beschreibt einen Isomorphismus von* $A^k(M,\mathbb{E})$*, dem Vektorraum der glatten* $\mathbb{E}$*-wertigen k-Formen auf* M*, auf die horizontalen, äquivarianten Formen in* $A^k(P,E)$.

Wir erinnern an den Begriff des "fundamentalen Vektorfeldes": Sei $\mathfrak{g} = T_eG$ die Liealgebra von G. Jeder Vektor $A \in \mathfrak{g}$ induziert ein vertikales Vektorfeld A^* auf P, definiert durch

$$A^*(p) = (p_*)_e\, A = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (p\cdot \exp(tA)) \;,$$

wobei $p \in P$ als Diffeomorphismus

$$p\colon G \longrightarrow \pi^{-1}(\pi(p)) \;, \; p(g) = pg = R_g(p)$$

aufgefaßt wird, also $(p_*)_e$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{g}$ auf den Vertikalraum $V_{\pi(p)}P$ im Punkt $\pi(p)$ ist. Man nennt A^* das <u>fundamentale Vektorfeld</u> von A. Es gilt

$$R_{g_*}\, A^*(p) = (\mathrm{Ad}(g^{-1})A)^*(pg)$$

für alle $A \in \mathfrak{g}$, $g \in G$ und $p \in P$. Hierbei ist $\mathrm{Ad}\colon G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ die adjungierte Darstellung von G, die wir gelegentlich auch mit Ad_G bezeichnen wollen.

Das folgende Lemma werden wir später oftmals benutzen.

1.1.2 Lemma: *Sei* $\pi_B\colon B \longrightarrow M$ *ein Faserbündel,* $\pi\colon P \longrightarrow M$ *ein* G*-Prinzipalbündel und* $f\colon B \longrightarrow P$ *eine starke Bündelabbildung, d.h. eine differenzierbare Abbildung mit* $\pi\circ f = \pi_B$. *Ferner sei* ρ *eine Darstellung von* G *in einem reellen Vektorraum* E *und* $\alpha_1, \alpha_2 \in A^k(P,E)$ *zwei äquivariante* k*-Formen mit*

$$f^*\alpha_1 = f^*\alpha_2 \qquad \textit{und} \qquad A^* \lrcorner\; \alpha_1 = A^* \lrcorner\; \alpha_2$$

für alle $A \in \mathfrak{g}$. *Dann ist* $\alpha_1 = \alpha_2$.

Beweis: Seien $v_1,\ldots,v_k \in T_pP$. Man wähle ein $b \in B$ und Vektoren $w_1,\ldots,w_k \in T_bB$, so daß

$$\pi_B(b) = \pi(p) \quad \text{und} \quad \pi_{B_*} w_i = \pi_* v_i$$

für alle $i = 1,\ldots,k$ gilt. Definiert man $g \in G$ durch $p = f(b)g$, so ist $R_{g^{-1}*}v_i - f_* w_i$ vertikal und somit von der Form

$$R_{g^{-1}*}v_i - f_* w_i = A_i^*(f(b))$$

für eindeutig bestimmte $A_i \in \mathfrak{g}$. Da α_j äquivariant ist, gilt

$$\alpha_j(v_1,\ldots,v_k) = \rho(g^{-1})\ \alpha_j(R_{g^{-1}*}v_1,\ldots,R_{g^{-1}*}v_k)$$

für $j = 1,2$. Ersetzt man $R_{g^{-1}*}v_i$ durch $A_i^*(f(b)) + f_* w_i$, so ergibt sich

$$\alpha_j(v_1,\ldots,v_k) = \rho(g^{-1})\ (\alpha_j(f_* w_1,\ldots,f_* w_k) + B_j)\ ,$$

wobei B_j eine Summe über Summanden der Form $\alpha_j(u_1,\ldots,u_k)$ mit $u_i = A_i^*(f(b))$ für mindestens ein i ist. Da $A^* \lrcorner\ \alpha_1 = A^* \lrcorner\ \alpha_2$ für alle $A \in \mathfrak{g}$, folgt $B_1 = B_2$ und somit $\alpha_1 = \alpha_2$ aufgrund von $f^*\alpha_1 = f^*\alpha_2$. □

Zum Schluß dieses Abschnitts sei noch bemerkt, daß wir den Begriff "Zusammenhang" im Sinne von "Zusammenhangsform" verwenden. Ein <u>Zusammenhang</u> auf einem G-Prinzipalbündel P ist also eine Ad-äquivariante 1-Form $\omega \in A^1(P,\mathfrak{g})$ mit $\omega(A^*) = A$ für alle $A \in \mathfrak{g}$. Die <u>Krümmung</u> von ω ist dann eine Ad-äquivariante horizontale 2-Form $\Omega \in A^2(P,\mathfrak{g})$. Sie kann durch die <u>Strukturgleichung</u>

$$\Omega = d\omega + [\omega,\omega]$$

definiert werden, d.h. genauer:

$$\Omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) + [\omega(X),\omega(Y)]$$

für alle $X,Y \in \Gamma TP$. Der letzte Term ist die Lieklammer in $\mathfrak{g}$.

1.2 Cartan-Zusammenhänge auf Prinzipalbündeln

Wir definieren jetzt den Begriff eines Cartan-Zusammenhangs (vgl. [E], [Ko_1], [Ko_2]).

Sei G eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe mit Liealgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Ferner sei $\pi: P \longrightarrow M$ ein H-Prinzipalbündel über einer Mannigfaltigkeit M mit $\dim M = \dim G/H$.

1.2.1 Definition: Ein <u>Cartan-Zusammenhang</u> vom Typ (G,H) auf P ist eine $\mathfrak{g}$-wertige 1-Form ω auf P mit folgenden Eigenschaften:

(C1) $\omega(A^*) = A$ für alle $A \in \mathfrak{h}$,

(C2) $R_h{}^*\omega = \mathrm{Ad}(h^{-1})\,\omega$ für alle $h \in H$,

(C3) $\omega(X) \neq 0$ für alle $X \in TP$ mit $X \neq 0$.

Wegen (C3) und $\dim P = \dim G$ ist $\omega_p: T_pP \longrightarrow \mathfrak{g}$ für jedes $p \in P$ ein Isomorphismus. ω definiert also einen absoluten Parallelismus auf P, d.h. eine Trivialisierung $TP \cong P \times \mathfrak{g}$.

Die <u>Krümmung</u> Ω eines Cartan-Zusammenhangs $\omega: TP \longrightarrow \mathfrak{g}$ wird durch

$$\Omega = d\omega + [\omega,\omega] \in A^2(P,\mathfrak{g})$$

definiert. Ist $\Omega = 0$, so nennt man ω <u>flach</u>.

Motiviert ist dieser Krümmungsbegriff durch die <u>Maurer-Cartansche Strukturgleichung</u> $d\bar{\omega} + [\bar{\omega},\bar{\omega}] = 0$ für die Liegruppe G.

Hierbei ist $\bar{\omega} \in A^1(G,g)$ die linksinvariante <u>Maurer-Cartan-Form</u> von G, definiert durch

$$\bar{\omega}(X_g) = L_{g^{-1}*}(X_g)$$

für alle $X_g \in T_gG$. Für jede abgeschlossene Untergruppe H von G ist $\bar{\omega}$ ein flacher Cartan-Zusammenhang vom Typ (G,H) auf dem H-Prinzipalbündel $G \longrightarrow G/H$. Man nennt ihn den kanonischen Cartan-Zusammenhang für den homogenen Raum G/H.

Man beachte, daß die Krümmung eines Cartan-Zusammenhangs horizontal und Ad-äquivariant ist. Ad steht hier für die Einschränkung der adjungierten Darstellung von G auf H.

Die folgende Beobachtung liefert die Motivation für die in Abschnitt 1.6 vorgenommene Verallgemeinerung von Cartan-Zusammenhängen auf beliebige Faserbündel. Sei

$$\pi': P' = P \times_H G \longrightarrow M$$

das zu P assoziierte Bündel mit typischer Faser G, wobei H durch Linkstranslation auf G operiert. G operiert dann auf P' von rechts durch

$$[(p,a)]\cdot g = [(p,ag)] \quad , \quad (p \in P,\ a,g \in G).$$

Mit dieser Operation ist P' ein G-Prinzipalbündel über M. Mittels

$$i: P \longrightarrow P' \quad , \quad i(p) = [(p,e)] \quad ,$$

wird P in P' als Unterbündel eingebettet. P ist also eine

Reduktion von P' auf Strukturgruppe H.

1.2.2 Lemma: *Eine* $\mathfrak{g}$*-wertige 1-Form* ω *auf* P *ist genau dann ein Cartan-Zusammenhang vom Typ* (G,H), *wenn die folgenden zwei Bedingungen gelten:*

(i) *Es gibt einen Zusammenhang* ω' *auf* P' *mit* $i^*\omega' = \omega$.

(ii) $\omega(X) \neq 0$ *für alle* $X \in TP$ *mit* $X \neq 0$.

Beweis: Ist $\omega' \in A^1(P',\mathfrak{g})$ ein Zusammenhang auf P', so erfüllt $\omega := i^*\omega'$ offensichtlich die Bedingungen (C1) und (C2) für einen Cartan-Zusammenhang auf P, (während (C3) im allgemeinen nicht gilt). Umgekehrt läßt sich jede 1-Form $\omega: TP \longrightarrow \mathfrak{g}$, für die (C1) und (C2) gilt, zu einem Zusammenhang ω' auf P' erweitern: Zu vorgegebenem $X'_{p'} \in T_{p'}P'$ wähle man $p \in P$, $g \in G$ und $X_p \in T_pP$ mit $p' = [(p,g)]$ und $\pi_* X_p = \pi'_* X'_{p'}$. Dann ist $R_{g^{-1}*}X'_{p'} - i_* X_p$ vertikal. Es gibt somit genau ein $A \in \mathfrak{g}$ mit

$$A^*(i(p)) = R_{g^{-1}*}X'_{p'} - i_* X_p \ .$$

Man setze

$$\omega'(X'_{p'}) = \mathrm{Ad}(g^{-1})\ (A + \omega(X_p)) \ .$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von p, g und X_p, und $\omega': TP' \longrightarrow \mathfrak{g}$ ist ein Zusammenhang auf P' mit $i^*\omega' = \omega$.

□

Es sei bemerkt, daß die Erweiterung eines Cartan-Zusammenhangs $\omega \in A^1(P,\mathfrak{g})$ zu einem Zusammenhang ω' auf P' nach 1.1.2 eindeutig ist. Sind Ω und Ω' die Krümmungen von ω und ω' respektive, so hat man $i^*\Omega' = \Omega$, wie unmittelbar aus den Strukturgleichungen folgt. Ferner ist Ω' die einzige horizontale und Ad-äquivariante $\mathfrak{g}$-wertige 2-Form auf P' mit dieser Eigenschaft (siehe 1.1.2). Dies impliziert insbesondere $\Omega' = 0$, wenn ω flach ist.

1.3 Die Verschmelzung eines Cartan-Zusammenhangs

Die Voraussetzungen und Notationen des vorangehenden Abschnitts werden beibehalten. Ferner bezeichne $\bar{M}$ den homogenen Raum G/H und $\bar{\pi}: G \longrightarrow \bar{M}$ die kanonische Projektion. G (und somit H) operiert auf $\bar{M}$ durch Linkstranslation:

$$\bar{L}_g: \bar{M} \longrightarrow \bar{M}\ , \quad \bar{L}_g(\bar{\pi}(a)) = \bar{\pi}(ga)\ , \quad (g, a \in G)\ .$$

Das assoziierte Bündel

$$\pi_B: B = P \times_H \bar{M} \longrightarrow M$$

ist kanonisch isomorph zu P'/H, dem Quotientenraum der Rechtsoperation von H auf P'. Man hat einen kanonischen Schnitt

$$\sigma: M \longrightarrow B\ ,$$

denn die Abbildung $P \longrightarrow B$, die jedem $p \in P$ den Orbit $[(p, \bar{e})]$ zuordnet, ist faserweise konstant. Hierbei bezeichnet $\bar{e} = \bar{\pi}(e)$ den Ursprung in $\bar{M}$.

Sei $VM = \sigma^* VB$ das mit σ zurückgezogene Vertikalbündel $VB \subset TB$. VM ist ein Vektorbündel über M; die Faser über $x \in M$ besteht aus allen vertikalen Vektoren von TB im Punkt $\sigma(x)$.

Jeder Cartan-Zusammenhang $\omega: TP \longrightarrow g$ vom Typ (G,H) induziert eine <u>Verschmelzung</u> von P mit B, d.h. einen starken Isomorphismus der Vektorbündel TM und VM, wie folgt:

Sei ω' die Erweiterung von ω zu einem Zusammenhang auf $P' = P \times_H G$ gemäß 1.2.2 und

$$TP' = VP' \oplus HP'$$

die durch ω' definierte Zerlegung in Vertikal- und Horizontalbündel, also

$$VP' = \ker \pi'_* \quad \text{und} \quad HP' = \ker \omega' .$$

Da $P \times_H \bar{M}$ und $P' \times_G \bar{M}$ kanonisch isomorph sind, kann B auch als zu P' assoziiertes Bündel aufgefaßt werden. Somit induziert ω' auch eine direkte Summenzerlegung von TB in vertikale und horizontale Vektoren,

$$TB = VB \oplus HB \ .$$

Der Horizontalraum $H_bB \subset T_bB$ im Punkt $b = [(p',\bar{g})] \in B$ mit $p' \in P'$ und $\bar{g} \in \bar{M}$ ist hierbei durch $H_bB = r_{\bar{g}*}(H_{p'}P')$ definiert, wobei $r_{\bar{g}}: P' \longrightarrow B$ ein Element $q' \in P'$ auf $[(q',\bar{g})] \in B$ abbildet. Offenbar hängt H_bB nur von b und nicht von der Wahl von p' und $\bar{g}$ ab.

Sei $V \in A^1(B,VB)$ die Projektion von TB auf das vertikale Unterbündel VB. Die von ω induzierte Verschmelzung von B mit P ist dann die mit σ zurückgezogene Form

$$\sigma^*V: TM \longrightarrow VM \ .$$

Eine andere Charakterisierung der Verschmelzung gewinnt man durch Beschreibung von VM als zu P assoziiertes Vektorbündel vom Fasertyp $T_{\bar{e}}\bar{M} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Hierbei operiert H auf $T_{\bar{e}}\bar{M}$ vermöge der <u>linearen Isotropiedarstellung</u>

$$\rho\colon H \longrightarrow GL(T_{\bar{e}}\bar{M}) \ , \ \rho(h) = (\bar{L}_{h*})_{\bar{e}} \ .$$

Man hat einen kanonischen Isomorphismus

$$J\colon P \times_H T_{\bar{e}}\bar{M} \longrightarrow VM \ ,$$

definiert durch $J([(p,X)]) = (p_*)_{\bar{e}}(X)$ für alle $p \in P$ und $X \in T_{\bar{e}}\bar{M}$, wobei p auf der rechten Seite der Gleichung als Diffeomorphismus von $\bar{M}$ auf die Faser $\pi_B^{-1}(\pi(p))$ interpretiert wird. Wir setzen

$$\theta\colon = \bar{\pi}_* \circ \omega\colon TP \longrightarrow T_{\bar{e}}\bar{M}$$

und nennen θ die <u>Verschmelzungsform</u> von ω. Die Bedingungen (C1)-(C3) für den Cartan-Zusammenhang ω implizieren die folgenden Eigenschaften für θ:

(C1') $\theta(A^*) = 0$ für alle $A \in \mathfrak{h}$,

(C2') $R_h^*\theta = \rho(h^{-1})\theta$ für alle $h \in H$,

(C3') $\theta_p\colon T_pP \longrightarrow T_{\bar{e}}\bar{M}$ ist surjektiv für jedes $p \in P$.

(C2') folgt aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "Ad(h)"] \arrow[d, "(\bar{\pi}_*)_e"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "(\bar{\pi}_*)_e"] \\
T_{\bar{e}}\bar{M} \arrow[r, "\rho(h)"] & T_{\bar{e}}\bar{M}
\end{tikzcd} \ .$$

Die Verschmelzungsform θ ist also eine horizontale, ρ-äquivariante 1-Form auf P und induziert somit gemäß Lemma 1.1.1 eine 1-Form $\tilde{\theta}$ auf M mit Werten im Vektorbündel $P \times_H T_{\bar{e}}\bar{M}$. Die Beziehung zwischen θ und der Verschmelzung σ^*V wird dann durch die Gleichung $J \circ \tilde{\theta} = \sigma^*V$ beschrieben. Die Bedingung (C3') garantiert die Invertierbarkeit der Verschmelzung.

Sei jetzt $\bar{M}$ reduktiv, d.h. es gibt ein Komplement $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$ mit $Ad(h)(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$ für alle $h \in H$. Wir identifizieren $T_{\bar{e}}\bar{M}$ mit $\mathfrak{m}$ vermöge $(\bar{\pi}_*)_{e|\mathfrak{m}}$. Die lineare Isotropiedarstellung von H in $\mathfrak{m}$ ist dann durch Einschränkung der adjungierten Darstellung von G gegeben, also

$$\rho(h) = Ad(h)_{|\mathfrak{m}} \quad \text{für alle } h \in H \ .$$

Die Verschmelzungsform $\theta\colon TP \longrightarrow \mathfrak{m}$ ist die $\mathfrak{m}$-Komponente von ω bezüglich der Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$. Die $\mathfrak{h}$-Komponente von ω, wir bezeichnen sie mit η, ist wegen den Bedingungen (C1) und (C2) in 1.2.1 ein Zusammenhang auf P. Für die Komponenten der Krümmung Ω von $\omega = \eta + \theta$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathfrak{h}} &= d\eta + [\eta,\eta] + [\theta,\theta]_{\mathfrak{h}} \ , \\ \Omega_{\mathfrak{m}} &= d\theta + [\eta,\theta] + [\theta,\eta] + [\theta,\theta]_{\mathfrak{m}} \ , \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

wobei

$$\Omega = \Omega_{\mathfrak{h}} + \Omega_{\mathfrak{m}} \ ,$$
$$[\theta,\theta] = [\theta,\theta]_{\mathfrak{h}} + [\theta,\theta]_{\mathfrak{m}}$$

die Aufspaltung in die $\mathfrak{h}$- und $\mathfrak{m}$-Komponente bezeichnet.

Hat man umgekehrt einen Zusammenhang η auf P sowie eine horizontale, ρ-äquivariante und punktweise surjektive 1-Form $\theta: TP \longrightarrow \mathfrak{m}$ vorgegeben, so ist $\eta + \theta$ ein Cartan-Zusammenhang auf P vom Typ (G,H). Die Zuordnung $\omega \longmapsto (\eta,\tilde{\theta})$ beschreibt somit eine Bijektion von dem Raum der Cartan-Zusammenhänge vom Typ (G,H) auf die Menge $\mathcal{C}(P) \times \mathrm{Isom}(TM, P \times_H \mathfrak{m})$, wobei $\mathcal{C}(P)$ den Raum der Zusammenhänge auf P und $\mathrm{Isom}(TM, P \times_H \mathfrak{m})$ die (starken) Bündelisomorphismen von TM auf $P \times_H \mathfrak{m}$ bezeichnet.

1.4 G-Strukturen und einige Beispiele

In diesem Abschnitt betrachten wir einige Beispiele von Cartan-Zusammenhängen auf sogenannten G-Strukturen. Das Beispiel 1.4.3 ist der Ausgangspunkt für die Konstruktion in Kapitel 3.

Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und

$$\pi: GL(M) \longrightarrow M$$

das Prinzipalbündel aller geordneter Basen von TM, wobei eine Basis $p \in \pi^{-1}(x)$ als linearer Isomorphismus $p: \mathbb{R}^n \longrightarrow T_xM$ aufgefaßt wird. Die Strukturgruppe $GL(n,\mathbb{R})$ operiert als Isomorphismengruppe des $\mathbb{R}^n$ in kanonischer Weise von rechts auf $GL(M)$. Ist H eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$, so nennt man eine Reduktion der Strukturgruppe von $GL(M)$ auf H eine <u>H-Struktur</u> für M.

Beispiele:

(i) Sei H die orthogonale Gruppe

$$O(n) = \{ A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid {}^tA \cdot A = A \cdot {}^tA = I \} .$$

Eine O(n)-Struktur definiert eine Riemannsche Metrik für M und umgekehrt.

(ii) Sei H die spezielle lineare Gruppe

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{ A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1 \} .$$

Einer $SL(n,\mathbb{R})$-Struktur entspricht genau eine Volumenform, d.h. eine nirgends verschwindende reellwertige n-Form auf M. Die Existenz einer $SL(n,\mathbb{R})$-Struktur ist also äquivalent zur Orientierbarkeit von M.

Sei $\pi: P \longrightarrow M$ eine H-Struktur. Das Tangentialbündel von M ist dann kanonisch isomorph zu dem zu P assoziierten Vektorbündel mit Faser $\mathbb{R}^n$, wobei H in kanonischer Weise auf $\mathbb{R}^n$ operiert. Man definiert die <u>kanonische 1-Form</u>

$$\theta: TP \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

punktweise in einem Punkt $p \in P$ durch

$$\theta_p = p^{-1} \circ (\pi_*)_p .$$

θ ist horizontal, äquivariant und punktweise surjektiv. Die nach 1.1.1 induzierte Form

$$\tilde{\theta}: TM \longrightarrow TM \cong P \times_H \mathbb{R}^n$$

ist die Identität.

Wir beschreiben jetzt einige Beispiele von Cartan-Zusammenhängen auf H-Strukturen.

1.4.1 Beispiel:

Sei $G = A(n,\mathbb{R})$ die affine Transformationsgruppe des affinen Raumes $\mathbb{R}^n$ und $H = GL(n,\mathbb{R}) \subset A(n,\mathbb{R})$ die Isotropiegruppe von $0 \in \mathbb{R}^n$. Die Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}(n,\mathbb{R})$ von G läßt sich zerlegen in $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, wobei $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ die Liealgebra von H und $\mathfrak{m} \cong \mathbb{R}^n$ ist. Es gilt $Ad(h)X = h(X)$ für alle $h \in H$ und $X \in \mathfrak{m}$, insbesondere ist $\bar{M} = G/H = \mathbb{R}^n$ ein reduktiver homogener Raum.

Sei ferner M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $P = GL(M)$ das lineare Basenbündel von M. Das assoziierte Bündel $P \times_H \bar{M}$ kann jetzt mit dem Tangentialbündel von M identifiziert werden. Der kanonische Schnitt $\sigma: M \longrightarrow TM$ ist der Nullschnitt.

Wir betrachten einen Cartan-Zusammenhang $\omega: TP \longrightarrow \mathfrak{g}$ auf P und schreiben wie im vorhergehenden Abschnitt $\omega = \eta + \theta$. Die $\mathfrak{h}$-Komponente η ist jetzt ein linearer Zusammenhang für M, während die $\mathfrak{m}$-Komponente θ als Eichtransformation, d.h. als (starker) Bündelautomorphismus

$$\tilde{\theta}: TM \longrightarrow TM \cong P \times_H \mathfrak{m}$$

gedeutet werden kann.

Sei $\Omega = \Omega_{\mathfrak{h}} + \Omega_{\mathfrak{m}}$ die Krümmung von ω. Wegen $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}] = 0$ lesen sich die Gleichungen 1.3.1 nun als

$$\Omega_{\mathfrak{h}} = d\eta + [\eta,\eta] \ ,$$

$$\Omega_{\mathfrak{m}} = d\theta + [\eta,\theta] + [\theta,\eta] \ .$$

$\Omega_{\mathfrak{h}}$ ist also die Krümmung des linearen Zusammenhangs η, und $\Omega_{\mathfrak{m}}$ ist die durch η definierte äußere kovariante Ableitung der Verschmelzungsform θ. Ist θ die kanonische 1-Form auf P, so ist $\Omega_{\mathfrak{m}}$ die Torsion von η. In diesem Fall nennt man ω (wie auch die Erweiterung von ω zu einem Zusammenhang auf dem affinen Basenbündel $P' = P \times_H G$) einen affinen Zusammenhang für M. Die Zuordnung $\eta \longmapsto \eta + \theta$ beschreibt dann eine 1-1 Korrespondenz zwischen den linearen und den affinen Zusammenhängen.

1.4.2 Beispiel:

Sei $G = E(n)$ die Gruppe der Euklidischen Bewegungen des Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ und $H = O(n) \subset E(n)$ die Isotropiegruppe des Ursprungs $0 \in \mathbb{R}^n$. Die Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}(n)$ zerlegen wir in die schiefadjungierten Endomorphismen und die Translationen des $\mathbb{R}^n$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \ , \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{so}(n) \ , \quad \mathfrak{m} = \mathbb{R}^n \ .$$

Sei M eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\pi: P \longrightarrow M$ die durch die Metrik definierte H-Struktur für M, d.h. jedes $p \in \pi^{-1}(x)$ ist eine lineare Isometrie $\mathbb{R}^n \longrightarrow T_xM$.

Die Aufspaltung eines Cartan-Zusammenhangs ω auf P vom Typ (G,H) in $\omega = \eta + \theta$ liefert jetzt einen metrischen Zusammenhang η. Ist dieser der Levi-Civitá-Zusammenhang von M und ist außerdem die Verschmelzungsform θ die kanonische 1-Form auf P, so hat man jetzt $\Omega = \Omega_{\mathfrak{h}}$, d.h. die Krümmungen von ω und η stimmen überein.

Der Riemannsche Krümmungstensor einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M mißt die lokale Abweichung von M zum Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n = E(n)/O(n)$. M ist genau dann lokal Euklidisch, wenn dieser Tensor verschwindet, wenn also der Levi-Cività-Zusammenhang η von M flach ist. Wie oben beschrieben, kann die Krümmung von η als Krümmung eines Cartan-Zusammenhangs angesehen werden.

Legt man anstelle des $\mathbb{R}^n$ einen beliebigen homogenen Raum G/H als Modellraum zugrunde, so ist die Krümmung eines geeigneten Cartan-Zusammenhangs vom Typ (G,H) das adäquate Maß für die Abweichung der lokalen Geometrie von M von der des Modells G/H. Bei lokal homogenen Räumen verschwindet dann diese Krümmung.

Der Modellraum des folgenden Beispiels ist die n-dimensionale Einheitssphäre S^n.

1.4.3 Beispiel:

Sei $G = SO(n+1)$ die Gruppe der orthogonalen Transformationen des Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Determinante 1. Wir fassen $H = SO(n)$ als Untergruppe von $SO(n+1)$ auf vermöge der Einbettung

$$\begin{array}{ccc} SO(n) & \longrightarrow & SO(n+1) \\ h & \longmapsto & \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & h \end{array}\right) \end{array},$$

wobei wir wie üblich Endomorphismen des $\mathbb{R}^n$ mit $(n\times n)$-Matrizen via der kanonischen Basis identifizieren. $SO(n+1)$ operiert auf S^n durch Isometrien und $SO(n)$ ist die Isotropiegruppe von $e_1 = (1,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Die Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n+1)$ zerlegen wir in $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, wobei $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(n)$ mittels der Zuordnung

$$a \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right)$$

in $\mathfrak{g}$ eingebettet ist und $\mathfrak{m}$ den Raum aller Matrizen der Form

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & -{}^t x \\ \hline x & 0 \end{array}\right)$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet. $\mathfrak{m}$ ist invariant unter $Ad(h)$ für jedes $h \in H$ und $\bar{M} = G/H \cong S^n$ ist ein reduktiver homogener Raum.

Sei $P = SO(M) \longrightarrow M$ eine $SO(n)$-Struktur für eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit M und $\omega = \eta + \theta$ ein Cartan-Zusammenhang vom Typ (G,H) auf P mit Krümmung $\Omega = \Omega_{\mathfrak{h}} + \Omega_{\mathfrak{m}}$. Da $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]$ in $\mathfrak{h}$ liegt, nehmen die Gleichungen (1.3.1) jetzt die Form

$$\Omega_{\mathfrak{h}} = d\eta + [\eta,\eta] + [\theta,\theta] \ ,$$
$$\Omega_{\mathfrak{m}} = d\theta + [\eta,\theta] + [\theta,\eta]$$

an. Ist θ die kanonische 1-Form unter der Identifizierung

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \mathfrak{m} \ , \quad x \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} 0 & -{}^t x \\ \hline x & 0 \end{array}\right) \ ,$$

so beschreibt $\Omega_{\mathfrak{m}}$ die Torsion des metrischen Zusammenhangs η.

Wir betrachten spezieller den Fall, wo $M = S^n$ und P die Standard-SO(n)-Struktur der Einheitssphäre ist. Die Krümmung des Levi-Cività-Zusammenhangs $\eta: TP \longrightarrow \mathfrak{h}$ ist durch $-[\theta,\theta]$ gegeben, wobei $\theta: TP \longrightarrow \mathbb{R}^n \cong \mathfrak{m}$ wieder die kanonische 1-Form ist. Also ist $\bar{\omega} := \eta + \theta$ ein flacher Cartan-Zusammenhang auf P. Identifiziert man P mit SO(n+1) in kanonischer Weise, so ist $\bar{\omega}$ die Maurer-Cartan-Form von SO(n+1).

Im folgenden beschreiben wir die Situation im Modellfall $M = \bar{M} = G/H$ genauer.

Sei $\bar{M} = G/H$ ein n-dimensionaler homogener Raum und $\bar{\pi}: G \longrightarrow \bar{M}$ die natürliche Projektion. G ist ein Prinzipalbündel über $\bar{M}$ mit Gruppe H. Wie bereits in Abschnitt 1.2 erwähnt, ist die Maurer-Cartan-Form $\bar{\omega}: TG \longrightarrow \mathfrak{g}$ von G ein flacher Cartan-Zusammenhang vom Typ (G,H). Das assoziierte Bündel $G \times_H G$ mit typischer Faser G ist jetzt kanonisch trivial, explizit hat man die Trivialisierung

$$\begin{aligned} G \times_H G &\xrightarrow{\cong} \bar{M} \times G \\ [(a,b)] &\longmapsto (\bar{\pi}(a), ab) \,. \end{aligned}$$

Somit ist auch das assoziierte Bündel $G \times_H \bar{M}$ trivial. Der kanonische Schnitt

$$\sigma: \bar{M} \longrightarrow G \times_H \bar{M} \cong \bar{M} \times \bar{M}$$

ist die Diagonalabbildung, d.h. $\sigma(\bar{a}) = (\bar{a},\bar{a})$ für alle $\bar{a} \in \bar{M}$.

Sei $GL(\bar{M})$ das lineare Basenbündel von $\bar{M}$. Die kanonische Operation von G auf $\bar{M}$ durch Linkstranslationen induziert eine Operation von G auf $GL(\bar{M})$, definiert durch

$$g \cdot u = \bar{L}_{g_*} \circ u$$

für alle $g \in G$ und alle Basen $u \in GL(\bar{M})$. Wir wollen voraussetzen, daß G frei auf $GL(\bar{M})$ operiert, oder äquivalent, daß die lineare Isotropiedarstellung ρ von H in $T_{\bar{e}}\bar{M}$ treu ist. ρ liefert somit eine Einbettung von H in $GL(n,\mathbb{R})$, indem man $GL(T_{\bar{e}}\bar{M})$ und $GL(n,\mathbb{R})$ mit Hilfe einer fest gewählten Basis $u_o: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} T_{\bar{e}}\bar{M}$ identifiziert. Das Prinzipalbündel $\bar{\pi}: G \longrightarrow \bar{M}$ ist dann eine H-Struktur auf $\bar{M}$, die Einbettung von G in $GL(\bar{M})$ ist durch die Zuordnung $g \longmapsto g \cdot u_o$ gegeben.

Sei jetzt ferner $\bar{M} = G/H$ reduktiv, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$. Das Vektorbündel $G \times_H \mathfrak{m}$ ist kanonisch isomorph zu $T\bar{M}$, explizit:

$$\begin{aligned} G \times_H \mathfrak{m} &\xrightarrow{\cong} T\bar{M} \\ [(g,X)] &\longmapsto (\bar{L}_g \circ \bar{\pi})_* X = (\bar{\pi} \circ L_g)_* X . \end{aligned}$$

Ist $\bar{\omega} = \eta + \theta$ die Zerlegung der Maurer-Cartan-Form von G in die $\mathfrak{h}$- und $\mathfrak{m}$-Komponente, so ist θ die kanonische 1-Form (unter der Identifizierung $u_o^{-1} \circ \bar{\pi}_*: \mathfrak{m} \xrightarrow{\cong} T_{\bar{e}}\bar{M} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$), und η ist der kanonische G-invariante Zusammenhang für G/H bezüglich der Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, (d.h. $\mathfrak{m}$ ist horizontal). Die Gleichungen 1.3.1 liefern die bekannten Formeln für die Krümmung K und die Torsion Θ des linearen Zusammenhangs η:

$$K = -[\theta,\theta]_{\mathfrak{h}} \quad , \quad \Theta = [\theta,\theta]_{\mathfrak{m}} \quad .$$

Ist insbesondere $\bar{M} = G/H$ ein Riemannscher symmetrischer Raum, so hat man $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$, also $\Theta = 0$, und η ist der Levi-Cività-Zusammenhang der Metrik.

Sei M eine Mannigfaltigkeit mit $\dim M = \dim \bar{M}$ und $\pi: P \longrightarrow M$ eine H-Struktur für M, wobei H durch die lineare Isotropiedarstellung in $GL(T_{\bar{e}}\bar{M}) \cong GL(n,\mathbb{R})$ eingebettet ist. Dann ist $\pi: P \longrightarrow M$ lokal äquivalent zu $\bar{\pi}: G \longrightarrow \bar{M}$ genau dann, wenn es auf P einen flachen Cartan-Zusammenhang vom Typ (G,H) gibt. Lokale Äquivalenz bedeutet, daß es zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U in M und einen Diffeomorphismus f von U auf eine offene Menge $\bar{U}$ in $\bar{M}$ gibt mit

$$f^1(P|_U) = G|_{\bar{U}} .$$

Hierbei bezeichnet $P|_U = \pi^{-1}(U)$ (bzw. $G|_{\bar{U}} = \bar{\pi}^{-1}(\bar{U})$) die Einschränkung von P (bzw. G) auf U (bzw. $\bar{U}$), und f^1 ist der durch f induzierte Bündelisomorphismus

$$\begin{aligned} GL(U) &\longrightarrow GL(\bar{U}) \\ p &\longmapsto f_* \circ p . \end{aligned}$$

1.5 Projektive Zusammenhänge

Gegenstand der Untersuchungen in Kapitel 3 sind Cartan-Zusammenhänge (in einem verallgemeinerten Sinn) mit Werten in der normalen reellen Form der einfachen Liealgebra vom Ausnahme-Typ G_2. Im folgenden Kapitel beschreiben wir eine

Realisierung dieser Liealgebra als direkte Summe

$$\mathbb{R}^3 \oplus \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{3*} .$$

Eine ähnliche Zerlegung hat man für die Liealgebra der projektiven linearen Gruppe $PGL(n,\mathbb{R})$:

$$\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{n*} ,$$

wie auch für die der Möbiusgruppe $O(n+1,1)$:

$$\mathfrak{o}(n+1,1) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{co}(n,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{n*} .$$

Die in [Ko$_2$] dargestellte Theorie der projektiven und konformen Zusammenhänge als Cartan-Zusammenhänge mit Werten in $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R})$ bzw. $\mathfrak{o}(n+1,1)$ basiert weitgehend auf diesen Zerlegungen. Es stellt sich die Frage, ob eine Behandlung von (verallgemeinerten) Cartan-Zusammenhängen vom Typ G_2 mit ähnlichen Methoden möglich ist. Die Liealgebren $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R})$ und $\mathfrak{o}(n+1,1)$ sind - im Gegensatz zu $\mathbb{R}^3 \oplus \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{3*}$ - graduiert. Dieser Begriff ist hier wie folgt zu verstehen:

Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale reelle oder komplexe Liealgebra. Eine direkte Summenzerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_k$$

von $\mathfrak{g}$ in lineare Unterräume $\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0, \ldots, \mathfrak{g}_k$ heißt eine <u>Graduierung</u> von $\mathfrak{g}$, wenn

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$$

für alle $i,j \in \mathbb{Z}$ gilt, wobei wir $\mathfrak{g}_i = \{0\}$ für $i<-1$ und $i>k$

setzen. Insbesondere ist dann $\mathfrak{g}_0 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_k$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Ist $\mathfrak{g}_k \neq \{0\}$, so heißt k+1 die Ordnung der Graduierung.

Graduierte Liealgebren der Ordnung 1 haben wir in den Beispielen 1.4.1. und 1.4.2 betrachtet:

$$\mathfrak{a}(n,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) ,$$
$$\mathfrak{e}(n) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{so}(n) .$$

Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach, so hat jede Graduierung von $\mathfrak{g}$ höchstens die Ordnung 2. Eine Klassifizierung der halbeinfachen, graduierten Liealgebren wurde von Kobayashi und Nagano ([KN_2]) gegeben.

Sei $P \longrightarrow M$ ein H-Prinzipalbündel und ω ein Cartan-Zusammenhang vom Typ (G,H) auf P. Ferner sei

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_k$$

eine Graduierung der Liealgebra $\mathfrak{g}$ von G derart, daß die Liealgebra von H durch

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_k$$

gegeben ist. Wir zerlegen ω entsprechend dieser Graduierung in

$$\omega = \omega_{-1} + \omega_0 + \ldots + \omega_k .$$

Sei $e_1,\ldots,e_n$ eine Basis von $\mathfrak{g}_{-1}$ und $\omega^1,\ldots,\omega^n$ die Komponenten von ω_{-1} bezüglich dieser Basis,

$$\omega_{-1} = \sum_i \omega^i e_i \quad , \quad \text{oder kürzer:} \quad \omega_{-1} = (\omega^i) .$$

Da ω einen absoluten Parallelismus auf P definiert, wird $A(P,\mathbb{R})$, die Algebra der reellwertigen Differentialformen auf P, von den Komponenten von ω (bezüglich einer Basis von $\mathfrak{g}$) und den reellwertigen Funktionen auf P erzeugt. Bei horizontalen Formen treten dabei jedoch nur die Komponenten von ω_{-1} auf, denn einerseits definiert $\omega_0 + \ldots + \omega_k$ eine Parallelisierung für jede Faser von P, andererseits verschwindet ω_{-1} auf vertikalen Vektoren. Insbesondere kann die Krümmung Ω von ω in der Form

$$\Omega = \sum_{i,j} K_{ij}\, \omega^i \wedge \omega^j$$

dargestellt werden, wobei jedes K_{ij} eine $\mathfrak{g}$-wertige Funktion auf P ist. Um die Eindeutigkeit dieser Funktionen zu erzwingen, fordern wir $K_{ij} = -K_{ji}$.

Wir beschreiben nun die Ausgangssituation zum Studium projektiver Zusammenhänge und folgen dabei den Ausführungen in [Ko$_2$], Ch.IV.4. Für eine genauere und weiterführende Darstellung verweisen wir ferner auf [KN$_1$].

Sei G die projektive lineare Gruppe

$$G = PGL(n,\mathbb{R}) = SL(n+1)/\text{Zentrum}$$

und $H \subset G$ die durch

$$H = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \det A^{-1} & v \\ \hline 0 & A \end{array} \right) \;\middle|\; \begin{array}{c} A \in GL(n,\mathbb{R}), \\ v \in \mathbb{R}^{n*} \end{array} \right\} \Big/ \text{Zentrum}$$

definierte Untergruppe, wobei Vektoren des $\mathbb{R}^n$ als Spalten- und die des Dualraums $\mathbb{R}^{n*}$ als Zeilenvektoren aufgefaßt werden. G/H ist der n-dimensionale reelle projektive Raum. Die Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R})$ von G ist graduiert wie folgt:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

mit

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline x & 0 \end{array}\right) \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^n \right\} \cong \mathbb{R}^n ,$$

$$\mathfrak{g}_{0} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} -\mathrm{tr}\, a & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right) \;\middle|\; a \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \right\} \cong \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) ,$$

$$\mathfrak{g}_{1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & v \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \;\middle|\; v \in \mathbb{R}^{n*} \right\} \cong \mathbb{R}^{n*} .$$

Offenbar ist $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ die Liealgebra von H.

Wir fixieren die folgende Basis von $\mathfrak{g}$: Sei $e_1,\dots,e_n$ die natürliche Basis von $\mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{R}^n$, $e^1,\dots,e^n$ die hierzu duale Basis von $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}^{n*}$ und $e_i^j \in \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ die Matrix mit 1 in der (i,j)-ten Komponente (i-te Zeile, j-te Spalte) und 0 in den restlichen Komponenten.

Wir betrachten eine Mannigfaltigkeit M der Dimension n und ein H-Prinzipalbündel P über M. Ein Cartan-Zusammenhang ω vom Typ (G,H) auf P wird bezüglich der oben angegebenen Basis als

Menge reellwertiger 1-Formen ω^i, ω^i_j, ω_j auf P beschrieben:

$$\omega = \sum_i \omega^i e_i + \sum_{i,j} \omega^i_j e^j_i + \sum_j \omega_j e^j .$$

Wir schreiben kurz

$$\omega = (\omega^i, \omega^i_j, \omega_j)$$

und analog für die Krümmung Ω von ω

$$\Omega = (\Omega^i, \Omega^i_j, \Omega_j):$$

Die Strukturgleichung $\Omega = d\omega + [\omega,\omega]$ liest sich dann komponentenweise als

$$\begin{aligned} \Omega^i &= d\omega^i + \sum_k \omega^i_k \wedge \omega^k , \\ \Omega^i_j &= d\omega^i_j + \sum_k \omega^i_k \wedge \omega^k_j + \omega^i \wedge \omega_j - \delta^i_j \sum_k \omega_k \wedge \omega^k , \qquad (1.5.1) \\ \Omega_j &= d\omega_j + \sum_k \omega_k \wedge \omega^k_j , \end{aligned}$$

wobei δ^i_j das Kronecker-Symbol bezeichnet.

Die Bedingungen (C1), (C2) und (C3) aus 1.2.1 für den Cartan-Zusammenhang ω implizieren die folgenden Eigenschaften für ω_{-1} und ω_0:

(C'1) $\omega_{-1}(A^*) = 0$ und $\omega_0(A^*) = A_0$ für alle $A \in \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, wobei A_0 die $\mathfrak{g}_0$-Komponente von A bezeichnet.

(C'2) $R_h^*(\omega_{-1} + \omega_0) = \overline{\mathrm{Ad}}(h^{-1})(\omega_{-1} + \omega_0)$ für alle $h \in H$, wobei $\overline{\mathrm{Ad}}(h^{-1}): \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0$ die durch

$\mathrm{Ad}(h^{-1}): \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ induzierte Transformation des Quotientenraumes $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0$ ist.

(C'3) Ist $X \in TP$ mit $\omega_{-1}(X) = 0$, so ist X vertikal.

Der Hauptsatz über normale projektive Zusammenhänge kann nun wie folgt formuliert werden:

1.5.2 Satz: *Sei* $\omega_{-1} = (\omega^i)$ *bzw.* $\omega_0 = (\omega^i_j)$ *eine* $\mathfrak{g}_{-1}$- *bzw. eine* $\mathfrak{g}_0$-*wertige 1-Form auf P, so daß die Bedingungen* (C'1), (C'2), (C'3) *sowie die Gleichungen*

$$(*) \qquad d\omega^i + \sum_k \omega^i_k \wedge \omega^k = 0 \qquad \text{für } i = 1,\ldots,n$$

erfüllt sind. Dann gibt es genau eine $\mathfrak{g}_1$-*wertige 1-Form* $\omega_1 = (\omega_j)$ *auf P, so daß* $\omega := \omega_{-1} + \omega_0 + \omega_1$ *ein Cartan-Zusammenhang vom Typ* (G,H) *ist, der folgender Bedingung genügt: Ist* $\Omega = (0, \Omega^i_j, \Omega_j)$ *die Krümmung von* ω *und sind* K^i_{jkl} *reellwertige Funktionen auf P mit*

$$\Omega^i_j = \sum_{k,l} K^i_{jkl}\, \omega^k \wedge \omega^l \qquad \text{und} \qquad K^i_{jkl} = -K^i_{jlk} \,,$$

so gilt

$$\sum_i K^i_{jil} = 0 \,.$$

Für einen Beweis verweisen wir auf [Ko₂], Ch.IV, Th.4.2.

<u>Bemerkung:</u> Die vorgegebenen 1-Formen ω_{-1} und ω_0 treten bei einer projektiven Struktur für M kanonisch auf:

Sei $GL^2(M)$ das lineare Basenbündel 2-ter Ordnung von M und

$$\theta = \theta_{-1} + \theta_0 : T\, GL^2(M) \longrightarrow \mathfrak{a}(n,\mathbb{R}) = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0$$

die kanonische 1-Form. Für die Definition der Basenbündel höherer Ordnung und ihrer kanonischen 1-Formen verweisen wir auf [Ko_3]. H ist als Untergruppe in die Strukturgruppe $GL^2(n,\mathbb{R})$ von $GL^2(M)$ eingebettet. Eine <u>projektive Struktur</u> für M ist eine Reduktion von $GL^2(M)$ auf Strukturgruppe H. Ist ω_{-1} bzw. ω_0 die Einschränkung von θ_{-1} bzw. θ_0 auf eine projektive Struktur P, so erfüllen diese beiden Formen die Bedingungen (C'1), (C'2), (C'3) und (*). Den durch 1.5.2 definierten Cartan-Zusammenhang $\omega = \omega_{-1} + \omega_0 + \omega_1$ nennt man den <u>normalen</u> projektiven Zusammenhang der projektiven Struktur P.

Die Theorie konformer Zusammenhänge läßt sich, basierend auf der Graduierung

$$\mathfrak{o}(n+1,1) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{co}(n,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{n*},$$

in analoger Art und Weise aufbauen (siehe z.B.[Ko_2],[Og]). Verallgemeinerungen dieser Methoden auf Cartan-Zusammenhänge vom Typ (G,H) mit einer halbeinfachen graduierten Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ findet man bei Ochiai ([O]).

Im Gegensatz zu der oben beschriebenen Situation ist die Liealgebra

$$\mathbb{R}^3 \oplus \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{3*}$$

nicht graduiert. Insbesondere ist $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{3*}$ keine Unteralgebra. Anstelle der Untergruppe H tritt somit eine Untermannigfaltigkeit von G, anstelle des Prinzipalbündels ein Faserbündel.

Im folgenden Abschnitt erweitern wir daher den Begriff eines Cartan-Zusammenhangs auf beliebige Faserbündel.

1.6 Verallgemeinerte Cartan-Zusammenhänge auf Faserbündeln

Wie in Lemma 1.2.2 beschrieben, kann jeder Cartan-Zusammenhang vom Typ (G,H) auf einem H-Prinzipalbündel P zu genau einem Zusammenhang auf dem G-Prinzipalbündel $P' = P \times_H G$ erweitert werden. Hat man umgekehrt ein G-Prinzipalbündel P' mit einem Zusammenhang ω' vorgegeben, so ist es im allgemeinen nicht möglich, eine abgeschlossene Untergruppe H von G und eine Reduktion von P' auf ein Prinzipalbündel P mit Gruppe H zu finden, so daß die Einschränkung von ω' auf P ein Cartan-Zusammenhang vom Typ (G,H) ist. Im allgemeinen ist bereits die Existenz einer Untergruppe H passender Dimension, also

$$\dim H = \dim G - \dim M ,$$

nicht gesichert. Man kann sich daher allgemeiner die Frage stellen, ob es ein Unterbündel B von P' gibt, so daß die Restriktion von ω' auf B einen totalen Parallelismus auf B definiert, wobei wir für B nicht notwendig eine Prinzipalbündelstruktur fordern.

Im folgenden sei $\pi_B: B \longrightarrow M$ ein Faserbündel und G eine Liegruppe mit

$$\dim B = \dim G .$$

Die Liealgebra von G bezeichnen wir wieder mit $\mathfrak{g}$.

1.6.1 Definition: Ein (verallgemeinerter) <u>Cartan-Zusammenhang</u> auf B <u>vom Typ G</u> ist eine $\mathfrak{g}$-wertige 1-Form $\omega: TB \longrightarrow \mathfrak{g}$, für die ein G-Prinzipalbündel P' und eine starke Bündelabbildung $j: B \longrightarrow P'$ existieren, so daß die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(c1) Es gibt einen Zusammenhang ω' auf P' mit $j^*\omega' = \omega$.

(c2) Es gilt $\omega(X) \neq 0$ für alle $X \in TB$ mit $X \neq 0$.

Sind P' und j vorgegeben, so sagen wir, ω sei <u>vom Typ (G,j)</u>. Die <u>Krümmung</u> Ω von ω definieren wir wie immer durch

$$\Omega = d\omega + [\omega,\omega].$$

Ist $\Omega = 0$, so nennen wir ω <u>flach</u>.

Wegen der Bedingung (c2) und $\dim B = \dim G$ definiert ω einen absoluten Parallelismus auf B.

<u>Beispiel:</u> Sei H eine abgeschlossene Untergruppe von G, P ein H-Prinzipalbündel über M, $P' = P \times_H G$ das zu P assoziierte Bündel mit typischer Faser G und

$$j: P \longrightarrow P' , \quad j(p) = [(p,e)]$$

die kanonische Einbettung. Jeder Cartan-Zusammenhang auf P vom Typ (G,j) ist ein Cartan-Zusammenhang vom Typ (G,H) im Sinne von Definition 1.2.1 und umgekehrt, (vgl. Lemma 1.2.2).

1.6.2 Lemma: *Sei* $j: B \longrightarrow P'$ *eine starke Bündelabbildung eines Faserbündels* $B \longrightarrow M$ *in ein G-Prinzipalbündel* $P' \longrightarrow M$. *Es gelte* $\dim G = \dim B$. *Ferner sei* $\omega': TP' \longrightarrow \mathfrak{g}$ *ein Zusammenhang auf* P'. *Man setzte* $\omega = j^*\omega'$.

(i) *Die Form* ω *ist genau dann ein Cartan-Zusammenhang auf* B *vom Typ* (G,j), *wenn für jedes* $b \in B$

$$(*) \qquad T_{j(b)}P' = j_*(T_bB) \oplus H_{j(b)}P'$$

gilt, wobei $HP' = \ker \omega' \subset TP'$ *das Horizontalbündel von* P' *bezeichnet. Ist dies der Fall, so ist insbesondere* j *eine Immersion.*

(ii) *Ist* ω'' *ein weiterer Zusammenhang auf* P' *mit* $j^*\omega'' = \omega$, *so stimmen* ω' *und* ω'' *überein.*

(iii) *Ist* ω *ein Cartan-Zusammenhang mit Krümmung* Ω, *so gibt es genau eine horizontale, äquivariante 2-Form* $\Omega' \in A^2(B,\mathfrak{g})$ *mit* $j^*\Omega' = \Omega$. *Diese 2-Form ist die Krümmung von* ω'. *Insbesondere ist* Ω *horizontal.* ω *ist genau dann flach, wenn* ω' *flach ist.*

Beweis: Sei zunächst $\omega = j^*\omega'$ ein Cartan-Zusammenhang. Dann ist j eine Immersion, denn für jedes $X \in \ker j_*$ hat man $\omega(X) = \omega'(j_*X) = 0$ und somit $X = 0$ nach (c2). Ist andererseits $X \in T_bB$ mit $j_*(X) \in H_{j(b)}P'$, so hat man ebenfalls $\omega(X) = 0$ und

wieder folgt $X = 0$. Also schneidet $j_*(T_bB)$ den Horizontalraum $H_{j(b)}P'$ nur im Nullvektor, und (*) ergibt sich aus Dimensionsgründen. Umgekehrt impliziert (*) zunächst die Injektivität von $(j_*)_b$, und da für jedes $X \in T_bB$ mit $\omega(X) = 0$ der Vektor $j_*(X)$ im Schnitt von $j_*(T_bB)$ und $H_{j(b)}P'$ liegt und somit nach (*) verschwindet, ist $X = 0$, d.h. (*) ist äquivalent zu (c2).
Die Aussage (ii) erhält man unmittelbar aus Lemma 1.1.2.
Schließlich zeigen wir (iii): Sei Ω' die Krümmung von ω'. Aus der Strukturgleichung $\Omega' = d\omega' + [\omega',\omega']$ ergibt sich $\Omega = j^*\Omega'$. Dies impliziert insbesondere die Horizontalität von Ω, denn Ω' ist horizontal und j_* bildet das Vertikalbündel von B in das Vertikalbündel von P' ab. Weiter ist nach Lemma 1.1.2 Ω' die einzige horizontale, äquivariante Differentialform in $A^2(P',\mathfrak{g})$ mit $j^*\Omega' = \Omega$. Ist insbesondere $\Omega = 0$, so folgt hieraus $\Omega' = 0$.

□

2. EINFACHE LIEALGEBREN UND LIEGRUPPEN VOM AUSNAHMETYP G_2

Die Klassifikation aller einfachen Liealgebren liefert neben den vier klassischen Typen A_r, B_r, C_r und D_r fünf weitere Isomorphietypen: die Ausnahmealgebren G_2, E_6, E_7, E_8 und F_4. Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit dem Ausnahmetyp G_2.

2.1 Eine komplexe Liealgebra vom Typ G_2

Zunächst beschreiben wir eine komplexe Ausnahmealgebra des Isomorphietyps G_2. Unser Modell $\mathfrak{g}$ stimmt mit der in dem Buch von Humphreys ([Hu], Ch. V.19.3) angegebenen Liealgebra L überein.

Sei $\mathfrak{g}$ der 14-dimensionale komplexe Vektorraum

$$\mathfrak{g} = \mathbb{C}^3 \times \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{3*},$$

wobei $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ den Raum der komplexen, spurfreien (3×3)-Matrizen bezeichnet. Vektoren aus $\mathbb{C}^3$ werden als Spaltenvektoren und Linearformen des Dualraums $\mathbb{C}^{3*}$ als Zeilenvektoren aufgefaßt. Für eine Matrix a bezeichnet ${}^t a$ die transponierte Matrix.

Zur übersichtlichen Beschreibung der Lieklammer in $\mathfrak{g}$ benutzen wir den Isomorphismus

$$\tau:\quad \mathbb{C}^3 \longrightarrow so(3,\mathbb{C}) = \{a \in sl(3,\mathbb{C}) \mid a + {}^t a = 0\}$$

(2.1.1)
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die im folgenden Lemma zusammengefaßten Eigenschaften von τ lassen sich leicht verifizieren.

2.1.2 Lemma: *Für alle* $x,y \in \mathbb{C}^3$, $a \in gl(3,\mathbb{C})$ *und* $A \in GL(3,\mathbb{C})$ *gilt:*

(i) $\tau(x)y = -\tau(y)x$

(ii) $\tau(x)\tau(y) = y\cdot{}^t x - {}^t y\cdot x\cdot I$

(iii) $[\tau(x),\tau(y)] = \tau(\tau(x)y) = y\cdot{}^t x - x\cdot{}^t y$

(iv) $\tau(ax) = (\mathrm{tr}\ a)\cdot\tau(x) - {}^t a\cdot\tau(x) - \tau(x)\cdot a$

(v) $\tau(Ax) = (\det A)\cdot{}^t A^{-1}\tau(x)A^{-1}$

Die Lieklammer in (iii) ist der übliche Kommutator; I *bezeichnet die Einheitsmatrix.*

Die Gleichungen (iv) und (v) liefern insbesondere für alle $a \in so(3,\mathbb{C})$ und $A \in SO(3,\mathbb{C})$ die Beziehungen

$$\tau(ax) = [a,\tau(x)] = \mathrm{ad}(a)\tau(x),$$
$$\tau(Ax) = A\tau(x)A^{-1} = \mathrm{Ad}(A)\tau(x).$$

Identifiziert man also $\mathbb{C}^3$ mit $so(3,\mathbb{C})$ via τ, so geht die durch die adjungierte Darstellung definierte Operation von $SO(3,\mathbb{C})$ auf $so(3,\mathbb{C})$ in die natürliche Operation von $SO(3,\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}^3$ über.

Auf $\mathfrak{g} = \mathbb{C}^3 \times \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{3*}$ definieren wir nun eine Lieklammer wie folgt:

Für $a,b \in \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, $x,y \in \mathbb{C}^3$ und ${}^tu, {}^tv \in \mathbb{C}^{3*}$ setze man

$$\begin{aligned}
[a,b] &= ab - ba \in \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}), \\
[a,y] &= ay \in \mathbb{C}^3, \\
[{}^tu,b] &= {}^tub \in \mathbb{C}^{3*}, \\
[x,y] &= -\sqrt{2}\ {}^t(\tau(x)\cdot y) \in \mathbb{C}^{3*}, \\
[{}^tu,{}^tv] &= \sqrt{2}\ \tau(u)\cdot v \in \mathbb{C}^3, \\
[x,{}^tv] &= \tfrac{3}{2}\ x\cdot{}^tv - \tfrac{1}{2}\ {}^tv\cdot x\cdot I = x\cdot{}^tv + \tfrac{1}{2}\ \tau(v)\tau(x) \in \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}).
\end{aligned}$$

Explizit erhält man die Formel

$$[(x,a,{}^tu),(y,b,{}^tv)] = (z,c,{}^tw)$$

mit

$$\begin{aligned}
z &= ay - bx + \sqrt{2}\ \tau(u)\cdot v\ , \\
c &= [a,b] + x\cdot{}^tv + \tfrac{1}{2}\ \tau(v)\tau(x) \\
&\qquad - y\cdot{}^tu - \tfrac{1}{2}\ \tau(u)\tau(y)\ , \qquad (2.1.3) \\
w &= {}^tb\cdot u - {}^ta\cdot v + \sqrt{2}\ \tau(y)\cdot x\ ,
\end{aligned}$$

wobei $[a,b]$ das übliche Lieprodukt in $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ bezeichnet.

Man kann zeigen, daß eine treue Darstellung von $\mathfrak{g}$ in $\mathbb{C}^n$ nur für $n \geq 7$ möglich ist (siehe z.B.[Hu]). Das folgende Lemma beschreibt eine explizite Darstellung für $n=7$ (und zeigt insbesondere, daß durch (2.1.3) tatsächlich eine Liealgebrenstruktur auf dem Vektorraum $\mathfrak{g}$ definiert wird).

2.1.4 Lemma: *Die Abbildung* $\rho: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{sl}(7,\mathbb{C})$, *definiert durch*

$$\rho(x,a,{}^t u) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & {}^t u & -{}^t x \\ \hline x & a & \frac{-1}{\sqrt{2}}\,\tau(u) \\ \hline -u & \frac{1}{\sqrt{2}}\,\tau(x) & -{}^t a \end{array}\right)$$

für alle $(x,a,{}^t u) \in \mathfrak{g}$, *ist ein injektiver Liealgebrenhomomorphismus.*

Beweis: Berechnet man den Kommutator von $\rho(X)$ und $\rho(Y)$ für zwei Vektoren $X = (x,a,{}^t u)$, $Y = (y,b,{}^t v)$ in $\mathfrak{g}$, so erhält man unter Verwendung von Lemma 2.1.2

$$[\rho(X),\rho(Y)] = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & {}^t w & -{}^t z \\ \hline z & c & \frac{-1}{\sqrt{2}}\,\tau(w) \\ \hline -w & \frac{1}{\sqrt{2}}\,\tau(z) & -{}^t c \end{array}\right)$$

wobei z, c und w durch die Gleichungen 2.1.3 gegeben sind. Da andererseits $[X,Y] = (z,c,{}^t w)$ gilt, folgt

$$\rho([X,Y]) = [\rho(X),\rho(Y)] \; .$$

Die Linearität und Injektivität von ρ ist offensichtlich. □

<u>Bemerkung:</u> Das Bild $\rho(\mathfrak{g})$ ist enthalten in der folgenden Unteralgebra von $\mathfrak{sl}(7,\mathbb{C})$:

$$B_3 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & -{}^t u & -{}^t x \\ \hline x & a & b \\ \hline u & c & -{}^t a \end{array} \right) \;\middle|\; \begin{array}{l} x,u \in \mathbb{C}^3, \\ a \in \mathfrak{gl}(3,\mathbb{C}), \\ b,c \in \mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \end{array} \right\} .$$

Die Liealgebra B_3 ist isomorph zu $\mathfrak{so}(7,\mathbb{C})$, ein expliziter Isomorphismus von B_3 auf $\mathfrak{so}(7,\mathbb{C})$ ist durch die Zuordnung $X \longmapsto U^{-1}XU$ gegeben. Hierbei ist U die Matrix

$$U = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda I & \bar{\lambda} I \\ \hline 0 & \bar{\lambda} I & \lambda I \end{array} \right) \qquad \text{mit} \qquad \lambda = \tfrac{1}{2}(1-i) \ ,$$

wobei $\bar{\lambda}$ die zu λ komplex konjugierte Zahl und I die 3×3-Einheitsmatrix bezeichnet.

Für explizite Berechnungen ist es nützlich, eine Multiplikationstabelle für die Lieklammer in Bezug auf eine geeignete Basis zur Verfügung zu haben:

Seien (e_i), $(e^j = {}^t e_j)$ und (e_i^j) die Standard-Basen von $\mathbb{C}^3$, $\mathbb{C}^{3*}$ und $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{C})$ respektive. (Die Matrix e_i^j hat eine 1 in der (i,j)-ten Komponente, d.h. i-te Zeile und j-te Spalte, und 0 in allen anderen Komponenten). Man setze

$$d_1 = e_1^1 - e_2^2 \quad \text{und} \quad d_2 = e_2^2 - e_3^3 \ .$$

Die folgenden Vektoren bilden nun eine Basis von $\mathfrak{g}$, die wir mit B bezeichnen:

$$e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_1^2,\ e_1^3,\ e_2^1,\ e_2^3,\ e_3^1,\ e_3^2,\ d_1,\ d_2,\ e^1,\ e^2,\ e^3 \ .$$

Die Multiplikationstabelle für diese Basis haben wir im Anhang angegeben.

2.2 Killingform, Cartan-Unteralgebra und Wurzelsystem

Ein grundlegender Begriff für die Frage nach den Beziehungen zwischen einer komplexen halbeinfachen Liealgebra und ihrer reellen Formen ist der einer Weylbasis. Insbesondere definiert eine solche Basis unmittelbar eine normale reelle Form und eine Cartan-Zerlegung derselben. Um eine Weylbasis für die im vorhergehenden Abschnitt definierte Liealgebra $\mathfrak{g}$ zu gewinnen, geben wir zunächst eine explizite Formel für die Killingform von $\mathfrak{g}$ an und bestimmen eine Cartan-Unteralgebra und das zugehörige Wurzelsystem. Gleichzeitig zeigen wir damit, daß $\mathfrak{g}$ tatsächlich eine einfache Liealgebra vom Typ G_2 ist. Bei den Untersuchungen dieses und der folgenden Abschnitte werden wir die notwendigen Begriffe und Sätze aus der Theorie der halbeinfachen Liealgebren jeweils an der entsprechenden Stelle angeben, wobei wir aber auf Beweise verzichten. Wir verweisen hier auf [H], für die komplexe Theorie auch auf [Hu].

Es bezeichne ad die <u>adjungierte Darstellung</u> und K die <u>Killingform</u> von $\mathfrak{g}$:

$$\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \;,\; \mathrm{ad}(X)Y = [X,Y] \;,$$

$$K\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C} \;,\; K(X,Y) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y)) \;.$$

2.2.1 Lemma: *Die Killingform von* $\mathfrak{g} = \mathbb{C}^3 \times \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{3*}$ *ist gegeben durch*

$$K((x,a,{}^t u),(y,b,{}^t v)) = 8\,\mathrm{tr}(ab) + 12\,{}^t v\cdot x + 12\,{}^t u\cdot y\ .$$

Beweis: Berechnet man die Werte der Killingform auf der im vorhergehenden Abschnitt angegebenen Basis B mit Hilfe der Multiplikationstabelle (siehe Anhang), so ergibt sich:

$K(e_i,e^i) = K(e^i,e_i) = 12$	für $i = 1,2,3$
$K(e_i^j,e_j^i) = 8$	für $i,j = 1,2,3$ und $i \neq j$
$K(d_i,d_i) = 16$	für $i = 1,2$
$K(d_1,d_2) = K(d_2,d_1) = -8$	
$K(X,Y) = 0$	sonst .

Ist andererseits die Abbildung $K'\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$ durch die rechte Seite der behaupteten Gleichheit definiert, so verifiziert man, daß K' auf den Basisvektoren dieselben Werte wie K annimmt. Da beide Abbildungen bilinear sind, stimmen sie überein. □

Offenbar ist K nicht entartet, mit anderen Worten: $\mathfrak{g}$ ist <u>halbeinfach</u>.

Wir zeigen nun, daß der Raum $\mathfrak{h}$ der Diagonalmatrizen in $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ eine <u>Cartan-Unteralgebra</u> von $\mathfrak{g}$ ist, d.h. es gelten die folgenden zwei Bedingungen:

(i) $\mathfrak{h}$ ist eine maximale abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{g}$,

(ii) $\mathrm{ad}(H)$ ist für jedes $H\in\mathfrak{h}$ halbeinfach.

2.2.2 Lemma: *Der Raum* $\mathfrak{h} := \mathbb{C}d_1 \oplus \mathbb{C}d_2$ *ist eine Cartan-Unteralgebra von* $\mathfrak{g}$.

Beweis: Offensichtlich ist $\mathfrak{h}$ eine abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Um die Maximalität zu zeigen, sei $(x,a,{}^tu) \in \mathfrak{g}$ mit $[(x,a,{}^tu),d_i] = 0$ für $i=1,2$. Dies bedeutet $d_i x = d_i u = 0$ sowie $[a,d_i] = 0$, woraus $x = u = 0$ und $a \in \mathfrak{h}$ folgt, d.h. $\mathfrak{h}$ ist eine maximale abelsche Unteralgebra. Ferner haben die Matrixdarstellungen von $ad(d_1)$ und $ad(d_2)$ bezüglich der Basis B Diagonalgestalt; folglich ist $ad(H)$ für jedes $H \in \mathfrak{h}$ halbeinfach.

$\square$

Der Rang einer komplexen halbeinfachen Liealgebra ist definiert als die Dimension einer Cartan-Unteralgebra. (Es gibt stets eine Cartan-Unteralgebra und alle Cartan-Unteralgebren sind zueinander konjugiert.)

2.2.3 Korollar: *Die Liealgebra* $\mathfrak{g} = \mathbb{C}^3 \times \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{3*}$ *ist halbeinfach und hat Rang* 2.

Wir erinnern an einige grundlegende Begriffe und Sätze aus der Klassifikationstheorie der halbeinfachen Liealgebren:

Sei $\mathfrak{h}$ eine Cartan-Unteralgebra einer komplexen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$. Die Einschränkung der Killingform auf $\mathfrak{h}$ ist nicht entartet. Zu jeder $\mathbb{C}$-Linearform $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ gibt es daher genau ein $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ mit

$$K(H_\alpha, H) = \alpha(H) \quad \text{für alle } H \in \mathfrak{h}.$$

Ist der lineare Raum

$$\mathfrak{g}^{\alpha} := \{X \in \mathfrak{g} \mid [H,X] = \alpha(H)X \text{ für alle } H \in \mathfrak{h}\}$$

nicht trivial, so nennt man α eine <u>Wurzel</u> (bzgl. $\mathfrak{h}$) und $\mathfrak{g}^{\alpha}$ den zugehörigen <u>Wurzelraum</u>. Offenbar ist $\mathfrak{h}$ der Wurzelraum zur Wurzel $0 \in \mathfrak{h}^*$. Die Menge der nichtverschwindenden Wurzeln heißt <u>Wurzelsystem</u> von $\mathfrak{g}$ (bzgl. $\mathfrak{h}$) und wird mit Δ bezeichnet.

Im folgenden Satz fassen wir einige fundamentale Eigenschaften der Wurzeln und Wurzelräume zusammen.

2.2.4 Satz: *Es gilt:*

(i) $\{H_{\alpha} \mid \alpha \in \Delta\}$ *erzeugt* $\mathfrak{h}$.

(ii) $\mathfrak{g}$ *ist die direkte Summe der Wurzelräume:*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^{\alpha} .$$

(iii) $\dim \mathfrak{g}^{\alpha} = 1$ *für alle* $\alpha \in \Delta$.

(iv) $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$ *für alle* $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$, *und*

$[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$ *für alle* $\alpha, \beta \in \Delta$ *mit* $\alpha+\beta \neq 0$.

(v) *Ist* $\alpha \in \Delta$, *so ist auch* $-\alpha \in \Delta$ *und* $\pm\alpha$ *sind die einzigen skalaren Vielfachen von* α *in* Δ. *Ferner gilt*

$$[X_{\alpha}, X_{-\alpha}] = K(X_{\alpha}, X_{-\alpha})\, H_{\alpha}$$

für alle $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha}$ *und* $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$.

(vi) *Für alle* $\alpha, \beta \in \Delta$ *ist* $\alpha(H_{\beta})$ *reell,* $\alpha(H_{\alpha}) > 0$ *und*

$$\frac{2\,\alpha(H_{\beta})}{\alpha(H_{\alpha})} \in \mathbb{Z} .$$

Aus (i)-(iii) folgt insbesondere für die Anzahl card Δ der nichtverschwindenden Wurzeln:

$$\text{card}\,\Delta = \dim \mathfrak{g} - \text{rang}\,\mathfrak{g} \geqslant \text{rang}\,\mathfrak{g}\,.$$

Wir betrachten jetzt wieder $\mathfrak{g} = \mathbb{C}^3 \times \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{3*}$. Zur Beschreibung des Wurzelsystems von $\mathfrak{g}$ in Bezug auf die Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h} = \mathbb{C}d_1 \oplus \mathbb{C}d_2$ definiere man zwei Linearformen α_1 und α_2 auf $\mathfrak{h}$ durch

$$\alpha_1(d_1) = 2\,, \quad \alpha_1(d_2) = -1\,,$$
$$\alpha_2(d_1) = -1\,, \quad \alpha_2(d_2) = 1\,,$$

also

$$\alpha_1(H) = \lambda_1 - \lambda_2 \quad \text{und} \quad \alpha_2(H) = \lambda_2$$

für

$$H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1-\lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 d_1 + (\lambda_1+\lambda_2)d_2 \in \mathfrak{h}\,.$$

2.2.5 Satz: *Die Menge* Δ *der nichtverschwindenden Wurzeln von* $\mathfrak{g}$ *bezüglich* $\mathfrak{h}$ *besteht aus den in der folgenden Tabelle aufgelisteten sechs Linearformen* α *und deren Inverse* $-\alpha$*. Ferner sind in der Tabelle angegeben:*

1. *die Vektoren* $H_\alpha \in \mathfrak{h}$*, definiert durch* $K(H_\alpha, H) = \alpha(H)$ *für alle* $H \in \mathfrak{h}$*,* $(H_{-\alpha} = -H_\alpha)$ *,*
2. *die Werte* $\alpha(H_\alpha) = K(H_\alpha, H_\alpha) = -\alpha(H_{-\alpha})$ *und*
3. *ein (erzeugender) Vektor* $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ *.*

α	H_α	$\alpha(H_\alpha)$	X_α	$X_{-\alpha}$
$\alpha_1+\alpha_2$	$\frac{1}{24}\,(2d_1+d_2)$	$\frac{1}{12}$	e_1	e^1
α_2	$\frac{1}{24}\,(-d_1+d_2)$	$\frac{1}{12}$	e_2	e^2
$\alpha_1+2\alpha_2$	$\frac{1}{24}\,(d_1+2d_2)$	$\frac{1}{12}$	e^3	e_3
α_1	$\frac{1}{8}\,d_1$	$\frac{1}{4}$	e_1^2	e_2^1
$2\alpha_1+3\alpha_2$	$\frac{1}{8}\,(d_1+d_2)$	$\frac{1}{4}$	e_1^3	e_3^1
$\alpha_1+3\alpha_2$	$\frac{1}{8}\,d_2$	$\frac{1}{4}$	e_2^3	e_3^2

Beweis: An Hand der Multiplikationstabelle zeigt man ohne Schwierigkeiten, daß für jedes $\pm\alpha$ und entsprechendes $X_{\pm\alpha}$ aus der obigen Tabelle die beiden Gleichungen

$$[d_i, X_{\pm\alpha}] = \pm\alpha(d_i)\, X_{\pm\alpha} \quad \text{für } i = 1,2$$

erfüllt sind, und somit

$$[H, X_{\pm\alpha}] = \pm\alpha(H)\, X_{\pm\alpha} \quad \text{für alle } H\in\mathfrak{h}.$$

Folglich ist $X_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha} \neq \{0\}$, d.h. $\pm\alpha$ ist eine Wurzel mit zugehörigem Wurzelraum $\mathbb{C}X_{\pm\alpha} = \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$. Wegen dim $\mathfrak{g}$ - rang $\mathfrak{g}$ = 12 gibt es keine weiteren nichtverschwinden Wurzeln. Um die H_α zu berechnen, benutzen wir die Gleichung aus 2.2.4 (v):

$$H_\alpha = K(X_\alpha, X_{-\alpha})^{-1}[X_\alpha, X_{-\alpha}] \ .$$

Während die Vektoren $[X_\alpha, X_{-\alpha}]$ unmittelbar der Multiplikationstabelle entnommen werden können, haben wir die Werte für die $K(X_\alpha, X_{-\alpha})$ bereits im Beweis von Lemma 2.2.1 bestimmt. Man erhält dann die in obiger Tabelle aufgelisteten H_α. □

Ist Δ das Wurzelsystem einer komplexen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ bezüglich einer Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$, so bezeichne $\mathfrak{h}_o$ den von $\{H_\alpha \mid \alpha\in\Delta\}$ erzeugten reellen Vektorraum:

$$\mathfrak{h}_o = \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}H_\alpha \ .$$

Es gilt dann

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_o = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = \mathrm{rang}\ \mathfrak{g} \ .$$

Da jedes $\alpha \in \Delta$ auf $\mathfrak{h}_o$ nur reelle Werte annimmt, ist die Einschränkung der Killingform von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{h}_o$ ebenfalls reellwertig. Darüberhinaus ist sie positiv definit. Man erhält somit einen Euklidischen Vektorraum $\mathfrak{h}_o$, der vermöge der (Einschränkung der) Killingform , also mittels der Zuordnung $H_\alpha \longmapsto \alpha|_{\mathfrak{h}_o}$, mit seinem Dualraum $\mathfrak{h}_o^*$ identifiziert werden kann. Im folgenden betrachten wir Δ als Teilmenge von $\mathfrak{h}_o^*$, d.h. wir schränken die Wurzeln auf $\mathfrak{h}_o$ ein. Das induzierte Skalarprodukt in $\mathfrak{h}_o^*$ bezeichnen wir mit (,), also

$$(\alpha,\beta) = K(H_\alpha,H_\beta) = \alpha(H_\beta) \ .$$

Die Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist bis auf Isomorphie eindeutig durch ihr Wurzelsystem Δ bestimmt.

Das Wurzelsystem Δ enthält eine Basis $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ des reellen Vektorraums $\mathfrak{h}_o^*$, die der folgenden Bedingung genügt:

Ist $\sum \lambda_i\alpha_i \in \Delta$, so sind die Koeffizienten λ_i ganze Zahlen, die entweder alle nicht-positiv oder alle nicht-negativ sind.

Eine solche Basis heißt <u>Wurzelbasis</u> oder auch Menge <u>einfacher</u>

Wurzeln von Δ. Die Matrix

$$C = \left(\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\right)$$

nennt man die Cartan-Matrix von Δ. Sie ist bis auf Konjugation mit einer Permutationsmatrix unabhängig von der gewählten Wurzelbasis und bestimmt das Wurzelsystem Δ und damit die Liealgebra $\mathfrak{g}$ eindeutig bis auf Isomorphie. Die durch die Cartan-Matrix gegeben Daten werden wie folgt im Dynkin-Diagramm zusammengefaßt: Man zeichne r Punkte (dargestellt durch o) für die einfachen Wurzeln $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$. Dann verbinde man α_i mit α_j durch

$$n_{ij} = \frac{4\ (\alpha_i,\alpha_j)^2}{(\alpha_i,\alpha_i)(\alpha_j,\alpha_j)}$$

Kanten. Ist $n_{ij} \neq 0$ und $(\alpha_i,\alpha_i) > (\alpha_j,\alpha_j)$, so versehe man die Linien zwischen α_i und α_j mit einem Pfeil in Richtung α_j. Durch das so gewonnene Diagramm ist die Isomorphieklasse von $\mathfrak{g}$ vollständig charakterisiert. $\mathfrak{g}$ ist einfach genau dann, wenn ihr Dynkin-Diagramm zusammenhängend ist.

Für die Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathbb{C}^3 \times \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{3*}$ bilden die beiden oben angegebenen Wurzeln α_1 und α_2 eine Wurzelbasis des Wurzelsystems Δ. Dies folgt unmittelbar aus der Beschreibung von Δ in Satz 2.2.5. Ferner hatten wir dort berechnet:

$$(\alpha_1,\alpha_1) = \alpha_1(H_{\alpha_1}) = \tfrac{1}{4}\ ,$$

$$(\alpha_2,\alpha_2) = \alpha_2(H_{\alpha_2}) = \tfrac{1}{12}\ .$$

Für $(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_2, \alpha_1)$ ergibt sich schließlich

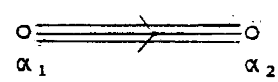
$$(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_2(H_{\alpha_1}) = \tfrac{1}{8}\ \alpha_2(d_1) = -\tfrac{1}{8}$$

und folglich

$$\frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \begin{cases} -1 & \text{für } i=1,\ j=2 \\ -3 & \text{für } i=2,\ j=1 \\ \ \ 2 & \text{für } i=j=1,2 \end{cases}$$

sowie $n_{12} = 3$. Als Cartan-Matrix und Dynkin-Diagramm erhalten wir somit

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.}$$



.

Da hierdurch die Isomorphieklasse der einfachen Liealgebren vom Typ G_2 charakterisiert wird, haben wir:

2.2.6 Korollar: *Die Liealgebra* $\mathfrak{g} = \mathbb{C}^3 \times \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{3*}$ *ist eine einfache Liealgebra des Ausnahmetyps* G_2.

2.3 Reelle Formen und Weylbasis

Jede komplexe Liealgebra $\mathfrak{g}$ kann durch Einschränkung des Skalarenkörpers als reelle Liealgebra aufgefaßt werden; wir bezeichnen sie dann mit $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$. Auf der anderen Seite definiert man die Komplexifizierung einer reellen Liealgebra $\mathfrak{g}_o$ durch $\mathfrak{g}_o{}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_o \otimes \mathbb{C}$, wobei die Lieklammer auf $\mathfrak{g}_o{}^{\mathbb{C}}$ durch

$$[X_1+iX_2, Y_1+iY_2] = ([X_1,Y_1]-[X_2,Y_2]) + i([X_1,Y_2]+[X_2,Y_1])$$

für $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}_0$ gegeben ist. (Wie üblich schreiben wir λX an Stelle von $X \otimes \lambda$, $(\lambda \in \mathbb{C},\ X \in \mathfrak{g}_0)$.) $\mathfrak{g}_0{}^{\mathbb{C}}$ ist dann eine komplexe Liealgebra mit $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_0{}^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0$, und $\mathfrak{g}_0$ ist eine Unteralgebra von $(\mathfrak{g}_0{}^{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_0 \oplus i\mathfrak{g}_0$. Durch Vergleich der Killingformen von $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_0{}^{\mathbb{C}}$ und $(\mathfrak{g}_0{}^{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}}$ ergibt sich, daß alle drei Algebren halbeinfach sind, sobald dies für eine zutrifft.

Sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe Liealgebra und $\mathfrak{g}_0$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$. Man nennt $\mathfrak{g}_0$ eine <u>reelle Form</u> von $\mathfrak{g}$, wenn ihre Komplexifizierung $\mathfrak{g}_0{}^{\mathbb{C}}$ isomorph zu $\mathfrak{g}$ ist. In diesem Fall kann jedes $X \in \mathfrak{g}$ eindeutig zerlegt werden in $X = X_1 + iX_2$ mit $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_0$. Die Abbildung $\sigma: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, definiert durch

$$\sigma(X_1 + iX_2) = X_1 - iX_2 \quad \text{für alle} \quad X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_0 \ ,$$

ist eine <u>Konjugation</u> in $\mathfrak{g}$, d.h.:

(i) $\sigma: \mathfrak{g}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ ist ein Automorphismus ,

(ii) $\sigma(iX) = -i\sigma(X)$ für alle $X \in \mathfrak{g}$,

(iii) $\sigma^2 = \mathrm{id}$.

Hat man umgekehrt eine Konjugation σ in $\mathfrak{g}$ gegeben, so ist die Menge ihrer Fixpunkte eine reelle Form von $\mathfrak{g}$.

Wir betrachten eine reelle Form $\mathfrak{g}_0$ einer komplexen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$. Die Killingform K_0 von $\mathfrak{g}_0$ erhält man durch Einschränkung der Killingform K von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{g}_0$. Es bezeichne k die <u>Signatur</u> von $\mathfrak{g}_0$, d.h. die Anzahl der positiven minus der Anzahl der negativen Zahlen der in Diagonalform dargestellten Form K_0. Man hat dann die Ungleichung

$$-\dim \mathfrak{g} \leqslant k \leqslant \operatorname{rang} \mathfrak{g}\ .$$

Die reelle Form $\mathfrak{g}_o$ heißt <u>kompakt</u>, wenn $k = -\dim \mathfrak{g}$, wenn also K_o negativ definit ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn es eine kompakte Liegruppe gibt, deren Liealgebra isomorph zu $\mathfrak{g}_o$ ist; z.B. ist die Gruppe der inneren Automorphismen von $\mathfrak{g}_o$ eine solche Liegruppe. Im Fall $k = \operatorname{rang} \mathfrak{g}$ nennen wir $\mathfrak{g}_o$ <u>normal</u>.

Jede halbeinfache komplexe Liealgebra besitzt eine kompakte und eine normale reelle Form (eindeutig bis auf Isomorphie). Dies beruht auf der Existenz einer Weylbasis, die wie folgt definiert wird:

Sei $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ das Wurzelsystem von $\mathfrak{g}$ in Bezug auf eine Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$. Der Raum

$$\mathfrak{h}_o = \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}H_\alpha$$

ist dann eine reelle Form von $\mathfrak{h}$. Eine Basis von $\mathfrak{g}$ der Form

$$\{H_1,\ldots,H_r\} \cup \{E_\alpha \mid \alpha\in\Delta\}$$

heißt <u>Weylbasis</u> (bzgl. $\mathfrak{h}$), wenn sie die drei folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) $H_1,\ldots,H_r$ ist eine Basis des reellen Vektorraums $\mathfrak{h}_o$,

(ii) $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ und $K(E_\alpha,E_{-\alpha}) = 1$ für alle $\alpha\in\Delta$,

(iii) $N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}$ für alle $\alpha,\beta \in \Delta$ mit $\alpha+\beta \in \Delta$, wobei $N_{\alpha,\beta}$ durch $[E_\alpha,E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}$ definiert ist (vgl. 2.2.4 (iv)).

Eine Weylbasis definiert zwei Konjugationen σ_u und σ_o in $\mathfrak{g}$, indem man

$$\sigma_u(E_\alpha) = -E_{-\alpha} \ , \ \sigma_u(H_i) = -H_i \quad \text{sowie}$$
(2.3.1)
$$\sigma_o(E_\alpha) = E_\alpha \ , \ \sigma_o(H_i) = H_i$$

setzt (und semilinear erweitert). Die Fixpunkte von σ_u bzw. σ_o bilden dann eine kompakte bzw. eine normale reelle Form von $\mathfrak{g}$, die wir mit $\mathfrak{g}_u$ bzw. $\mathfrak{g}_o$ bezeichnen. Explizit hat man:

$$\mathfrak{g}_u = i\mathfrak{h}_o + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}(E_\alpha - E_{-\alpha}) + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}(i(E_\alpha + E_{-\alpha})) \ ,$$
(2.3.2)
$$\mathfrak{g}_o = \mathfrak{h}_o + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}(E_\alpha) \ .$$

Man beachte, daß σ_o und σ_u kommutieren und $\theta := \sigma_o\sigma_u = \sigma_u\sigma_o$ ein involutiver Automorphismus von $\mathfrak{g}$ ist, der $\mathfrak{g}_o$ und $\mathfrak{g}_u$ invariant läßt. (Eine Abbildung $f: M \longrightarrow M$ heißt involutiv, wenn $f^2 = id_M$, aber $f \neq id_M$ ist.)

Für den Rest dieses Abschnitts sei $\mathfrak{g}$ die in den beiden vorhergehenden Abschnitten diskutierte komplexe, einfache Liealgebra

$$\mathfrak{g} = \mathbb{C}^3 \times \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{3*} \ .$$

Diese Algebra besitzt nur kompakte und normale reelle Formen, (vgl. [T]). Mit Hilfe der im folgenden Lemma angegebenen Involution θ bestimmen wir eine Weylbasis von $\mathfrak{g}$, die dann wie oben beschrieben eine kompakte und eine normale reelle Form liefert.

2.3.3 Lemma: *Die durch*

$$\theta(x,a,{}^tu) = -(u,{}^ta,{}^tx)$$

für alle $x \in \mathbb{C}^3$, $a \in \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ *und* ${}^tu \in \mathbb{C}^{3*}$ *definierte Abbildung* $\theta\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ *ist ein involutiver Automorphismus.*

Beweis: Offenbar ist θ involutiv und $\mathbb{C}$-linear. Um die Gleichheit von $\theta([X,Y])$ und $[\theta(X),\theta(Y)]$ für je zwei Vektoren $X,Y \in \mathfrak{g}$ zu verifizieren, setze man

$$X = (x,a,{}^tu)\ ,\ Y = (y,b,{}^tv)\ ,\ [X,Y] = (z,c,{}^tw)\ ,$$
$$\text{und}\quad [\theta(X),\theta(Y)] = (w',c',{}^tz')\ .$$

Nach Definition der Lieklammer (2.1.3) hat man

$$\begin{aligned} w' &= {}^ta\cdot v - {}^tb\cdot u + \sqrt{2}\,\tau(x)\cdot y\ , \\ c' &= [{}^ta,{}^tb] + u\cdot {}^ty + \tfrac{1}{2}\,\tau(y)\tau(u) - v\cdot {}^tx - \tfrac{1}{2}\,\tau(x)\tau(v)\ , \\ z' &= bx - ay + \sqrt{2}\,\tau(v)\cdot u\ , \end{aligned}$$

während z, c und w durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} z &= ay - bx + \sqrt{2}\,\tau(u)\cdot v\ , \\ c &= [a,b] + x\cdot {}^tv + \tfrac{1}{2}\,\tau(v)\tau(x) - y\cdot {}^tu - \tfrac{1}{2}\,\tau(u)\tau(y)\ , \\ w &= {}^tb\cdot u - {}^ta\cdot v + \sqrt{2}\,\tau(y)\cdot x \end{aligned}$$

gegeben sind. Unter Anwendung von 2.1.2(i) und Ausnutzung der Schiefsymmetrie von $\tau(x)$ ergibt sich das erwünschte Resultat:

$$w' = -w\ ,\ c' = -{}^tc\quad\text{und}\quad z' = -z\ . \qquad \square$$

Sei Δ wieder das Wurzelsystem von $\mathfrak{g}$ in Bezug auf die Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h} = \mathbb{C}d_1 \oplus \mathbb{C}d_2$,(vgl. 2.2.5). Wir zerlegen Δ in die disjunkte Vereinigung der kurzen und langen Wurzeln:

$$\Delta_1 = \{\alpha\in\Delta \mid (\alpha,\alpha) = 12^{-1}\} ,$$

$$\Delta_2 = \{\alpha\in\Delta \mid (\alpha,\alpha) = 4^{-1}\} .$$

Man setze

$$\lambda_1 = 12 \quad , \quad \lambda_2 = 8$$

und

$$E_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} X_\alpha \qquad \text{für } \alpha\in\Delta_i \text{ und } i=1,2 ,$$

wobei die X_α die in 2.2.5 angegebenen Basisvektoren der Wurzelräume $\mathfrak{g}^\alpha$ sind.

2.3.4 Satz: *Sei* H_1,H_2 *eine Basis von* $\mathfrak{h}_0$. *Dann ist* $\{H_1,H_2\} \cup \{E_\alpha \mid \alpha\in\Delta\}$ *eine Weylbasis von* $\mathfrak{g}$.

Beweis: Nach 2.2.1 hat man $K(X_\alpha,X_{-\alpha}) = \lambda_i$ für jedes $\alpha\in\Delta_i$, und somit

$$K(E_\alpha,E_{-\alpha}) = \lambda_i{}^{-1} K(X_\alpha,X_{-\alpha}) = 1 .$$

Ferner gilt $\theta(E_\alpha) = -E_{-\alpha}$ für alle $\alpha\in\Delta$, wobei θ die im vorhergehenden Lemma definierte Involution von $\mathfrak{g}$ ist. Für je zwei Wurzeln $\alpha,\beta \in \Delta$ mit $\alpha+\beta \in \Delta$ erhält man somit einerseits

$$\theta([E_\alpha,E_\beta]) = \theta(N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}) = -N_{\alpha,\beta} E_{-\alpha-\beta} ,$$

und andererseits

$$[\theta(E_\alpha),\theta(E_\beta)] = [-E_{-\alpha},-E_{-\beta}] = N_{-\alpha,-\beta} E_{-\alpha-\beta} ,$$

also

$$N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta} \ . \qquad \square$$

Mit Hilfe dieser Weylbasis können wir nun eine kompakte und eine normale reelle Form von $\mathfrak{g}$ bestimmen. Die gemäß 2.3.1 definierten Konjugationen σ_u und σ_o sind durch

$$\sigma_u(x,a,{}^tu) = -(\bar{u},{}^t\bar{a},{}^t\bar{x}) \ ,$$
$$\sigma_o(x,a,{}^tu) = (\bar{x},\ \bar{a},{}^t\bar{u})$$

für alle $(x,a,{}^tu) \in \mathfrak{g}$ gegeben, wobei $^-$ (komponentenweise) komplexe Konjugation bedeutet. Es bezeichne $\mathfrak{su}(3)$ die komplexen spurfreien schiefhermiteschen (3×3)-Matrizen:

$$\mathfrak{su}(3) = \{a \in \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) \mid a + {}^t\bar{a} = I\} \ .$$

Setzt man

$$\text{(2.3.5)} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{g}_u &= \{(x,a,-{}^t\bar{x}) \in \mathfrak{g} \mid x \in \mathbb{C}^3,\ a \in \mathfrak{su}(3)\} \ , \\ \mathfrak{g}_o &= \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{3\,*}, \end{aligned}$$

so ist offenbar $\mathfrak{g}_u$ (bzw. $\mathfrak{g}_o$) die Fixpunktmenge von σ_u (bzw. σ_o). Somit haben wir:

2.3.6 Korollar: *Seien* $\mathfrak{g}_u$ *und* $\mathfrak{g}_o$ *durch (2.3.5.) gegeben. Dann ist* $\mathfrak{g}_u$ *eine kompakte und* $\mathfrak{g}_o$ *eine normale reelle Form von* $\mathfrak{g}$.

Die Liealgebra $\mathfrak{g}_o$ nennen wir im folgenden die <u>normale Liealgebra vom Typ G_2</u>.

2.4 Cartan-Zerlegung

Sei $\mathfrak{g}_o$ eine halbeinfache reelle Liealgebra, θ ein involutiver Automorphismus von $\mathfrak{g}_o$ und

$$\mathfrak{g}_o = \mathfrak{k}_o \oplus \mathfrak{p}_o$$

die von θ induzierte Zerlegung von $\mathfrak{g}_o$ in die Eigenräume

$$\mathfrak{k}_o = \{X \in \mathfrak{g}_o \mid \theta(X) = X\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_o = \{X \in \mathfrak{g}_o \mid \theta(X) = -X\} .$$

Offenbar sind $\mathfrak{k}_o$ und $\mathfrak{p}_o$ orthogonal bezüglich der Killingform von $\mathfrak{g}_o$ und es gilt:

$$[\mathfrak{k}_o, \mathfrak{k}_o] \subset \mathfrak{k}_o \ , \ [\mathfrak{k}_o, \mathfrak{p}_o] \subset \mathfrak{p}_o \ , \ [\mathfrak{p}_o, \mathfrak{p}_o] \subset \mathfrak{k}_o \ .$$

Wir nennen θ eine <u>Cartan-Involution</u> und $\mathfrak{k}_o \oplus \mathfrak{p}_o$ eine <u>Cartan-Zerlegung</u> von $\mathfrak{g}_o$, wenn die Killingform von $\mathfrak{g}_o$ positiv definit auf $\mathfrak{p}_o$ und negativ definit auf $\mathfrak{k}_o$ ist.

Sei $\mathfrak{g}_o$ eine reelle Form einer komplexen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ und σ_o die Konjugation in $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{g}_o$. Ist $\mathfrak{k}_o \oplus \mathfrak{p}_o$ eine Cartan-Zerlegung von $\mathfrak{g}_o$, so ist

$$\mathfrak{g}_u := \mathfrak{k}_o \oplus i\mathfrak{p}_o$$

eine unter σ_o invariante kompakte reelle Form von $\mathfrak{g}$ und man hat

(2.4.1) $\qquad \mathfrak{k}_o = \mathfrak{g}_o \cap \mathfrak{g}_u \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_o = \mathfrak{g}_o \cap i\mathfrak{g}_u .$

Ist umgekehrt $\mathfrak{g}_u$ eine kompakte reelle Form von $\mathfrak{g}$ mit $\sigma_o(\mathfrak{g}_u) \subset \mathfrak{g}_u$, so wird durch (2.4.1) eine Cartan-Zerlegung

$\mathfrak{g}_o = \mathfrak{k}_o \oplus \mathfrak{p}_o$ definiert. Die zugehörige Cartan-Involution θ ist die Einschränkung von $\sigma_o\sigma_u = \sigma_u\sigma_o$ auf $\mathfrak{g}_o$.

Sei $\mathfrak{g}_o = \mathfrak{k}_o \oplus \mathfrak{p}_o$ eine Cartan-Zerlegung. Dann ist $\mathfrak{k}_o$ eine maximale kompakt eingebettete Unteralgebra von $\mathfrak{g}_o$, (vgl. [H]). Im allgemeinen ist $\mathfrak{k}_o$ nicht halbeinfach. Eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{k}_o$ ist nicht notwendig kompakt.
Ist $\mathfrak{g}_o$ eine normale reelle Form von $\mathfrak{g}$, so enthält $\mathfrak{p}_o$ eine maximale abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{g}_o$ (und umgekehrt).

Jede reelle halbeinfache Liealgebra besitzt eine Cartan-Zerlegung. Sie ist bis auf Konjugation unter inneren Isomorphismen eindeutig, (vgl. [H]).

Sei $\{H_1,\ldots,H_r\} \cup \{E_\alpha \mid \alpha\in\Delta\}$ eine Weylbasis einer komplexen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_u$ (bzw. $\mathfrak{g}_o$) die hierdurch definierte kompakte (bzw. normale) reelle Form von $\mathfrak{g}$, (2.3.2). Die zugeordneten Konjugationen σ_u und σ_o kommutieren dann, insbesondere hat man

$$\sigma_o(\mathfrak{g}_u) \subset \mathfrak{g}_u \quad \text{und} \quad \sigma_u(\mathfrak{g}_o) \subset \mathfrak{g}_o \ .$$

Man erhält somit unmittelbar eine Cartan-Zerlegung von $\mathfrak{g}_o$, indem man

$$(2.4.2) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{k}_o &= \mathfrak{g}_o \cap \mathfrak{g}_u = \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}(E_\alpha - E_{-\alpha}) \quad \text{und} \\ \mathfrak{p}_o &= \mathfrak{g}_o \cap i\mathfrak{g}_u = \mathfrak{h}_o + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}(E_\alpha + E_{-\alpha}) \end{aligned}$$

setzt. Eine maximale abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{g}_o$ ist $\mathfrak{h}_o$.

Das zuletzt Gesagte kann direkt angewendet werden auf

$$\mathfrak{g} = \mathbb{C}^3 \times \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{3*}$$

und die im vorhergehenden Abschnitt angegebenen reellen Formen

$$\mathfrak{g}_o = \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{3*},$$

$$\mathfrak{g}_u = \{(x,a,-{}^t\bar{x}) \in \mathfrak{g} \mid x \in \mathbb{C}^3,\ a \in \mathfrak{su}(3)\} .$$

Es bezeichne $\mathfrak{sa}(n)$ den Raum der spurlosen, symmetrischen $(n\times n)$-Matrizen mit reellen Koeffizienten. Dann hat man:

2.4.3 Korollar: *Sei* $\mathfrak{g}_o = \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{3*}$ *die normale Liealgebra vom Typ* G_2. *Setzt man*

$$\mathfrak{k}_o = \{(x,a,-{}^tx) \mid x \in \mathbb{R}^3,\ a \in \mathfrak{so}(3)\} ,$$

$$\mathfrak{p}_o = \{(x,a,{}^tx) \mid x \in \mathbb{R}^3,\ a \in \mathfrak{sa}(3)\} ,$$

so ist $\mathfrak{g}_o = \mathfrak{k}_o \oplus \mathfrak{p}_o$ *eine Cartan-Zerlegung von* $\mathfrak{g}_o$. *Die zugehörige Cartan-Involution ist die Einschränkung der in Lemma 2.3.3 definierten Involution* θ *von* $\mathfrak{g}$ *auf* $\mathfrak{g}_o$.

In der Terminologie von Helgason ([H]) ist $(\mathfrak{g}_o,\theta)$ eine irreduzible orthogonale symmetrische Liealgebra von nicht-kompaktem Typ. Ist (G,K) ein hierzu assoziiertes Paar, (d.h. G ist eine zusammenhängende Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}_o$ und K eine Liesche Untergruppe mit Liealgebra $\mathfrak{k}_o$), so enthält K das Zentrum von G. Im vorliegenden Fall ist dieses Zentrum endlich (vgl. den folgenden Abschnitt). Dies impliziert, daß

K eine halbeinfache, maximale kompakte Untergruppe von G ist. Der homogene Raum G/K ist einfach-zusammenhängend und hängt nur vom lokalen Typ von G, also nur von $\mathfrak{g}_0$ ab. Die Killingform von $\mathfrak{g}_0$ induziert in kanonischer Weise eine G-invariante Riemannsche Metrik auf G/K, und G/K ist ein irreduzibler Riemannscher symmetrischer Raum von nicht-kompaktem Typ.

Den "Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen" von J. Tits ([T]) entnimmt man, daß $\mathfrak{k}_0$ halbeinfach vom Typ $A_1 \times A_1 = D_2$ ist, d.h. isomorph zu den kompakten reellen Formen von

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(4,\mathbb{C}) .$$

Demnach hat man

$$\mathfrak{k}_0 \cong \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(4) .$$

Wir geben einen expliziten Isomorphismus $\mathfrak{so}(4) \longrightarrow \mathfrak{k}_0$ an. (Die zunächst naheliegende Zuordnung

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & -{}^t x \\ \hline x & a \end{array}\right) \longmapsto (x, a, -{}^t x)$$

liefert lediglich eine lineare Isomorphie.)

2.4.4 Lemma: *Man definiere eine Abbildung Ψ wie folgt:*

$$\Psi:\ \mathfrak{so}(4,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{g} = \mathbb{C}^3 \times \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{3*}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & -{}^t x \\ \hline x & a \end{array}\right) \longmapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\, x,\ a - \frac{1}{2}\,\tau(x),\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\, {}^t x \right)$$

für alle $x \in \mathbb{C}^3$ und $a \in \mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$, wobei τ der in 2.1.1 definierte Isomorphismus $\mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ ist. Dann ist Ψ ein injektiver Liealgebrenhomomorphismus, der $\mathfrak{so}(4)$ isomorph auf $\mathfrak{k}_0$ abbildet.

Beweis: Für je zwei Matrizen $X,Y \in \mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$ verifiziert man die Gleichung $\Psi([X,Y]) = [\Psi(X),\Psi(Y)]$ durch einfaches Nachrechnen unter Verwendung der in Lemma 2.1.2 aufgelisteten Eigenschaften von τ. Die übrigen Behauptungen gelten offensichtlich. □

2.5 Liegruppen vom Typ G_2 und maximale kompakte Untergruppen

Wir wenden uns jetzt der Beschreibung der einfachen Liegruppen vom Typ G_2 und deren maximalen kompakten Untergruppen zu.

Es sei daran erinnert, daß es zu jeder endlich-dimensionalen reellen Liealgebra $\mathfrak{g}$ eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte einfach-zusammenhängende Liegruppe $\tilde{G}$ mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ gibt. (In dem Begriff "einfach-zusammenhängend" schließen wir "zusammenhängend" mit ein.) Jede weitere zusammenhängende Liegruppe G mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist dann isomorph zu einem Quotienten

$\tilde{G}/D$, wobei D eine diskrete Untergruppe des Zentrums von $\tilde{G}$ ist. Das Bild der adjungierten Darstellung von G ist die adjungierte Gruppe $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ der inneren Automorphismen von $\mathfrak{g}$. Der Kern von Ad_G ist das Zentrum von G, im folgenden mit $Z(G)$ bezeichnet. Es ist also

$$\mathrm{Ad}_G(G) = \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \cong G/Z(G).$$

Man hat das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathfrak{g} & \xrightarrow{\mathrm{ad}} & \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) & \subset & \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) & \subset & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
G & \xrightarrow{\mathrm{Ad}_G} & \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) & \subset & \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) & \subset & GL(\mathfrak{g})
\end{array} \quad ,$$

wobei über jeder Gruppe die zugehörige Liealgebra steht. $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ bezeichnet die Liealgebra der Derivationen von $\mathfrak{g}$. Die senkrechten Pfeile sind die jeweiligen Exponentialabbildungen. Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach, so ist ad injektiv und $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Folglich ist $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ die Eins-Zusammenhangskomponente der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{g}$, das Zentrum von G ist diskret und $\mathrm{Ad}_G\colon G \longrightarrow \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ ist eine Überlagerung. Ferner ist $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ zentrumsfrei.

Die im folgenden auftretenden komplexen Liealgebren fassen wir stets als reelle Liealgebren auf, ohne dies weiter kenntlich zu machen. Dies gilt insbesondere für die komplexe Liealgebra

$$\mathfrak{g} = \mathbb{C}^3 \times \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{3*} .$$

Wir betrachten wieder die reellen Formen aus (2.3.5):

$$\mathfrak{g}_o = \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{3*},$$

$$\mathfrak{g}_u = \{(x,a,-{}^t\bar{x}) \in \mathfrak{g} \mid x \in \mathbb{C}^3,\ a \in \mathfrak{su}(3)\}\ .$$

Vermöge der in Lemma 2.1.4 beschriebenen treuen Darstellung $\rho\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{sl}(7,\mathbb{C})$ betten wir $\mathfrak{g}$ in die Liealgebra der speziellen linearen Gruppe $SL(7,\mathbb{C})$ ein. Seien G, G_o, G_u die eindeutig bestimmten zusammenhängenden Lieschen Untergruppen von $SL(7,\mathbb{C})$ mit Liealgebren $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_o$, $\mathfrak{g}_u$ respektive und $\tilde{G}$, $\tilde{G}_o$, $\tilde{G}_u$ die entsprechenden universellen Überlagerungsgruppen. (Eine "Liesche Untergruppe" ist nicht notwendig abgeschlossen.) Die folgenden Angaben über die Zentren entnehmen wir den "Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen" von J.Tits ([T]). Danach sind die Zentren von $\tilde{G}$ und $\tilde{G}_u$ trivial, also

$$G = \tilde{G} \cong \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \quad \text{und} \quad G_u = \tilde{G}_u \cong \mathrm{Int}(\mathfrak{g}_u)\,.$$

Die Analogie zwischen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_u$ ist nicht zufällig. Vielmehr stehen die zusammenhängenden Gruppen jeder kompakten halbeinfachen Liealgebra in 1-1 Korrespondenz zu denen der komplexifizierten Algebra. Für die nicht kompakten reellen Formen ist die entsprechende Aussage im allgemeinen falsch. Dies ist auch hier der Fall: Das Zentrum von $\tilde{G}_o$ ist eine Gruppe von Ordnung 2,(siehe [T]). Folglich ist $\mathrm{Ad}_{\tilde{G}_o}\colon \tilde{G}_o \longrightarrow \mathrm{Int}(\mathfrak{g}_o)$ eine zweifache Überlagerung und die beiden Gruppen $\tilde{G}_o$ und $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_o)$ sind bis auf Isomorphie die einzigen zusammenhängenden Liegruppen mit Liealgebra $\mathfrak{g}_o \cong \mathrm{ad}(\mathfrak{g}_o)$. Die Gruppe G_o ist hierbei isomorph zu $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_o)$, denn man hat das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G_o & \xrightarrow{\subset} & G \\ {\scriptstyle Ad_{G_o}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \cong\, Ad_G} \\ \mathrm{Int}(\mathfrak{g}_o) & \xrightarrow[j]{} & \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \end{array} ,$$

wobei j die natürliche Inklusion $\varphi \longmapsto \varphi \otimes id_{\mathbb{C}}$ von $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_o)$ in $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ bezeichnet. Folglich bildet die adjungierte Darstellung G_o isomorph auf $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_o)$ ab. Zusammenfassend hat man:

2.5.1 Satz: *Die zusammenhängenden Lieschen Untergruppen G, G_o und G_u von $SL(7,\mathbb{C})$ mit Liealgebren $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_o$ und $\mathfrak{g}_u$ respektive haben triviale Zentren und sind somit isomorph zu den adjungierten Gruppen von $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_o$ und $\mathfrak{g}_u$ respektive. Ferner sind G und G_u einfach-zusammenhängend. Die Fundamentalgruppe von G_o ist isomorph zu $\mathbb{Z}_2$.*

Wir betrachten nun die maximalen kompakten Untergruppen von G_o. Sie sind zusammenhängend und zueinander konjugiert. Dies gilt für die maximalen kompakten Untergruppen einer beliebigen zusammenhängenden Liegruppe.

2.5.2 Satz: *Sei G_o die zusammenhängende, zentrumsfreie Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}_o = \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{3*}$ und $\psi: \mathfrak{so}(4) \longrightarrow \mathfrak{g}_o$ der Homomorphismus aus 2.4.4. Dann gibt es genau einen Liegruppenhomomorphismus*

$$\Psi: SO(4) \longrightarrow G_o ,$$

dessen Ableitung mit ψ übereinstimmt. Ψ ist eine Einbettung *und das Bild* $\Psi(SO(4))$ *ist eine maximale kompakte Untergruppe von* G_o *mit Liealgebra* $\mathfrak{k}_o = \{(x,a,-{}^tx) \in \mathfrak{g}_o \mid x \in \mathbb{R}^3,\ a \in \mathfrak{so}(3)\}$.

Beweis: Sei $\tilde{G}_o$ die universelle Überlagerungsgruppe von G_o. Die Endlichkeit des Zentrums von $\tilde{G}_o$ impliziert, daß der lokale Isomorphietyp der maximalen kompakten Untergruppen von $\tilde{G}_o$ durch die Unteralgebra $\mathfrak{k}_o$ einer Cartan-Zerlegung $\mathfrak{g}_o = \mathfrak{k}_o \oplus \mathfrak{p}_o$ bestimmt ist (vgl. [H], Ch. VI, Th.1.1.). Das gleiche gilt für die maximalen kompakten Untergruppen von G_o. Wir betrachten die Cartan-Zerlegung $\mathfrak{g}_o = \mathfrak{k}_o \oplus \mathfrak{p}_o$ aus 2.4.3. Sei K (bzw. $\tilde{K}$) eine Liesche Untergruppe von G_o (bzw. $\tilde{G}_o$) mit Liealgebra $\mathfrak{k}_o$. $\tilde{K}$ ist eine einfach-zusammenhängende maximale kompakte Untergruppe von $\tilde{G}_o$, die das Zentrum von $\tilde{G}_o$ enthält, (vgl. [T]). Die universelle Überlagerung π: $\tilde{G}_o \longrightarrow G_o$ bildet $\tilde{K}$ surjektiv auf K ab und die Einschränkung von π auf $\tilde{K}$ ist die universelle Überlagerung von K. Man hat also

$$Z(\tilde{G}_o) = \ker \pi = \ker \pi|_{\tilde{K}} \subset Z(\tilde{K})$$

und folglich

$$K \cong \tilde{K}/Z(\tilde{G}_o) \ .$$

Der Isomorphietyp von K ist mithin durch die Beschreibung von $Z(\tilde{G}_o)$ als Untergruppe von $Z(\tilde{K})$ bestimmt. Man beachte, daß es nicht ausreicht, den Isomorphietyp von $Z(\tilde{G}_o)$ zu kennen, denn für zwei Untergruppen D und D' von $Z(\tilde{K})$ sind die Quotienten $\tilde{K}/D$ und $\tilde{K}/D'$ nur dann isomorph, wenn es einen Automorphismus von $\tilde{G}$ gibt, der D in D' überführt.

Für die Beschreibung des Zentrums von $\tilde{K}$ benutzen wir einige bekannte Isomorphismen, die zwischen den verschiedenen Klassen A_r, B_r, C_r, D_r der klassischen einfachen Liealgebren von Rang r für $r \leq 4$ auftreten, (wobei D_1 und D_2 nicht einfach sind). Standardmodelle für A_r, B_r und D_r sind in der folgenden Tabelle aufgelistet. Hierbei ist $\mathfrak{l}$ eine komplexe Liealgebra des angegebenen Typs, $\mathfrak{l}_u$ eine kompakte reelle Form und $\tilde{L}_u$ eine einfach-zusammenhängende Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{l}_u$. Spin(n) bezeichnet die universelle Überlagerungsgruppe von SO(n).

Typ	$\mathfrak{l}$	$\mathfrak{l}_u$	$\tilde{L}_u$
A_r	$\mathfrak{sl}(r+1,\mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(r+1)$	$SU(r+1)$
B_r	$\mathfrak{so}(2r+1,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2r+1)$	$Spin(2r+1)$
D_r	$\mathfrak{so}(2r,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2r)$	$Spin(2r)$

Man hat die bekannten Identitäten $A_1 \times A_1 = D_2$ und $A_1 = B_1$, (siehe z.B. [H]), insbesondere also

$$Spin(4) \cong Spin(3) \times Spin(3) \quad \text{und} \quad Spin(3) \cong SU(2) .$$

Nun kann Spin(3) auch als Gruppe der Einheitsquaternionen beschrieben werden. Sei $\mathbb{H}$ die Quaternionenalgebra, $\mathbb{H}^\circ$ das orthogonale Komplement von $\mathbb{R}\cdot 1$ in $\mathbb{H}$ und S^3 die Liegruppe der Einheitsquaternionen. Als Euklidischer Vektorraum ist $\mathbb{H}$ isomorph zu $\mathbb{R}^4$. Für $a,b \in S^3$ betrachte man die folgende Abbildung:

$$\pi_4(a,b) : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \quad , \quad \pi_4(a,b)(q) = aqb^{-1} \quad , \quad q \in \mathbb{H} .$$

Offenbar ist $\pi_4(a,b)$ eine Isometrie, und da $S^3 \times S^3$ zusammenhängend ist, liegt $\pi_4(a,b)$ in SO(4). Ferner ist $\mathbb{H}^\circ$ für jedes $a \in S^3$ invariant unter $\pi_4(a,a)$, und die Einschränkung von $\pi_4(a,a)$

auf $\mathbb{H}^\circ$, im folgenden mit $\pi_3(a)$ bezeichnet, kann als Element von SO(3) aufgefaßt werden. Die so definierten Abbildungen

$$\pi_3\colon S^3 \longrightarrow SO(3) \;,$$
$$\pi_4\colon S^3 \times S^3 \longrightarrow SO(4)$$

sind surjektive Liegruppenhomomorphismen mit

$$\ker \pi_3 = \{1,-1\} \cong \mathbb{Z}_2 \;,$$
$$\ker \pi_4 = \{(1,1),(-1,-1)\} \cong \mathbb{Z}_2 \;.$$

Da sowohl S^3 wie auch $S^3 \times S^3$ einfach-zusammenhängend sind, ist π_i eine universelle Überlagerung von SO(i), (i = 3,4), und man hat somit kanonische Identifizierungen

$$S^3 = \mathrm{Spin}(3) \;,$$
$$S^3 \times S^3 = \mathrm{Spin}(3) \times \mathrm{Spin}(3) = \mathrm{Spin}(4) \;.$$

Nun ist SO(3) zentrumsfrei und folglich

$$Z(\mathrm{Spin}(3)) = \ker \pi_3 = \{1,-1\} \cong \mathbb{Z}_2 \;.$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} Z(\mathrm{Spin}(4)) &= Z(\mathrm{Spin}(3)) \times Z(\mathrm{Spin}(3)) \\ &= \{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\} \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \;. \end{aligned}$$

Wir nennen $D := \ker \pi_4 = \{(1,1),(-1,-1)\}$ die diagonale Untergruppe von Z(Spin(4)). Sie ist invariant unter allen Automorphismen von Z(Spin(4)), also auch unter allen Automorphismen von Spin(4).

Der Isomorphismus ψ: $\mathfrak{so}(4) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{k}_0$ aus 2.4.4 läßt sich nun zunächst eindeutig integrieren zu einem Isomorphismus

$$\tilde{\Psi}\colon \mathrm{Spin}(4) \xrightarrow{\cong} \tilde{K} \quad \text{mit} \quad \tilde{\Psi}_* = \psi.$$

Nach [T] liegt $Z(\tilde{G}_0)$ diagonal in $Z(\tilde{K})$, d.h. $\tilde{\Psi}(D) = Z(\tilde{G}_0)$. Also bildet $\tilde{\Psi}$ den Kern von π_4: Spin(4) $\longrightarrow$ SO(4) isomorph auf den Kern von π: $\tilde{K} \longrightarrow K$ ab, und durch Übergang auf die Quotienten erhält man einen eindeutig bestimmten Isomorphismus

$$\Psi\colon SO(4) \xrightarrow{\cong} K \quad \text{mit} \quad \Psi_* = \psi. \qquad \square$$

3. VERALLGEMEINERTE CARTAN-ZUSAMMENHÄNGE VOM TYP G_2

Wir kommen nun zu unserem eigentlichen Anliegen, nämlich der Beschreibung verallgemeinerter Cartan-Zusammenhänge für orientierte 3-Mannigfaltigkeiten vom Ausnahmetyp G_2. Die ersten beiden Abschnitte dienen der Definition eines geeigneten Bündels.

3.1 Die Projektion eines $SL(n,\mathbb{R})$-Bündels auf ein $SO(n)$-Unterbündel

Wir betrachten zunächst die polare Zerlegung von $SL(n,\mathbb{R})$. Sei $SA(n)$ die Menge der reellen, symmetrischen, positiv definiten $(n\times n)$-Matrizen mit Determinante 1. Für $A \in SL(n,\mathbb{R})$, $B \in SO(n)$ und $C \in SA(n)$ liegen ${}^tA\cdot A$ sowie BCB^{-1} und C^{-1} in $SA(n)$. Jedes $A \in SL(n,\mathbb{R})$ besitzt genau eine Zerlegung der Form $A = A_1A_2$ mit $A_1 \in SO(n)$ und $A_2 \in SA(n)$. Hierbei ist A_2 eindeutig durch die Gleichung $(A_2)^2 = {}^tA\cdot A$ bestimmt. Die im folgenden Lemma zusammengefaßten Eigenschaften lassen sich leicht verifizieren.

3.1.1 Lemma: *Für* $A \in SL(n,\mathbb{R})$ *und* $B \in SO(n)$ *gilt:*

(i) $(A^{-1})_1 = A_1^{-1}$ *und* $(A^{-1})_2 = A_1\, A_2^{-1}\, A_1^{-1}$,

(ii) $(AB)_1 = A_1B$ *und* $(AB)_2 = B^{-1}A_2\, B$,

(iii) $(BA)_1 = B\, A_1$ *und* $(BA)_2 = A_2$.

Die durch die Polarzerlegung definierten Projektionen bezeichnen wir mit $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$:

$$\bar{\alpha}: SL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow SO(n) \quad , \quad \bar{\alpha}(A) = A_1 \ ,$$

$$\bar{\beta}: SL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow SA(n) \quad , \quad \bar{\beta}(A) = A_2 \ .$$

Sei nun M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $P = SO(M)$ eine SO(n)-Struktur für M. Die Existenz einer solchen Struktur ist äquivalent zur Orientierbarkeit von M. Für $x \in M$ bezeichne P_x die Faser über x. Sei g die durch P definierte Riemannsche Metrik auf M,

$$g(v,w) = \langle p^{-1}v, p^{-1}w \rangle$$

für alle $v,w \in T_xM$ und $p \in P_x$. Hierbei bezeichnet $\langle , \rangle$ das Standard-Skalarprodukt des $\mathbb{R}^n$. Ferner sei

$$Q = P \times_{SO(n)} SL(n,\mathbb{R}) \ ,$$

das zu P assoziierte Bündel mit Faser $SL(n,\mathbb{R})$, wobei SO(n) durch Linkstranslationen auf $SL(n,\mathbb{R})$ operiert. Wir fassen P als Unterbündel von Q auf, identifizieren also $p \in P$ mit $[(p,I)] \in Q$. Das Prinzipalbündel Q ist eine Erweiterung von P zu einer $SL(n,\mathbb{R})$-Struktur und entspricht der Riemannschen Volumenform von (M,g) (bzgl. der durch P definierten Orientierung auf M). Eine lineare Basis $q \in GL(M)_x$ liegt genau dann in Q (bzw. P), wenn der Isomorphismus

$$q: (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle) \longrightarrow (T_xM, g)$$

volumenerhaltend (bzw. eine orientierungserhaltende Isometrie) ist. ($\mathbb{R}^n$ ist hierbei mit der natürlichen Orientierung und der kanonischen Volumenform versehen).

Wir definieren jetzt eine kanonische Projektion von Q auf P. Für $q \in Q_X$ bezeichne

$$\mu_q : SL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow Q_X$$

den durch $\mu_q(A) = qA$ definierten Diffeomorphismus.

Sei $p \in P_X$. Man betrachte die beiden folgenden Abbildungen:

$$\alpha := \mu_p \circ \bar{\alpha} \circ \mu_p^{-1} : Q_X \longrightarrow P_X \ ,$$
$$\beta := \bar{\beta} \circ \mu_p^{-1} \quad : Q_X \longrightarrow SA(n) \ .$$

3.1.2 Lemma: *Die Abbildungen* α *und* β *sind unabhängig von der Wahl von* $p \in P_X$.

Beweis: Seien $p, p' \in P_X$ und $q \in Q_X$. Definiert man $B \in SO(n)$ und $A \in SL(n,\mathbb{R})$ durch $p'B = p$ und $p'A = q$, so hat man $pB^{-1}A = q$ und mit Hilfe von Lemma 3.1.1 (iii) ergibt sich

$$(\bar{\beta} \circ \mu_p^{-1})(q) = \bar{\beta}(B^{-1}A) = \bar{\beta}(A) = (\bar{\beta} \circ \mu_{p'}^{-1})(q)$$

sowie

$$(\mu_p \circ \bar{\alpha} \circ \mu_p^{-1})(q) = p\, \bar{\alpha}(B^{-1}A) = p\, B^{-1}\, \bar{\alpha}(A)$$
$$= p'\bar{\alpha}(\mu_{p'}^{-1}(q)) = (\mu_{p'} \circ \bar{\alpha} \circ \mu_{p'}^{-1})(q) \ . \qquad \square$$

Wir erhalten somit zwei glatte Abbildungen

$$\alpha\colon Q \longrightarrow P \quad \text{und} \quad \beta\colon Q \longrightarrow SA(n) .$$

3.1.3 Lemma: *Für alle* $q \in Q$, $p \in P$ *und* $A \in SL(n,\mathbb{R})$ *gilt:*

(i) $\alpha(q)\beta(q) = q$,

(ii) $\alpha(p) = p$ *und* $\beta(p) = I$,

(iii) $\alpha(qA) = \alpha(q)\ \bar{\alpha}(\beta(q)A)$,

(iv) $\beta(qA) = \bar{\beta}(\beta(q)A)$.

Beweis: Die Eigenschaften (i) und (ii) ergeben sich unmittelbar aus der Definition von α und β. Ferner hat man

$$\begin{aligned} \alpha(qA) &= \alpha(\alpha(q)\beta(q)A) = (\mu_{\alpha(q)}\circ\bar{\alpha}\circ\mu_{\alpha(q)^{-1}})(\alpha(q)\beta(q)A) \\ &= \alpha(q)\ \bar{\alpha}(\beta(q)A) . \end{aligned}$$

Analog folgt (iv). □

Bemerkung: Betrachtet man anstelle von $SL(M)$ eine beliebiges Prinzipalbündel Q, dessen Strukturgruppe G halbeinfach und nicht-kompakt ist, so können Abbildungen $\alpha\colon Q \longrightarrow P$ und $\beta\colon Q \longrightarrow S$ in analoger Art und Weise definiert werden, wobei P eine Reduktion der Strukturgruppe von Q auf eine maximale kompakte Untergruppe K bezeichnet und $S \approx \mathbb{R}^k$ durch eine globale Zerlegung $G = K\cdot S$ gegeben ist.

Wir kommen auf den Fall $G = SL(n,\mathbb{R})$ zurück und geben noch eine weitere Beschreibung von β an. Für $q \in Q$ sei

$$g_{ij}(q) = g(q(e_i), q(e_j))$$

die (i,j)-Komponente der Metrik g in Bezug auf die Basis $q(e_1), \ldots, q(e_n)$ von $T_{\pi(q)}M$, wobei (e_i) die Standard-Basis des $\mathbb{R}^n$ und π die Projektion $Q \longrightarrow M$ bezeichnet. Die Matrix

$$g(q) = (\ g_{ij}(q)\ )$$

ist symmetrisch und positiv definit und $\det g(q) = 1$, denn $q\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow T_{\pi(q)}M$ ist volumenerhaltend. Also ist $g(q) \in SA(n)$ und besitzt somit eine eindeutig bestimmte Quadratwurzel in $SA(n)$.

3.1.4 Lemma: *Für alle* $q \in Q$ *gilt* $\beta(q)^2 = g(q)$.

Beweis: Wir vergleichen $g_{ij}(q)$ mit der (i,j)-Komponente von $\beta(q)^2$. Zunächst hat man wegen $\alpha(q)\beta(q) = q$

$$\begin{aligned} g_{ij}(q) &= g(q(e_i), q(e_j)) \\ &= g(\alpha(q)\beta(q)e_i, \alpha(q)\beta(q)e_j) \ . \end{aligned}$$

Da $\alpha(q)\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow T_{\pi(q)}M$ eine Isometrie ist, folgt

$$g_{ij}(q) = \langle \beta(q)e_i, \beta(q)e_j \rangle$$

und somit

$$g_{ij}(q) = \langle \beta(q)^2 e_i, e_j \rangle$$

aufgrund der Symmetrie von $\beta(q)$. □

3.2 Das geeignete Faserbündel und seine Einbettung in ein G_2-Prinzipalbündel

Zur Beschreibung verallgemeinerter Cartan-Zusammenhänge für 3-Mannigfaltigkeiten vom Ausnahmetyp G_2 benötigen wir zunächst ein geeignetes Faserbündel, das wir im folgenden einführen.

Sei M eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit, Q = SL(M) eine SL(3,$\mathbb{R}$)-Struktur auf M und P = SO(M) eine Reduktion von Q auf Strukturgruppe SO(3). Ferner sei

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{3*}$$

die normale Liealgebra vom Ausnahmetyp G_2 und $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ die Cartan-Zerlegung aus Korollar 2.4.3, also

$$\mathfrak{k} = \{(x,a,-{}^tx) \mid x\in\mathbb{R}^3,\ a\in\mathfrak{so}(3)\}\ ,$$
$$\mathfrak{p} = \{(x,a,{}^tx) \mid x\in\mathbb{R}^3,\ a\in\mathfrak{sa}(3)\}\ ,$$

wobei $\mathfrak{sa}(3)$ den Unterraum der symmetrischen Matrizen in $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ bezeichnet.

Wir setzen B: = P × $\mathfrak{p}$ und definieren eine Projektion π_B von B auf M durch $\pi_B(p,s) = \pi(p)$ für alle $p\in P$ und $s\in\mathfrak{p}$, wobei π die Projektion des Prinzipalbündels P bezeichnet. Offensichtlich ist B ein Faserbündel über M vom Fasertyp SO(3)× $\mathfrak{p}$. Man kann B auch als zu P assoziiertes Bündel beschreiben. Hierzu definiere man eine Linksoperation von SO(3) auf SO(3)× $\mathfrak{p}$ durch $A\cdot(A',s) = (AA',s)$ für alle $A,A'\in$ SO(3) und $s\in\mathfrak{p}$. Die Abbildung

$$B = P \times \mathfrak{p} \longrightarrow P \times_{SO(3)} (SO(3) \times \mathfrak{p})$$
$$(p,s) \longmapsto [(p,(I,s))]$$

ist dann offenbar ein (starker) Isomorphismus der beiden Bündel, (I = Einheitsmatrix).

Auf der anderen Seite betrachten wir $Q \times_M TM$, das Faserprodukt der beiden Bündel Q und TM über M: Die Produktmannigfaltigkeit $Q \times TM$ ist ein Faserbündel über $M \times M$ mit Projektion $\pi \times \pi_M$, wobei π bzw. π_M die Projektion von Q bzw. TM auf M bezeichnet. Die Einschränkung dieses Bündels auf die Diagonale D in $M \times M$ wird mit $Q \times_M TM$ bezeichnet und als Faserbündel über M aufgefaßt, d.h. man identifiziert D in kanonischer Weise mit M. Die Faser von $Q \times_M TM$ über $x \in M$ ist also $Q_x \times T_xM$. Die Projektion dieses Bündels bezeichnen wir auch mit π, also $\pi(q,v) = \pi(q) = \pi_M(v)$ für alle $(q,v) \in Q \times_M TM$.

Wir zeigen nun, daß die Bündel $Q \times_M TM$ und B isomorph sind. Hierzu erinnern wir daran, daß die Exponentialabbildung von $SL(3,\mathbb{R})$ den Raum $\mathfrak{sa}(3)$ der spurfreien, symmetrischen Matrizen diffeomorph auf $SA(3)$ abbildet. Die Umkehrabbildung von $\exp|_{\mathfrak{sa}(3)}$ bezeichnen wir im folgenden mit log. Ferner seien α und β die Abbildungen aus 3.1.2, also:

$$Q \xrightarrow[\alpha]{} P \,,$$

$$Q \xrightarrow[\beta]{} SA(3) \xrightarrow[\log]{\approx} \mathfrak{sa}(3) \,.$$

3.2.1 Satz: *Mit den obigen Bezeichnungen ist die Abbildung*

$$J: Q \times_M TM \longrightarrow B = P \times \mathfrak{p} ,$$

definiert durch

$$J(q,v) = (\alpha(q) , (q^{-1}v, \log(\beta(q)), {}^t(q^{-1}v)))$$

für alle $q \in Q$ *und* $v \in TM$ *mit* $\pi(q) = \pi_M(v)$, *ein (starker) Bündelisomorphismus.*

Beweis: Offensichtlich gilt $\pi_B \circ J = \pi$. Man definiere eine Abbildung J' wie folgt:

$$J': P \times \mathfrak{p} \longrightarrow Q \times_M TM ,$$
$$J'(p,(x,a,{}^tx)) = (p\cdot \exp a,\ p\cdot \exp a(x))$$

für alle $p \in P$ und $(x,a,{}^tx) \in \mathfrak{p}$. Unter Verwendung von Lemma 3.1.3 läßt sich nun leicht zeigen, daß J' die Umkehrabbildung von J ist. □

Wie wir in den nächsten Abschnitten sehen werden, ist B das geeignete Bündel, um hierauf verallgemeinerte Cartan-Zusammenhänge vom Typ G im Sinne von Definition 1.6.1 zu beschreiben, wobei G die zusammenhängende, zentrumsfreie Gruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist. Grundlegend für die folgende Konstruktion ist die Cartan-Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Da das Bündel $P \times \mathfrak{p}$ hierzu in einer direkteren Beziehung steht als $Q \times_M TM$, ist es - soweit es die Beschreibung von Cartan-Zusammenhänge vom Typ G betrifft - dem letzteren Bündel vorzuziehen. Wir werden daher unsere Ergebnisse auf $P \times \mathfrak{p}$ formulieren.

Natürlich ist eine $\mathfrak{g}$-wertige 1-Form ω auf $P \times \mathfrak{p}$ genau dann ein Cartan-Zusammenhang, sagen wir vom Typ (G,j), wenn $J^*\omega$ ein Cartan-Zusammenhang auf $Q \times_M TM$ vom Typ $(G, j\circ J)$ ist. Damit lassen sich die Ergebnisse der folgenden Abschnitte auf das Bündel $Q \times_M TM$ übertragen.

Der Rest dieses Abschnitts dient der Beschreibung einer Einbettung von B in ein geeignetes G-Prinzipalbündel P'.

Sei $G \cong \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ die zusammenhängende, zentrumsfreie Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$, (vgl. 2.5.1). Die zusammenhängende Liesche Untergruppe K mit Liealgebra $\mathfrak{k}$ ist eine maximale kompakte Untergruppe von G und isomorph zu $SO(4)$, (vgl. 2.5.2). Vermöge der in 2.5.2 gewonnenen Einbettung Ψ: $SO(4) \longrightarrow G$ identifizieren wir $SO(4)$ mit $K = \Psi(SO(4))$ (und somit $\mathfrak{so}(4)$ mit $\mathfrak{k}$ via Ψ_*, d.h. via ψ: $\mathfrak{so}(4) \longrightarrow \mathfrak{g}$ aus 2.4.4). Wir betrachten ferner $SO(3)$ als Untergruppe von $SO(4)$ vermöge der Zuordnung

$$h \in SO(3) \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & h \end{array}\right) \in SO(4) .$$

Somit ist $SO(3)$ eine abgeschlossene Untergruppe von G und operiert als solche durch Linkstranslationen auf G. Folglich können wir das zu P assoziierte Faserbündel P' mit typischer Faser G bilden:

$$\pi' : P' = P \times_{SO(3)} G \longrightarrow M .$$

P' ist ein G-Prinzipalbündel über M und P ist eine Reduktion von P' auf die Strukturgruppe $SO(3)$ vermöge der kanonischen Einbettung

$$i: P \longrightarrow P' \ , \ i(p) = [(p,e)] \ .$$

Wir fassen P als Unterbündel von P' auf und schreiben dementsprechend kurz pg für den Orbit

$$[(p,g)] = \{(ph,h^{-1}g) \in P \times G \mid h \in SO(3)\} \quad , \quad (p \in P,\ g \in G).$$

3.2.2 **Lemma:** *Die Abbildung* j*, die jedem* $(p,s) \in P \times \mathfrak{p}$ *den Orbit* $p \cdot \exp(s) \in P'$ *zuordnet, ist eine Einbettung des Faserbündels* $B = P \times \mathfrak{p}$ *in das Prinzipalbündel* P'.

Beweis: Offensichtlich gilt $\pi' \circ j = \pi_B$. Wir trivialisieren die Bündel P' und B lokal mit Hilfe eines glatten Schnittes $\sigma: U \longrightarrow P_{|U}$, wobei U eine hinreichend kleine offene Menge in M ist und $P_{|U}$ die Restriktion von P auf U bezeichnet. Es genügt dann, die Behauptung für die Abbildung

$$j_U: P_{|U} \times \mathfrak{p} \longrightarrow P'_{|U} \ ,$$

d.h. für die Einschränkung von j auf $B_{|U} = P_{|U} \times \mathfrak{p}$ zu zeigen. Die erwähnten lokalen Trivialisierungen von P' und B sind durch die folgenden Diffeomorphismen gegeben:

$$\varphi': U \times G \longrightarrow P'_{|U} \ , \ \varphi'(x,g) = \sigma(x)g \ ,$$

$$\varphi: U \times SO(3) \times \mathfrak{p} \longrightarrow P_{|U} \times \mathfrak{p} \ , \ \varphi(x,a,s) = (\sigma(x)a,s) \ .$$

Es gilt

$$\varphi'(x,g_1g_2) = \varphi'(x,g_1)g_2$$

für alle $x \in U$ und alle $g_1, g_2 \in G$. Wir betrachten ferner die Abbildung

$$f\colon SO(4) \times \mathfrak{p} \longrightarrow G \ , \ f(a,s) = a\cdot \exp(s) \ .$$

Da $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ eine Cartan-Zerlegung ist, ist f ein Diffeomorphismus, (vgl. [H], Ch.VI, Th.1.1). Somit ist die Einschränkung von f auf $SO(3) \times \mathfrak{p}$, (im unten stehenden Diagramm mit f_o bezeichnet), eine Einbettung von $SO(3) \times \mathfrak{p}$ in G. Die Behauptung ergibt sich somit aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} U \times SO(3) \times \mathfrak{p} \arrow[r, "id_U \times f_o"] \arrow[d, "\varphi"', "\approx"] & U \times G \arrow[d, "\approx"', "\varphi'"] \\ B_{|U} = P_{|U} \times \mathfrak{p} \arrow[r, "j_U"'] & P'_{|U} \end{tikzcd}$$

□

3.3 Verallgemeinerte Cartan-Zusammenhänge vom Typ G_2

Unser Interesse gilt nun den verallgemeinerten Cartan-Zusammenhängen auf $B = P \times \mathfrak{p}$ vom Typ (G,j) im Sinne von Definition 1.6.1.

Sei zunächst G eine beliebige Liegruppe und $\mathfrak{g}$ ihre Liealgebra. Die Ableitung der Exponentialabbildung $\exp\colon \mathfrak{g} \longrightarrow G$ in einem Punkt $s \in \mathfrak{g}$ ist durch

$$(3.3.1) \qquad (\exp_*)_s = L(\exp s)_* \circ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \operatorname{ad}(-s)^k$$

gegeben (siehe z.B. [H],Ch.II,Th.1.7). Wie üblich haben wir hier den Tangentialraum von $\mathfrak{g}$ im Punkt s mit $\mathfrak{g}$ identifiziert. Wir setzen

$$(3.3.2) \qquad d_s\exp = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} (-\operatorname{ad}(s))^k .$$

Somit hat man also das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} T_s\mathfrak{g} \arrow[r, "(\exp_*)_s"] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] & T_{(\exp s)}G \\ \mathfrak{g} \arrow[r, "d_s\exp"'] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\cong"', "L(\exp s)_*"] \end{tikzcd} .$$

3.3.3 Lemma: *Es bezeichnen* Ad *(bzw.* ad*) die adjungierte Darstellung von* G *(bzw.* $\mathfrak{g}$*) und* K *die Killingform von* $\mathfrak{g}$*. Für alle* $s,x,y \in \mathfrak{g}$ *gilt:*

(i) $\operatorname{Ad}(\exp s) = \operatorname{id}_{\mathfrak{g}} + d_{-s}\exp \circ \operatorname{ad}(s)$,

(ii) $d_{-s}\exp = \operatorname{Ad}(\exp s) \circ d_s\exp$,

(iii) $K(d_s\exp(x),y) = K(x,d_{-s}\exp(y))$.

Beweis: Sei e die Exponentialabbildung von $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ in die Liegruppe $GL(\mathfrak{g})$, also

$$e^{\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \varphi^k \qquad \text{für } \varphi \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) .$$

Für einen beliebigen Vektor s in $\mathfrak{g}$ hat man dann:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(\exp s) &= e^{\mathrm{ad}(s)} \\
&= \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\,\mathrm{ad}(s)^k \\
&= \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}\,\mathrm{ad}(s)^k \circ \mathrm{ad}(s) \\
&= \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} + d_{-s}\exp \circ \mathrm{ad}(s) \ .
\end{aligned}$$

Um (ii) zu zeigen, sei $\mathrm{inv}\colon G \longrightarrow G$ die Inversenbildung, also $\mathrm{inv}(a) = a^{-1}$ für alle $a \in G$. Wir setzen $g = \exp s$. Offenbar gilt

$$\mathrm{inv} \circ L_g \circ \exp = R_{g^{-1}} \circ \exp \circ -\mathrm{id}_{\mathfrak{g}} \ .$$

Differentiation im Punkt $-s$ ergibt einerseits

$$\begin{aligned}
((\mathrm{inv} \circ L_g \circ \exp)_*)_{-s} &= - L_{g*} \circ (\exp_*)_{-s} \\
&= - d_{-s}\exp \ ,
\end{aligned}$$

andererseits hat man

$$\begin{aligned}
((R_{g^{-1}} \circ \exp \circ -\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})_*)_{-s} &= - R_{g^{-1}*} \circ (\exp_*)_s \\
&= - \mathrm{Ad}(g) \circ d_s\exp \ .
\end{aligned}$$

Die Gleichung (iii) erhält man schließlich wie folgt. Wegen $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ für beliebige Endomorphismen A und B stimmen $K(y,[s,x])$ und $K(x,[y,s])$ für alle $s,x,y \in \mathfrak{g}$ überein, also

$$K(\mathrm{ad}(s)x,y) = - K(x,\mathrm{ad}(s)y) \ .$$

Folglich hat man

$$(3.3.4) \qquad K(\mathrm{ad}(s)^k x,y) = (-1)^k\, K(x,\mathrm{ad}(s)^k y) \ .$$

Hieraus ergibt sich dann

$$K(d_s\exp(x),y) = K(x,d_{-s}\exp(y)) \ . \qquad \square$$

Wir wenden uns jetzt wieder der im vorhergehenden Abschnitt betrachteten Situation zu, wobei wir die Voraussetzungen und Notationen von dort übernehmen. Insbesondere bezeichnet j die Einbettung aus 3.2.2:

$$j: B = P \times \mathfrak{p} \longrightarrow P' = P \times_{SO(3)} G$$
$$(p,s) \longmapsto p \cdot \exp s$$

Einen Tangentenvektor $Z \in T_bB$ im Punkt $b = (p,s) \in B$ mit $p \in P$ und $s \in \mathfrak{p}$ schreiben wir im folgenden stets in der Form $Z = (X,Y)$ mit $X \in T_pP$ und $Y \in T_s\mathfrak{p}$.

3.3.5 Lemma: *Sei* $\omega': TP' \longrightarrow \mathfrak{g}$ *ein Zusammenhang auf* P'. *Man setze* $\omega := j^*\omega'$. *Dann gilt*

$$\omega(X,Y) = \mathrm{Ad}(\exp s)^{-1}(d_{-s}\exp Y + \omega'(X))$$

für alle $(X,Y) \in T_pP \times T_s\mathfrak{p} \cong T_{(p,s)}B$, *wobei* $Y \in T_s\mathfrak{p}$ *auf der rechten Seite der Gleichung als Vektor in* $\mathfrak{p}$ *aufgefaßt wird.*

Beweis: Wir bestimmen zunächst die Ableitung von j im Punkt $(p,s) \in P \times \mathfrak{p}$. Hierzu betrachten wir die beiden Abbildungen

$$j_s: P \longrightarrow P' \quad \text{und} \quad j_p: \mathfrak{p} \longrightarrow P',$$

definiert durch

$$j_s(q) = j(q,s) = q \cdot \exp(s) \quad \text{für alle } q \in P ,$$
$$j_p(t) = j(p,t) = p \cdot \exp(t) \quad \text{für alle } t \in \mathfrak{p} .$$

Die Tangentialabbildung von j in (p,s) ist dann für alle $(X,Y) \in T_pP \times T_s\mathfrak{p}$ durch

$$j_*(X,Y) = j_{p*}Y + j_{s*}X$$

gegeben. Setzt man $g = \exp s$, so hat man

$$j_s = R_g|_P \quad \text{und} \quad j_p = \mu_p \circ \exp|_{\mathfrak{p}} \, ,$$

wobei R_g die Rechtsoperation von g auf P' und μ_p den durch die Zuordnung $a \longmapsto pa$ definierten Diffeomorphismus von G auf die Faser von P' durch den Punkt p bezeichnen. Somit erhält man für jedes $X \in T_pP$ und jedes $Y \in T_s\mathfrak{p} \cong \mathfrak{p}$

$$j_{s*}X = R_{g*}X$$

sowie

$$\begin{aligned} j_{p*}Y &= (\mu_{p*} \circ \exp_*)_s\, Y \\ &= (R_{g*} \circ R_{g*}^{-1} \circ \mu_{p*} \circ \exp_*)_s\, Y \\ &= (R_{g*})_p\, (\mu_{p*})_e\, (R_{g*}^{-1} \circ \exp_*)_s\, Y \\ &= (R_{g*})_p\, ((R_{g*}^{-1} \circ \exp_*)_s\, Y)^*(p) \\ &= (\mathrm{Ad}(g)^{-1}(R_{g*}^{-1} \circ \exp_*)_s\, Y)^*(pg) \\ &= ((L_{g*}^{-1} \circ \exp_*)_s\, Y)^*(pg) \\ &= (d_s\exp Y)^*(pg) \end{aligned}$$

und somit

$$(3.3.6) \qquad j_*(X,Y) = (d_s\exp Y)^*(pg) + R_{g*}X \, .$$

Man hat also

$$\omega(X,Y) = \omega'(j_*(X,Y)) = \omega'((d_s\exp Y)^*(pg) + R_{g*}X)$$

und folglich

$$(3.3.7) \qquad \omega(X,Y) = d_s\exp Y + \mathrm{Ad}(g)^{-1}\omega'(X) \, .$$

Nach Lemma 3.3.3(ii) ist dies äquivalent zur Behauptung. $\square$

Sei ι die kanonische Einbettung von P in $B = P \times \mathfrak{p}$, definiert durch $\iota(p) = (p,0)$ für alle $p \in P$. Offensichtlich stimmt $j \circ \iota$ mit der Inklusion i von P in P' überein. Man hat also das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\iota"] \arrow[rr, bend left, "i"] \arrow[dr, "\pi"'] & B = P \times \mathfrak{p} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\pi_B"] & P' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & M & \end{tikzcd} \tag{3.3.8}$$

und somit das induzierte kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} A^k(P,\mathfrak{g}) & A^k(B,\mathfrak{g}) \arrow[l, "\iota^*"'] & A^k(P',\mathfrak{g}) \arrow[l, "j^*"'] \arrow[ll, bend right, "i^*"'] \end{tikzcd} .$$

Im folgenden zeigen wir, daß ι^* auf der Menge der Cartan-Zusammenhänge vom Typ (G,j) injektiv ist und bestimmen das Bild.

3.3.9 Bezeichnungen: Die Menge aller (verallgemeinerter) Cartan-Zusammenhänge auf B vom Typ (G,j) bezeichnen wir mit $C(B)$. Gemäß Defininition 1.6.1 liegt eine 1-Form $\omega \in A^1(B,\mathfrak{g})$ genau dann in $C(B)$, wenn $\omega\colon T_bB \longrightarrow \mathfrak{g}$ für jedes $b \in B$ ein Isomorphismus ist und wenn es einen Zusammenhang ω' auf P' gibt mit $j^*\omega' = \omega$.

Um eine einfache Sprechweise zur Verfügung zu haben, nennen wir ferner eine 1-Form $\omega_o\colon TP \longrightarrow \mathfrak{g}$ <u>geeignet</u>, wenn sie die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

(1) $\omega_o(A^*) = A$ für alle $A \in \mathfrak{so}(3) \subset \mathfrak{g}$,

(2) $R_h{}^*\omega_o = \mathrm{Ad}(h)^{-1}\omega_o$ für alle $h \in SO(3) \subset G$,

(3) $\mathfrak{g} = \omega_o(T_pP) \oplus d_s\exp(\mathfrak{p})$ für alle $p \in P$ und $s \in \mathfrak{p}$.

Die Menge aller geeigneten $\mathfrak{g}$-wertigen 1-Formen auf P bezeichnen wir mit C(P). Ferner sei $C(P') \subset A^1(P',\mathfrak{g})$ die Menge aller Zusammenhänge ω' auf P' mit der Eigenschaft, daß die Einschränkung $\omega_o := i^*\omega'$ von ω' auf P die Bedingung (3) erfüllt (und somit geeignet ist).

3.3.10 Satz: *Mit den obigen Bezeichnungen hat man das folgende kommutative Diagramm, in dem alle Abbildungen bijektiv sind:*

$$\begin{tikzcd} C(P) & C(B) \arrow[l, "\iota^*"'] & C(P') \arrow[l, "j^*"'] \arrow[ll, bend right, "i^*"'] \end{tikzcd} .$$

Beweis: Sei zunächst ω' ein Zusammenhang auf P'. Nach dem vorhergehenden Lemma ist die mit j zurückgezogene Form $\omega = j^*\omega'$ in einem Punkt $b = (p,s) \in B$ genau dann ein Isomorphismus von T_bB auf $\mathfrak{g}$, wenn $\mathfrak{g}$ die direkte Summe von $d_{-s}\exp(\mathfrak{p})$ und $\omega'(T_pP)$ ist. Also ist $\omega' \in C(P')$ äquivalent zu $\omega \in C(B)$. Man hat also $j^*(C(P')) \subset C(B)$, und aufgrund der Definition verallgemeinerter Cartan-Zusammenhänge vom Typ (G,j) (s. 1.6.1) gilt Gleichheit. Offensichtlich gilt auch $i^*(C(P')) \subset C(P)$. Die Injektivität von $j^*: C(P') \longrightarrow C(B)$ und $i^*: C(P') \longrightarrow C(P)$ folgt unmittelbar aus Lemma 1.1.2. Es bleibt zu zeigen, daß es zu jeder 1-Form $\omega_o \in C(P)$ einen Zusammenhang $\omega' \in C(P')$ mit $i^*\omega' = \omega_o$ gibt.

Seien hierzu $p' \in P'$ und $X' \in T_{p'}P'$. Man wähle $p \in P$ und $X \in T_pP$ mit

$$\pi(p) = \pi'(p') \quad \text{und} \quad \pi_*(X) = \pi'_*(X') \ .$$

Definiert man $g \in G$ durch $pg = p'$, so ist $R_{g^{-1}*}X' - X$ ein vertikaler Vektor in T_pP'. Es gibt daher genau einen Vektor $A \in g$, dessen induziertes vertikales Vektorfeld A^* auf P' im Punkt p den Wert $R_{g^{-1}*}X' - X$ annimmt. Man setze

$$\omega'(X') = Ad(g^{-1})(A + \omega_o(X)) \ .$$

Wir zeigen zunächst, daß diese Definition unabhängig von der Wahl von $X \in T_pP$ ist. Sei $\hat{X}$ ein weiterer Vektor in T_pP mit $\pi_*(\hat{X}) = \pi_*(X) = \pi'_*(X')$. Ist $\hat{A} \in g$ durch $\hat{A}^*(p) = R_{g^{-1}*}X' - \hat{X}$ definiert, so hat man

$$(A - \hat{A})^*(p) = A^*(p) - \hat{A}^*(p) = -X + \hat{X} \in T_pP$$

und somit

$$-\omega_o(X) + \omega_o(\hat{X}) = \omega_o((A - \hat{A})^*(p)) = A - \hat{A} \ ,$$

also

$$A + \omega_o(X) = \hat{A} + \omega_o(\hat{X}) \ .$$

Ferner ist die Definition von $\omega'(X')$ unabhängig von der Wahl des Punktes p. Um dies zu zeigen, sei $\bar{p}$ ein weiterer Punkt aus P mit $\pi(\bar{p}) = \pi(p) = \pi'(p')$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Elemente $\bar{g} \in G$ und $h \in SO(3)$ mit $\bar{p}\bar{g} = p'$ und $ph = \bar{p}$. Es gilt $g = h\bar{g}$. Setzt man $\bar{X} = R_{h*}X$, so hat man $\pi_*(\bar{X}) = \pi_*(X) = \pi'_*(X')$ und somit $\bar{A}^*(\bar{p}) = R_{\bar{g}^{-1}*}X' - X$ für genau ein $\bar{A} \in g$. Wegen

$$(Ad(h)\bar{A})^*(p) = R_{h^{-1}*}\bar{A}^*(\bar{p}) = R_{g^{-1}*}X' - X = A^*(p)$$

folgt $A = Ad(h)\bar{A}$ und somit

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(\bar{g}^{-1})(\bar{A} + \omega_o(\bar{X})) &= \mathrm{Ad}(g^{-1})(\mathrm{Ad}(h)\bar{A} + \mathrm{Ad}(h)\omega_o(\bar{X}))\\ &= \mathrm{Ad}(g^{-1})(A + \omega_o(X)).\end{aligned}$$

Also ist ω' eine wohldefinierte 1-Form auf P'. Offenbar gilt $i^*\omega' = \omega_o$. Um die Gleichung $\omega'(B^*) = B$ für $B \epsilon \mathfrak{g}$ zu verifizieren, wähle man für $X \epsilon T_pP$ den Nullvektor. Man hat dann $A^*(p) = R_{g^{-1}*}B^*(p) = (\mathrm{Ad}(g)B)^*(p)$, also $A = \mathrm{Ad}(g)B$ und somit $\omega'(B^*) = B$. Zu zeigen bleibt noch die Äquivarianz von ω'. Seien hierzu $X' \epsilon T_{p'}P'$, $p \epsilon P$, $g \epsilon G$, $X \epsilon T_pP$ und $A \epsilon \mathfrak{g}$ wieder wie oben, also

$$\omega'(X') = \mathrm{Ad}(g^{-1})(A + \omega_o(X)) .$$

Ferner sei $a \epsilon G$. Man setze $\tilde{g} = ga$, $\tilde{p}' = p'a$ und $\tilde{X}' = R_{a*}X'$. Dann gilt $p\tilde{g} = \tilde{p}'$ sowie $\pi'_*(\tilde{X}') = \pi_*(X)$ und somit

$$\omega'(\tilde{X}') = \mathrm{Ad}(\tilde{g}^{-1})(\tilde{A} + \omega_o(X)) ,$$

wobei $\tilde{A} \epsilon \mathfrak{g}$ durch $\tilde{A}^*(p) = R_{\tilde{g}^{-1}*}\tilde{X}' - X$ bestimmt ist. Wegen $R_{\tilde{g}^{-1}*}\tilde{X}' = R_{g^{-1}*}X'$ ist $\tilde{A} = A$ und man erhält

$$\begin{aligned}(R_a^*\omega')(X') &= \omega'(\tilde{X}') = \mathrm{Ad}(\tilde{g}^{-1})(\tilde{A} + \omega_o(X))\\ &= \mathrm{Ad}(a^{-1})\ \mathrm{Ad}(g^{-1})(A + \omega_o(X))\\ &= \mathrm{Ad}(a^{-1})\omega'(X') .\end{aligned}$$ □

Jede geeignete 1-Form $\omega_o\colon TP \longrightarrow \mathfrak{g}$ kann also zu genau einem Cartan-Zusammenhang $\omega\colon TB \longrightarrow \mathfrak{g}$ erweitert werden, $\iota^*\omega = \omega_o$. Wir nennen ω den von ω_o <u>induzierten Cartan-Zusammenhang</u> auf B. Umgekehrt ist jeder Cartan-Zusammenhang vom Typ (G,j) auf B von einer (im Sinne von 3.3.9) geeigneten $\mathfrak{g}$-wertigen 1-Form auf P induziert.

3.3.11 Korollar: *Sei* $\omega_o\colon TP \longrightarrow \mathfrak{g}$ *eine geeignete 1-Form und* $\omega\colon TB \longrightarrow \mathfrak{g}$ *der induzierte Cartan-Zusammenhang vom Typ* (G,j). *Für alle* $X \in T_pP$ *und alle* $Y \in T_s\mathfrak{p} \cong \mathfrak{p}$ *gilt:*

(i) $\omega(X,Y) = d_s\exp Y + \mathrm{Ad}(\exp s)^{-1}\omega_o(X)$,

(ii) $\omega(X,Y) = \omega_o(X) + d_s\exp(Y - [s,\omega_o(X)])$.

Beweis: (i) wurde bereits im Beweis von Lemma 3.3.5 hergeleitet, vgl. (3.3.7). Die Gleichung (ii) ergibt sich aus (i) durch Anwendung von Lemma 3.3.3(i). □

3.3.12 Korollar: *Seien* $\omega' \in C(P')$, $\omega := j^*\omega'$, $\omega_o := i^*\omega'$ *und* Ω', Ω, Ω_o *die entsprechenden Krümmungen, (wobei mit Krümmung von* ω_o *die* $\mathfrak{g}$*-wertige 2-Form* $\Omega_o = d\omega_o + [\omega_o,\omega_o]$ *gemeint ist). Dann gilt:*

(i) $i^*\Omega' = \iota^*\Omega = \Omega_o$ *und* $j^*\Omega' = \Omega$,

(ii) $\Omega((X_1,Y_1),(X_2,Y_2)) = \mathrm{Ad}(\exp s)^{-1}\,\Omega_o(X_1,X_2)$

für alle $X_1,X_2 \in T_pP$, $Y_1,Y_2 \in T_s\mathfrak{p}$ *und* $p \in P$, $s \in \mathfrak{p}$.

Beweis: (i) folgt unmittelbar aus

$$i^*\omega' = \iota^*\omega = \omega_o \quad \text{und} \quad j^*\omega' = \omega$$

und den Strukturgleichungen

$$\begin{aligned} \Omega_o &= d\omega_o + [\omega_o,\omega_o] \; , \\ \Omega &= d\omega + [\omega,\omega] \; , \\ \Omega' &= d\omega' + [\omega',\omega'] \; . \end{aligned}$$

Um (ii) zu zeigen, seien $X_1, X_2 \in T_pP$ und $Y_1, Y_2 \in T_s\mathfrak{p}$. Man setze $g = \exp s$. Aus (i) und (3.3.6) folgt dann

$$\Omega((X_1,Y_1),(X_2,Y_2)) = \Omega'(j_*(X_1,Y_1), j_*(X_2,Y_2))$$
$$= \Omega'((d_S\exp Y_1)^*(pg) + R_{g_*}X_1, (d_S\exp Y_2)^*(pg) + R_{g_*}X_2) \ .$$

Da Ω' horizontal und Ad-äquivariant ist, ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned}\Omega((X_1,Y_1),(X_2,Y_2)) &= \Omega'(R_{g_*}X_1, R_{g_*}X_2)\\ &= \mathrm{Ad}(g)^{-1}\ \Omega'(X_1,X_2)\\ &= \mathrm{Ad}(g)^{-1}\ \Omega_o(X_1,X_2) \ .\end{aligned}$$ □

3.4 Induzierte verallgemeinerte Cartan-Zusammenhänge vom Typ G_2

Wir zeigen hier zunächst, daß jeder Cartan-Zusammenhang vom Typ (SO(4),SO(3)) auf dem SO(3)-Bündel $P = SO(M)$ in $C(P)$ liegt, also geeignet ist. Dies sichert insbesondere die Existenz verallgemeinerter Cartan-Zusammenhänge vom Typ (G,j) für jede orientierbare 3-Mannigfaltigkeit M. Als Beispiel betrachten wir dann eine Raumform positiver Schnittkrümmung.

Sei zunächst $\mathfrak{g}$ eine beliebige reelle halbeinfache Liealgebra und $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ eine Cartan-Zerlegung, wobei $\mathfrak{k}$ die Unteralgebra sei. Wegen

$$[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k} \ , \ [\mathfrak{k},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p} \ , \ [\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$$

gilt für alle $s \in \mathfrak{p}$

(3.4.1)

$$\mathrm{ad}(s)^k(\mathfrak{p}) \subset \begin{cases} \mathfrak{p} & \text{für } k \text{ gerade} \\ \mathfrak{k} & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases},$$

$$\mathrm{ad}(s)^k(\mathfrak{k}) \subset \begin{cases} \mathfrak{k} & \text{für } k \text{ gerade} \\ \mathfrak{p} & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

3.4.2 Lemma: *Sei* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ *eine Cartan-Zerlegung einer halbeinfachen reellen Liealgebra* $\mathfrak{g}$. *Sei* $s \in \mathfrak{p}$.

(i) *Die folgende Abbildung ist ein linearer Isomorphismus:*

$$l_s := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \mathrm{ad}(s)^{2k}|_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p} .$$

(ii) *Die Einschränkung von* $d_s\exp$ *auf* $\mathfrak{p}$ *ist injektiv und* $\mathfrak{g}$ *ist die direkte Summe von* $d_s\exp(\mathfrak{p})$ *und* $\mathfrak{k}$.

Beweis: Die Killingform von $\mathfrak{g}$ ist positiv definit auf $\mathfrak{p}$ und negativ definit auf $\mathfrak{k}$. Nach (3.3.4) ist für jedes $s \in \mathfrak{p}$ die Abbildung

$$r := \mathrm{ad}(s)^2|_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}$$

ein selbstadjungierter Endomorphismus von $\mathfrak{p}$ bezüglich der Killingform K. Ferner hat man für jedes $x \in \mathfrak{p}$

$$K(r(x),x) = -K([s,x],[s,x]) \geq 0 ,$$

denn $[s,x]$ liegt in $\mathfrak{k}$. Man erhält somit

$$K(r^{2m}(x),x) = K(r^m(x),r^m(x)) \geq 0 ,$$

sowie

$$K(r^{2m+1}(x),x) = K(r(r^m(x)),r^m(x)) \geq 0 ,$$

also

$$K(r^n(x),x) \geqslant 0$$

für jedes $x \in \mathfrak{p}$ und jede nicht negative ganze Zahl n. Um (i) zu zeigen, sei x ein Element aus dem Kern von l_s. Dann hat man

$$0 = K(l_s(x),x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} K(r^n(x),x) \ .$$

Da alle Summanden nicht negativ sind, folgt $K(r^n(x),x) = 0$ für alle n. Insbesondere ist $K(x,x) = 0$, also $x = 0$. Die Behauptung (ii) ergibt sich wie folgt: Die Abbildung l_s ist die $\mathfrak{p}$-Komponente von $d_s\exp_{|\mathfrak{p}}$ bezüglich der Cartan-Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, (siehe (3.3.2) und (3.4.1)). Ist also x ein Vektor in $\mathfrak{p}$ mit $d_s\exp(x) = 0$, so hat man insbesondere $l_s(x) = 0$ und damit $x = 0$ nach (i). Folglich ist $d_s\exp_{|\mathfrak{p}}$ injektiv. Für jedes $y \in \mathfrak{p}$ mit $d_s\exp(y) \in \mathfrak{k}$ folgt ebenfalls $l_s(y) = 0$ und somit $y = 0 = d_s\exp(y)$. Also: $d_s\exp(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{k} = \{0\}$. □

Im folgenden gelten wieder die Voraussetzungen und Bezeichnungen des vorhergehenden Abschnitts, (insbesondere Diagramm (3.3.8)).

3.4.3 Korollar: *Sei* ω_o: TP $\longrightarrow \mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{k}$ *ein Cartan-Zusammenhang vom Typ* (SO(4),SO(3)) *auf dem* SO(3)*-Prinzipalbündel* P.

(i) *Es gibt einen eindeutig bestimmten Cartan-Zusammenhang* ω *auf* $B = P \times \mathfrak{p}$ *vom Typ* (G,j) *mit* $\iota^*\omega = \omega_o$. *Dieser kann auch wie folgt charakterisiert werden: Es gibt genau einen Zusammenhang* ω' *auf* $P' = P \times_{SO(3)} G$ *mit* $i^*\omega' = \omega_o$. *Es gilt dann* $j^*\omega' = \omega$.

(ii) Für alle $X \in TP$ *und alle* $Y \in T_s\mathfrak{p} \cong \mathfrak{p}$ *gelten die folgenden Gleichungen, wobei* $\omega^{\mathfrak{k}}$ *die* $\mathfrak{k}$*- und* $\omega^{\mathfrak{p}}$ *die* $\mathfrak{p}$*-Komponente von* ω *bezeichnen und* $Z := Y - [s,\omega_o(X)] \in \mathfrak{p}$ *ist:*

$$\begin{aligned} \omega(X,Y) &= d_s\exp(Y) + \mathrm{Ad}(\exp s)^{-1}(\omega_o(X)) \\ &= \omega_o(X) + d_s\exp(Z) \ , \end{aligned}$$

$$\omega^{\mathfrak{k}}(X,Y) = \omega_o(X) - \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{(2k+2)!} \,\mathrm{ad}(s)^{2k+1}(Z) \ ,$$

$$\omega^{\mathfrak{p}}(X,Y) = 1_s(Z) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \,\mathrm{ad}(s)^{2k}(Z) \ .$$

(iii) Sind Ω, Ω_o *die Krümmungen von* ω, ω_o *respektive, so gilt für alle* $X_1, X_2 \in T_pP$, $Y_1, Y_2 \in T_s\mathfrak{p}$ *und* $p \in P$, $s \in \mathfrak{p}$

$$\Omega((X_1,Y_1),(X_2,Y_2)) = \mathrm{Ad}(\exp s)^{-1}\, \Omega_o(X_1,X_2) \ .$$

Beweis: Nach Lemma 3.4.2(ii) ist ω_o geeignet, d.h. $\omega_o \in C(P)$. Somit folgt (i) aus Satz 3.3.10. Die Gleichungen für $\omega(X,Y)$ in (ii) sind diejenigen aus Korollar 3.3.11. Wegen $[\mathfrak{p},\mathfrak{k}] \subset \mathfrak{p}$ ist $[s,\omega_o(X)]$ ein Element aus $\mathfrak{p}$, folglich liegt auch Z in $\mathfrak{p}$. Hieraus ergeben sich die Gleichungen für $\omega^{\mathfrak{k}}$ und $\omega^{\mathfrak{p}}$ aufgrund von (3.3.2) und (3.4.1). Die Aussage (iii) haben wir in Korollar 3.3.12 gezeigt. □

Wir kommen jetzt auf die in 1.4.3 angestellten Betrachtungen zurück. Wie dort zerlegen wir $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(4)$ in die direkte Summe von $\mathfrak{so}(3)$ und

$$\mathfrak{m} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & -{}^t x \\ \hline x & 0 \end{array}\right) \in so(4) \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^3 \right\} .$$

Es ist $Ad(A)(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$ für alle $A \in SO(3)$. Durch Einschränkung der adjungierten Darstellung von $SO(4)$ auf $SO(3)$ erhält man somit die lineare Darstellung

$$\rho: SO(3) \longrightarrow GL(\mathfrak{m}) \quad , \quad \rho(A) = Ad(A)_{|\mathfrak{m}} .$$

Bei kanonischer Identifizierung von $\mathfrak{m}$ mit dem Tangentialraum von $SO(4)/SO(3)$ am Ursprungspunkt $\bar{e} = SO(3)$ geht ρ in die lineare Isotropiedarstellung von $SO(3)$ über.

Wir betrachten den Isomorphismus

$$1: \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong} \mathfrak{m} \quad , \quad x \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} 0 & -{}^t x \\ \hline x & 0 \end{array}\right) .$$

Man hat

$$(3.4.4.) \quad \begin{array}{ll} 1 \circ A = Ad(A) \circ 1 & \text{für alle } A \in SO(3) \text{ und} \\ 1 \circ a = ad(a) \circ 1 & \text{für alle } a \in so(3) . \end{array}$$

Identifiziert man also $\mathfrak{m}$ mit $\mathbb{R}^3$ vermöge 1, so entspricht ρ die natürliche Darstellung von $SO(3)$ in $\mathbb{R}^3$, also die Inklusion von $SO(3)$ in $GL(3,\mathbb{R})$.

Sei nun wieder $\pi: P \longrightarrow M$ eine $SO(3)$-Struktur für eine 3-Mannigfaltigkeit M. Ist α eine $\mathbb{R}^3$-wertige Differentialform auf P, so bezeichnen wir mit $\hat{\alpha}$ die $\mathfrak{m}$-wertige Form $1 \circ \alpha$. Eigenschaften wie "Äquivarianz", "Horizontalität" und "punktweise Surjektivität" bleiben natürlich unter dem Isomorphismus

$$A(P,\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\cong} A(P,\mathfrak{m}) \quad , \quad \alpha \longmapsto \hat{\alpha}$$

erhalten. Hierbei bezieht sich "Äquivarianz" von α auf die Inklusion $SO(3) \subset GL(3,\mathbb{R})$ und "Äquivarianz" von $\hat{\alpha}$ auf ρ.

Wie wir in 1.3 und 1.4.3 gesehen haben, ist jeder Cartan-Zusammenhang vom Typ $(SO(4),SO(3))$ auf P von der Form $\omega_0 = \eta + \hat{\theta}$, wobei $\eta\colon TP \longrightarrow \mathfrak{so}(3)$ ein metrischer Zusammenhang für M und $\theta\colon TP \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine horizontale, äquivariante und punktweise surjektive 1-Form ist. Sind umgekehrt η und θ wie oben vorgegeben, so ist $\eta + \hat{\theta}$ ein Cartan-Zusammenhang auf P.

Gewöhnlich definiert man die Torsion $\Theta \in A^2(P,\mathbb{R}^3)$ eines Zusammenhangs η auf P als die äußere kovariante Ableitung der kanonischen 1-Form

$$\theta\colon TP \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \theta(X) = p^{-1}\,\pi_*(X) \quad \text{für } X \in T_pP \ .$$

Man hat dann die Strukturgleichung

$$\Theta(X,Y) = d\theta(X,Y) + \eta(X)\theta(Y) - \eta(Y)\theta(X) \ ,$$

oder äquivalent (nach (3.4.4.)):

$$\hat{\Theta} = d\hat{\theta} + [\eta,\hat{\theta}] + [\hat{\theta},\eta] \ .$$

3.4.5 Satz: *Sei M eine 3-dimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung $\varkappa>0$, P das* SO(3)*-Prinzipalbündel aller positiv orientierten Orthonormalbasen in* TM *und* ω_o: TP $\longrightarrow$ $\mathfrak{so}(4)$ *der durch* $\omega_o = \eta + \lambda\hat{\theta}$ *definierte Cartan-Zusammenhang auf P, wobei* η: TP $\longrightarrow$ $\mathfrak{so}(3)$ *der Levi-Cività-Zusammenhang für M,* θ: TP $\longrightarrow$ $\mathbb{R}^3$ *die kanonische 1-Form und* $\lambda\in\mathbb{R}$ *durch* $\lambda^2 = \varkappa$ *gegeben ist. Dann ist* ω_o *und somit der von* ω_o *auf B induzierte Cartan-Zusammenhang vom Typ* (G,j) *flach.*

Beweis: Wir betrachten zunächst einen beliebigen Zusammenhang η auf P. Die Krümmung von η bezeichnen wir mit H, die Torsion mit Θ. Sei e_1, e_2, e_3 die natürliche Basis von $\mathbb{R}^3$ und $e_i^j \in \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ die Matrix mit 1 in der (i,j)-ten Komponente (i-te Zeile, j-te Spalte) und 0 in den restlichen Komponenten. Wir schreiben

$$\eta = \sum_{i,j} \eta_j^i e_i^j \quad , \qquad \theta = \sum_i \theta^i e_i \ ,$$

$$H = \sum_{i,j} H_j^i e_i^j \quad , \qquad \Theta = \sum_i \Theta^i e_i \ ,$$

wobei θ die kanonische 1-Form auf P ist. Die beiden Strukturgleichungen

$$H = d\eta + [\eta,\eta]$$
$$\hat{\Theta} = d\hat{\theta} + [\eta,\hat{\theta}] + [\hat{\theta},\eta]$$

lesen sich dann komponentenweise wie folgt:

$$H_j^i = d\eta_j^i + \sum_k \eta_k^i \wedge \eta_j^k \ ,$$

$$\Theta^i = d\theta^i + \sum_k \eta_k^i \wedge \theta^k \ .$$

Nun ist für jede von Null verschiedene reelle Zahl λ die 1-Form $\lambda\theta\colon TP \longrightarrow \mathbb{R}^3$ offenbar äquivariant, horizontal und punktweise surjektiv, und folglich $\omega_o := \eta + \lambda\hat{\theta}$ ein Cartan-Zusammenhang vom Typ $(SO(4), SO(3))$. Stellt man ω_o und dessen Krümmung Ω_o in der Form

$$\omega_o = \sum_i \omega^i 1(e_i) + \sum_{i,j} \omega^i_j e^j_i ,$$

$$\Omega_o = \sum_i \Omega^i 1(e_i) + \sum_{i,j} \Omega^i_j e^j_i .$$

dar, so schreibt sich die Strukturgleichung $\Omega_o = d\omega_o + [\omega_o, \omega_o]$ als

$$\Omega^i = d\omega^i + \sum_k \omega^i_k \wedge \omega^k ,$$

$$\Omega^i_j = d\omega^i_j + \sum_k \omega^i_k \wedge \omega^k_j - \omega^i \wedge \omega^j .$$

Nach Definition von ω_o hat man $\omega^i = \lambda\theta^i$ und $\omega^i_j = \eta^i_j$. Somit ergibt sich:

$$\Omega^i = d(\lambda\theta^i) + \sum_k \eta^i_k \wedge \lambda\theta^k = \lambda\Theta^i ,$$

$$\Omega^i_j = d\eta^i_j + \sum_k \eta^i_k \wedge \eta^k_j - (\lambda\theta^i \wedge \lambda\theta^j) = H^i_j - \lambda^2(\theta^i \wedge \theta^j) .$$

Ist nun η der Levi-Cività-Zusammenhang von M, so ist $\Theta = 0$ und somit $\Omega^i = 0$, $(i = 1,2,3)$. Hat ferner M konstante Schnittkrümmung $\varkappa = \lambda^2$, so gilt (siehe [KNo],Ch.V,Prop. 2.4):

$$H^i_j = \varkappa\theta^i \wedge \theta^j .$$

Folglich ist auch $\Omega^i_j = 0$ und somit ω_o flach. Nach Korollar 3.4.3(iii) verschwindet dann auch die Krümmung des induzierten Cartan-Zusammenhangs $\omega\colon TB \longrightarrow \mathfrak{g}$. □

3.5 Strukturgleichungen und Bianchi-Identitäten

Wir beschreiben jetzt die Strukturgleichung $\Omega = d\omega + [\omega,\omega]$ komponentenweise in Bezug auf die folgende Basis von $\mathbb{R}^3 \times \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{3*}$: Seien $(e_i),(e_i^j)$ und (e^j) die Standard-Basen von $\mathbb{R}^3$, $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ und $\mathbb{R}^{3*}$ respektive. Zu jeder k-Form $\alpha \in A^k(B,\mathfrak{g})$ gibt es eindeutig bestimmte k-Formen $\alpha^i,\alpha_j^i,\alpha_j \in A^k(B,\mathbb{R})$ mit

$$\alpha = \sum_i \alpha^i e_i + \sum_{i,j} \alpha_j^i e_i^j + \sum_j \alpha_j e^j .$$

Wie in Abschnitt 1.5 schreiben wir kurz $\alpha = (\alpha^i,\alpha_j^i,\alpha_j)$.

3.5.1 Satz: *Sei* $\omega = (\omega^i,\omega_j^i,\omega_j)$ *ein Cartan-Zusammenhang auf* B *vom Typ* G *und* $\Omega = (\Omega^i,\Omega_j^i,\Omega_j)$ *die Krümmung von* ω. *Dann gelten die folgenden Strukturgleichungen, wobei die Indizes modulo 3 zu nehmen sind und* δ_j^i *das Kronecker-Symbol bezeichnet:*

$$\Omega^i = d\omega^i + \sum_k \omega_k^i \wedge \omega^k - \sqrt{2}\, \omega_{i+1} \wedge \omega_{i+2} ,$$

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i + \sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \tfrac{3}{2}\, \omega^i \wedge \omega_j - \tfrac{1}{2}\, \delta_j^i \sum_k \omega^k \wedge \omega_k ,$$

$$\Omega_j = d\omega_j + \sum_k \omega_k \wedge \omega_j^k + \sqrt{2}\, \omega^{j+1} \wedge \omega^{j+2} .$$

Beweis: Man erhält diese Gleichungen aus den bekannten Strukturgleichungen für $\mathfrak{gl}(7,\mathbb{R})$, wenn man ω und Ω vermöge der in Lemma 2.1.4 angegebenen treuen Darstellung

$$\rho\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(7,\mathbb{R})$$

als Differentialformen mit Werten in $\mathfrak{gl}(7,\mathbb{R})$ betrachtet:

Wir setzen deshalb

$$\gamma = \rho \circ \omega = \sum_{i,j=0}^{6} \gamma^i_j f^j_i$$

und

$$\Gamma = \rho \circ \Omega = \sum_{i,j=0}^{6} \Gamma^i_j f^j_i \ ,$$

wobei $\{f^j_i \mid 0 \leqslant i,j \leqslant 6\}$ die Standard-Basis von $\mathfrak{gl}(7,\mathbb{R})$ bezeichnet:

$$f^j_i = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \cdots \ (i+1)\text{-te Zeile}$$

$$(j+1)\text{-te Spalte} \quad .$$

Aus $\Omega = d\omega + [\omega,\omega]$ folgt dann natürlich $\Gamma = d\gamma + [\gamma,\gamma]$, d.h. komponentenweise:

$$\Gamma^i_j = d\gamma^i_j + \sum_{k=0}^{6} \gamma^i_k \wedge \gamma^k_j \quad \text{für alle } i,j = 0,\ldots,6 \ .$$

Die Beziehung zwischen den $\omega^i, \omega^i_j, \omega_j$ und den γ^i_j wird nun nach Definition von ρ durch die Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} \gamma^0_0 & \cdots & \gamma^0_6 \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma^6_0 & \cdots & \gamma^6_6 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} 0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & -\omega^1 & -\omega^2 & -\omega^3 \\ \hline \omega^1 & \omega^1_1 & \omega^1_2 & \omega^1_3 & 0 & -\lambda\omega_3 & \lambda\omega_2 \\ \omega^2 & \omega^2_1 & \omega^2_2 & \omega^2_3 & \lambda\omega_3 & 0 & -\lambda\omega_1 \\ \omega^3 & \omega^3_1 & \omega^3_2 & \omega^3_3 & -\lambda\omega_2 & \lambda\omega_1 & 0 \\ \hline -\omega_1 & 0 & \lambda\omega^3 & -\lambda\omega^2 & -\omega^1_1 & -\omega^2_1 & -\omega^3_1 \\ -\omega_2 & -\lambda\omega^3 & 0 & \lambda\omega^1 & -\omega^1_2 & -\omega^2_2 & -\omega^3_2 \\ -\omega_3 & \lambda\omega^2 & -\lambda\omega^1 & 0 & -\omega^1_3 & -\omega^2_3 & -\omega^3_3 \end{array}\right)$$

mit $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ beschrieben. Entsprechend gilt diese Gleichheit, wenn man $\omega^i, \omega^i_j, \omega_j$ durch $\Omega^i, \Omega^i_j, \Omega_j$ und γ^i_j durch Γ^i_j ersetzt.

Für i = 1,2,3 verifiziert man nun zunächst

$$\sum_{k=4}^{6} \gamma^i_k \wedge \gamma^k_o = \begin{cases} -2\lambda\ \omega_2 \wedge \omega_3 & \text{falls } i=1 \\ -2\lambda\ \omega_3 \wedge \omega_1 & \text{falls } i=2 \\ -2\lambda\ \omega_1 \wedge \omega_2 & \text{falls } i=3 \end{cases}$$

$$= \quad -\sqrt{2}\ \omega_{i+1} \wedge \omega_{i+2} \qquad \text{(Indizes mod 3)}\ .$$

Damit ergibt sich

$$\Omega^i = \Gamma^i_o = d\gamma^i_o + \gamma^i_o \wedge \gamma^o_o + \sum_{k=1}^{3} \gamma^i_k \wedge \gamma^k_o + \sum_{k=4}^{6} \gamma^i_k \wedge \gamma^k_o$$

$$= d\omega^i + \sum_{k=1}^{3} \omega^i_k \wedge \omega^k - \sqrt{2}\ \omega_{i+1} \wedge \omega_{i+2} \qquad \text{(Indizes mod 3)}\ .$$

Die Gleichung für Ω_j, (j = 1,2,3), erhält man auf analoge Weise. Schließlich zeigt man für alle i,j = 1,2,3 die Formel

$$\sum_{k=4}^{6} \gamma^i_k \wedge \gamma^k_j = \lambda\omega^i \wedge \lambda\omega_j + \delta^i_j \sum_{k=1}^{3} \lambda\omega_k \wedge \lambda\omega^k$$

und erhält somit

$$\Omega^i_j = \Gamma^i_j = d\gamma^i_j + \gamma^i_o \wedge \gamma^o_j + \sum_{k=1}^{3} \gamma^i_k \wedge \gamma^k_j + \sum_{k=4}^{6} \gamma^i_k \wedge \gamma^k_j$$

$$= d\omega^i_j + \omega^i \wedge \omega_j + \sum_{k=1}^{3} \omega^i_k \wedge \omega^k_j + \tfrac{1}{2}\omega^i \wedge \omega_j + \tfrac{1}{2}\delta^i_j \sum_{k=1}^{3} \omega_k \wedge \omega^k\ .$$

$\square$

In Abschnitt 1.5 haben wir die Frage aufgeworfen, inwieweit sich die Theorie der projektiven und konformen Cartan-Zusammenhänge auf verallgemeinerte Cartan-Zusammenhänge vom Typ G übertragen läßt. Nun ist

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3 \oplus \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{3*}$$

keine Graduierung, und die Ähnlichkeit von $\mathfrak{g}$ mit den Liealgebren

$$\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{n*} ,$$

$$\mathfrak{o}(n+1,1) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{co}(n,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{n*}$$

ist nur äußerer Natur. Dies verhindert eine Anwendung der in 1.5 skizzierten Methoden schon zu Beginn. Zwar wird die Algebra $A(B,\mathbb{R})$ wie in 1.5 von den Komponenten $\omega^i, \omega^i_j, \omega_j$ eines beliebigen Cartan-Zusammenhangs $\omega\colon TB \longrightarrow \mathfrak{g}$ erzeugt, jedoch treten jetzt bei horizontalen Formen im allgemeinen auch die Komponenten ω^i_j und ω_j auf, denn bereits die $\mathbb{R}^3$-Komponente (ω^i) von ω ist nicht horizontal: Nach Korollar 3.3.11(i) bildet nämlich ω den Vertikalraum $V_bB = V_pP \times T_s\mathfrak{p}$ im Punkt $b = (p,s) \in B = P \times \mathfrak{p}$ isomorph auf $d_s\exp(\mathfrak{p}) \oplus \mathrm{Ad}(\exp s)^{-1}(\mathfrak{so}(3))$ ab. Im Fall $s = 0$ hat man also

$$\omega\colon V_bB \xrightarrow{\cong} \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{so}(3) ,$$

und da die Projektion von $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3 \oplus \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{3*}$ auf den ersten Faktor $\mathbb{R}^3$ den Raum $\mathfrak{p}$ surjektiv auf $\mathbb{R}^3$ abbildet, ist $(\omega^i)\colon V_bB \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ebenfalls surjektiv, also $(\omega^i)\colon TB \longrightarrow \mathbb{R}^3$ nicht horizontal.

Die Komponenten $\Omega^i, \Omega^i_j, \Omega_j$ der Krümmung von ω werden also im allgemeinen nicht von den ω^i erzeugt. In der in 1.5 beschriebenen Situation ist aber gerade die Darstellbarkeit der Krümmung durch die ω^i der Ausgangspunkt für die weiteren Überlegungen. Insbesondere basiert die Charakterisierung des normalen projektiven Zusammenhangs (vgl. Satz 1.5.2) hierauf. Die Unterschiede werden auch deutlich, wenn man die oben angegebenen Strukturgleichungen mit denen aus (1.5.1) vergleicht: So treten in Satz 3.5.1 in dem Ausdruck für $\Omega^i - d\omega^i$ nicht nur - wie in (1.5.1) - die Komponenten ω^i und ω^i_j auf, sondern auch die ω_j. Die der Bedingungung (*) aus Satz 1.5.2 entsprechende Forderung würde also im vorliegenden Fall auch die Vorgabe der ω_j erzwingen.

Zum Schluß dieses Abschnitts notieren wir noch die Bianchi-Identität komponentenweise:

3.5.2 Satz: *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.5.1 gelten die folgenden Gleichungen, (Indizes modulo 3):*

$$d\Omega^i = \sum_k(\Omega^i_k\wedge\omega^k-\Omega^k\wedge\omega^i_k) - \sqrt{2}(\Omega_{i+1}\wedge\omega_{i+2}-\Omega_{i+2}\wedge\omega_{i+1}) ,$$

$$d\Omega^i_j = \sum_k(\Omega^i_k\wedge\omega^k_j-\Omega^k_j\wedge\omega^i_k) + \tfrac{3}{2}(\Omega^i\wedge\omega_j-\Omega_j\wedge\omega^i) - \tfrac{1}{2}\delta^i_j \sum_k(\Omega^k\wedge\omega_k-\Omega_k\wedge\omega^k) ,$$

$$d\Omega_j = \sum_k(\Omega_k\wedge\omega^k_j-\Omega^k_j\wedge\omega_k) + \sqrt{2}(\Omega^{j+1}\wedge\omega^{j+2}-\Omega^{j+2}\wedge\omega^{j+1}) .$$

Der Beweis ergibt sich durch äußere Differentiation der Strukturgleichungen 3.5.1.

3.6 Komplexe Cartan-Zusammenhänge

Während wir bisher verallgemeinerte Cartan-Zusammenhänge diskutiert haben, denen die 3-Sphäre als Modellraum zugrunde lag, wollen wir uns nun auch die Frage stellen, ob eine ähnliche Konstruktion für den hyperbolischen Raum H^3 als Modell möglich ist. Die Isometriegruppe von H^3 ist die Lorentzgruppe, und ihre Liealgebra ist eine reelle Form von $\mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$, also in der komplexen Liealgebra vom Typ G_2 enthalten, (siehe 2.4.4). Es liegt daher nahe, die vorhergehenden Betrachtungen zu komplexifizieren. Analog zu Satz 3.4.5 sollte es dann möglich sein, zu jeder Raumform negativer Krümmung einen komplexen Cartan-Zusammenhang vom Typ G angeben zu können, dessen Krümmung verschwindet. In diesem Abschnitt wollen wir komplexe Cartan-Zusammenhänge einführen.

Sei zunächst E ein reeller Vektorraum und $E^{\mathbb{C}} = E \otimes \mathbb{C}$ seine Komplexifizierung, wobei wir wieder λx anstelle von $x \otimes \lambda$ schreiben, $(x \in E,\ \lambda \in \mathbb{C})$. Insbesondere identifizieren wir $x \in E$ mit $x \otimes 1 \in E^{\mathbb{C}}$. Ist F ein weiterer reeller Vektorraum, so bezeichne $A^k(E,F)$ den Raum der alternierenden, multilinearen Abbildungen von $E^k = E \times \ldots \times E$ (k-mal) nach F. Analog definieren wir $A^k(E,F^{\mathbb{C}})$ und $A^k(E^{\mathbb{C}},F^{\mathbb{C}})$, wobei wir jedoch im letzten Fall $E^{\mathbb{C}}$ und $F^{\mathbb{C}}$ als komplexe Vektorräume betrachten, d.h. die Multilinearität bezieht sich auf $\mathbb{C}$. Für $k = 1$ schreiben wir auch $L(E,F)$, $L(E,F^{\mathbb{C}})$ und $L(E^{\mathbb{C}},F^{\mathbb{C}})$. Man hat kanonische ($\mathbb{C}$-lineare) Isomorphismen

$$(3.6.1) \qquad L(E,F) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\gamma} L(E^{\mathbb{C}},F^{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\delta} L(E,F^{\mathbb{C}}) ,$$

definiert durch

$$\gamma(l\otimes\lambda) = l \otimes \lambda\cdot \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \quad \text{für alle } l \in L(E,F) \text{ und } \lambda\in\mathbb{C} ,$$
$$\delta(h) = h_{|E} \quad \text{für alle } h \in L(E^{\mathbb{C}},F^{\mathbb{C}}) .$$

Insbesondere läßt sich also jede lineare Abbildung $E \longrightarrow F^{\mathbb{C}}$ zu genau einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung $E^{\mathbb{C}} \longrightarrow F^{\mathbb{C}}$ fortsetzen.

Setzt man in (3.6.1) anstelle des Raumes E dessen k-te äußere Potenz $\Lambda^k E$ ein und identifiziert $L(\Lambda^k E,F)$ mit $A^k(E,F)$ in kanonischer Weise, so erhält man die Isomorphismen

$$(3.6.2) \qquad A^k(E,F) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\gamma} A^k(E^{\mathbb{C}},F^{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\delta} A^k(E,F^{\mathbb{C}}) .$$

Diese Überlegungen lassen sich ohne Schwierigkeiten auf Vektorbündel übertragen:

Sei $\mathbb{E} \longrightarrow B$ ein reelles Vektorbündel. Die Faser von $\mathbb{E}$ über einem Punkt $b\in B$ bezeichnen wir mit $\mathbb{E}_b$, den $C^\infty(B,\mathbb{R})$-Modul der glatten Schnitte von $\mathbb{E}$ mit $\Gamma\mathbb{E}$. Die Komplexifizierung $\mathbb{E}^{\mathbb{C}}$ von $\mathbb{E}$ erhält man durch Komplexifizierung der einzelnen Fasern von $\mathbb{E}$,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{C}} = \mathbb{E} \otimes (B\times\mathbb{C}) = \mathbb{E} \oplus i\mathbb{E} .$$

Ist $\mathbb{F}$ ein weiteres reelles Vektorbündel über der gleichen Basis B, so kann man das Vektorbündel

$$A^k(\mathbb{E},\mathbb{F}) \cong \Lambda^k\mathbb{E}^* \otimes \mathbb{F}$$

betrachten, dessen Faser über einem Punkt $b\in B$ der Vektorraum $A^k(\mathbb{E}_b,\mathbb{F}_b)$ ist. Entsprechend sind die Vektorbündel $A^k(\mathbb{E},\mathbb{F}^{\mathbb{C}})$

und $A^k(\mathbb{E}^{\mathbb{C}},\mathbb{F}^{\mathbb{C}})$ definiert, wobei im letzten Fall $\mathbb{E}^{\mathbb{C}}$ und $\mathbb{F}^{\mathbb{C}}$ als komplexe Vektorbündel aufzufassen sind. Analog zu (3.6.2) hat man jetzt kanonische starke Isomorphismen der (komplexen) Vektorbündel

$$A^k(\mathbb{E},\mathbb{F}) \otimes (B\times\mathbb{C}) \xrightarrow{\gamma} A^k(\mathbb{E}^{\mathbb{C}},\mathbb{F}^{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\delta} A^k(\mathbb{E},\mathbb{F}^{\mathbb{C}}) .$$

Die Schnittmodule dieser Bündel sind folglich ebenfalls isomorph zueinander. Identifiziert man schließlich noch $\Gamma(A^k(\mathbb{E},\mathbb{F}) \otimes (B\times\mathbb{C}))$ mit $\Gamma A^k(\mathbb{E},\mathbb{F}) \otimes \mathbb{C}$, so erhält man

3.6.3 Lemma: *Seien* $\mathbb{E}$ und $\mathbb{F}$ *reelle Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit* B. *Dann hat man kanonische Isomorphismen (als* $C^\infty(B,\mathbb{C})$*-Module) wie folgt:*

$$\Gamma A^k(\mathbb{E},\mathbb{F}) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\gamma} \Gamma A^k(\mathbb{E}^{\mathbb{C}},\mathbb{F}^{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\delta} \Gamma A^k(\mathbb{E},\mathbb{F}^{\mathbb{C}}) .$$

Explizit sind γ *und* δ *durch folgende Gleichungen gegeben:*

$$\gamma(s\otimes\lambda)(b)(x_1\otimes\mu_1,\ldots,x_k\otimes\mu_k) = s(b)(x_1,\ldots,x_k) \otimes \lambda\mu_1\ldots\mu_k ,$$
$$\delta(S)(b) = S(b)|_{(\mathbb{E}_b)^k}$$

für alle $s \in \Gamma A^k(\mathbb{E},\mathbb{F})$, $S \in \Gamma A^k(\mathbb{E}^{\mathbb{C}},\mathbb{F}^{\mathbb{C}})$, $b\in B$, $x_i \in \mathbb{E}_b$ *und* $\lambda,\mu_i\in\mathbb{C}$.

Wir interessieren uns vor allem für den Fall, in dem $\mathbb{E}$ das Tangentialbündel von B und $\mathbb{F}$ ein triviales Bündel ist, sagen wir $\mathbb{F} = B \times F$. Wir setzen

$$A^k(B^{\mathbb{C}},F^{\mathbb{C}}) = \Gamma A^k((TB)^{\mathbb{C}},B\times F^{\mathbb{C}})$$

und - in Übereinstimmung mit der weiter vorne verwendeten Notation -

$$A^k(B,F) = \Gamma A^k(TB, B\times F) \;,$$
$$A^k(B,F^{\mathbb{C}}) = \Gamma A^k(TB, B\times F^{\mathbb{C}}) .$$

Die Elemente aus $A^k(B,F) \otimes \mathbb{C}$ nennen wir auch komplexe k-Formen auf B mit Werten in F. Wegen

$$A^k(B,F) \otimes \mathbb{C} \cong A^k(B^{\mathbb{C}},F^{\mathbb{C}}) \cong A^k(B,F^{\mathbb{C}})$$

können solche Formen sowohl als $F^{\mathbb{C}}$-wertige Formen auf B wie auch als Abbildungen $(TB)^{\mathbb{C}} \oplus \ldots \oplus (TB)^{\mathbb{C}} \longrightarrow F^{\mathbb{C}}$ interpretiert werden. Die (reellen) F-wertigen k-Formen auf B betrachten wir vermöge der natürlichen Inklusion von $A^k(B,F)$ in $A^k(B,F) \otimes \mathbb{C}$ auch als komplexe Formen.

3.6.4 Definition: Unter einem komplexen Zusammenhang auf einem H-Prinzipalbündel P verstehen wir eine $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$-wertige 1-Form η auf P mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\eta(A^*) = A$ für alle $A \in \mathfrak{h}$,

(ii) $R_h{}^*\eta = \mathrm{Ad}(h^{-1})\eta$ für alle $h \in H$,

wobei $\mathrm{Ad}(h^{-1})$ als Element in $GL(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$ aufgefaßt wird. Die komplexe 2-Form $d\eta + [\eta,\eta]$ heißt Krümmung von η.

3.6.5 Lemma: *Seien $\eta \in A^1(P,\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$ und $\eta_1, \eta_2 \in A^1(P,\mathfrak{h})$ mit $\eta = \eta_1 + i\eta_2$. Dann ist η genau dann ein komplexer Zusammenhang auf P, wenn der Realteil η_1 ein Zusammenhang und der Imaginärteil η_2 eine horizontale, äquivariante 1-Form auf P ist.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar.

3.6.6 Definition: Sei B ein Faserbündel über einer Mannigfaltigkeit M und G eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$. Es gelte dim G = dim B. Eine Form $\omega \in A^1(B, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ heißt (verallgemeinerter) <u>komplexer Cartan-Zusammenhang vom Typ G</u>, wenn es ein G-Prinzipalbündel P' über M und eine starke Bündelabbildung j von B in P' gibt, so daß die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Es gibt einen komplexen Zusammenhang ω' auf P' mit $j^*\omega' = \omega$.

(ii) $\omega(X) \neq 0$ für alle $X \in TB$ mit $X \neq 0$.

Sind P' und j vorgegeben, so sagen wir, ω sei <u>vom Typ (G,j)</u>. Ferner nennen wir $\Omega = d\omega + [\omega,\omega]$ die <u>Krümmung</u> von ω.

Betrachtet man einen komplexen Cartan-Zusammenhang ω als Element in $A^1(B^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$, so wird hierdurch eine Trivialisierung des komplexen Tangentialbündels von B definiert:

$$\omega\colon (TB)^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\cong} B \times \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} .$$

3.6.7 Beispiel: Sei H eine abgeschlossene Untergruppe von G und B = P ein H-Prinzipalbündel über einer Mannigfaltigkeit M mit dim M = dim G/H. Ferner sei $P' = P \times_H G$ und $j\colon P \longrightarrow P'$ die Inklusion. Eine Form $\omega \in A^1(P, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ ist genau dann ein komplexer Cartan-Zusammenhang vom Typ (G,j), wenn die folgenden drei Bedingungen gelten:

(i) $\omega(A^*) = A$ für alle $A \in \mathfrak{h}$,

(ii) $R_h^* \omega = \mathrm{Ad}(h^{-1})\omega$ für alle $h \in H$,

(iii) $\omega(X) \neq 0$ für alle $X \in TB$ mit $X \neq 0$.

In diesem Fall nennen wir ω auch einen <u>komplexen Cartan-Zusammenhang vom Typ (G,H)</u>. Die Betrachtungen aus Abschnitt 1.3 können leicht auf komplexe Cartan-Zusammenhänge übertragen werden. Ist insbesondere G/H reduktiv, sagen wir $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ mit $\mathrm{Ad}(h)(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$ für alle $h \in H$, so ist die $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$-Komponente von ω ein komplexer Zusammenhang auf P, während die $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$-Komponente θ eine horizontale, äquivariante 1-Form mit $\theta(T_pP) \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ für alle $p \in P$ ist. Betrachtet man θ als Abbildung $(TP)^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$, so ist θ punktweise surjektiv. Hat man umgekehrt einen komplexen Zusammenhang η auf P sowie eine horizontale, äquivariante, punktweise surjektive komplexe 1-Form θ: $(TP)^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ vorgegeben, so ist $\eta + \theta$ ein komplexer Cartan-Zusammenhang auf P.

3.7 <u>Komplexe verallgemeinerte Cartan-Zusammenhänge vom Typ G_2</u>

Wir kommen jetzt wieder auf die in den Abschnitten 3.2 - 3.5 betrachtete Situation zurück und übernehmen die dort gemachten Voraussetzungen und eingeführten Bezeichnungen. Insbesondere betrachten wir wieder das kommutative Diagramm (3.3.8):

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\iota"] \arrow[rr, bend right, "i"'] & B = P \times \mathfrak{p} \arrow[r, "j"] & P' = P \times_{SO(3)} G \end{tikzcd}$$

Wie in 3.2 haben wir $so(4)$ mit $\mathfrak{k}$ und somit $so(4,\mathbb{C})$ mit $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ vermöge der Abbildung ψ: $so(4,\mathbb{C}) \longrightarrow g^{\mathbb{C}}$ aus 2.4.4 identifiziert. Die Gruppe SO(3) operiert wieder auf G von links durch $A \cdot g = \Psi(A) \cdot g$ für alle $A \in SO(3)$ und $g \in G$, wobei Ψ: $SO(4) \longrightarrow G$ die durch $\Psi_* = \psi$ bestimmte Einbettung bezeichnet, (vgl. 2.5.2).

Sei $C^{\mathbb{C}}(B)$ die Menge aller (verallgemeinerten) komplexen Cartan-Zusammenhänge auf B vom Typ (G,j). Eine Satz 3.3.10 entsprechende Charakterisierung von $C^{\mathbb{C}}(B)$ erhält man wie folgt:

Es bezeichne $C^{\mathbb{C}}(P)$ die Menge aller 1-Formen $\omega_o \in A^1(P,g^{\mathbb{C}})$, die den folgenden vier Bedingungen genügen, (wobei $Ad(h)^{-1}$ als Element in $GL(g^{\mathbb{C}})$ betrachtet wird):

(1) $\omega_o(A^*) = A$ für alle $A \in so(3) \subset g$,

(2) $R_h{}^*\omega_o = Ad(h)^{-1}\omega_o$ für alle $h \in SO(3) \subset G$,

(3) $\omega_o(X) \neq 0$ für alle $X \in TP$ mit $X \neq 0$,

(4) $\omega_o(T_pP) \cap d_s exp(\mathfrak{p}) = \{0\}$ für alle $p \in P$ und $s \in \mathfrak{p}$.

Ferner sei $C^{\mathbb{C}}(P') \subset A^1(P',g^{\mathbb{C}})$ die Menge aller komplexen Zusammenhänge ω' auf P' mit der Eigenschaft, daß $\omega_o := i^*\omega'$ die Bedingungen (3) und (4) erfüllt. Mit den Bezeichnungen 3.3.9 hat man

$$C(P) = C^{\mathbb{C}}(P) \cap A^1(P,g) ,$$

$$C(B) = C^{\mathbb{C}}(B) \cap A^1(B,g) ,$$

$$C(P') = C^{\mathbb{C}}(P') \cap A^1(P',g) .$$

3.7.1 Satz: *Man hat das folgende kommutative Diagramm, in dem alle Abbildungen Bijektionen sind:*

$$\begin{tikzcd} C^{\mathbb{C}}(P) & C^{\mathbb{C}}(B) \arrow[l, "\iota^*"'] & C^{\mathbb{C}}(P') \arrow[l, "j^*"'] \arrow[ll, bend left, "i^*"] \end{tikzcd}$$

Insbesondere gibt es zu jeder 1-Form $\omega_o \in C^{\mathbb{C}}(P)$ *genau einen komplexen Cartan-Zusammenhang* ω *auf* B *vom Typ* (G,j) *mit* $\iota^*\omega = \omega_o$. *Er ist gegeben durch*

$$\omega(X,Y) = \mathrm{Ad}(\exp s)^{-1}(d_{-s}\exp Y + \omega_o(X))$$

für alle $X \in TP$ *und alle* $Y \in T_s\mathfrak{p} \cong \mathfrak{p}$.

Beweis: Sei ω' ein komplexer Zusammenhang auf P'. Da Lemma 3.3.5 allgemeiner auch für komplexe Zusammenhänge gilt (der Beweis kann wörtlich übernommen werden), hat man

$$j^*\omega'(X,Y) = \mathrm{Ad}(\exp s)^{-1}(d_{-s}\exp Y + \omega'(X))$$

für alle $X \in TP$ und $Y \in T_s\mathfrak{p} \cong \mathfrak{p}$. Nun ist die Einschränkung von $d_s\exp$ auf $\mathfrak{p}$ für jedes $s \in \mathfrak{p}$ injektiv, (Lemma 3.4.2(ii)). Die obige Gleichung impliziert somit die folgenden Äquivalenzen:

$$\omega' \in C^{\mathbb{C}}(P') \iff j^*\omega' \in C^{\mathbb{C}}(B) \iff i^*\omega' \in C^{\mathbb{C}}(P) .$$

Folglich hat man die Abbildungen

$$j^*: C^{\mathbb{C}}(P') \longrightarrow C^{\mathbb{C}}(B) \quad \text{und} \quad i^*: C^{\mathbb{C}}(P') \longrightarrow C^{\mathbb{C}}(P) .$$

Nach Lemma 1.1.2 sind beide Abbildungen injektiv. Ferner ist

j^* surjektiv nach Definition 3.6.6. Die Surjektivität von i^* zeigt man wie im Beweis von Satz 3.3.10. Wegen $i = j \circ \iota$ bildet ι^* den Raum $C^{\mathbb{C}}(B)$ bijektiv auf $C^{\mathbb{C}}(P)$ ab. □

Die Erweiterung von Korollar 3.4.3 auf komplexe Cartan-Zusammenhänge liest sich nun wie folgt:

3.7.2 Korollar: *Sei* $\omega_o\colon TP \longrightarrow so(4,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ *ein komplexer Cartan-Zusammenhang vom Typ* $(SO(4),SO(3))$.

(i) *Es gibt genau einen (verallgemeinerten) komplexen Cartan-Zusammenhang* $\omega\colon TB \longrightarrow \mathfrak{g}$ *vom Typ* (G,j) *mit* $\iota^*\omega = \omega_o$. *Ferner gibt es genau einen komplexen Zusammenhang* $\omega'\colon TP' \longrightarrow \mathfrak{g}$ *mit* $i^*\omega' = \omega_o$. *Es gilt* $j^*\omega' = \omega$.

(ii) *Seien* $X \in TP$, $Y \in T_s\mathfrak{p} \cong \mathfrak{p}$ *und* $Z := Y - [s,\omega_o(X)]$. Z *liegt in* $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$. *Es gelten folgende Gleichungen, wobei* $\omega = \omega^{\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}} + \omega^{\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}}$ *die Zerlegung von* ω *in die* $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$- *und die* $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$-*Komponente bezeichnet (und* $\mathrm{Ad}(\exp s)$, $\mathrm{ad}(s)$ *und* $d_s\exp$ *als Endomorphismen von* $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ *aufgefaßt werden):*

$$\begin{aligned}\omega(X,Y) &= d_s\exp(Y) + \mathrm{Ad}(\exp s)^{-1}(\omega_o(X))\\ &= \omega_o(X) + d_s\exp(Z)\ ,\end{aligned}$$

$$\omega^{\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}}(X,Y) = \omega_o(X) - \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{(2k+2)!}\,\mathrm{ad}(s)^{2k+1}(Z)\ ,$$

$$\omega^{\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}}(X,Y) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\,\mathrm{ad}(s)^{2k}(Z)\ .$$

(iii) *Sind* Ω *und* Ω_o *die Krümmungen von* ω *und* ω_o *respektive, so gilt*

$$\Omega((X_1,Y_1),(X_2,Y_2)) = \mathrm{Ad}(\exp s)^{-1}\,\Omega_o(X_1,X_2)$$

für alle $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2) \in T_pP \times T_s\mathfrak{p}$ *(wobei* $\mathrm{Ad}(\exp s)$ *als Automorphismus von* $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ *betrachtet wird).*

Beweis: Der komplexe Cartan-Zusammenhang ω_o: $TP \longrightarrow \mathfrak{so}(4,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ liegt in $C^{\mathbb{C}}(P)$: Die Bedingungen (1),(2) und (3) gelten aufgrund von 3.6.7. Da ferner $\mathfrak{g}$ für jedes $s\in\mathfrak{p}$ die direkte Summe von $\mathfrak{k}$ und $d_s\exp(\mathfrak{p})$ ist (vgl. 3.4.2(ii)), hat man $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \cap d_s\exp(\mathfrak{p}) = \{0\}$, also genügt ω_o auch der Bedingung (4). Die Aussage (i) folgt somit aus dem vorhergehenden Satz. Unter Benutzung von Lemma 3.3.3 erhält man die in (ii) behaupteten Formeln für $\omega(X,Y)$ ebenfalls aus diesem Satz. Wegen $[\mathfrak{k},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ hat man $[\mathfrak{k}^{\mathbb{C}},\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}] \subset \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$, also liegt Z für alle $X \in TP$ und alle $Y,s \in \mathfrak{p}$ in $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$. Die Zerlegung von $d_s\exp Z$ in die $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$- und die $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$-Komponente liefert dann die Gleichungen für $\omega^{\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}}$ und $\omega^{\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}}$, vgl. (3.3.2) und (3.4.1). Für die Krümmung von ω_o und ω hat man schließlich wieder die Beziehung $\iota^*\Omega = \Omega_o$, und wie in Korollar 3.3.12 erhält man (iii). □

Es ist nun nicht schwer, Satz 3.4.5 auch auf orientierte dreidimensionale Raumformen negativer Krümmung auszudehnen. Wie in 3.4 schreiben wir $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(4)$ als direkte Summe $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{m}$ und somit

$$\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(4,\mathbb{C}) = \mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}\ .$$

Sei η ein Zusammenhang auf P und θ: $TP \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die kanonische 1-Form. Wir setzen wieder $\hat{\theta} = 1 \circ \theta$, wobei 1 die natürliche

Identifizierung $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong} \mathfrak{m}$ ist, (vgl. 3.4). Betrachtet man η und $\hat{\theta}$ als komplexe Formen, so ist natürlich η ein komplexer Zusammenhang auf P, während $\hat{\theta}$, und allgemeiner $\lambda\hat{\theta}$ für jede von Null verschiedene komplexe Zahl λ, eine komplexe Verschmelzungsform ist, d.h. $\lambda\hat{\theta}$ ist horizontal, äquivariant und, aufgefaßt als Element in $A^1(P^{\mathbb{C}},\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$, punktweise surjektiv. Folglich ist $\omega_0 := \eta + \lambda\hat{\theta}$ ein komplexer Cartan-Zusammenhang auf P vom Typ (SO(4),SO(3)) und induziert somit einen komplexen Cartan-Zusammenhang ω auf B vom Typ (G,j). Als Verallgemeinerung von Satz 3.4.5 hat man dann:

3.7.3 Satz: *Sei* M *eine 3-dimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung* $\varkappa \neq 0$ *und* P *das* SO(3)*-Prinzipalbündel aller positiv orientierten Orthonormalbasen in* TM. *Ferner sei* η *der Levi-Cività-Zusammenhang für* M, θ *die kanonische 1-Form auf* P, *und* $\lambda \in \mathbb{C}$ *sei durch* $\lambda^2 = \varkappa$ *gegeben. Dann ist* $\omega_0 : TP \longrightarrow \mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$, *definiert durch* $\omega_0 = \eta + \lambda\hat{\theta}$, *ein flacher komplexer Cartan-Zusammenhang auf* P *vom Typ* (SO(4),SO(3)). *Der nach Korollar 3.7.2 von* ω_0 *auf* B *induzierte komplexe Cartan-Zusammenhang* ω *vom Typ* (G,j) *ist ebenfalls flach.*

Der Beweis verläuft wie in Satz 3.4.5.

3.8 Verallgemeinerte Cartan-Zusammenhänge von halbeinfachem, nicht-kompaktem Typ

Die in den vorhergehenden Abschnitten beschriebene Konstruktion beruht in erster Linie auf der Cartan-Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Sie kann daher in analoger Weise für jede halbeinfache, nicht-kompakte Liealgebra durchgeführt werden, vorausgesetzt, man hat ein geeignetes Ausgangsbündel $P \longrightarrow M$ zur Verfügung. Man erhält dann insbesondere ein dem Korollar 3.4.3 entsprechendes Ergebnis, denn durch Lemma 3.4.2 (das ja für jede Cartan-Zerlegung einer beliebigen halbeinfachen reellen Liealgebra gilt) wird garantiert, daß der von einem Cartan-Zusammenhang $\omega_o: TP \longrightarrow \mathfrak{k}$ induzierte verallgemeinerte Cartan-Zusammenhang $\omega: TB \longrightarrow \mathfrak{g}$ tatsächlich einen absoluten Parallelismus auf B definiert. Anstelle des Prinzipalbündels P kann man auch allgemeiner ein Faserbündel $B_o \longrightarrow M$ zugrundelegen, wobei dann die Form $\omega_o: TB_o \longrightarrow \mathfrak{k}$ ein verallgemeinerter Cartan-Zusammenhang ist. Man erhält so die im folgenden formulierte Verallgemeinerung von Korollar 3.4.3:

Sei G eine halbeinfache, nicht-kompakte Liegruppe und K eine Liesche Untergruppe von G mit Liealgebra $\mathfrak{k}$, wobei $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ eine Cartan-Zerlegung der Liealgebra von G ist. Ferner sei $B_o \longrightarrow M$ ein Faserbündel, $P'_o \longrightarrow M$ ein K-Prinzipalbündel und $j_o: B_o \longrightarrow P'_o$ eine starke Bündelabbildung.

Man setze $B = B_o \times \mathfrak{p}$ und $P' = P'_o \times_K G$, wobei K als Untergruppe von links auf G operiert. B ist in natürlicher Weise ein Faserbündel und P' ein G-Prinzipalbündel über M.

Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} P_o' \arrow[r, "\iota'"] & P' = P_o' \times_K G \\ B_o \arrow[u, "j_o"] \arrow[r, "\iota"] & B = B_o \times \mathfrak{p} \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd} ,$$

wobei die Abbildungen ι, ι' und j wie folgt definiert sind:

$$\iota(p) = (p,0) \quad \text{für alle } p \in B_o ,$$
$$\iota'(q) = [(q,e)] \quad \text{für alle } q \in P_o' ,$$
$$j(p,s) = [(j_o(p), \exp s)] \quad \text{für alle } p \in B_o \text{ und } s \in \mathfrak{p} .$$

Offensichtlich kommutiert das obige Diagramm und alle Abbildungen des Diagramms sind fasertreu und induzieren die Identität auf M.

3.8.1 Satz: *Mit den obigen Voraussetzungen und Bezeichnungen sei* $\omega_o: TB_o \longrightarrow \mathfrak{k}$ *ein verallgemeinerter Cartan-Zusammenhang vom Typ* (K, j_o).

(i) *Es gibt genau einen verallgemeinerten Cartan-Zusammenhang* $\omega: TB \longrightarrow \mathfrak{g}$ *vom Typ* (G,j) *mit* $\iota^*\omega = \omega_o$. *Dieser ist in einem Punkt* $(p,s) \in B_o \times \mathfrak{p}$ *durch die folgende Gleichung gegeben, wobei* $X \in T_pB_o$ *und* $Y \in T_S\mathfrak{p} \cong \mathfrak{p}$ *sind:*

$$\omega(X,Y) = \omega_o(X) + d_S\exp(Y - [s, \omega_o(X)]) .$$

(ii) *Ist* Ω_o *(bzw.* Ω*) die Krümmung von* ω_o *(bzw.* ω*), so gilt für alle* $X_1, X_2 \in T_pB_o$, $Y_1, Y_2 \in T_S\mathfrak{p}$:

$$\Omega((X_1,Y_1),(X_2,Y_2)) = \mathrm{Ad}(\exp s)^{-1}\, \Omega_o(X_1,X_2) .$$

Beweis: Zunächst gibt es einen eindeutig bestimmten Zusammenhang ω_o' auf dem K-Bündel P_o' mit $j_o^* \omega_o' = \omega_o$. Dieser Zusammenhang läßt sich in eindeutiger Weise zu einem Zusammenhang ω' auf P' erweitern, $\iota'^*\omega' = \omega_o'$. Analog dem Beweis von Lemma 3.3.5 zeigt man, daß die Tangentialabbildung von j in einem Punkt $(p,s) \in B$ (mit $p \in B_o$ und $s \in \mathfrak{p}$) für alle $X \in T_pB_o$ und alle $Y \in T_s\mathfrak{p} \cong \mathfrak{p}$ durch die Gleichung

$$j_*(X,Y) = (d_s\exp(Y))^*([(i(p),g)]) + R_{g*}(i_*(X))$$

gegeben ist, (vgl. 3.3.6), wobei wir $g = \exp s$ und $i = \iota' \circ j_o$ gesetzt haben. Für die Form $\omega := j^*\omega'$ erhält man somit (aufgrund der Zusammenhangseigenschaften von ω' und wegen $i^*\omega' = \omega_o$) die Formel

$$\omega(X,Y) = d_s\exp(Y) + \mathrm{Ad}(g^{-1})(\omega_o(X)) \quad .$$

Nach Lemma 3.3.3(i) ist dies äquivalent zu der Gleichung in (i). Da $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ eine Cartan-Zerlegung ist, liegt $Y - [s,\omega_o(X)]$ in $\mathfrak{p}$. Folglich impliziert $\omega(X,Y) = 0$ nach Lemma 3.4.2(ii) $X = Y = 0$, d.h. ω ist ein verallgemeinerter Cartan-Zusammenhang auf B vom Typ (G,j). Wegen $j \circ \iota = i$ hat man $\iota^*\omega = \omega_o$. Die Eindeutigkeit von ω ergibt sich aus der Eindeutigkeit von ω' (nach Lemma 1.1.2 ist ω' der einzige Zusammenhang auf P' mit $i^*\omega' = \omega_o$). Zum Beweis von (ii) vergleiche man Korollar 3.3.12.

□

Die Komponenten von ω bezüglich der Cartan-Zerlegung sind wieder durch die Gleichungen in Korollar 3.4.3(ii) gegeben. Natürlich hat man auch eine entsprechende komplexe Version des letzten Satzes.

Anhang

Tabelle für die Lieklammer $[x,y]$ in $\mathbb{C}^3 \oplus \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^{3*}$

$x \backslash y$	e_1	e_2	e_3	e_1^2	e_1^3	e_2^1	e_2^3	e_3^1	e_3^2	d_1	d_2	e^1	e^2	e^3
e_1	0	$\sqrt{2}e^3$	$-\sqrt{2}e^2$	0	0	$-e_2$	0	$-e_3$	0	$-e_1$	0	$d_1+\frac{1}{2}d_2$	$\frac{3}{2}e_1^2$	$\frac{3}{2}e_1^3$
e_2	$-\sqrt{2}e^3$	0	$\sqrt{2}e^1$	$-e_1$	0	0	0	0	$-e_3$	e_2	$-e_2$	$\frac{3}{2}e_2^1$	$\frac{1}{2}d_2-\frac{1}{2}d_1$	$\frac{3}{2}e_2^3$
e_3	$\sqrt{2}e^2$	$-\sqrt{2}e^1$	0	0	$-e_1$	0	$-e_2$	0	0	0	e_3	$\frac{3}{2}e_3^1$	$\frac{3}{2}e_3^2$	$-\frac{1}{2}d_1-d_2$
e_1^2	0	e_1	0	0	0	d_1	e_1^3	$-e_3^2$	0	$-2e_1^2$	e_1^2	$-e^2$	0	0
e_1^3	0	0	e_1	0	0	$-e_2^3$	0	d_1+d_2	e_1^2	$-e_1^3$	$-e_1^3$	$-e^3$	0	0
e_2^1	e_2	0	0	$-d_1$	e_2^3	0	0	0	$-e_3^1$	$2e_2^1$	e_2^1	0	$-e^1$	0
e_2^3	0	0	e_2	$-e_1^3$	0	0	0	e_2^1	d_2	e_2^3	$-2e_2^3$	0	$-e^3$	0
e_3^1	e_3	0	0	e_3^2	$-d_1-d_2$	0	$-e_2^1$	0	0	e_3^1	e_3^1	0	0	$-e^1$
e_3^2	0	e_3	0	0	$-e_1^2$	e_3^1	$-d_2$	0	0	$-e_3^2$	$2e_3^2$	0	0	$-e^2$
d_1	e_1	$-e_2$	0	$2e_1^2$	e_1^3	$-2e_2^1$	$-e_2^3$	$-e_3^1$	e_3^2	0	0	$-e^1$	e^2	0
d_2	0	e_2	$-e_3$	$-e_1^2$	e_1^3	$-e_2^1$	$2e_2^3$	$-e_3^1$	$-2e_3^2$	0	0	0	$-e^2$	e^3
e^1	$-d_1-\frac{1}{2}d_2$	$-\frac{3}{2}e_2^1$	$-\frac{3}{2}e_3^1$	e^2	e^3	0	0	0	0	e^1	0	0	$-\sqrt{2}e_3$	$\sqrt{2}e_2$
e^2	$-\frac{3}{2}e_1^2$	$\frac{1}{2}d_1-\frac{1}{2}d_2$	$-\frac{3}{2}e_3^2$	0	0	e^1	e^3	0	0	$-e^2$	e^2	$\sqrt{2}e_3$	0	$-\sqrt{2}e_1$
e^3	$-\frac{3}{2}e_1^3$	$-\frac{3}{2}e_2^3$	$\frac{1}{2}d_1+d_2$	0	0	0	0	e^1	e^2	0	$-e^3$	$-\sqrt{2}e_2$	$\sqrt{2}e_1$	0

e_i bezeichnet den i-ten kanonischen Basisvektor von $\mathbb{C}^3$, $e^j = {}^te_j$ den j-ten Basisvektor von $\mathbb{C}^{3*}$ und e_i^j die (3×3)-Matrix mit 1 in der (i,j)-ten Komponente (i-te Zeile und j-te Spalte) und 0 in den übrigen Komponenten. Ferner ist $d_1 = e_1^1 - e_2^2$ und $d_2 = e_2^2 - e_3^3$.

Literaturverzeichnis

[B] M. Berger: Les variétés Riemanniennes (1/4)-pincées, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (III) **14** (1960), 161 - 170.

[C] E. Cartan: Oeuvres complètes, Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[E] C. Ehresmann: Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, Colloque de topologie du Centre Belge de Recherches Math., Bruxelles, 1950, 29 - 55.

[Gr] D. Gromoll: Differenzierbare Strukturen und Metriken positiver Krümmung auf Sphären, Math. Ann. **164** (1966), 353 - 371.

[GS] K. Grove und K. Shiohama: A generalized sphere theorem, Ann. Math. **106** (1977), 201 - 211.

[GSt] V. Guillemin und S. Sternberg: Symplectic Techniques in Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[H] S. Helgason: Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, Academic Press, New York, 1978.

[Hu] J.E. Humphreys: Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer, New York, 1972.

[K] W. Klingenberg: Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung, Comment. Math. Helv. **35** (1961), 47 - 54.

[Ko_1] S. Kobayashi: On connections of Cartan, Canad. J. Math. **8** (1956), 145 - 156.

[Ko_2] S. Kobayashi: Transformation Groups in Differential Geometry, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete 70, Springer, Berlin, 1972.

[Ko_3] S. Kobayashi: Canonical forms of frame bundles of higher order contact, Proc. Symp. Pure Math. III, Amer. Math. Soc. 1961, 186 - 193.

[KN_1] S. Kobayashi und T. Nagano: On projective connections, J. Math. Mech. **13** (1964), 215 -235.

[KN_2] S. Kobayashi und T. Nagano: On filtered Lie algebras and geometric structures I - V, J. Math. Mech. **13** (1964), 875 - 907; **14** (1965), 513 - 521; **14** (1965), 679 - 705; **15** (1966), 163 - 174; **15** (1966), 315 - 327.

[KNo] S. Kobayashi und K. Nomizu: Foundations of Differential Geometrie I, II, John Wiley & Sons (Interscience), New York, 1963 und 1969.

[M_1] Min-Oo: Krümmung und differenzierbare Struktur auf komplex-projektiven Räumen, Bonner Math. Schriften, Nr. 93, 1977.

[M_2] Min-Oo: Integrabilität geometrischer Strukturen vom halbeinfachen Typ, Habilitationsschrift, Universität Bonn, 1984.

[MR_1] Min-Oo und E.A. Ruh: Comparison theorems for compact symmetric spaces, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 12 (1979), 335 - 353.

[MR_2] Min-Oo und E.A. Ruh: Vanishing theorems and almost symmetric spaces of non-compact type, Math. Ann. 257 (1981), 419 - 433.

[O] T. Ochiai: Geometry associated with semisimple flat homogeneous spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **152** (1970), 159 - 193.

[Og] K. Ogiue: Theory of conformal connections, Kodai Math. Sem. Rep. **19** (1967), 193 - 223.

[R_1] H.E. Rauch: A contibution to differential geometry in the large, Ann. of Math. **54** (1951), 38 - 55.

[R_2] H.E. Rauch: Geodesics, symmetric spaces and differential geometry in the large, Comment. Math. Helv. **27** (1953), 294 - 320.

[Ru_1] E.A. Ruh: Almost symmetric spaces, Differential Geometry and Mathematical Physics, Math. Phy. Studies 3, Reidel Publ., Dordrecht, 1983, 167 - 172.

[Ru_2] E.A. Ruh: Almost symmetric spaces, Global Riemannian Geometry, Horwood, Chichester, 1984, 93 - 98.

[Ru_3] E.A. Ruh: Almost homogeneous spaces, Colloque en l'honneur de Laurent Schwartz, Vol. 2, Astérisque, Soc. Math. France 132 (1985), 285 -293.

[T] J. Tits: Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen, Lecture Notes in Math. 40, Springer, Berlin, 1967.

[SU] S. Sternberg und T. Ungar: Classical and prequantized mechanics without Lagrangians or Hamiltonians, Hadronic J. 1 (1978), 33 - 76.