**Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie,
Portfolio Management und Versicherungswirtschaft**

Nr. 142

Bestimmung des Conditional Value-at-Risk (*CVaR*) bei Normal- bzw. Lognormalverteilung

von

PETER ALBRECHT UND SVEN KORYCIORZ

Mannheim 01/2003

Bestimmung des Conditional Value-at-Risk (*CVaR*)
bei Normal- bzw. Lognormalverteilung

Peter *ALBRECHT* / Sven *KORYCIORZ*

1. Definitionen und Eigenschaften

Gegeben: Konfidenzniveau $0 < \alpha < 1$.

a) Versicherungsfall:

Betrachte $X = S - \mathrm{E}(S)$,

S : Gesamtschaden eines Kollektivs.

b) Investment-/ Bankenfall:

Betrachte $X = v_t - V_{t+h} = L_h$,

Periodenverlust einer Finanzposition über betrachtete Haltedauer h.

[Vgl. *ALBRECHT/MAURER* (2002, S. 673 f.).]

Annahme: Die Verteilungsfunktion $\mathrm{F}(x)$ von X besitze eine Dichtefunktion $\mathrm{f}(x) \geq 0$.

Definition 1: (Value-at-Risk zum Konfidenzniveau α)

$$\mathrm{P}(X \geq VaR_\alpha(X)) = \alpha .$$

[Bedingungsgleichung für *VaR*]

Folgerung: VaR_α entspricht dem $(1-\alpha)$-Quantil der Verteilung F von X; formal:

$$VaR_\alpha(X) = \mathrm{F}_X^{-1}(1-\alpha).$$

Ökonomische Interpretation: Notwendige Kapitalunterlegung/Reservebildung, um Periodenverlust der Höhe X „aufzufangen“ [„Quantilreserve“].

Statistische Interpretation: $100\,(1-\alpha)$%-Maximalverlust.

Definition 2: (Conditional Value-at-Risk zum Konfidenzniveau α)

$$CVaR_\alpha(X) = \mathrm{E}\left[X \mid X \geq VaR_\alpha(X)\right].$$

[Vgl. *ALBRECHT/MAURER* (2002, S. 675).]

Anmerkung: *CVaR* ist ein Spezialfall des Tail-Conditional-Expectation (*TCE*).

$$TCE_z(X) := \mathrm{E}\left[X \mid X \geq z\right].$$

Anmerkung: Es gilt:

$$\begin{aligned} TCE_z(X) &= z + \mathrm{E}\left[X - z \mid X \geq z\right] \\ &= z + MEL_z(X), \end{aligned}$$

$MEL_z(X)$ = Mean Excess Loss von X relativ zu z.

Folgerung/Interpretation:

$$CVaR_\alpha(X) = \underbrace{VaR_\alpha(X)}_{\substack{\text{"100(1-}\alpha\text{)\%-} \\ \text{Maximalverlust"}}} + \underbrace{\mathrm{E}\left[X - VaR_\alpha(X) \mid X \geq VaR_\alpha(X)\right]}_{\substack{\text{mittlere Überschreitung im} \\ \text{Überschreitungsfall} \\ \text{(mittlere bedingte Überschreitung)}}},$$

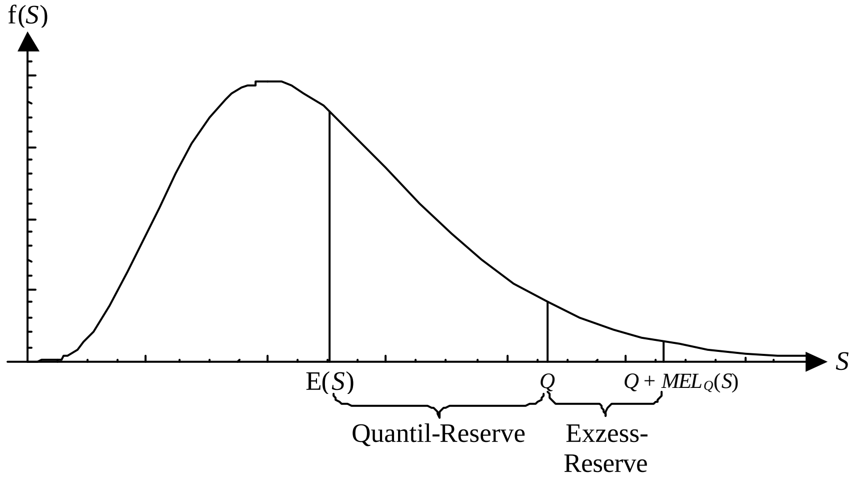
oder: „Quantil-Reserve“ + „Exzess-Reserve“,

bzw.: *CVaR* beinhaltet zusätzliche Reserve für die mittlere Überschreitung im Überschreitungsfall.

Folgerung: $CVaR_\alpha \geq VaR_\alpha$.

Statistische Interpretation: Durchschnittlicher Maximalverlust in den $100\,\alpha$ % schlimmsten Fällen.

Versicherungsfall:



Wobei: $Q := VaR_{a}(S) = \mathrm{F}_S^{-1}(1-a)$,

$MEL_Q(S) := \mathrm{E}\left[S - Q \,\middle|\, S \geq Q\right]$.

Eigenschaft des CVaR:

Kohärentes Risikomaß im Sinne von *ARTZNER ET AL.* (1999), wenn X Verteilung mit Dichtefunktion („stetige Verteilung“).
[Vgl. *ACERBI/TASCHE* (2002, S. 1490 f.).]

Anmerkung: Im diskreten bzw. gemischten Falle ist Modifikation notwendig, um kohärentes Risikomaß zu erhalten.
[Vgl. *ACERBI/TASCHE* (2002).]

2. Allgemeine Berechnung

Annahme: Existenz einer Dichte.

1) Direkt: $\mathrm{E}\left[X \mid X \geq z\right] = \frac{1}{\mathrm{P}(X \geq z)} \int_z^\infty x\, \mathrm{f}(x)\, \mathrm{d}x.$

2) Über *MEL*:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[X \mid X \geq z\right] &= z + \mathrm{E}\left[X - z \mid X \geq z\right] \\ &= z + \frac{\mathrm{E}\left[\max(X - z, 0)\right]}{\mathrm{P}(X \geq z)} \\ &= z + \frac{\text{mittlere Exzess-Erwartung } UPM_1(z;\, X)}{\text{Exzess-Wahrscheinlichkeit } UPM_0(z;\, X)}.\end{aligned}$$

Anmerkung zu 2):

Letzteres ist die analoge Konstruktion für den Exzess-Fall, wie die Berechnung des *MEL* im Shortfall.
[Vgl. *ALBRECHT/MAURER* (2002, S. 110).]

D. h.: $\mathrm{E}\left[\max(z - X, 0)\right] = \mathrm{P}(X \leq z)\, \mathrm{E}\left[z - X \mid X \leq z\right].$

Hier: $\mathrm{E}\left[\max(X - z, 0)\right] = \mathrm{P}(X \geq z)\, \mathrm{E}\left[X - z \mid X \geq z\right].$

Anmerkung zu 1):

Definieren wir $\mathrm{E}^z(X) = \int_z^\infty x\, \mathrm{f}(x)\, \mathrm{d}x,$ das obere partielle Moment 1. Ordnung, so gilt:

$$\mathrm{E}\left[X \mid X \geq z\right] = \frac{\mathrm{E}^z(X)}{\mathrm{P}(X \geq z)},$$

und man kann zur Berechnung des *TCE* direkt auf die Resultate von *WINKLER ET AL.* (1972) zurückgreifen.

3. Normalverteilungsfall

Gegeben: $X \sim \mathrm{N}(m, s^2)$.

Es gilt: $VaR_a(X) = \mathrm{E}(X) + N_{1-a}\; s(X)$,

wobei N_{1-a} das $(1-a)$-Quantil der Standard-Normalverteilung bezeichnet.

[Vgl. *ALBRECHT/MAURER* (2002, S. 675).]

Bestimmung des TCE:

Sei $z_N := \dfrac{z-m}{s}$ und bezeichne $\Phi(x)$ die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsgröße bzw. $j(x)$ deren Dichte, so gilt:

1) $\mathrm{P}(X \geq z) = 1 - \Phi(z_N)$.

2) $\mathrm{E}^{z_N}(X) = m[1-\Phi(z_N)] + s\; j(z_N)$.

[Vgl. etwa *ALBRECHT* (1994, S. 337).]

3)
$$TCE_z(X) = \frac{\mathrm{E}^{z_N}(X)}{\mathrm{P}(X \geq z)}$$
$$= m + \frac{j(z_N)}{1-\Phi(z_N)}\, s\, .$$

Bestimmung des CVaR:

$z = VaR_a = m + N_{1-a}\; s$,

$\Rightarrow z_N = N_{1-a}$.

Nebenrechnung: $N_{1-a} = \Phi^{-1}(1-a) \Rightarrow \Phi(N_{1-a}) = 1-a \Rightarrow 1-\Phi(N_{1-a}) = a$.

Fazit:

$$\boxed{CVaR_a(X) = \mathrm{E}(X) + \frac{j(N_{1-a})}{a}\, s(X)}$$

Im Vergleich zu VaR_a wird somit auf $\mathrm{E}(X)$ ein höheres (da $CVaR_a \geq VaR_a$) Multipel der Standardabweichung hinzuaddiert, d. h. $j(N_{1-a})/a \geq N_{1-a}$.

$$\begin{aligned} CVaR_a(X) - VaR_a(X) &= \left[\frac{j(N_{1-a})}{a} - N_{1-a}\right] s(X) \\ &= \frac{j(N_{1-a}) - a\ N_{1-a}}{a}\, s(X). \end{aligned}$$

Folgerung: Exzess-Reserve $\mathrm{E}\left[X - z \mid X \geq z\right] = \dfrac{j(N_{1-a}) - a\ N_{1-a}}{a}\, s(X).$

Numerisches Beispiel:

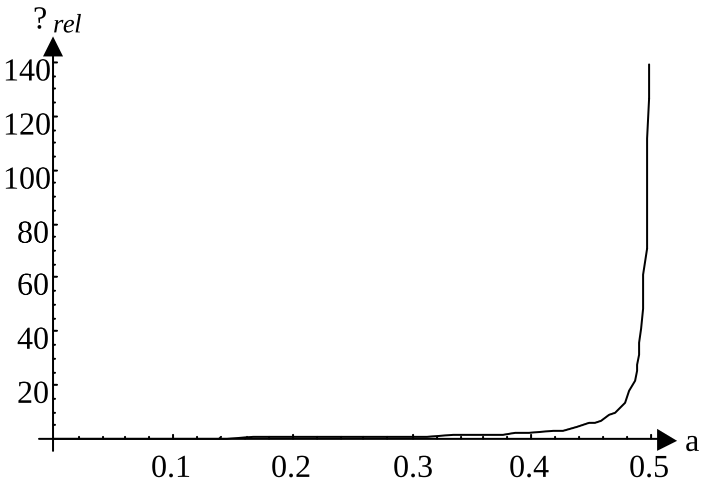
a	N_{1-a}	$j(N_{1-a})/a$
0.1	1.28	1.75
0.05	1.65	2.06
0.01	2.33	2.67
0.005	2.58	2.89

Anmerkung: Relative Differenz (Δ_{rel}) wird immer geringer.

Anmerkung: Es gilt:

$$\Delta_{rel} := \frac{j(N_{1-a})/a - N_{1-a}}{N_{1-a}} = \frac{j(N_{1-a})/a}{N_{1-a}} - 1 \text{ fällt monoton gegen Null für } a \to 0.$$

Verlauf der Funktion:



4. Lognormalverteilungsfall

Gegeben: $\ln X \sim \mathrm{N}(m, v^2)$.

Es gilt: $VaR_a(X) = \exp(m + N_{1-a}\ v)$.

[$(1-a)$-Quantil der Lognormalverteilung, vgl. *ALBRECHT/MAURER* (2002, S. 114).]

Bestimmung des TCE:

Sei $z_{LN} := (\ln z - m)/v$, so gilt:

1) $\mathrm{P}(X \geq z) = \mathrm{P}(\ln X \geq \ln z) = 1 - \Phi(z_{LN})$.

2) $\mathrm{E}^{z_{LN}}(X) = e^{m+\frac{1}{2}v^2}\left[1 - \Phi(z_{LN} - v)\right]$.

[Vgl. *ALBRECHT* (1994, S. 337).]

3) $$TCE_z(X) = \mathrm{E}^{z_{LN}}(X) / \mathrm{P}(X \geq z)$$
$$= e^{m+\frac{1}{2}v^2} \frac{1-\Phi(z_{LN}-v)}{1-\Phi(z_{LN})}$$
$$= \mathrm{E}(X) \frac{1-\Phi(z_{LN}-v)}{1-\Phi(z_{LN})}.$$

Bestimmung des CVaR:

$z = VaR_a$.

$$z_{LN} = \frac{\ln z - m}{v} = N_{1-a} .$$

Wie zuvor: $1-\Phi(z_{LN}) = a$.

Fazit:

$$\boxed{CVaR_a(X) = \mathrm{E}(X) \frac{1-\Phi(N_{1-a}-v)}{a}}$$

Beziehung zum *VaR* ?

Umrechnung von VaR_a :

$$VaR_a(X) = e^{m+\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}v^2+N_{1-a}\,v}$$
$$= \mathrm{E}(X)\exp(N_{1-a}\,v - \tfrac{1}{2}v^2).$$

„Zuschlag“ zu $\mathrm{E}(X)$ ist im Gegensatz zur Normalverteilung hier nicht additiv, sondern multiplikativ.

Wegen $CVaR_a \geq VaR_a$ müsste also gelten:

$$\frac{1-\Phi(N_{1-a}-v)}{a} \geq \exp(N_{1-a}\ v - \tfrac{1}{2}v^2).$$

<u>Numerisches Beispiel</u>:

Multiplikative Zuschlagsfaktoren für a und „repräsentative v-Werte“.

Möglicher Ansatzpunkt: Gehe aus von der Hypothese

$$\mathrm{Var}(X) = l\ \mathrm{E}(X)^2.$$

Es gilt dann [vgl. *ALBRECHT/MAURER* (2002, S. 96)]:

$$\begin{aligned} v^2 &= \ln\left[1+\frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathrm{E}(X)^2}\right] \\ &= \ln(1+l) \end{aligned}$$

bzw. $\quad v = \sqrt{\ln(1+l)}.$

Zahlenbeispiel:

l	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$\boldsymbol{v}$	0.64	0.83	0.96	1.05	1.12	1.18

Multipel des Erwartungswerts im Falle des VaR_a :

$$Mult_{VaR} = \exp(N_{1-a}\ v - \tfrac{1}{2}\ v^2).$$

Multipel des Erwartungswerts im Falle des $CVaR_a$:

$$Mult_{CVaR} = \frac{1-\Phi(N_{1-a}-v)}{a}.$$

$v = 0.64$:

a	$Mult_{CVaR}$	$Mult_{VaR}$
0.1	2.60	1.84
0.05	3.13	2.33
0.01	4.56	3.59
0.005	5.25	4.21

$v = 0.83$:

a	$Mult_{CVaR}$	$Mult_{VaR}$
0.1	3.27	2.06
0.05	4.17	2.78
0.01	6.76	4.90
0.005	8.13	6.04

$v = 0.96$:

a	$Mult_{CVaR}$	$Mult_{VaR}$
0.1	3.73	2.16
0.05	4.92	3.05
0.01	8.55	5.86
0.005	10.55	7.44

$v = 1.05$:

a	$Mult_{CVaR}$	$Mult_{VaR}$
0.1	4.08	2.21
0.05	5.51	3.24
0.01	10.06	6.61
0.005	12.66	8.59

$v = 1.12$:

a	$Mult_{CVaR}$	$Mult_{VaR}$
0.1	4.36	2.24
0.05	5.99	3.37
0.01	11.37	7.22
0.005	14.52	9.55

$v = 1.18$:

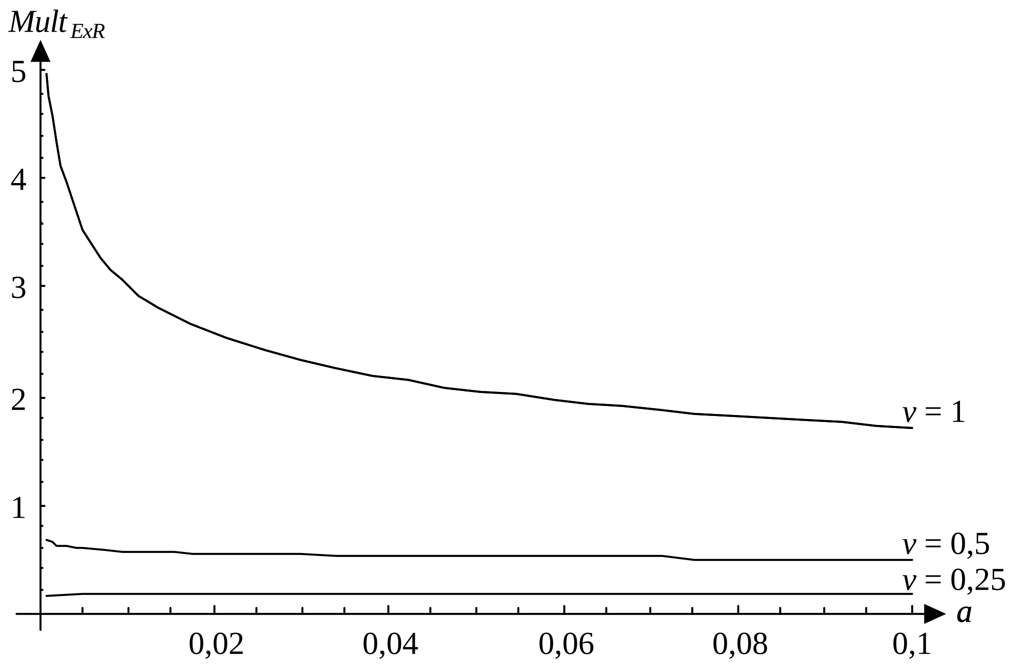
a	$Mult_{CVaR}$	$Mult_{VaR}$
0.1	4.59	2.26
0.05	6.40	3.47
0.01	12.53	7.74
0.005	16.20	10.38

$$\begin{aligned}\text{Exzess - Reserve} &= \mathrm{E}\left[X - z \mid X \geq z\right] = CVaR_a(X) - VaR_a(X) \\ &= \mathrm{E}(X)\left[\frac{1-\Phi(N_{1-a} - v)}{a} - \exp(N_{1-a}\ v - \tfrac{1}{2}v^2)\right] \\ &= \mathrm{E}(X)\underbrace{\left[\frac{1-\Phi(N_{1-a} - v) - a\ \exp(N_{1-a}\ v - \tfrac{1}{2}v^2)}{a}\right]}_{Mult_{ExR}}.\end{aligned}$$

Weitere Aufschlüsse lassen sich nur numerisch erreichen.

Graphisches Beispiel:

Verlauf des Multipels von $\mathrm{E}(X)$ im Falle der Exzess-Reserve ($Mult_{ExR}$) für $v = 1/0{,}5/0{,}25$ in Abhängigkeit von a:



Die Entwicklung der Exzess-Reserve (in absoluten Termen) ist uneinheitlich. Während in den obigen numerischen Beispielfällen mit abnehmendem a das Multipel von $\mathrm{E}(X)$ – und damit die Exzess-Reserve (der *MEL*) – kontinuierlich ansteigt, ergibt sich für „weniger riskante" Zufallsvariable X ein anderes Bild. Für kleine Werte von v, das heißt bei geringer Schiefe $g(X) = \sqrt{\exp(v^2) - 1}\left(2 + \exp(v^2)\right) > 0$, lässt sich beobachten, dass das Multipel $Mult_{ExR}$ (mit sinkendem a) abnimmt (siehe Abbildung für $v = 0{,}25$).

Die Relation Exzess-Reserve/Quantil-Reserve nimmt stets ab (mit zunehmendem a), das heißt, im Falle eines Anstiegs der Exzess-Reserve wächst die Quantil-Reserve verhältnismäßig stärker an.

Appendix: *CVaR*-Berechnung im Renditefall

Während im Haupttext auf die *CVaR*-Berechnung auf der Basis von *Verlustpositionen* eingegangen wurde, soll nunmehr der Renditefall (bzw. der Fall einer absoluten Gewinn-/Verlustposition) beleuchtet werden.

<u>Gegeben</u>: X = Rendite oder absolute Gewinn-/Verlustposition.

<u>*Definition A1*</u>: (Tail Conditional Expectation)

$$TCE_z(X) := \mathrm{E}\left[X \mid X \le z\right]$$
$$= \frac{1}{\mathrm{P}(X \le z)} \int_{-\infty}^{z} x \,\mathrm{dF}(x) = \frac{\mathrm{E}^z(X)}{\mathrm{F}(z)} \,,$$

mit: z : Target, F : Verteilungsfunktion, E^z : partielles Moment.

<u>*Definition A2*</u>: (Conditional Value-at-Risk)

$$CVaR_a(X) = \mathrm{E}\left[X \mid X \le VaR_a(X)\right] ,$$

d. h. $CVaR_a(X) = TCE_z(X)$ für $z = VaR_a(X)$.

<u>I. Normalverteilung</u>: $X = R \sim \mathrm{N}(m,\, s^2)$

a) $\mathrm{E}^z(X) = m\ \Phi(z_N) - s\ \ j(z_N)$,

wobei: $z_N := (x - m)/s$, $m = \mathrm{E}(X)$, $s = s(X)$.

[Vgl. *ALBRECHT* (1993, S. 601).]

b) $\mathrm{F}(z) = \Phi(z_N)$.

c) $TCE_z(X) = m - \frac{j(z_N)}{\Phi(z_N)}\, s\,.$

d) $z = VaR_a(X) = m - N_{1-a}\, s\,,$

$$z_N = \frac{m - N_{1-a}\, s - m}{s} = -N_{1-a} = N_a\,,$$

$$\Phi(N_a) = \Phi\left[\Phi^{-1}(a)\right] = a\,,$$

$j(x) = j(-x)$, d. h. $j(-N_{1-a}) = j(N_{1-a})$.

Fazit:

$$\boxed{CVaR_a(X) = m - \frac{j(N_{1-a})}{a}\, s}$$

II. Lognormalverteilung: $X = 1 + R \sim \mathrm{LN}(m, v^2)$

$$z_{LN} := \frac{\ln(1+z) - m}{v}.$$

a) $\mathrm{E}^z(X) = \exp\left(m + \tfrac{1}{2} v^2\right) \Phi(z_{LN} - v).$

[Vgl. *ALBRECHT* (1993, S. 601).]

b) $\mathrm{F}(z) = \Phi(z_{LN}).$

c) $TCE_z(X) = \exp(m + \tfrac{1}{2} v^2)\, \frac{\Phi(z_{LN} - v)}{\Phi(z_{LN})}$

$$= \mathrm{E}(X)\, \frac{\Phi(z_{LN} - v)}{\Phi(z_{LN})},$$

$z = VaR_a(X) = \exp(m - N_{1-a}\, v) - 1,$

$$z_{LN} = \frac{m - N_{1-a}\ \ v - m}{v} = -N_{1-a} = N_a\ ,$$

$$\Phi(N_a) = a\ .$$

<u>Fazit</u>:

$$\boxed{CVaR_a\ (X) = \mathrm{E}(X)\ \frac{\Phi(-N_{1-a}\ - v)}{a}}$$

Literatur:

ACERBI, C.; D. *TASCHE* (2002): On the coherence of Expected Shortfall, in: *Journal of Banking and Finance* 26, No. 7, S. 1487-1503.

ALBRECHT, P. (1993): Analyse der Zufallsgesetzmäßigkeit von Unterrenditen, in: *HIPP*, C. et al. (Hrsg.): Geld, Finanzwirtschaft, Banken und Versicherungen, Karlsruhe, S. 585-602.

ALBRECHT, P. (1994): Dimensionen des versicherungstechnischen Risikos, in: *HESBERG*, D.; M. *NELL*; W. *SCHOTT* (Hrsg.): Risiko – Versicherung – Markt, Festschrift für Walter Karten zur Vollendung des 60. Lebensjahres, Karlsruhe, S. 325-339.

ALBRECHT, P.; R. *MAURER* (2002): Investment- und Risikomanagement: Modelle, Methoden, Anwendungen, Stuttgart.

ARTZNER, P.; F. *DELBAEN*; J.-M. *EBER*; D. *HEATH* (1999): Coherent Measures of Risk, in: *Mathematical Finance* 9, No. 3, S. 203-228.

WINKLER R. L.; G. M. *ROODMAN*; R. B. *BRITNEY* (1972): The determination of partial moments, in: *Management Science* 19, No. 3, S. 290-296.