

**Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie,  
Portfolio Management und Versicherungswirtschaft**

**Nr. 143**

Zur Messung von  
Finanzrisiken

von

PETER ALBRECHT

Mannheim 01/2003

# **Zur Messung von Finanzrisiken**

Prof. Dr. Peter Albrecht  
Universität Mannheim  
D-68131 Mannheim, Schloss  
p.albrecht@bwl.uni-mannheim.de

Erweiterte deutsche Version eines Beitrags für:  
Encyclopedia of Actuarial Science  
John Wiley & Sons  
2004

## Gliederung

- 1 Einführung: Finanzrisiken
- 2 Risiko als eigenständige Konzeption
- 3 Strukturierung von Risikokonzeptionen
- 4 Risikomaße und Erwartungsnutzentheorie
- 5 Axiomatische Charakterisierungen von Risikomaßen
  - 5.1 Das Axiomensystem von *Pedersen/Satchell*
  - 5.2 Das Axiomensystem von *Rockafellar/Uryasev/Zabarankin* für Abweichungsmaße
  - 5.3 Das Axiomensystem von *Artzner/Delbaen/Eber/Heath*
  - 5.4 Das Axiomensystem von *Rockafellar/Uryasev/Zabarankin* für erwartungswertbegrenzte Risikomaße
  - 5.5 Axiome für Prämienprinzipien und das Axiomensystem von *Wang/Young/Panjer*
- 6 Risiko als Ausmaß der Abweichungen von einer Zielgröße
  - 6.1 Zweiseitige Risikomaße
  - 6.2 Shortfallrisikomaße
  - 6.3 Klassen von Risikomaßen
  - 6.4 Güteeigenschaften
- 7 Risiko als notwendiges Kapital bzw. notwendige Prämie
  - 7.1 Quantile und Value-at-Risk
  - 7.2 Expected Shortfall und Conditional Value-at-Risk
  - 7.3 Lower Partial Moments
  - 7.4 Verzerrte Risikomaße
- 8 Ausgewählte weitere Ansätze
  - 8.1 Sensitivitätsmaße als Risikomaße
  - 8.2 Maße für die Einkommensverteilung
  - 8.3 Konvexe Risikomaße
  - 8.4 Kapitalmarktbezogene Risikomaße
  - 8.5 Tracking Error und aktives Risiko
  - 8.6 Ruinwahrscheinlichkeit

Literatur

## 1 Einführung: Finanzrisiken

Risiko liegt begründet in der unvollständigen Information über zukünftige Zustände. Das Phänomen des Risikos durchdringt praktisch alle Bereiche des menschlichen Lebens. Risiko berührt eine Vielzahl ökonomischer, politischer, sozialer und technologischer Fragestellungen und Problemkreise. Entsprechend wurden Ansätze zur Messung von Risiken in unterschiedlichen akademischen Disziplinen<sup>1</sup> entwickelt. Im vorliegenden Beitrag konzentrieren wir uns dabei auf *Finanzrisiken*. Diese spielen eine zentrale Rolle für alle institutionellen und privaten Teilnehmer an den Finanz- und Versicherungsmärkten, den Finanzintermediären (Kreditinstitute, Versicherungen, Investmentgesellschaften) ebenso wie den „Endnutzern“ (private Haushalte, Unternehmen, öffentliche Hand). Ziel des Beitrags ist nun die Vornahme einer systematischen Aufarbeitung von Ansätzen zur Messung von Finanzrisiken. Eine solche Messung erfolgt dabei in Form der Konstruktion von (finanzwirtschaftlichen<sup>2</sup>) Risikomaßen.

Intuitiv kann dabei Risiko als negative Veränderung bzw. adverse Entwicklung der finanziellen Position eines Entscheidungsträgers oder einer Institution verstanden werden. Hierzu gehört insbesondere das Erleiden finanzieller Verluste, aber auch die Nichterreicherung angestrebter Mindestrenditen oder Mindestvermögensstände fällt hierunter. Aus entscheidungstheoretischer Sicht ist eine adverse Entwicklung dabei eine solche, die den Nutzen der finanziellen Position für den Entscheidungsträger mindert.

Beispiele für finanzielle Risiken sind zum einen Risiken der Finanzmärkte. Hierzu gehören Marktrisiken (Risiken aus der Veränderung des Marktwerts von Finanzpositionen, insbesondere etwa Aktienkurs-, Zins- und Währungsrisiken), Ausfall- bzw. Kreditrisiken (Risiken aus dem Ausfall eines Schuldners bzw. einer Partei eines Finanzvertrages) und operationale Risiken (z.B. Betrug, Ausfall der EDV, Softwarefehler). Weitere Beispiele für finanzielle Risiken sind Versicherungsrisiken (Verluste einer Privatperson oder eines Unternehmens aus einem Versicherungsereignis). Schließlich sind auch die Finanzintermediäre selbst spezifischen Risiken ausgesetzt. Kreditinstitute und Versicherungen tragen Liquiditätsrisiken sowie Über-

---

<sup>1</sup> *Pedersen/Satchell* (1998, S. 89) nennen hier Psychologie, Operations Research, Management Science, Economics und Finance.

<sup>2</sup> Da wir uns auf finanzielle Risiken und dabei auf ökonomische Aspekte konzentrieren, erfolgt im Weiteren weder eine Behandlung der entscheidungstheoretischen Literatur zur Messung der von Personen (in der Regel im Zusammenhang mit der Beurteilung einfacher Lotterien) wahrgenommenen Risiken (perceived risk), vgl. zu einer Übersicht *Brachinger/Weber* (1997), noch der Literatur, die sich mit den psychologischen Aspekten und Hintergründen von Risikobeurteilungen beschäftigt, vgl. hierzu etwa *Slovic* (2000) sowie *Diacon/Ennew* (2001).

schuldungsrisiken (Solvabilitätsrisiko; Risiko, dass die Verpflichtungen das Vermögen übersteigen). Schließlich sind Versicherungsunternehmen artspezifischen Risiken ausgesetzt (versicherungstechnisches Risiko<sup>3</sup>, underwriting risk). Hierzu gehören die Gefahr, dass die Schäden einer Versicherungsperiode die vereinnahmten Prämien übersteigen (price risk) sowie die Gefahr, dass die gestellten Schadenreserven nicht zur Finanzierung der sich in der Zukunft ergebenden Schadenzahlungen ausreichen (loss reserve risk).

Ausgangspunkt der weiteren Analysen sind ökonomische Handlungen, deren finanzielle Konsequenzen sich durch eine Zufallsvariable  $X$  quantifizieren lassen<sup>4</sup>. Beispiele für solche Zufallsvariable sind etwa:

- 1) die Höhe eines aus einem Finanzinvestment resultierenden Endvermögens,
- 2) die absolute Veränderung des Marktwerts oder die Rendite eines Finanzinvestments über eine Periode,
- 3) der Periodenerfolg oder die Kapitalrendite eines Unternehmens (Industrie, Versicherung, Bank),
- 4) die Veränderung der anfänglich gestellten Schadenreserve für einen Versicherungsbestand über eine Periode,
- 5) die Veränderung der Verpflichtungen eines Unternehmens relativ zum vorhandenen Vermögen,
- 6) der aggregierte Gesamtschaden eines Bestands von Versicherungsverträgen über eine Periode,
- 7) der aggregierte Ausfallbetrag eines Portfolios von Kreditrisiken über eine Periode,
- 8) die Höhe des Gesamtschadens für ein Unternehmen aus der Realisierung operativer Risiken in einer Periode.

Die genannten beispielhaften Situationen weisen einen strukturellen Unterschied auf. So kann in den ersten fünf Beispielen die zugrundeliegende Zufallsgröße sowohl negative als auch positive Werte annehmen und die negativen Werte sind mit Verlusten verbunden. In den Beispielen 6) – 8) kann die zugrundeliegende Zufallsvariable dagegen nur nicht-negative Werte

---

<sup>3</sup> Vgl. allgemein *Albrecht* (1992a, S. 7 ff.).

<sup>4</sup> Im Vordergrund steht damit die Beurteilung des Risikos von Finanzpositionen bzw. der Änderung von Finanzpositionen über bestimmte Zeitintervalle. Dies entspricht dem Stand der Literatur, die nur vereinzelte Resultate hinsichtlich dynamischer Risikoaspekte bzw. der Beurteilung von Finanzprozessen aufweist, so z.B. im Zusammenhang mit der Ruinwahrscheinlichkeit eines Versicherungsunternehmens, vgl. Abschnitt 8.6.

annehmen, wobei der Verlust (Schaden) umso höher ist, je höher dieser Wert ausfällt. Im Rahmen der weiteren Ausführungen gehen wir in der Regel von Positionen aus, die sowohl Gewinne als auch Verluste zulassen. Für reine Schaden- bzw. Verlustpositionen sind entsprechende Modifikationen vorzunehmen.

Die Spezifikation einer Zufallsvariablen geht in der Regel einher mit der (vollständigen) Spezifikation einer Verteilungsfunktion (Verteilungsannahme). Die Betrachtung des Risikos beschränkt sich dann auf das reine Zufallsrisiko<sup>5</sup> (process risk), d.h. auf das Risiko, das aus der Zufallsbestimmtheit der Realisationen der zugrundeliegenden Zufallsvariablen resultiert. In (einigen wenigen) allgemeineren Fällen ist auch das Irrtumsrisiko<sup>6</sup> (parameter risk), das sich seinerseits aus Diagnose- und Prognoserisiko zusammensetzt, nicht aus den Betrachtungen ausgeschlossen<sup>7</sup>. Artzner *et al.* (1999, S. 207) unterscheiden in diesem Zusammenhang modellabhängige (model-dependent) Risikomaße für Situationen, in denen die Verteilungsfunktion (bzw. das Wahrscheinlichkeitsmaß) konkret spezifiziert ist auf der einen Seite, und modellfreie (model-free) Risikomaße auf der anderen.

Zur Vereinfachung der Notation gehen wir bei der expliziten Darstellung von Risikomaßen dabei stets von Zufallsvariablen  $X$  aus, die eine Dichtefunktion  $f(x)$  besitzen. Der diskrete Fall lässt sich in der Regel in weitgehend analoger Weise behandeln.

## 2 Risiko als eigenständige Konzeption

Risiko wird in der Regel behandelt im Kontext von *Entscheidungen unter Risiko*, d.h. der Beurteilung von Handlungen, deren (finanzielle) Konsequenzen risikobehaftet sind. In diesem Zusammenhang ist es wichtig, zwischen der Konzeptualisierung von Risiko einerseits und Entscheidungsmodellen unter Risiko andererseits zu unterscheiden<sup>8</sup>. Bei Entscheidungsmodellen unter Risiko steht die Messung von *Präferenzen* (Höhen- und Risikopräferenzen) im Vordergrund, d.h. die Feststellung der Vorziehwürdigkeit von Handlungsalternativen unter

---

<sup>5</sup> Vgl. allgemein etwa Albrecht (1992a, S. 8).

<sup>6</sup> Ebenda.

<sup>7</sup> Generell ist mit der Verwendung von Modellen per se ein Modellrisiko verbunden, vgl. im Risk Management-Kontext etwa Crouhy *et al.* (2001, Chapter 15).

<sup>8</sup> Vgl. etwa Sarin/Weber (1993, S. 139).

Risikobedingungen. Explizite Risikokonzeptionen können dabei Eingang finden in Entscheidungsmodelle unter Risiko, z.B. im Rahmen von Risiko-Wert-Modellen<sup>9</sup>, dies muss aber nicht der Fall sein. So wird etwa Risiko im Rahmen des traditionellen Ansatzes für Entscheidungen unter Risiko, der Erwartungsnutzentheorie (*Bernoulli-Prinzip*), nicht explizit gemessen, sondern Risiken und Chancen einer Handlungsalternative werden hierbei simultan beurteilt.

Im Weiteren gehen wir dabei von einer eigenständigen Risikokonzeptualisierung („risk as a primitive“<sup>10</sup>) aus. Dies setzt voraus, dass eine binäre Ordnungsrelation  $\succeq_R$  existiert, die es erlaubt, die (finanziellen Konsequenzen der) Handlungsalternativen  $A$  und  $B$  hinsichtlich ihres Risikogehalts zu vergleichen.  $A \succeq_R B$  impliziert somit, dass  $A$  mindestens so riskant ist wie  $B$ . Diese Risikoordnungsrelation kann, aber muss nicht in einer Beziehung zur Präferenzordnung  $\succeq$  des Entscheidungsträgers stehen, auf deren Grundlage er die Handlungsalternativen insgesamt beurteilt. Bezeichnen  $X_A$  und  $X_B$  die beiden Zufallsvariablen, die die finanziellen Konsequenzen der Handlungen  $A$  und  $B$  quantifizieren, so sind wir gemäß der Standardvorgehensweise der Messtheorie an Funktionen  $R$  interessiert, die eine numerische Repräsentation der Risikoordnung  $\succeq_R$  erlauben. Es soll dabei gelten:

$$A \succeq_R B \Leftrightarrow R(X_A) \geq R(X_B). \quad (1)$$

Jede solche Funktion  $R$  werde als Risikomessfunktion bzw. kurz als *Risikomaß* bezeichnet. Formal ist also ein Risikomaß eine reellwertige Funktion  $R$ , die auf einer bestimmten, im Einzelfall festzulegenden, Menge von Zufallsvariablen definiert ist.

Wie bereits ausgeführt, kann zwischen den Ordnungsrelationen  $\succeq_R$  und  $\succeq$  bzw. zwischen den sie repräsentierenden Risiko- bzw. Präferenzfunktionalen  $R$  und  $\Phi$  eine Beziehung bestehen, dies muss aber nicht der Fall sein. Es stellt sich dann allgemein die Frage, unter welchen Bedingungen eine konsistente Beziehung zwischen  $R$  und  $\Phi$  etabliert werden kann. Eine Standardvorgehensweise hierfür besteht darin, neben einem Risikomaß  $R(X)$  auch ein Wertmaß

---

<sup>9</sup> Vgl. erneut *Sarin/Weber* (1993) oder *Maurer* (2000, S. 30 ff.) sowie *Albrecht/Maurer* (2002, S. 171 ff.).

<sup>10</sup> Vgl. zu einem solchen Vorgehen generell *Brachinger/Weber* (1997).

$V(X)$  einzuführen (in aller Regel<sup>11</sup> gilt dabei  $V(X) = E(X)$ , d.h. der Erwartungswert wird als geeignetes Wertmaß angesehen) und die Gesamtpräferenz durch eine Funktion  $H[R(X), V(X)]$  zu spezifizieren („Risiko-Wert-Modell“). Das Risiko-Wert-Modell ist dann konsistent mit einem Präferenzmodell (etwa: *Bernoulli-Prinzip*), wenn gilt<sup>12</sup>:

$$\Phi(X) \geq \Phi(Y) \Leftrightarrow H[R(X), V(X)] \geq H[R(Y), V(Y)]. \quad (2)$$

Da der Fokus des vorliegenden Beitrags auf Risikomaßen liegt, werden wir entsprechende Konsistenzfragen nur am Rande streifen<sup>13</sup>. Es ist aber offensichtlich, dass solche Konsistenzuntersuchungen nur in der Verbindung von einem Risikomaß mit einem Wertmaß sinnvoll sind, nicht bei Vorlage eines Risikomaßes alleine.

Eine separate Konzeptualisierung von Risiko ist aus mehreren Gründen notwendig<sup>14</sup>. Zunächst basieren viele Standardtheorien im finanzwirtschaftlichen Bereich auf einer getrennten Konzeptualisierung von Risiko und Wert. Das bekannteste Beispiel ist die *Markowitzsche* Portfoliotheorie (Risiko = Varianz bzw. Standardabweichung, Wert = Erwartungswert) bzw. deren Verallgemeinerungen (allgemeinere Risikomaße). Das Entscheidungsproblem beinhaltet dabei die Auswahl unter alternativen Risiko-Wert-Kombinationen und es ist entweder das Risiko für ein fixiertes Wertniveau zu minimieren oder der Wert für ein fixiertes Risikoniveau zu maximieren<sup>15</sup>. Des Weiteren gibt es empirische Evidenz dafür, dass etwa Entscheidungsträger durchaus in der Lage sind, Lotterien konsistent hinsichtlich ihres Risikogrades anzuordnen<sup>16</sup>. Risiko ist dabei nicht einfach so etwas wie eine negative Präferenz, sondern ein eigenständiges Konstrukt<sup>17</sup>.

---

<sup>11</sup> Für eine Ausnahme vgl. etwa *Albrecht et al.* (1998, S. 262 f.), hier werden Exzess-Chancenmaße als Wertmaße betrachtet.

<sup>12</sup> Ebenda, S. 260.

<sup>13</sup> Generell sei hierzu auf *Sarin/Weber* (1993) verwiesen, die systematisch die Frage behandeln, wann die durch ein Risiko-Wert-Modell induzierte Rangordnung konsistent mit einem geeigneten Erwartungsnutzen- oder Nicht-Erwartungsnutzenmodell ist.

<sup>14</sup> Zur Rechtfertigung einer expliziten Risikomessung vgl. ausführlicher *Brachinger/Weber* (1997, S. 235 f.) sowie *Maurer* (2000, S. 32 ff.).

<sup>15</sup> Dies führt in Investmentanwendungen auf das Konzept des effizienten Randes, in Anwendungen auf die Steuerung von Versicherungsunternehmen auf die Konzeption des Asset/Liability-Effizienzrandes (ALEF), vgl. zu Letzterem etwa *Albrecht* (2003, S. 438).

<sup>16</sup> Vgl. etwa *Keller/Sarin/Weber* (1986).

<sup>17</sup> Vgl. etwa *Brachinger/Weber* (1997, S. 235).



Schließlich und endlich existieren für Unternehmen eine Reihe von relevanten Entscheidungskontexten, in denen eine eigenständige Risikokonzepualisierung unabdingbar ist. Hierzu zählen insbesondere regulatorische Vorschriften für Versicherungen und Kreditinstitute über die notwendige Eigenkapitalausstattung in Abhängigkeit von der eingegangenen Risikoexponierung (Solvabilität, Risk Based Capital).

### 3 Strukturierung von Risikokonzeptionen

Zum Zwecke einer systematischen Aufarbeitung der in der Literatur in einer extremen Vielzahl entwickelten Risikomaße unterscheiden wir<sup>18</sup> im Weiteren zwei idealtypische Konzeptionen von Risiko:

- I) Risiko als Ausmaß der Abweichungen von einer Zielgröße (Risikokonzepualisierung Typus I),
- II) Risiko als notwendiges Kapital bzw. notwendige Prämie (Risikokonzepualisierung Typus II).

Dabei besteht für zentrale Fälle ein einfacher intuitiver Zusammenhang<sup>19</sup> zwischen Risikomaßen des Typus I und Risikomaßen des Typus II. Wendet man ein Risikomaß des Typus II nicht auf die Zufallsvariable  $X$ , sondern auf die zentrierte Zufallsvariable  $X - E(X)$  an, so resultiert ein – nun lageunabhängiges – Risikomaß des Typus I. Entsprechend kann man die umgekehrte Transformation vornehmen, um von einem lageunabhängigen Risikomaß des Typus I zu einem Risikomaß des Typus II zu kommen. Der entsprechende formale Zusammenhang wird in Abschnitt 5 aufgegriffen, konkrete Zusammenhänge für einzelne Risikomaße in den Abschnitten 6 und 7.

---

<sup>18</sup> *Rockafellar/Uryasev/Zabarankin* (2002) unterscheiden zwischen Deviation Measures und Risk Measures, wobei „a risk measure evaluates the overall seriousness of possible losses“. Diese Unterscheidung ist aber nicht ausreichend, da es Abweichungsmaße gibt – insbesondere die in Abschnitt 6.2 behandelten Shortfallrisikomaße – die ebenfalls rein auf Verluste (relativ zu einer Zielgröße) abstellen. Die Deviation Measures im Sinne von *Rockafellar et al.* sind dabei beschränkt auf (zweiseitige) Risikomaße relativ zur Zielgröße Erwartungswert.

<sup>19</sup> Vgl. zu diesem Zusammenhang *Rockafellar/Uryasev/Zabarankin* (2002).

Da Risikomaße des Typus II nicht lageunabhängig sind, d.h. auch die Höhe des Erwartungswertes einen Einfluss auf das Risikomaß nimmt, kann man Risikomaße des Typus II auch als eine Variante risikoadjustierter<sup>20</sup> Performancemaße auffassen<sup>21</sup>.

Die weitere Struktur des Beitrags ist wie folgt. Nach einer kurzen Diskussion möglicher Zusammenhänge von Risikomaßen und der Erwartungsnutzentheorie (Abschnitt 4), gehen wir ausführlich (Abschnitt 5) auf axiomatische Charakterisierungen von Risikomaßen und deren Zusammenhänge zu den Risikokonzepualisierungen des Typus I bzw. II ein. In zwei weiteren Hauptabschnitten behandeln wir dann eine Reihe von Risikomaßen, die dem Typus I (Abschnitt 6) bzw. dem Typus II (Abschnitt 7) zuzuordnen sind sowie deren Vor- bzw. Nachteile. In einem Schlussabschnitt (Abschnitt 8) gehen wir schließlich noch auf ausgewählte weitere Ansätze zur Gewinnung von Risikomaßen ein.

#### 4 Risikomaße und Erwartungsnutzentheorie

Da die Erwartungsnutzentheorie (*Bernoulli-Prinzip*) die Standardtheorie zum Treffen von Entscheidungen unter Risiko ist, stellt sich die Frage, inwieweit auf Basis der Erwartungsnutzentheorie Konzeptualisierungen von Risiko abgeleitet werden können.

Zunächst erfolgt die Bewertung einer Zufallsgröße  $X$  im Rahmen der Erwartungsnutzentheorie durch die Präferenzfunktion  $\Phi(X) = E[u(X)]$ , wobei  $u$  die (für jeden Entscheidungsträger spezifische) Risikonutzenfunktion bedeutet. Die quantitative Form der Bewertung macht deutlich, dass hierbei Risiko und Wert nicht getrennt konzeptualisiert werden, sondern (implizit) simultan in die Bewertung einfließen. Kann nun aber im Rahmen der Erwartungsnutzentheorie auf Basis einer fixierten Nutzenfunktion ein explizites Risikomaß abgeleitet werden?

*Rothschild/Stiglitz* (1970) entwickeln alternative äquivalente Charakterisierungen für das Vorliegen von „mehr Risiko“ (increasing risk), z.B. das Hinzufügen von mehr Wahrscheinlichkeitsmasse zu den Verteilungsenden, ohne dass der Erwartungswert durch diese Transformation verändert wird („mean preserving spread“). Allerdings lässt sich diese Konzeption nur zum Vergleich von Zufallsgrößen mit identischem Erwartungswert verwenden. Implizit liegt

---

<sup>20</sup> Wobei hier nun ein Risikobegriff im Sinne der Konzeptualisierung I unterstellt wird.

<sup>21</sup> Für entsprechende Anwendungen auf das Risikomaß Value-at-Risk vgl. *Albrecht* (2002a, b).

damit die Annahme zugrunde, dass die Risikomessung (und damit das Risikomaß) lageunabhängig sein sollte, wobei hierbei der Erwartungswert als Lagemaß verwendet wird.

Im Falle identischer Erwartungswerte ist die Konzeption von *Rothschild/Stiglitz* dabei äquivalent zur Konzeption der *stochastischen Dominanz* zweiter Ordnung, d.h.<sup>22</sup>

$$X_{\text{ssd}} Y \Leftrightarrow E[u(X)] \geq E[u(Y)] \text{ für alle } u \text{ mit } u' \geq 0, u'' \leq 0. \quad (3)$$

Weder die *Rothschild/Stiglitz*-Konzeption noch die Konzepte der stochastischen Dominanz<sup>23</sup> im Allgemeinen beinhalten aber ein explizites Risikomaß. Zudem dienen stochastische Dominanzkonzepte der Anordnung von Präferenzen, nicht von Risiken.

Ein explizites Risikomaß im Zusammenhang mit der Erwartungsnutzentheorie beinhaltet dagegen die Arbeit von *Jia/Dyer* (1996), die das *Standard Measure of Risk*

$$R(X) = -E[u(X - E(X))] \quad (4)$$

eingeführen. Risiko ist damit der negative Erwartungsnutzen der transformierten Zufallsvariablen  $X - E(X)$ . Diese Transformation dient wiederum dazu, die Risikomessung lageunabhängig zu machen.

Konkrete Risikomaße erhält man dann durch konkrete Spezifikation der Risikonutzenfunktion  $u$ . So ergibt sich etwa für die quadratische Nutzenfunktion  $u(x) = ax - bx^2$  das Risikomaß Varianz

$$\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2]. \quad (5)$$

Aus der kubischen Nutzenfunktion  $u(x) = ax - bx^2 + cx^3$  resultiert das Risikomaß

$$\text{Var}(X) - cM_3(X), \quad (6)$$

---

<sup>22</sup> Die Zufallsvariable  $X$  wird somit von *allen* Entscheidungsträgern mit monoton steigender und konkaver Nutzenfunktion der Zufallsvariablen  $Y$  vorgezogen.

<sup>23</sup> Vgl. allgemein etwa *Levy* (1972).

bei dem die Varianz um die Höhe des dritten Zentralmoments  $M_3(X) = E[(X - E(X))^3]$  korrigiert wird. Bei Ansatz der Nutzenfunktion  $u(x) = ax - |x|$  ergibt sich das Risikomaß mittlere absolute Abweichung (mean absolute deviation, MAD)

$$\text{MAD}(X) = E[|X - E(X)|]. \quad (7)$$

Schließlich resultiert aus der linear-exponentiellen Nutzenfunktion  $u(x) = ax + b(1 - e^{-cx})$  das Risikomaß

$$R(X) = bE\left[\exp\left\{-c(X - E(X))^2 - 1\right\}\right]. \quad (8)$$

Dieses Risikomaß wurde auch von *Bell* (1995) betrachtet. Varianten dieses Risikomaßes haben vor allem in der Literatur zum „perceived risk“ Bedeutung erlangt<sup>24</sup>.

Ein weiterer Vorteil des Ansatzes von *Jia/Dyer* besteht darin, dass die vorgenommene explizite Risikomessung – unter der zusätzlichen Annahme einer Bedingung über *Risikounabhängigkeit* (risk independence) – auch konsistent mit einem aus der Erwartungsnutzentheorie abgeleiteten Risiko-Wert-Modell ist.

## 5 Axiomatische Charakterisierungen von Risikomaßen

### 5.1 Das Axiomensystem von *Pedersen/Satchell*

In der Literatur wurden eine Reihe von Axiomensystemen für Risikomaße entwickelt, die Anforderungen an „gute“ bzw. „vernünftige“ Risikomaße stellen. Ein erstes solches Axiomensystem wurde dabei von *Pedersen/Satchell* (1998) in leichter Verallgemeinerung eines entsprechenden Systems von *Kijima/Ohnishi* (1993) formuliert. Die Axiome lauten:

- |        |                        |                                     |
|--------|------------------------|-------------------------------------|
| (PS 1) | (Nichtnegativität)     | $R(X) \geq 0$                       |
| (PS 2) | (Positive Homogenität) | $R(cX) = cR(X)$ für $c \geq 0$      |
| (PS 3) | (Subadditivität)       | $R(X_1 + X_2) \leq R(X_1) + R(X_2)$ |
| (PS 4) | (Shift-Invarianz)      | $R(X + c) \leq R(X)$ für alle $c$ . |

---

<sup>24</sup> Vgl. hierzu *Jia/Dyer* (1996).

Risiko wird dabei von *Pedersen/Satchell* grundsätzlich als Abweichung von einem Lagemaß verstanden, insofern gilt stets  $R(X) \geq 0$ . Die Homogenität (PS 2) impliziert, dass das Risiko eines Vielfachen einer bestimmten Basisfinanzposition das entsprechende Vielfache des Risikos dieser Basisposition ist<sup>25</sup>. Die Subadditivitätseigenschaft (PS 3) besagt, dass das Risiko von in einem Bestand zusammengefassten Einzelengagements nicht höher sein soll als die Summe der jeweiligen Einzelrisiken. Im Investmentkontext korrespondiert<sup>26</sup> diese Forderung mit dem Vorliegen eines Diversifikationseffekts, im Versicherungskontext mit dem Vorliegen eines Ausgleich-im-Kollektiv-Effekts (pooling of risks). Die Shift-Invarianz (PS 4) bedeutet, dass die Hinzufügung einer sicheren Größe nur die Lage, aber nicht das Risiko ändert.

Die Axiome (PS 1) und (PS 4) wurden bereits von Bell (1995) als notwendige Eigenschaften eines Risikomaßes postuliert. (PS 2) und (PS 3) zusammen implizieren, dass Konstanten (sicheren Ereignissen) stets ein Risiko von null zugeordnet wird. (PS 2) und (PS 4) bewirken, dass das Risikomaß  $R(X)$  konvex ist. Damit kann gesichert werden, dass  $R(X) \leq R(Y)$  gilt, wenn  $X_{ssd} Y$  gemäß der stochastischen Dominanz zweiter Ordnung<sup>27</sup>.

Aufgrund des Risikoverständnisses von Risiko als lageunabhängiger Eigenschaft, ist das Axiomensystem von *Pedersen/Satchell* (1998) ideal geeignet, um Güteeigenschaften von Risiken des Typus I gemäß den Ausführungen in Abschnitt 3 zu überprüfen. Wir kommen hierauf in Abschnitt 6.4 zurück.

## 5.2 Das Axiomensystem von *Rockafellar/Uryasev/Zabarankin* für Abweichungsmaße

Das von *Rockafellar/Uryasev/Zabarankin* (2002) für Abweichungsmaße (Deviation Measures) postulierte Axiomensystem ist fast vollständig identisch mit dem System von *Pedersen/Satchell*, enthält aber leichte Verschärfungen. So wird die Shift-Invarianz zur Bedingung  $R(X + c) = R(X)$  verschärft, die Nichtnegativitätsbedingung zu  $R(X) > 0$  für alle nicht de-

<sup>25</sup> Z.B. beinhaltet der Kauf von zwei Wertpapieren doppelt so viel Risiko wie der Kauf nur eines Papiers. Ausgleichseffekte können nur bei Investments in unterschiedliche Papiere zustande kommen. Des Weiteren wird damit ausgeschlossen, dass die reine Positionsgröße das Risiko beeinflusst.

<sup>26</sup> Hinsichtlich weiterer Argumente für die Forderung der Subadditivitätseigenschaft vgl. etwa *Artzner et al.* (1999, S. 209).

<sup>27</sup> Vgl. *Pedersen/Satchell* (1998, S. 107).

generierten Zufallsvariablen und  $R(X) = 0$  für alle Konstanten sowie schließlich die positive Homogenität  $R(0) = 0$  und  $R(cX) = cR(X)$  für alle  $c > 0$ .

Es folgt hieraus insbesondere  $R(X) = R(X - E(X))$ , d.h. das Risikomaß ist exakt lageunabhängig. Die vorgenommene Verschärfung ist notwendig, um die noch zu behandelnde Äquivalenz von bestimmten Klassen von Risikomaßen des Typus I bzw. II etablieren zu können.

### 5.3 Das Axiomensystem von Artzner/Delbaen/Eber/Heath

Ein Axiomensystem<sup>28, 29</sup>, das in der Literatur starke Beachtung gefunden hat, wurde von Artzner et al. (1997, 1999) postuliert.  $R(X)$  ist dabei generell ein reellwertiges Risikomaß. Die Axiome lauten

- (ADEH 1) (Translationsinvarianz)  $R(X + c) = R(X) - c$  für alle  $c$   
 (ADEH 2) (Subadditivität)  $R(X_1 + X_2) \leq R(X_1) + R(X_2)$   
 (ADEH 3) (Positive Homogenität)  $R(cX) = cR(X)$  für alle  $c \geq 0$   
 (ADEH 4) (Monotonie)  $X \leq Y \Rightarrow R(Y) \leq R(X)$ .

Ein Risikomaß, das diese vier Axiome erfüllt, wird als *kohärentes Risikomaß* bezeichnet. Im Falle<sup>30</sup>  $R(X) \geq 0$  kann dabei  $R(X)$  als (minimales) zusätzliches Kapital interpretiert werden, das der risikobehafteten Finanzposition hinzugefügt werden muss, um eine „risikolose“ Position zu erreichen (und damit etwa den regulatorischen Anforderungen zu genügen). In der Tat folgt aus (ADEH 1):

$$R(X + R(X)) = 0.$$

Eigenschaft (ADEH 1) beinhaltet in dem dargelegten Kontext die Forderung, dass die Hinzufügung eines sicheren Betrages das notwendige Kapital um diesen Betrag reduziert. Schließ-

---

<sup>28</sup> Zur Vereinfachung der Darstellung gehen wir abweichend von Artzner et al. (1999) von einer sicheren Verzinsung von  $r = 0$  aus.

<sup>29</sup> Das Axiomensystem von Artzner et al. existiert in verschiedenen Varianten. Wir folgen hier Artzner et al. (1999).

<sup>30</sup> Ist  $R(X) < 0$ , so kann hingegen Risikokapital in Höhe von  $|R(X)|$  abgezogen werden, ohne die regulatorischen Anforderungen zu verletzen, bzw. die Sicherheit zu gefährden.

lich beinhaltet die Monotonieeigenschaft, dass, wenn für jeden Zustand  $\omega$  der Welt  $Y$  stets höhere Werte als  $X$  aufweist,  $X$  ein größeres Risiko aufgrund des jeweils höheren Verlustpotenzials beinhaltet.

Im Gegensatz zum bisherigen Kontext, in dem implizit stets von einer bekannten Wahrscheinlichkeitsverteilung ausgegangen wurde, analysieren *Artzner et al.* (1999) auch den allgemeinen Fall modellfreier Risikomaße, in dem keine A priori-Information über die vorliegende Verteilungsfunktion (allgemeiner: das vorliegende Wahrscheinlichkeitsmaß) existiert. *Artzner et al.* konzentrieren sich<sup>31</sup> dabei auf den Fall endlich vieler Zustände der Welt (endlicher Wahrscheinlichkeitsraum) und gleichmäßig beschränkter Zufallsvariablen  $X$ . In diesem Kontext sind sie in der Lage, ein allgemeines Repräsentationstheorem für kohärente Risikomaße zu etablieren. Es muss eine Menge  $M$  von Verteilungsfunktionen  $F$  geben, so dass  $R(X) = \sup\{E_F(-X); F \in M\}$  gilt.

Generell erfüllen insbesondere die Risikomaße  $R(X) = E(-X)$  und<sup>32</sup>  $R(X) = \max(-X)$ , der „Maximalschaden“, die Anforderungen an ein kohärentes Risikomaß. Dies zeigt, dass zwar ggf.<sup>33</sup> die Kohärenzbedingungen „vernünftige“ Anforderungen an Risikomaße stellen, aber nicht jedes kohärente Risikomaß auch ein „vernünftiges“ Risikomaß ist<sup>34</sup>.

Die partiell unterschiedliche Axiomatisierung von *Pedersen/Satchell* und *Artzner et al.* ist auf das unterschiedliche Verständnis von Risiko – Risiko als Abweichung von einer Zielgröße einerseits und Risiko als (minimal) notwendiges (zusätzliches) Risikokapital andererseits – zurückzuführen. Diese unterschiedlichen Auffassungen von Risiko sind auch zu berücksichtigen, wenn ein Risikomaß mit dem einen Axiomensystem kompatibel ist, das andere hingegen verletzt.

Einen expliziten Zusammenhang zwischen diesen beiden Risikoauffassungen stellen die Ausführungen des nächsten Abschnittes her.

---

<sup>31</sup> Für den allgemeinen Fall, d.h. beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und beliebige Zufallsvariable, vgl. *Delbaen* (2002). Es bestehen insbesondere enge Beziehungen von kohärenten Risikomaßen zur Theorie der kooperativen Spiele sowie zur Theorie der verzerrten Wahrscheinlichkeitsmaße (distorted probability measures).

<sup>32</sup> Vgl. hierzu *Fischer* (2001, S. 8).

<sup>33</sup> Zu einer generellen Kritik an kohärenten Risikomaßen vgl. *Goovaerts et al.* (2001, 2002).

<sup>34</sup> So würden etwa im Versicherungszusammenhang solchermaßen festgelegte Risikoprämien ökonomisch unsinnig sein, vgl. die entsprechenden Ausführungen in Abschnitt 5.3.

#### 5.4 Das Axiomensystem von *Rockafellar/Uryasev/Zabarankin* für erwartungswertbezogene Risikomaße

*Rockafellar/Uryasev/Zabarankin* (2002) stellen ein zweites Axiomensystem für Risiken im Sinne von notwendigem Risikokapital auf. Sie fordern dabei die Bedingungen<sup>35</sup> (ADEH 1-3) und stellen die zusätzliche Bedingung<sup>36</sup>.

(RUZ) (Erwartungswertbegrenzung)  $R(X) > E(-X)$  für alle nicht-degenerierten Zufallsvariablen und  $R(X) = E(-X)$  für alle degenerierten Zufallsvariablen.

Ein solches Risikomaß wird als erwartungswertbegrenztes (expectation bounded) Risikomaß bezeichnet. Ist zusätzlich noch die Monotonie (ADEH 4) erfüllt, so liegt ein kohärentes erwartungswertbegrenztes Risikomaß vor.

Die Basisidee ist dabei, von einem Risikomaß  $R_{II}(X)$  des Typus II durch Anwendung auf  $X - E(X)$ , d.h. Betrachtung von  $R_{II}(X - E(X)) = R_{II}(X) - E(X)$  auf ein lageunabhängiges Risikomaß des Typus I zu gelangen<sup>37</sup> und vice versa. Formal gilt der Zusammenhang, dass die Maße  $R_I(X)$ , die den Bedingungen unter 5.2 genügen und die erwartungswertbegrenzten Risikomaße  $R_{II}(X)$  einer 1:1-Korrespondenz genügen, wobei  $R_I(X) = R_{II}(X - E(X))$  und  $R_{II}(X) = R_I(X) - E(X)$ .  $R_{II}$  ist im Rahmen dieser Relation genau dann kohärent, wenn  $R_I(X) \leq E(X) - \inf X$  für alle betrachteten  $X$ . Ein Standardbeispiel<sup>38 39</sup> für diese Korrespondenz ist  $R_I(X) = a\mathcal{S}(X)$  für  $a > 0$  und  $R_{II}(X) = a\mathcal{S}(X) - E(X)$ .

<sup>35</sup> Mit der bereits in Abschnitt 5.2 dargelegten leichten Verschärfung der positiven Homogenität.

<sup>36</sup> Diese Bedingung schließt – im Gegensatz zu ADEH –  $R(X) = E(-X)$  als Risikomaß aus.

<sup>37</sup> Nur  $R(X) \geq E(-X)$  garantiert dann die Erfüllung von (PS 1).

<sup>38</sup> Man beachte, dass für reine Schadenvariablen  $S := -X \geq 0$  die Korrespondenz lautet  $R_{II}(S) = E(S) + R_I(S)$  bzw.  $R_I(S) = R_{II}(S) - E(S)$ . Dies ist die intuitivere Variante der Korrespondenz.

<sup>39</sup>  $R_{II}(X)$  ist dabei nicht kohärent, da die Monotonieeigenschaft verletzt ist, vgl. *Artzner et al.* (1999, S. 210). Dies ist zugleich die Motivation für *Rockafellar/Uryasev/Zabarankin*, zunächst nur die Bedingungen (ADEH 1-3) für erwartungswertbegrenzte Risikomaße zu fordern.



## 5.5 Axiome für Prämienprinzipien und das Axiomensystem von Wang/Young/Panjer

Wir konzentrieren uns im Folgenden auf die speziellen Verhältnisse von Versicherungsunternehmen und hier insbesondere den versicherungstechnischen Bereich, d.h. Betriebskosten und Kapitalanlageerträge werden ausgeklammert. Zwei zentrale Aufgaben des Risikomanagements von Versicherungsunternehmen sind die Kalkulation von Risikoprämien  $p$  einerseits und die Bestimmung des notwendigen Risikokapitals  $C$  andererseits. Im Gegensatz zum Banken- bzw. Investmentfall stehen damit dem Versicherungsunternehmen nicht nur Risikokapital (Sicherheitskapital), sondern auch Prämien zur Finanzierung der akkumulierten Schäden  $S \geq 0$  eines fixierten Versicherungsbestandes zur Verfügung. Insofern muss hier bei der Analyse etwas differenzierter vorgegangen werden. Betrachtet man die Prämie  $p$  des Bestandes als (etwa durch die Verhältnisse des Versicherungsmarktes) vorgegeben, so ist nur das (zusätzlich) notwendige Risikokapital zu bestimmen und wir sind in der Situation des Abschnitts 5.3 mit  $X = p - S$ , bzw., wenn bereits ein anfängliches Kapital  $C_0$  gegeben ist, mit  $X = C_0 + p - S$ . Ein Risikomaß des Typus II liefert dann das (minimal) notwendige (zusätzliche) Risikokapital<sup>40</sup>.

Eine zweite Anwendung betrifft die Kalkulation der Risikoprämie, wobei typischerweise die Betrachtung des Risikokapitals ausgeklammert wird<sup>41</sup>. Gesucht werden dann *Prämienprinzipien*  $p$ , die jeder Schadenvariablen  $S \geq 0$  eine (Risiko-)Prämie  $p(S) \geq 0$  zuordnen. Versteht man Risiko im Sinne des Risikotypus II und interpretiert  $R(X)$  als (minimal) notwendige Prämie zur Tragung des Risikos  $X = -S$ , so gelangt man systematisch zu Prämienprinzipien<sup>42</sup> durch die Betrachtung  $p(S) := R(-S)$ . Versteht man Risiko hingegen im Sinne des Risikotypus I als Abweichung von einer Zielgröße, insbesondere dem Erwartungsschaden  $E(S)$ , so gelangt man zu Prämienprinzipien der Form  $p(S) = E(S) + aR(S)$  mit einem noch festzulegenden Parameter  $a > 0$ .

In der versicherungsmathematischen Risikotheorie existieren eine Reihe von axiomatischen Anforderungen zur Überprüfung der Güte von Prämienprinzipien<sup>43</sup>. Elementar sind dabei die

---

<sup>40</sup> Vgl. hierzu auch *Artzner* (1999).

<sup>41</sup> Das Risikokapital ist eine Größe, die sich sinnvollerweise auf den Gesamtbestand des Unternehmens bezieht, wohingegen Prämien auch für Teilbestände und Einzelrisiken kalkuliert werden.

<sup>42</sup> Vgl. hierzu *Delbaen* (2000, S. 734).

<sup>43</sup> Vgl. allgemein *Goovaerts et al.* (1984, Kapitel 3) sowie etwa *Kaas et al.* (2001, S. 117 f.)

Forderungen  $p(S) > E(S)$  und  $p(S) < \max(S)$ , d.h. die Risikoprämie sollte einerseits den Erwartungsschaden übersteigen<sup>44</sup> und andererseits niedriger als der Maximalschaden sein<sup>45</sup> (no-ripoff-condition). Des Weiteren werden auch die bereits angesprochenen Eigenschaften der Translationsinvarianz und der (positiven) Homogenität gefordert. Schließlich wird auch die Subadditivität betrachtet, allerdings mit dem wichtigen Unterschied, dass diese nur für unabhängige und nicht für beliebige – ggf. vollständig positiv korrelierte bzw. allgemein comonotone – Risiken gefordert wird<sup>46</sup>.

Neben Katalogen von Einzelaxiomen existiert auch im Bereich der Prämienkalkulation ein geschlossenes Axiomensystem. *Wang et al.* (1997) postulieren das folgende System von Axiomen für Versicherungsprämien in einem kompetitiven Versicherungsmarkt<sup>47</sup>.

- (WYP 1) Die Versicherungsprämie hängt nur von der Verteilungsfunktion des Schadens ab.
- (WYP 2) (Monotonie)  $X \leq Y \Rightarrow p(X) \leq p(Y)$
- (WYP 3) (Comonotone Additivität<sup>48</sup>) Für comonotone<sup>49</sup> Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$  gilt  $p(X + Y) = p(X) + p(Y)$
- (WYP 4) (Stetigkeit<sup>50</sup>)  $\lim_{d \rightarrow 0^+} p[\max(X - d, 0)] = \lim_{d \rightarrow \infty} p[\min(X, d)] = p(X)$ .

Unter bestimmten weiteren Bedingungen können *Wang et al.* (1997) dann nachweisen, dass die folgende Repräsentation für  $p$  gültig ist<sup>51</sup>:

<sup>44</sup> Im Falle  $p = E(S)$  ist – bei Ausklammerung des Sicherheitskapitals – keine ausreichende Unternehmenssicherheit gewährleistet, vgl. etwa *Albrecht* (1992a, S. 20).

<sup>45</sup> Sonst wäre kein Versicherungsnehmer bereit, einen Versicherungsvertrag abzuschließen.

<sup>46</sup> Dieser Unterschied wird in *Goovaerts et al.* (2001, 2002) betont.

<sup>47</sup> Man beachte, dass die involvierten Zufallsvariablen nun nicht-negative Schadensgrößen sind.

<sup>48</sup> Die Eigenschaft der comonotonen Additivität wurde von *Wang et al.* (1997) als Reaktion auf die Kritik von *Albrecht* (1992b) an der Verwendung (strikt) additiver Prämienprinzipien im Versicherungszusammenhang eingeführt.

<sup>49</sup> D.h. es gibt eine Zufallsgröße  $Z$ , so dass  $X$  und  $Y$  monotone Transformationen  $X = f(Z)$  bzw.  $Y = g(Z)$  von  $Z$  sind.

<sup>50</sup> Die Forderungen beinhalten, dass eine geringfügige Stützung der Schadenvariablen nur eine geringfügige Prämienänderung zur Konsequenz hat und dass  $p$  bestimmt werden kann, indem man  $X$  durch beschränkte Variable approximiert.

<sup>51</sup> Es bestehen damit enge Verbindungen zur Theorie der Choquet-Integrale bzw. nicht-additiven Maße, vgl. etwa hierzu generell *Denneberg* (1994) und zu den Erweiterungen der Erwartungsnutzentheorie

$$p(X) = \int_0^{\infty} g(1 - F(x)) dx. \quad (9)$$

Dabei ist  $F$  die Verteilungsfunktion von  $X$  und  $g$  eine steigende Funktion (Verzerrungsfunktion, distortion function) mit  $g(0) = 0$  und  $g(1) = 1$ . Die gemäß (9) generierten Prämienprinzipien erfüllen eine Reihe von weiteren Güteeigenschaften<sup>52</sup>.

Ein weiteres zentrales Resultat besteht dahingehend, dass bei einer konkaven Verzerrungsfunktion  $g(X)$  für das Prämienprinzip  $p(X)$  die Anforderungen an ein kohärentes Risikomaß erfüllt sind<sup>53, 54</sup>. Damit ist zugleich eine explizite Konstruktionsvorschrift für kohärente Risikomaße gefunden.

Abschließend wollen wir noch auf eine dritte denkbare Konstellation im Versicherungszusammenhang eingehen, nämlich eine Prämienkalkulation unter Berücksichtigung eines gegebenen Risikokapitals  $C_0$ . Dies ist formal gleich zu behandeln, wie der Eingangsfall der Bestimmung des Risikokapitals bei fixierter Prämie, erlaubt aber eine intuitive Herausarbeitung einer Situation, in der auch eine „super-additive“ Prämienfestlegung denkbar und sinnvoll ist. Das gegebene Risikokapital  $C_0$  begrenzt grundsätzlich die Kapazität des Versicherungsunternehmens zur Zeichnung von Risiken. Insofern ist es vorstellbar, dass im Rahmen dieser Kapazität eine bestimmte Menge identischer Risiken zu identischen Preisen gezeichnet werden kann, die Hinzufügung eines weiteren Risikos die gegebene Kapazität aber sprengt und dies – etwa bei fixiertem Sicherheitsniveau des Unternehmens – nur aufgefangen werden kann, indem man eine entsprechend erhöhte Prämie fordert. Insgesamt stützt dieses Beispiel die Warnungen von *Goovaerts et al.* (2001, 2002), Axiomensysteme nicht pauschal anzuwenden, sondern insbesondere zu überprüfen, ob dies im Einzelfall sinnvoll und konsistent mit "Best Practice Rules" des Versicherungsgeschäfts ist.

---

von *Schmeidler* (1989) und *Yaari* (1987). *Chateauneuf et al.* (1996) betrachten eine entsprechende Preisbildung auf Finanzmärkten mit Friktionen.

<sup>52</sup> Vgl. *Wang et al.* (1997, S. 178).

<sup>53</sup> Vgl. etwa *Wirch/Hardy* (1999, S. 339) und *Delbaen* (2002, S. 15).

<sup>54</sup> Ein entsprechendes Resultat existiert auch für beliebige Gewinn/Verlust-Positionen, vgl. Abschnitt 7.4.

## 6 Risiko als Ausmaß der Abweichungen von einer Zielgröße

### 6.1 Zweiseitige Risikomaße<sup>55</sup>

Als Zielgröße dient im Weiteren zunächst der Erwartungswert  $E(X)$  als Maß für die Lage der betrachteten Verteilungen. Als Maß für das Ausmaß der Abweichungen („Streuung“, Dispersion) vom Erwartungswert (in beide Richtungen) können verschiedene Abstandsmaße zum Ansatz kommen. So führt die Erfassung quadratischer Abweichungen („Volatilität“) auf das Risikomaß Varianz gemäß (5) bzw. auf die Quadratwurzel hieraus, die Standardabweichung

$$s(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}. \quad (10)$$

Zurückgehend auf die Pionierarbeiten von *Markowitz* (1952, 1959) und *Tobin* (1958) sind die Varianz bzw. die Standardabweichung die traditionellen Risikomaße im Bereich ökonomischer Anwendungen. Sie sind lageunabhängige Risikomaße und weisen lediglich sicheren Ereignissen (einwertigen Zufallsgrößen) einen Wert von null zu. Daneben bestehen eine Reihe von technischen Vorteilen. Bei einer Portfoliobildung lässt sich die Varianz als Summe der Varianzen sowie der Kovarianzen der einzelnen Titel im Portfolio bestimmen. Die Varianz lässt sich ferner technisch gut als Zielfunktion in Optimierungsproblemen („quadratische Optimierung“) verwenden. Aus statistischer Sicht ist schließlich ein etabliertes Instrumentarium verfügbar, mit dessen Hilfe die Varianz bzw. Varianz/Kovarianzmatrix aus historischen Zeitreihen geschätzt werden kann.

Auch aus theoretischer Sicht erfüllen die Varianz bzw. die Standardabweichung eine Reihe wichtiger Eigenschaften. Im Falle der Normal- und Lognormalverteilung ist eine höhere Standardabweichung (bei gleichem Erwartungswert) äquivalent<sup>56</sup> zum Vorliegen von „mehr Risiko“ im Sinne<sup>57</sup> von *Rothschild/Stiglitz* (1970). Ferner wird zur Rechtfertigung der Varianz als Risikomaß auch angeführt, dass die Risikoprämie in erster Näherung gleich dem Produkt aus der halben Varianz und der Risikoaversionsfunktion nach *Pratt* ist. Generell gibt es zu-

---

<sup>55</sup> Zweiseitige Risikomaße (two sided risk measures) messen den „Abstand“ der Realisierungen zur Zielgröße, wobei sowohl vorteilhafte als auch unvorteilhafte Realisierungen betrachtet werden, vgl. z.B. *Goovaerts et al.* (2002).

<sup>56</sup> Vgl. hierzu *Levy* (1972).

<sup>57</sup> Vgl. die entsprechenden Ausführungen in Abschnitt 4.

dem eine ganze Reihe von Aussagen<sup>58</sup> hinsichtlich der Konsistenz von Erwartungswert-Varianz-Ansätzen und der Erwartungsnutzentheorie. Schließlich erfüllt die Standardabweichung alle Bedingungen des Axiomensystems von *Pedersen/Satchell*.

Insgesamt haben diese vorteilhaften Eigenschaften dazu geführt, dass Varianz bzw. Standardabweichung in finanz- und versicherungswissenschaftlichen Fragestellungen eine dominante Stellung hinsichtlich Risikomessung und -steuerung besitzen.

Trotz weiter Verbreitung und vorteilhaften Eigenschaften ist eine volatilitätsbasierte Risikomessung aber auch der Kritik ausgesetzt. Als zweiseitige Risikomaße erfassen sowohl Varianz als auch Standardabweichung negative wie positive Abweichungen vom Erwartungswert. Verbindet man hingegen Risiko – wie intuitiv naheliegend – nur mit adversen finanziellen Entwicklungen, so würde man nur in einer *Unterschreitung* des Erwartungswerts eine Gefahr sehen, in einer *Überschreitung* dagegen eher eine willkommene Chance.<sup>59</sup> Solange die zugrundeliegende Zufallsgröße  $X$  symmetrisch verteilt ist, ist dies weniger problematisch, da eine Erhöhung der Varianz bzw. Standardabweichung zu einer symmetrischen Erhöhung sowohl der Über- als auch der Unterschreitungen führt. Es gibt aber ausreichende empirische Evidenz, dass Verteilungen sowohl im Finanz- als auch im Versicherungsbereich oftmals fette Verteilungsenden (fat tails) aufweisen und damit nicht-symmetrischer Natur sind. In der Tat ist damit ein weiterer zentraler Kritikpunkt an der Varianz bzw. der Standardabweichung, dass diese unterschiedliche Gefährlichkeitsgrade bedingt durch die Verteilungsenden (Right Tail Risk) nicht angemessen berücksichtigen. Dies legt in einem ersten Schritt die flankierende Erfassung höherer Zentralmomente (bzw. normierten Versionen hiervon, wie z.B. Schiefe oder Kurtosis) nahe, um die Größenordnung des Risikos besser abschätzen zu können.

Entsprechend wird z.B. vorgeschlagen, die Schiefe

$$g(X) = \frac{M_3(X)}{s(X)^3} = \frac{E[(X - E(X))^3]}{Var(X)^{3/2}} \quad (11)$$

---

<sup>58</sup> Vgl. etwa *Borch* (1969), *Feldstein* (1969), *Hanoch/Levy* (1969, 1970), *Tsiang* (1972), *Chipman* (1973), *Klevatorick* (1973), *Baron* (1977), *Ross* (1978), *Meyer* (1979), *Levy/Markowitz* (1979), *Epps* (1981) sowie *Aivazian et al.* (1983).

<sup>59</sup> Hierbei wird die Beurteilung einer Gewinn/Verlust-Position vorausgesetzt. Bei reinen Schadengrößen beinhalten hingegen nur Überschreitungen des Erwartungswerts Risikoelemente.

explizit in die Risikomessvorschrift zu inkorporieren. Auch nutzentheoretische Überlegungen („skewness preference“) stützen diese Vorgehensweise<sup>60</sup>. Allerdings weist die Schiefe eine Reihe von Problemen auf. So gelingt etwa die Zerlegung der Schiefe eines Portfolios nur in technisch aufwendiger Art unter Zuhilfenahme der Konstruktion<sup>61</sup> der „Koschiefe“. Auch sind Schiefe bzw. drittes Zentralmoment als alleiniges Risikomaß eher ungeeignet bzw. nur in Kombination mit Varianz bzw. Standardabweichung aussagekräftig. Ein Beispiel hierfür bietet das Risikomaß (6) von *Jia/Dyer* (1996). Das Risiko steigt mit zunehmender Varianz und wird durch eine positive Schiefe verringert bzw. durch eine negative Schiefe erhöht<sup>62</sup>. Die technischen Probleme des dritten Zentralmoments, z.B. bei der Portfoliobildung, übertragen sich auf dieses Risikomaß. Auch ist das resultierende Risikomaß nur schwer interpretierbar, denn wird  $X$  in Geldeinheiten (GE) gemessen, dann besitzt das Risikomaß die Dimension  $\text{GE}^2 - \text{GE}^3$ .

Betrachtet man nicht quadratische bzw. kubische Abweichungen von Erwartungswert sondern den Absolutbetrag der Abweichung, so gelangt man<sup>63, 64</sup> zum Risikomaß MAD gemäß (7). Auch hinsichtlich des absoluten Abstandes können höhere Potenzen betrachtet werden, dies führt z.B. auf

$$R(X) = E\left[|X - E(X)|^k\right] \quad \text{bzw.} \quad (12a)$$

$$R(X) = E\left[|X - E(X)|^k\right]^{1/k}. \quad (12b)$$

Das letztere Risikomaß wird von *Kijima/Ohnishi* (1993) betrachtet.

Eine weitere Verallgemeinerung nehmen *Rockafellar/Uryasev/Zabarankin* (2002) vor. Sie definieren eine Funktion  $f(x) = ax$  für  $x \geq 0$  und  $f(x) = b|x|$  für  $x \leq 0$  mit Koeffizienten  $a \geq 0$  und  $b \geq 0$  und betrachten das Risikomaß

---

<sup>60</sup> Vgl. etwa *Hanoch/Levy* (1970) und *Kraus/Litzenberger* (1976).

<sup>61</sup> Vgl. etwa *Maurer* (2000, S. 55 f.).

<sup>62</sup> Wiederum quantifiziert hierbei  $X$  eine Gewinn/Verlust-Position. Im Falle einer reinen Verlustposition ist in (6)  $c < 0$  zu wählen.

<sup>63</sup> Bereits in *Markowitz* (1959, S. 286 ff.) findet man diese Variante eines Risikomaßes.

<sup>64</sup> Auch aus Sicht der Optimierung besitzt das Risikomaß MAD Vorteile, da man auf Ansätze der linearen Optimierung zurückgreifen kann, vgl. etwa *Konno/Yamazaki* (1991).

$$R(X) = E\left[|f(X - E(X))|^k\right]^{1/k}, \quad (13)$$

für  $k \geq 1$ . Dieses Risikomaß vom Typus I erlaubt eine unterschiedliche Gewichtung der positiven und negativen Abweichungen vom Erwartungswert und wurde ebenfalls bereits von *Kijima/Ohnishi* (1993) vorgeschlagen<sup>65</sup>.

## 6.2 Shortfallrisikomaße

Während die in Abschnitt 6.1 besprochenen Risikomaße Abweichungen von der Zielgröße Erwartungswert in beide Richtungen berücksichtigen und damit – wie bereits ausgeführt – einem intuitiven Risikoverständnis widersprechen, konzentrieren sich Shortfallrisikomaße auf das Shortfallrisiko bzw. Downside Risiko relativ zu einer Zielgröße. Diese ist dabei nicht mehr notwendigerweise mit dem Erwartungswert identisch, sondern kann eine beliebige deterministische Zielgröße  $z$  (Ziel-Endvermögen, Zielrendite (target return), mindestens angestrebte Rendite (minimal acceptable return<sup>66</sup>, MAR)), aber auch allgemein eine stochastische Benchmark sein.<sup>67, 68</sup>

Eine breite Klasse von Shortfallrisikomaßen bilden die *Lower Partial Moments*<sup>69</sup> vom Grade  $k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), d.h.

$$\begin{aligned} LPM_k(z; X) &:= E\left[\max(z - X, 0)^k\right] \\ &= \int_{-\infty}^z (z - x)^k f(x) dx \end{aligned} \quad (14a)$$

<sup>65</sup> Das entsprechende Pendant vom Typus II ist (nur) kohärent für  $a = 0$  und  $b \geq 1$  sowie für  $k = 1$ , vgl. *Rockafellar/Uryasev/Zabarankin* (2002).

<sup>66</sup> Zu dieser Begriffsbildung vgl. etwa *Sortino* (2001, S. 5) oder *Messina* (2001, S. 78).

<sup>67</sup> Zu dieser Möglichkeit vgl. etwa *Balzer* (1994, S. 51).

<sup>68</sup> So betrachten etwa *Albrecht/Maurer/Ruckpaul* (2001) den Rentenindex REXP als Benchmark für die Renditeentwicklung des deutschen Aktienindex (DAX).

<sup>69</sup> Vgl. etwa *Fishburn* (1977).

bzw. in entsprechend normierter Form<sup>70</sup> ( $k \geq 2$ )

$$R(X) = LPM_k(z; X)^{1/k}. \quad (14b)$$

Einfache Spezialfälle dieser Klasse, die auch in der Anwendung eine wichtige Rolle spielen, ergeben sich für  $k = 0, 1$  und  $2$ . Es sind dies die *Shortfallwahrscheinlichkeit*

$$SW_z(X) = \Pr(X \leq z) = F(z), \quad (15)$$

der *Shortfallerwartungswert*<sup>71</sup>

$$SE_z(X) = E[\max(z - X, 0)] \quad (16)$$

sowie die *Shortfallvarianz*

$$SV_z(X) = E[\max(z - X, 0)^2] \quad (17a)$$

bzw. die *Shortfallstandardabweichung*

$$SSD_z(X) = E[\max(z - X, 0)^2]^{1/2}. \quad (17b)$$

Das Ausmaß der Gefahr der Unterschreitung des Targets wird dabei in verschiedener Weise berücksichtigt. Bei der Shortfallwahrscheinlichkeit spielt nur die Wahrscheinlichkeit der Targetunterschreitung eine Rolle. Beim Shortfallerwartungswert wird dagegen die mittlere Unterschreitungshöhe berücksichtigt und bei der Shortfallvarianz die mittlere quadratische Unterschreitungshöhe.

---

<sup>70</sup> Vgl. etwa *Bawa/Lindenberg* (1977) für  $z = E(X)$ .

<sup>71</sup> Im Bereich der Schadenversicherung korrespondiert hierzu die Netto-Stop-Loss-Prämie, der Erwartungsschaden eines Stop-Loss-Vertrages mit Priorität  $z$ , vgl. etwa *Goovaerts et al.* (1984, S. 13).



Varianten ergeben sich für den Fall  $z = E(X)$ , z.B. die *mittlere Unterschreitung des Mittelwertes*<sup>72,73</sup>

$$R(X) = E[\max\{E(X) - X, 0\}], \quad (18)$$

die *Semivarianz*<sup>74</sup>

$$R(X) = E[\max\{E(X) - X, 0\}^2] \quad (19)$$

sowie entsprechend die *Semistandardabweichung*

$$R(X) = E[\max\{E(X) - X, 0\}^2]^{1/2}. \quad (20)$$

Eine weitere interessante Variante ist der Übergang zu bedingten Shortfallrisikomaßen. Ein zentrales Beispiel hierfür ist der *Mean-Excess-Loss*<sup>75</sup> (bedingter Shortfallerwartungswert)

$$MEL_z(X) = E(z - X \mid X \leq z) = \frac{SE_z(X)}{SW_z(X)}, \quad (21)$$

d.h. die mittlere Unterschreitung der Zielgröße unter der Bedingung, dass ein Shortfall eintritt. Der MEL kann als eine Art Worst-Case-Risikomaß angesehen werden, denn er misst nur die durchschnittlichen Konsequenzen im Worst-Case-Fall, dass der Shortfall tatsächlich eintritt.

Im Versicherungszusammenhang wird der MEL auch in der Form  $MEL_z(S) = E[S - z \mid S > z]$  für Schadenvariable  $S := -X \geq 0$  zur Messung des Right-Tail-

<sup>72</sup> Im Bereich der Schadenversicherung korrespondiert hierzu der Überschaden über dem Mittelwert, vgl. etwa *Sterk* (1979, S. 65).

<sup>73</sup> Das Risikomaß (18) wird von *Ogryczak/Ruszczynski* (1999, S. 34) und *Gotoh/Konno* (2000, S. 291 f.) unter der Bezeichnung *Lower-Semi-Absolute Deviation* (LSAD) betrachtet.

<sup>74</sup> Auch die Semivarianz wurde bereits von *Markowitz* (1959, S. 286 ff.) selbst als Alternative zur Varianz als Risikomaß diskutiert.

<sup>75</sup> Der Mean-Excess-Loss bzw. die Mean-Excess-Funktion ist eine Größe, die in der Extremwerttheorie betrachtet wird, vgl. etwa *Embrechts et al.* (1991, S. 161). *Albrecht/Maurer/Ruckpaul* (2001) verwenden den MEL als (Worst-Case-)Risikomaß zur Quantifizierung von Langfristrisiken eines Aktieninvestments.

Risikos eingesetzt<sup>76</sup>. Ein weiteres Maß für das Right-Tail-Risiko ergibt sich im Kontext der Ausführungen in Abschnitt 5.5 unter Anwendung der Verzerrungsfunktion  $g(x) = \sqrt{x}$  (und anschließender Subtraktion des Erwartungswertes zum Übergang von Risikomaßen des Typus II auf Risikomaße des Typus I):

$$R(S) = \int_0^{\infty} \sqrt{1 - F(s)} \, ds - E(S). \quad (22)$$

Dieses Risikomaß entspricht dem Maß *Right-Tail-Deviation* von Wang (1998) und kann ebenfalls in die Klasse einseitiger Risikomaße eingruppiert werden.

Generell entsprechen die Risikomaße des Shortfalltypus zwar eher einem intuitiven Risikoverständnis, sie ziehen jedoch ebenso generell größere technische Probleme z.B. bei der Portfoliobildung, der Optimierung sowie der statistischen Identifikation nach sich. Zu Resultaten über die Konsistenz von Shortfallrisikomaßen (im Rahmen von Risk-Value-Modellen) zur Erwartungsnutzentheorie verweisen wir auf die Literatur<sup>77</sup>.

### 6.3 Klassen von Risikomaßen

Stone (1973) definiert eine allgemeine dreiparametrische Klasse von Risikomaßen der Form

$$R(x) = \left[ \int_{-\infty}^z (|x - c|)^k f(x) \, dx \right]^{1/k} \quad (23)$$

mit den drei Parametern  $z$ ,  $k$  und  $c$ . Die Stonesche Klasse enthält z.B. die bereits bekannten Risikomaße Standardabweichung, die Semistandardabweichung, die mittlere absolute Abweichung sowie das Risikomaß von Kijima/Ohnishi gemäß (13b).

Pedersen/Satchell (1998) betrachten allgemeiner eine fünfparametrische Klasse von Risikomaßen der Form

<sup>76</sup> Vgl. etwa Wirch (1999, S. 110).

<sup>77</sup> Vgl. etwa Fishburn (1977), Albrecht/Maurer/Möller (1998) und Plantinga/De Groot (2001).

$$R(X) = \left[ \int_{-\infty}^z (|x-c|)^a w[F(y)] f(y) dy \right]^b, \quad (24)$$

die die *Stonesche* Klasse umfasst, des Weiteren die bereits behandelten Risikomaße Varianz, Semivarianz, Shortfallwahrscheinlichkeit, Lower Partial Moments gemäß (14a) und (14b) sowie weitere Risikomaße aus der Literatur enthält.

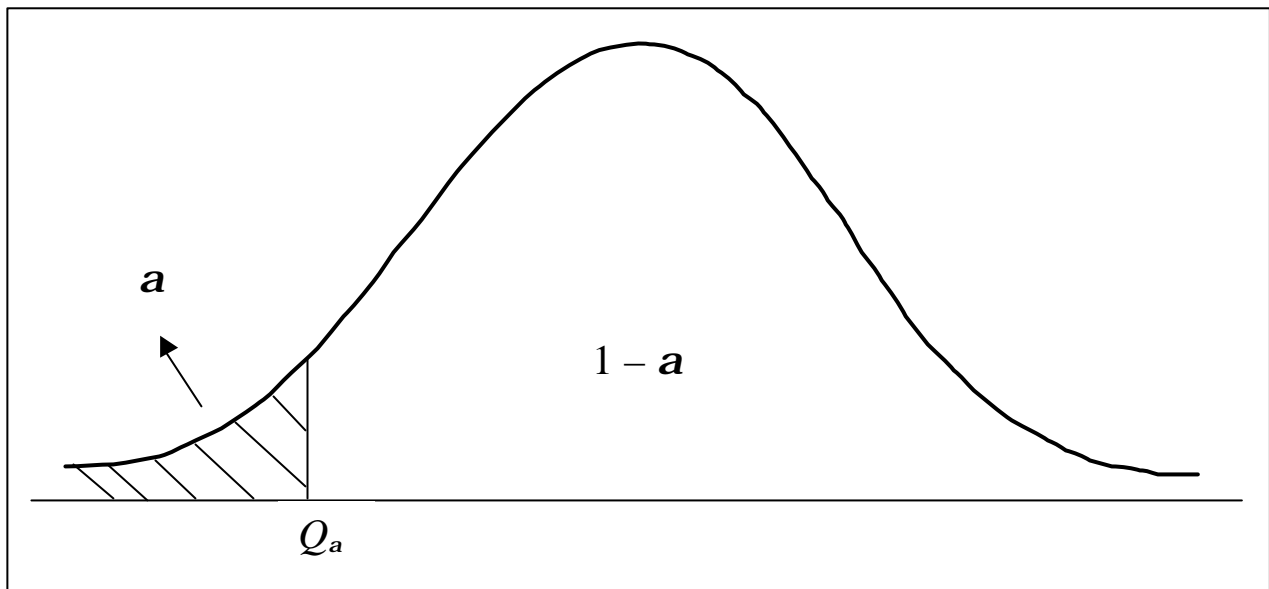
#### 6.4 Güteeigenschaften

Das Axiomensystem von *Pedersen/Satchell* (1998) gemäß Abschnitt 5.1 ist – wie bereits ausgeführt – geeignet zur Überprüfung von Güteeigenschaften von Risikomaßen, die auf das Ausmaß der Abweichungen von einer Zielgröße abstellen. Die folgenden in diesem Beitrag behandelten Risikomaße erfüllen die vier Axiome: Standardabweichung, mittlere absolute Abweichung, das Maß  $LPM_k(z; X)^{1/k}$  gemäß (14b) für  $z = E(X)$ , Semistandardabweichung, die Risikomaße von *Kijima/Ohnishi* gemäß (12b) und (13). Ferner geben *Pedersen/Satchell* (1998) eine allgemeine Charakterisierung der in 6.3 betrachteten Familien von Risikomaßen hinsichtlich der Erfüllung ihres Axiomensystems.

## 7 Risiko als notwendiges Kapital bzw. notwendige Prämie

### 7.1 Quantile und Value-at-Risk

Quantile<sup>78</sup> liefern einen differenzierteren Einblick in die Wahrscheinlichkeitsbelegung und damit in die Risikostruktur (aber auch die Chancenstruktur) als einzelne Momente der Verteilung. Wir gehen im Folgenden aus von einer Gewinn/Verlust-Position  $X$  mit zugehöriger Verteilungsfunktion  $F$ . Des Weiteren existiere wiederum zur Vereinfachung der Darstellung eine Dichtefunktion. Damit ist die Verteilungsfunktion  $F$  streng monoton und invertierbar. Das  $\mathbf{a}$ -Quantil  $Q_{\mathbf{a}} = Q_{\mathbf{a}}(X)$  der Verteilung von  $X$  ist dann definiert<sup>79</sup> durch die Forderung  $\Pr(X \leq Q_{\mathbf{a}}) = \mathbf{a}$  und es gilt  $Q_{\mathbf{a}} = F^{-1}(\mathbf{a})$ . Das  $\mathbf{a}$ -Quantil ist also derjenige Wert, unterhalb dessen eine Wahrscheinlichkeitsmasse der Höhe  $\mathbf{a}$  liegt. Dies illustriert die folgende Abbildung 1.



**Abbildung 1:** Quantil einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

Zwischen der Konzeption der Shortfallwahrscheinlichkeit und den Quantilen einer Verteilung besteht ein dualer Zusammenhang. Bei der Shortfallwahrscheinlichkeit wird ein spezifischer möglicher Wert vorgegeben und die zugehörige Unterschreitungswahrscheinlichkeit bestimmt, bei den Quantilen wird die Unterschreitungswahrscheinlichkeit vorgegeben und die zugehörige Ausprägung bestimmt. Allgemein gilt:

<sup>78</sup> Vgl. etwa *Albrecht/Maurer* (2002, S. 112 ff.).

<sup>79</sup> Im Allgemeinen gilt  $Q_{\mathbf{a}} = \inf \{x; F(x) \geq \mathbf{a}\}$ .

$$Q_a = F^{-1}(a) = \sup\{z; SW_z(X) \leq a\}.$$

Als Risikomaß dient dann allgemein

$$R(X) := -Q_a(X), \quad (25)$$

wobei sinnvollerweise  $0 < a < 0,5$  zu wählen ist, ansonsten wird eher der Chancenbereich einer Verteilung erfasst.

Im Falle der Normalverteilung, d.h.  $X \sim N(\mathbf{m}, \mathbf{s})$ , gilt  $N_a(\mathbf{m}, \mathbf{s}) = \mathbf{m} - N_{1-a} \mathbf{s} = E(X) - N_{1-a} \mathbf{s}(X)$ , dabei bezeichne  $N_{1-a} > 0$  das  $(1-a)$ -Quantil der Standardnormalverteilung. Als Risikomaß ergibt sich damit

$$R(X) := N_{1-a} \mathbf{s}(X) - E(X). \quad (26)$$

Dies verdeutlicht nochmals an einem konkreten Beispiel die in Abschnitt 3 getroffene Aussage, dass Risikomaße des Typus II auch als spezifische risikoadjustierte Performancemaße interpretiert werden können, da sowohl das „Risiko“ (im Typus I-Sinne)  $\mathbf{s}(X)$  als auch der Erwartungswert  $E(X)$  als Lagemaß die Höhe von  $R(X)$  gemäß (26) beeinflussen. Fasst man nicht das Quantil als Risikoindikator auf, sondern<sup>80</sup> den Abstand  $E(X) - Q_a(X) = -Q_a(X) - E(X)$  vom Erwartungswert zum  $a$ -Quantil, d.h. nimmt die Transformation  $R(X) - E(X)$  gemäß der Korrespondenzbeziehung von *Rockafellar/Uryasev/Zabarankin* (2002) vor, dann gelangt man zu einem Risikomaß des Typus I. Im Normalverteilungsfalle entspricht dieses Risikomaß  $N_{1-a} \mathbf{s}(X)$ , d.h. ist proportional zur Standardabweichung.

Ein spezifisches Quantilmaß von zentraler Bedeutung für die Risikosteuerung ist der *Value-at-Risk*<sup>81</sup> (VaR). Im Folgenden konzentrieren wir uns dabei auf den Zusammenhang mit der Quantifizierung von Marktrisiken<sup>82</sup>. Bezeichnet dabei allgemein  $V_t$  die Höhe des Marktwert-

---

<sup>80</sup> Diese Gleichung ergibt sich dabei aufgrund der Symmetrie der Normalverteilung.

<sup>81</sup> Zum Value-at-Risk vgl. etwa *Albrecht/Maurer* (2002, S. 115 ff. und S. 673 ff.), *Dowd* (1998), *Duffie/Pan* (1997), *Jorion* (1997) und *Wilson* (1998).

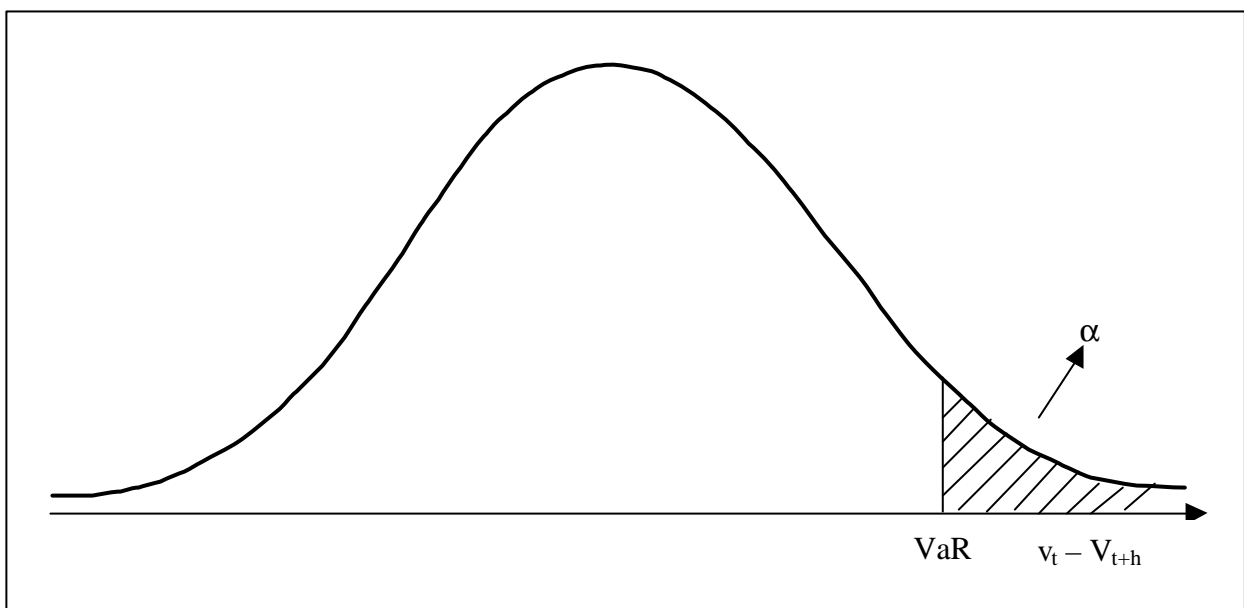
<sup>82</sup> Zum Zusammenhang mit Kreditrisiken vgl. etwa *Dowd* (1998, S. 166 ff.) oder *Wilson* (1998, S. 103 ff.).

tes einer Finanzposition zum Zeitpunkt  $t$ , so beschreibt  $\Delta V_h = V_{t+h} - v_t$  die entsprechende Marktwertänderung über das Zeitintervall (Haltedauer)  $[t, t+h]$ , wobei der Marktwert zum Zeitpunkt  $t$  als bekannt angenommen werde. Da im Vordergrund des Interesses Verlustrisiken stehen, betrachten wir alternativ den potenziellen Periodenverlust  $L = -\Delta V_h = v_t - V_{t+h}$  der Finanzposition über die betrachtete Haltedauer. Der Value-at-Risk  $VaR_a(L)$  zum Konfidenzniveau  $0 < a < 1$  über einen Zeitraum der Länge  $h$  ist dann definiert durch

$$P[L > VaR_a(L)] = a. \quad (27)$$

Der Value-at-Risk zum Konfidenzniveau  $a$  ist somit diejenige Ausprägung der Verlusthöhe, die mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit nicht überschritten wird. Interpretiert man – dies ist eine der zentralen Anwendungen des VaR-Konzepts – den VaR als Höhe eines den eingegangenen Risiken zu unterlegenden Kapitals, dann impliziert (27), dass die Wahrscheinlichkeit der Aufzehrung dieses Kapitals durch ein negatives Investmentergebnis (Periodenverlust) kontrolliert klein ist.

Offenbar entspricht der VaR gerade dem  $(1-a)$ -Quantil  $Q_{1-a}(L)$  der Verteilung der potenziellen Verlusthöhe  $L = v_t - V_{t+h}$ , formal  $VaR_a = Q_{1-a}(L) = F^{-1}(1-a)$ , wobei  $F$  die Verteilungsfunktion von  $L$  bezeichnet. Eine Illustration dieses Sachverhalts beinhaltet die folgende Abbildung.



**Abbildung 2:** Value-at-Risk als  $(1-a)$ -Quantil der Verteilung der Verlusthöhe

Eine anschauliche Deutung des Value-at-Risk ist damit diejenige eines Probable Maximum Loss (PML), konkret eines  $100(1-\alpha)\%$ -Maximalverlusts, denn in  $100(1-\alpha)\%$  aller Fälle ist der realisierte Verlust kleiner oder gleich dem VaR. So kann z.B. der 5%-VaR als 95%-Maximalverlust interpretiert werden: In durchschnittlich 95 von 100 Perioden wird der realisierte Verlust den 95%-Maximalschaden nicht überschreiten.

Gehen wir davon aus, dass der Periodenverlust  $L$  einer Normalverteilung mit den Parametern  $E(L)$  und  $s(L)$  folgt, so ergibt sich der zugehörige Value-at-Risk zum Konfidenzniveau  $\alpha$  entsprechend der Bestimmung des  $(1-\alpha)$ -Quantils im Falle der Normalverteilung zu:

$$VaR_{\alpha} = E(L) + N_{1-\alpha} s(L). \quad (28)$$

Dieses Resultat verdeutlicht, dass auch der Value-at-Risk als risikoorientiertes Performancemaß angesehen werden kann<sup>83</sup>, da die Höhe des Erwartungswertes die Höhe von  $VaR_{\alpha}$  beeinflusst. In den typischen Anwendungen im Bankenfall tritt dieses Problem nicht auf, da man für kurze Haltedauern  $h$  hier approximativ von  $E(L) = 0$  ausgeht. Äquivalent hierzu ist die Betrachtung<sup>84</sup> des Risikomaßes  $R_{\alpha}(L) = VaR_{\alpha} - E(L)$ , d.h. die Korrektur um den Lageparameter, um von einem Risikomaß des Typus II auf ein Risikomaß des Typus I zu gelangen (Transformation nach *Rockafellar/Uryasev/Zabarankin*).

Der Value-at-Risk erfüllt eine Reihe von Güteeigenschaften<sup>85</sup>. Hinsichtlich des Axiomensystems von *Artzner et al.* (1999) sind dies die Eigenschaften der Monotonie, der positiven Homogenität und der Translationsinvarianz. Darüber hinaus gilt die Eigenschaft der Verteilungsinvarianz (Law Invariance)  $F_X(t) = F_Y(t) \Rightarrow R(X) = R(Y)$ , wobei  $F_X$  bzw.  $F_Y$  die Verteilungsfunktionen von  $X$  bzw.  $Y$  bezeichnen sowie die Eigenschaft der comonotonen Additivität, d.h.  $R[f(X) + g(Y)] = R[f(X)] + R[g(Y)]$  für zwei nicht-fallende Funktionen  $f$  und  $g$ .

---

<sup>83</sup> Vgl. zu entsprechenden Anwendungen *Albrecht* (2002a, 2002b).

<sup>84</sup> Teilweise wird der Value-at-Risk in der Literatur auch direkt so definiert, vgl. etwa *Zagst* (2002, S. 252). *Dowd* (1998, S. 40 f.) spricht ähnlich wie *Jorion* (1997, S. 87 f.) von VaR "relative to the mean" im Unterschied zum VaR „in absolute dollar terms“.

<sup>85</sup> Vgl. *Tasche* (2002, S. 1521).

Zentraler Kritikpunkt<sup>86</sup> am VaR-Risikomaß ist aber die im allgemeinen Fall nicht vorhandene Subadditivität. Damit ist der VaR auch kein generell kohärentes Risikomaß<sup>87</sup>. Allerdings existieren Klassen von Verteilungen, innerhalb derer der VaR subadditiv und damit kohärent ist. Dies gilt etwa für die Klasse der Normalverteilungen, solange  $\mathbf{a} < 0,5$  ist<sup>88</sup>.

Des Weiteren berücksichtigt der VaR nicht das Ausmaß der Verluste in den  $100\alpha\%$  schlimmsten Fällen. Darüber hinaus existieren eine Reihe von weiteren Kritikpunkten am VaR, wir verweisen hierzu auf die Literatur<sup>89</sup>.

## 7.2 Expected Shortfall und Conditional Value-at-Risk

Zur besseren Vergleichbarkeit mit der Darstellung des Value-at-Risk in Termen der Verlustvariablen  $L \geq 0$  in Abschnitt 7.1 formulieren wir auch die weiteren Ergebnisse in Termen von  $L$ .

Das Risikomaß *Expected Shortfall*<sup>90</sup> zum Konfidenzniveau  $\alpha$  ist dann definiert durch<sup>91</sup>

$$ES_{\mathbf{a}}(L) = \frac{1}{\mathbf{a}} \int_0^{\mathbf{a}} VaR_u(L) \, du = \frac{1}{\mathbf{a}} \int_{1-\mathbf{a}}^1 Q_u(L) \, du. \quad (29)$$

Dieses Risikomaß entspricht somit dem Durchschnitt der Value-at-Risk-Werte  $VaR_u$  für  $0 \leq u \leq \mathbf{a}$ . Ausgehend von der Interpretation des VaR als  $100(1-\mathbf{a})\%$ -Maximalschaden, kann der Expected Shortfall als „durchschnittlicher Maximalschaden in den  $100\mathbf{a}\%$  schlimmsten Fällen“ interpretiert werden<sup>92</sup>. Es lässt sich zeigen<sup>93</sup>, dass der Expected Shortfall

<sup>86</sup> Vgl. Artzner et al. (1997, 1999).

<sup>87</sup> Entsprechend verletzt auch  $VaR_{\mathbf{a}} - E(L)$  das Axiomensystem von Rockafellar/Uryasev/Zabarankin gemäß Abschnitt 5.2.

<sup>88</sup> Allgemeiner gilt dieses Resultat für die Klasse der elliptischen Verteilungen, vgl. Embrechts et al. (2002, S. 190).

<sup>89</sup> Vgl. etwa Szegö (2002, S. 1260 ff.).

<sup>90</sup> Diese Größe ist dabei nicht identisch mit dem Shortfallerwartungswert  $SE$  gemäß (16).

<sup>91</sup> Vgl. etwa Hürlimann (2002, S. 239) und Tasche (2002, S. 1525).

<sup>92</sup> Vgl. entsprechend Acerbi/Tasche (2002, S. 1488).

<sup>93</sup> Vgl. etwa Acerbi/Tasche (2002, S. 1491).



ein kohärentes Risikomaß ist.

Das Risikomaß *Conditional Value-at-Risk* zum Konfidenzniveau  $\alpha$  ist definiert durch<sup>94</sup>

$$CVaR_{\alpha}(L) = E[L | L > VaR_{\alpha}] = E[L | L > Q_{1-\alpha}(L)]. \quad (30)$$

Der CVaR fällt mit dem Expected Shortfall dann zusammen<sup>95</sup>, wenn die zugrundeliegende Verteilungsfunktion eine Dichte besitzt und ist damit in diesem Falle kohärent<sup>96</sup>. Entsprechend überträgt sich die Interpretation als „durchschnittlicher Maximalschaden in den 100  $\alpha$  % schlimmsten Fällen“. Im allgemeinen Fall, insbesondere für diskrete Zufallsvariable, ist der CVaR dagegen nicht kohärent. Im allgemeinen Fall ist daher zumindest unter Kohärenzgesichtspunkten mit dem (allerdings schwerer handhabbaren) Expected Shortfall bzw. hierzu äquivalenten Risikomaßen zu arbeiten<sup>97</sup>.

Unter Beschränkung auf stetige Zufallsvariable (Existenz einer Dichtefunktion) sei noch angefügt, dass der CVaR die Zerlegung<sup>98, 99</sup>

$$CVaR_{\alpha}(L) = VaR_{\alpha}(L) + E[L - VaR_{\alpha} | L > VaR_{\alpha}] \quad (31)$$

besitzt. Hierdurch wird zunächst deutlich, dass der CVaR stets zu einem höheren Risiko (einer höheren Kapitalunterlegung) führt als der VaR. Ferner berücksichtigt der CVaR nicht nur die Verlustwahrscheinlichkeit, sondern auch die mittlere Höhe des Verlustes (relativ zum VaR), wenn ein solcher Verlust eintreten sollte. Insgesamt ergibt sich der CVaR damit in anschaulicher Weise als Summe des Value-at-Risk und der mittleren Überschreitung im Überschreitungsfall (mittlere bedingte Überschreitung).

---

<sup>94</sup> Vgl. etwa Artzner *et al.* (1999, S. 223).

<sup>95</sup> Vgl. etwa Acerbi/Tasche (2002, S. 1498).

<sup>96</sup> Vgl. hierzu bereits Delbaen (2000, S. 734).

<sup>97</sup> In der Literatur sind eine Reihe von eng verwandten Risikomaßen wie Expected Shortfall, Conditional Tail Expectation, Tail Mean und Expected Regret entwickelt worden, für die zudem eine Reihe von unterschiedlichen Charakterisierungen bestehen. Zu Details hierzu sowie zum Vergleich mit dem Value-at-Risk verweisen wir auf Acerbi/Tasche (2002), Hürlimann (2001, 2002), Pflug (2000), Tasche (2002), Kusuoka (2001), Rockafellar/Uryasev (2002), Szegö (2002) und Yamai/Yoshida (2002a, b).

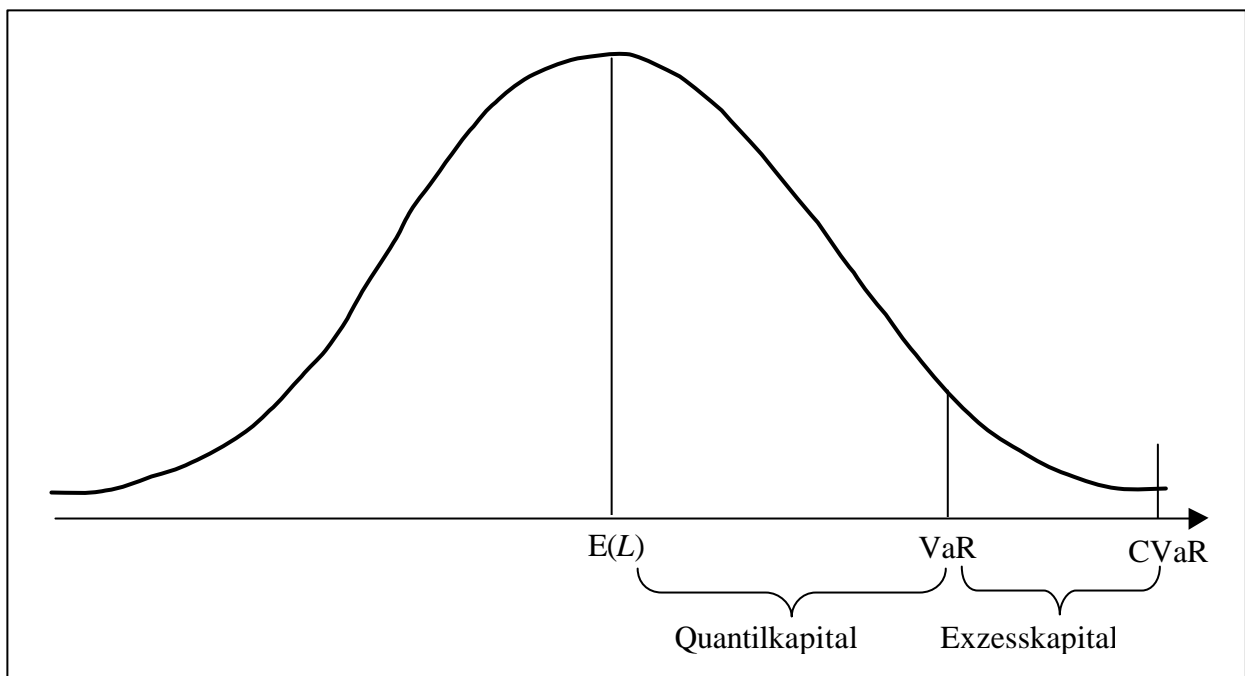
<sup>98</sup> Vgl. etwa Albrecht/Maurer (2002, S. 675) oder Panjer (2001).

<sup>99</sup> Der zweite Term entspricht offenbar dem Risikomaß Mean-Excess-Loss gemäß (21), relativ zur Zielgröße VaR.

Interpretiert man den CVaR als notwendiges Risikokapital, so setzt sich dieses damit aus drei Komponenten zusammen:

$$\begin{aligned}
 \text{Notwendiges Risikokapital} = & \\
 & \text{Erwarteter Verlust } E(L) \\
 & + \text{Quantilkapital } VaR_a - E(L) \\
 & + \text{Exzesskapital } E[L - VaR_a \mid L > VaR_a].
 \end{aligned}$$

Die erste Komponente des notwendigen Risikokapitals deckt den mittleren Verlust ab, die zweite Komponente anschaulich gesprochen die Differenz zum 100(1-a)%-Maximalschaden<sup>100</sup>. Das Exzess- oder Stress-Kapital schließlich deckt den mittleren Exzess-Verlust in denjenigen Fällen ab, in denen der realisierte Verlust den 100(1-a)%-Maximalschaden übersteigt. Die nachfolgende Abbildung 3 dient der Illustration des dargestellten Sachverhalts.



**Abbildung 3:** Zerlegung des notwendigen Risikokapitals

Im Falle normalverteilter Verluste, d.h.  $L \sim N(\mathbf{m}, \mathbf{s})$  existiert die folgende explizite Lösung

<sup>100</sup> Man vgl. die entsprechende Interpretation des VaR in Abschnitt 7.1.

für den CVaR<sup>101</sup>:

$$CVaR_a(L) = E(L) + \frac{j(N_{1-a})}{a} s(L), \quad (32)$$

dabei ist wiederum  $N_{1-a}$  das  $(1-a)$ -Quantil der Standardnormalverteilung und  $j$  bezeichnet die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung.

Ein Vergleich mit dem VaR gemäß (28) ergibt damit als Höhe des Exzesskapitals

$$E[L - VaR_a \mid L > VaR_a] = \frac{j(N_{1-a}) - a N_{1-a}}{a} s(L).$$

Das Resultat (32) verdeutlicht, dass auch der CVaR als risikoadjustiertes Performancemaß angesehen werden kann bzw. ein weiteres Mal, dass eine Subtraktion von  $E(L)$  ein Risikomaß des Typus II auf ein Risikomaß des Typus I transformiert<sup>102</sup>. Im Falle der Normalverteilung ist dieses Risikomaß wiederum proportional zur Standardabweichung.

Auch der Conditional Value-at-Risk ist nicht frei von Kritik. So stellt *Hürlimann* (2002, S. 245 ff.) in einem umfangreichen numerischen Vergleich für unterschiedliche Verteilungsfunktionen fest, dass (wenn auch in geringerem Maße als der VaR) der CVaR sich nicht konsistent zu einem Ansteigen des Tail-Risikos verhält<sup>103</sup>.

### 7.3 Lower Partial Moments

*Fischer* (2001) weist nach, dass die folgenden Risikomaße kohärent sind ( $0 \leq a \leq 1$ ,  $k \geq 1$ ):

$$R(X) = -E(X) + a LPM_k(E(X); X)^{1/k}. \quad (33)$$

<sup>101</sup> Vgl. *Albrecht/Koryciorz* (2003).

<sup>102</sup> Da der CVaR in stetigem Falle kohärent ist, erfüllt das entsprechend transformierte Risikomaß das Axiomensystem von *Rockafellar/Uryasev/Zabarankin* gemäß Abschnitt 5.2.

<sup>103</sup> *Hürlimann* (2002, S. 245) berichtet etwa, dass für bestimmte Konstellationen die betrachteten Verteilungen mit dem höchsten Tail-Risiko geringere VaR- und CVaR-Werte aufweisen als im Falle einer (vergleichbaren) Normalverteilung.

Dies entspricht der in Abschnitt 6.4 getroffenen Aussage, dass das Risikomaß  $LPM_n(z; X)^{1/n}$  gemäß (14b) für  $z = E(X)$  dem Axiomensystem von *Pedersen/Satchell* genügt und verdeutlicht ein weiteres Mal die Transformation gemäß *Rockafellar/Uryasev/Zabarankin* in einem konkreten Fall.

#### 7.4 Verzerrte Risikomaße

Wir knüpfen im Folgenden an den Ausführungen des Abschnitts 5.5 zum Axiomensystem von *Wang/Young/Panjer* (1997) an, wobei nunmehr Gewinn/Verlust-Positionen anstelle reiner Verlustpositionen betrachtet werden.

Ist dann  $g[0, 1] \rightarrow [0, 1]$  eine wachsende Funktion mit  $g(0) = 0$  und  $g(1) = 1$ , so definiert die Transformation  $F^*(x) = g(F(x))$  eine verzerrte (distorted) Verteilungsfunktion. Wir betrachten nun das folgende Risikomaß für eine Zufallsvariable  $X$  mit Verteilungsfunktion  $F$ :

$$E^*(X) = - \int_{-\infty}^0 g(F(x)) dx + \int_0^{\infty} [1 - g(F(x))] dx. \quad (34)$$

Das Risikomaß entspricht somit dem Erwartungswert der Zufallsgröße unter der transformierten Verteilungsfunktion  $F^*$ . Es gilt nun die Aussage<sup>104</sup>, dass das Risikomaß gemäß (34) insbesondere dann kohärent ist, wenn die Verzerrungsfunktion  $g$  stetig ist. Der Conditional Value-at-Risk zum Konfidenzniveau  $\mathbf{a}$  ergibt sich als Spezialfall von (34) bei Wahl der Verzerrungsfunktion

$$g(u) = \begin{cases} 0, & u < \mathbf{a} \\ \frac{u - \mathbf{a}}{1 - \mathbf{a}}, & u \geq \mathbf{a}. \end{cases}$$

Diese Verzerrungsfunktion ist zwar stetig, aber in  $u = \mathbf{a}$  nicht differenzierbar. Generell gehen

---

<sup>104</sup> Vgl. *Wang* (2002).

in die Risikomaße VaR und CVaR nur Informationen aus dem Verteilungsende (Tail) von  $X$  ein und nicht die Informationen aus der gesamten Verteilungsfunktion<sup>105</sup>. Alternative kohärente Risikomaße kann man nun systematisch durch Verwendung alternativer (differenzierbarer) Verzerrungsfunktionen konstruieren. So betrachten *Wirch/Hardy* (1999, S. 341) eine allgemeine Familie von Beta-Transformationen, die auf der unvollständigen Betafunktion beruhen. Diese schließen etwa die Proportional Hazard-Transformation  $g(x) = x^{1/r}$ ,  $r \geq 1$  von *Wang* (1996) sowie die Dual Power-Transformation  $g(x) = 1 - (1-x)^{1/r}$ ,  $r \geq 1$  mit ein.

*Wang* (2002) propagiert dagegen die *Wang*-Transformation<sup>106</sup>  $g(u) = \Phi[\Phi^{-1}(u) - \mathbf{I}]$  mit  $\mathbf{I} = \Phi^{-1}(\mathbf{a})$  für ein gegebenes Sicherheitsniveau  $\mathbf{a}$  und gelangt somit zum WT-Risikomaß  $WT_{\mathbf{a}}$ . Für normalverteilte Zufallsvariable reduziert sich das WT-Risikomaß allerdings wieder auf den Value-at-Risk,  $WT_{\mathbf{a}} = VaR_{\mathbf{a}}$ .

Eine komplexere Variante von Verzerrungsfunktionen wird in *Van der Hoek/Sherris* (2001) betrachtet und führt zu Risikomaßen, die „upside risk“ und „downside risk“ verschieden gewichten.

## 8 Ausgewählte weitere Ansätze

### 8.1 Sensitivitätsmaße als Risikomaße

Den bisherigen Risikomaßen  $R(X)$  lag jeweils eine Zufallsvariable  $X$  zugrunde, die über einen finiten Zeitraum definiert war und finite Werte annahm. In einem alternativen Kontext interessiert man sich<sup>107</sup> für die Konsequenzen (typischerweise hinsichtlich des Preises oder Barwerts einer Finanzposition) infinitesimaler Realisationen einer oder mehrerer Zufallsvariablen (typischerweise Änderungen von sog. Risikofaktoren über infinitesimale Zeiträume). Gehen wir zur Illustration aus von einer Wertgleichung  $V = V(X_1, \dots, X_m)$ , so sind die *Sensitivitäten erster Ordnung* oder *Deltas* in Bezug auf infinitesimale Änderungen des Risikofaktors  $X_j$  definiert durch:

---

<sup>105</sup> Eine entsprechende Kritik äußert *Wang* (2002).

<sup>106</sup> Dabei bezeichnet  $\Phi(x)$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

<sup>107</sup> Vgl. hierzu allgemein *Zagst* (2002).

$$\Delta_j(V) := \frac{\partial V}{\partial x_j}(X_1, \dots, X_m).$$

Entsprechend werden die *Sensitivitäten zweiter Ordnung* oder *Gammas* definiert durch

$$\Gamma_{ij}(V) := \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(X_1, \dots, X_m).$$

Durch Vornahme einer *Taylor-Approximation*<sup>108</sup> erster oder zweiter Ordnung kann man dann allgemein die Preis- oder Wertwirkungen kleiner Änderungen in den Risikofaktoren über kleine Zeitintervalle approximativ abschätzen.

Beispiele<sup>109</sup> für entsprechende Sensitivitäten sind<sup>110</sup> Durationsmaße (*Macaulay-Duration*, *Key Rate Duration*) und Konvexitätsmaße im Zusammenhang mit der Analyse von Zinstiteln sowie Optionssensitivitäten<sup>111</sup> (Greeks), wie Delta, Gamma, Rho, Theta und Vega.

## 8.2 Maße für die Einkommensverteilung

Maße für die Einkommensverteilung, z.B. Konzentrationsmaße wie der Gini-Koeffizient, messen die Streuung des Einkommens innerhalb einer Bevölkerung und sind daher als Streuungsmaße ebenfalls Kandidaten für potenzielle Risikomaße des Typus I. Zu einer Übersicht vgl. *Pedersen/Satchell* (1998, S. 91 ff.) sowie aktuell *Pfingsten et al.* (2000).

## 8.3 Konvexe Risikomaße

*Föllmer/Schied* (2002a) betrachten<sup>112</sup> die folgende Modifikation des in Abschnitt 5.3 behan-

---

<sup>108</sup> Ebenda, S. 230.

<sup>109</sup> Für einen ausführlichen Überblick über die Anwendungen von Sensitivitätsmaßen vgl. erneut *Zagst* (2002).

<sup>110</sup> Vgl. etwa *Albrecht/Maurer* (2002, S. 366 ff., S. 410 ff., S. 419 ff.).

<sup>111</sup> Vgl. etwa *Albrecht/Maurer* (2002, S. 523 ff.).

<sup>112</sup> Vgl. zu einem entsprechenden Ansatz auch *Föllmer/Schied* (2002b) sowie *Frittelli/Rosazzia Gianin* (2002).

delten Axiomensystems von *Artzner et al.*:

$$(FS 1) \quad (\text{Konvexität}) \quad R[I X + (1 - I)Y] \leq I R(X) + (1 - I)R(Y) \text{ für } 0 \leq I \leq 1$$

$$(FS 2) \quad (\text{Monotonie}) \quad X \leq Y \Rightarrow R(X) \geq R(Y)$$

$$(FS 3) \quad (\text{Translationsinvarianz}) \quad R(X + c) = R(X) - c$$

Ein Risikomaß, das diesen Bedingungen genügt, wird *konvex* genannt. Aufgegeben wird damit insbesondere das Axiom der positiven Homogenität<sup>113</sup>. Mit anderen Worten wird zugelassen, dass die Positionsgröße das Risiko beeinflusst, etwa bei Vorliegen eines Liquiditätsrisikos.

*Föllmer/Schied* setzen einen endlichen Wahrscheinlichkeitsraum voraus und betrachten die Situation der Unsicherheit, d.h. es wird kein Wahrscheinlichkeitsmaß spezifiziert. In diesem generellen Rahmen erhalten sie eine im Vergleich zu den Resultaten von *Artzner et al.* (1999) erweiterte Repräsentation für konvexe Risikomaße.

#### 8.4 Kapitalmarktbezogene Risikomaße

Im Rahmen des Capital Asset Pricing-Model (CAPM) gilt für ein beliebiges Wertpapier bzw. Portfolio des betrachteten Gesamtmarktes die zentrale Aussage, dass nur das sog. *systematische Risiko*  $r(R, R_M)$   $s(R)$  und nicht das Gesamtrisiko  $s(R)$  vom Markt bewertet wird. Dabei bezeichnet  $R_M$  die Rendite des Marktportfolios (in empirischen Anwendungen typischerweise ersetzt durch einen den Markt repräsentierenden Index) und  $r$  den Korrelationskoeffizienten. Formal geht in die CAPM-Gleichung<sup>114</sup> für den Gleichgewichtspreis unter Risiko der *Betafaktor*

<sup>113</sup> Liegt zusätzlich die Eigenschaft der positiven Homogenität vor, so ist das Risikomaß kohärent. Die Konvexitätsbedingung ist dann äquivalent zur Subadditivitätsbedingung.

<sup>114</sup> Vgl. hierzu etwa *Albrecht/Maurer* (2002, S. 258 ff.).

$$\mathbf{b}(R, R_M) = \frac{\text{Cov}(R, R_M)}{\text{Var}(R_M)} = \frac{\mathbf{r}(R, R_M) \mathbf{s}(R)}{\mathbf{s}(R_M)} \quad (35)$$

ein, bei dem das systematische Risiko noch durch Division mit dem „Marktrisiko“  $\mathbf{s}(R_M)$  normiert wird. In einem Kapitalmarktkontext kann daher der Betafaktor als zentrales Risikomaß angesehen werden. Das CAPM beinhaltet einen Einfluss auf den Gleichgewichtspreis in Form eines einzelnen erklärenden Faktors, dem Gesamtmarkt bzw. Marktindex. Im Rahmen von Multifaktormodellen und der damit verbundenen Preistheorie, der Arbitrage Pricing-Theorie<sup>115</sup> (APT), üben mehrere Faktoren  $F$  einen Einfluss auf die Preisbildung aus, entsprechend ergeben sich hier mehrere relevante Risikomaße  $\mathbf{b}(R, F)$ .

In Weiterentwicklung<sup>116</sup> des traditionellen (Mean Variance-)CAPM, das Investoren voraussetzt, die die Varianz bzw. die Standardabweichung als Risikomaß verwenden, existieren Varianten des Lower Partial Moment-CAPM und in diesem Kontext auch entsprechende Verallgemeinerungen des Betafaktors.

## 8.5 Tracking Error und aktives Risiko

Im Zusammenhang mit passivem (Tracking) oder aktivem Investmentmanagement relativ zu einem Benchmarkportfolio mit der Rendite  $R_B$  bezeichnet<sup>117</sup>  $\mathbf{s}(R - R_B)$  den Tracking Error bzw. das aktive Risiko eines beliebigen Portfolios mit Rendite  $R$ . Das verwendete Risikomaß ist somit die Standardabweichung, nur das Anwendungsfeld ist ein spezifisches.

## 8.6 Ruinwahrscheinlichkeit

Das Risikomaß Ruinwahrscheinlichkeit<sup>118</sup> entstammt der versicherungsmathematischen Risikotheorie. Im Zentrum steht der Risikoreserveprozess  $R_t = R_0 + P_t - S_t$  eines Versicherungsunternehmens, wobei  $R_0$  die anfänglich bestehende Reserve,  $P_t$  die über den Zeitraum  $[0, t]$

---

<sup>115</sup> Vgl. ebenda, S. 258 ff.

<sup>116</sup> Vgl. etwa *Bawa/Lindenberg* (1977), *Hogan/Warren* (1974) sowie *Satchell* (2001).

<sup>117</sup> Vgl. etwa *Grinold/Kahn* (1995, S. 39).

<sup>118</sup> Vgl. hierzu allgemein etwa *Bühlmann* (1970, S. 133).



akkumulierten Prämien und  $S_t$  die über den Zeitraum  $[0, t]$  akkumulierten Schäden bezeichnen. Die Ruinwahrscheinlichkeit entspricht dann der Wahrscheinlichkeit, dass während eines bestimmten (endlichen oder unendlichen) Zeithorizonts der Risikoreserveprozess einen negativen Wert annimmt, d.h. das Versicherungsunternehmen aus technischer Sicht ruiniert ist. Die Ruinwahrscheinlichkeit ist damit eine dynamische Variante der Shortfallwahrscheinlichkeit (relativ zum Target null).

## Literatur

- Acerbi, C.* (2002): Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion, *Journal of Banking and Finance* 26, 1505-1518.
- Acerbi, C., D. Tasche* (2002): On the coherence of expected shortfall, *Journal of Banking and Finance* 26, 1487-1503.
- Aivazian, V. A., J. L. Callen, I. Krinsky, C. C. Y. Kwan* (1983): Mean-variance utility functions and the demand for risky assets. An empirical analysis using flexible functional forms, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 18, 411-424.
- Albrecht, P.* (1992a): Zur Risikotransformationstheorie der Versicherung, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
- Albrecht, P.* (1992b): Premium Calculation without Arbitrage?, *ASTIN Bulletin* 22, 247-254.
- Albrecht, P.* (2002a): Die Kapitalanlage der Lebensversicherer im Vergleich, *Versicherungswirtschaft* 19/2002, 1474-1477.
- Albrecht, P.* (2002b): Zum systematischen Vergleich von Lebensversicherungs- und Fondsprodukten unter Performance- und Risikoaspekten, *Betriebliche Altersversorgung* 7/2002, 627-633.
- Albrecht, P.* (2003): Asset Liability Management bei Versicherungen, in: *Leser, H., M. Rudolf* (Hrsg.): *Handbuch Institutionelles Investment*, Gabler, Wiesbaden, 427-446.
- Albrecht, P., S. Koryciorz* (2003): Bestimmung des Conditional Value-at-Risk (CVaR) bei Normal- bzw. Lognormalverteilung, *Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft*, Nr. 142 [[www.bwl.uni-mannheim.de/Albrecht unter Forschung/Schriftenreihen/Mannheimer Manuskripte](http://www.bwl.uni-mannheim.de/Albrecht%20unter%20Forschung/Schriftenreihen/Mannheimer%20Manuskripte)].
- Albrecht, P., R. Maurer* (2002): *Investment- und Risikomanagement: Modelle, Methoden, Anwendungen*, Schäffer-Poeschel, Stuttgart.
- Albrecht, P., R. Maurer, M. Möller* (1998): Shortfall-Risiko/Excess-Chance-Entscheidungskalküle: Grundlagen und Beziehungen zum Bernoulli-Prinzip, *Zeitschrift für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften* 118, 249-274.
- Albrecht, P., R. Maurer, U. Ruckpaul* (2001): Shortfall-Risks of Stocks in the Long Run, *Financial Markets and Portfolio Management* 15, 481-499.
- Artzner, P.* (1999): Application of coherent risk measures to capital requirements in insurance, *North American Actuarial Journal* 3, 11-25.
- Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath* (1997): Thinking coherently, *RISK* 10, November, 68-71.
- Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath* (1999): Coherent measures of risk, *Mathematical Finance* 9, 203-228.

- Baron, O. P. (1977): On the utility theoretic foundations of mean-variance analysis, Journal of Finance 32, 1683-1697.*
- Balzer, L. B. (1994): Measuring Investment Risk: A Review, Journal of Investing, Fall 1994, 47-58.*
- Balzer, L. B. (2001): Investment risk: A unified approach to upside and downside returns, in: Sortino/Satchell (2001, Hrsg.), 103-155.*
- Bawa, V., E. Lindenberg (1977): Capital Market Equilibrium in a Mean-Lower Partial Moment Framework, Journal of Financial Economics 5, 189-200.*
- Bell, D. (1995): Risk, Return and Utility, Management Science 41, 23-30.*
- Borch, K. (1969): A note on uncertainty and indifference curves, Review of Economic Studies 36, 1-4*
- Brachinger, H. W., M. Weber (1997): Risk as a Primitive: A Survey of Measures of Perceived Risk, OR Spektrum 19, 235-250.*
- Bühlmann, H. (1970): Mathematical Methods in Risk Theory, Springer, Berlin.*
- Chateauneuf, A., R. Kast, A. Lapiéd (1996): Choquet pricing for financial markets with frictions, Mathematical Finance 6, 323-330.*
- Chipman, J. S. (1973): The ordering of portfolios in terms of mean and variance, Review of Economic Studies 40, 167-190.*
- Crouhy, M., D. Galai, R. Mark (2001): Risk Management, Mc Graw-Hill, New York.*
- Delbaen, F. (2000): Coherent Risk Measures, Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik XXIV, Heft 4, 733-739.*
- Delbaen, F. (2002): Coherent Risk Measures on General Probability Spaces, in: Sandmann, K., P. J. Schönbucher (2002, Hrsg.), 1-37.*
- Denneberg, D. (1994): Non-additive Measure and Integral, Kluwer, Dordrecht.*
- Diacon, S., C. Ennew (2001): Consumer Perceptions of Financial Risk, Geneva Papers on Risk and Insurance 26, 389-409.*
- Dowd, K. (1998): Beyond Value at Risk, Wiley, Chichester u.a.*
- Duffie, D., J. Pan (1997): An Overview of Value at Risk, Journal of Derivatives, Spring 1997, 7-49.*
- Embrechts, P., A. J. McNeil, D. Straumann (2002): Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls, in: Dempster, M. A. H. (Hrsg.): Risk Management: Value at Risk and Beyond, Cambridge University Press, Cambridge, 176-223.*

- Embrechts, P., C. Klüppelberg, T. Mikosch* (1991): *Modelling Extremal Events*, Springer, Berlin.
- Epps, T. W.* (1981): Necessary and sufficient conditions for the mean variance portfolio model with constant risk aversion, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 16, 169-176.
- Feldstein, M.* (1969): Mean-variance analysis in the theory of liquidity preference and portfolio selection, *Review of Economic Studies* 36, 5-12.
- Fishburn, P. C.* (1977): Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns, *American Economic Review* 67, 116-126.
- Fischer, T.* (2001): Examples of Coherent Risk Measures Depending on One-Sided Moments, Working Paper, TU Darmstadt [[www.mathematik.tu-darmstadt.de/~tfischer/](http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~tfischer/)].
- Föllmer, H., A. Schied* (2002a): Robust Preferences and Convex Measures of Risk, in: *Sandmann/Schönbucher* (2002, Hrsg.), 39-56.
- Föllmer, H., A. Schied* (2002b): Convex measures of risk and trading constraints, *Finance and Stochastics* 6, 429-447.
- Frittelli, M., E. Rosazza Gianin* (2002): Putting order in risk measures, *Journal of Banking and Finance* 26, 1473-1486.
- Goovaerts, M. J., F. de Vylder, J. Haezendonck* (1984): *Insurance Premiums*, North-Holland, Amsterdam u.a.
- Goovaerts, M. J., J. Dhaene, R. Kaas* (2001): Risk Measures, Measures for Insolvency Risk and Econometrical Capital Allocation, *Tijdschrift voor Economie en Management* 46, 545-559.
- Goovaerts, M. J., R. Kaas, J. Dhaene* (2002): Economic capital allocation derived from risk measures, Working paper, K. U. Leuven.
- Gotoh, J., H. Konno* (2000): Third Degree Stochastic Dominance and Mean Risk Analysis, *Management Science* 46, 289-301.
- Grinold, R. C., R. N. Kahn* (1995): *Active Portfolio Management*, Irwin, Chicago.
- Hanoch, G., H. Levy* (1969): The efficiency analysis of choices involving risk, *Review of Economic Studies* 36, 335-346.
- Hanoch, G., H. Levy* (1970): Efficient portfolio selection with quadratic and cubic utility, *Journal of Business* 43, 181-189.
- Hogan, W. W., J. M. Warren* (1974): Towards the Development of an Equilibrium Capital-Market Model based on Semivariance, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 9, 1-11.

- Hürlimann, W.* (2001): Conditional value-at-risk bounds for compound Poisson risks and a normal approximation, Working paper [[www.gloriamundi.org/var/wps.html](http://www.gloriamundi.org/var/wps.html)].
- Hürlimann, W.* (2002): Analytical Bounds for Two Value-at-Risk Functionals, *ASTIN Bulletin* 32, 235-265.
- Jia, J., J. S. Dyer* (1996): A Standard Measure of Risk and Risk-Value Models, *Management Science* 42, 1691-1705.
- Jorion, P.* (1997): *Value at Risk*, Irwin, Chicago.
- Kaas, R., M. J. Goovaerts, J. Dhaene, M. Denuit* (2001): *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer, Boston.
- Kahneman, D., A. Tversky* (1979): Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk, *Econometrica* 47, 263-291.
- Keller, L. R., R. K. Sarin, M. Weber* (1986): Empirical Investigation of Some Properties of the Perceived Riskiness of Gambles, *Organizational Behaviour and Human Decision Processes* 38, 114-130.
- Kijima, M., M. Ohnishi* (1993): Mean-Risk Analysis of Risk Aversion and Wealth Effects on Optimal Portfolios with Multiple Investment Opportunities, *Annals of Operations Research* 45, 147-163.
- Klevorick, A. K.* (1973): A note on the ordering of portfolios in terms of mean and variance, *Review of Economic Studies* 40, 293-296.
- Konno, H., H. Yamazaki* (1991): Mean absolute deviation portfolio optimisation model and its application to Tokyo stock market, *Management Science* 37, 519-531.
- Kraus, A., R. H. Litzenberger* (1976): Skewness preference and the valuation of risk assets, *Journal of Finance* 31, 1085-1100.
- Kusuoka, S.* (2001): On law invariant coherent risk measures, *Advances in Mathematical Economics* 3, Springer, Tokyo, 83-95.
- Landsman, Z., M. Sherris* (2001): Risk measures and insurance premium principles, *Insurance: Mathematics and Economics* 29, 103-115.
- Levy, H.* (1972): Stochastic Dominance and Expected Utility: Survey and Analysis, *Management Science* 38, 558-593.
- Levy, H., H. M. Markowitz* (1979): Approximating expected utility by a function of mean and variance, *American Economic Review* 69, 308-317.
- Longin, F. M.* (2001): Beyond the VaR, *Journal of Derivatives*, Summer 2001, 36-48.
- Markowitz, H. M.* (1952): Portfolio Selection, *Journal of Finance* 7, 77-91.

- Markowitz, H. M.* (1959): Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment, Yale University Press, New Haven.
- Maurer, R.* (2000): Integrierte Erfolgssteuerung in der Schadenversicherung auf der Basis von Risiko-Wert-Modellen, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
- Messina, J.* (2001): An evaluation of value at risk and the information ratio (for investors concerned with downside risk), in: *Sortino/Satchell* (2001, Hrsg.), 74-91.
- Meyer, J.* (1979): Mean-variance efficient sets and expected utility, *Journal of Finance* 34, 1221-1229.
- Ogryczak, W., A. Ruszczyński* (1999): From stochastic dominance to mean-risk models: Semideviations as risk measures, *European Journal of Operational Research* 116, 33-50.
- Panjer, H. H.* (2001): Measurement of risk, solvency requirements and allocation of capital with financial conglomerates, Research Report 01-15, Institute of Insurance and Pension Research, University of Waterloo.
- Pedersen, C. S., S. E. Satchell* (1998): An extended family of financial risk measures, *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* 23, 89-117.
- Pfingsten, A., C. Breitmeyer, F. Eggers, H. Hakenes, C. Rehtien, S. Rieso* (2000): Armutsmaße als Downside-Risikomaße: Ein Weg zu Risikomaßen, die dem Value-at-Risk überlegen sind, in *Johanning, L., B. Rudolph* (Hrsg.): *Handbuch Risikomanagement*, Band 1, Uhlenbruch Verlag, Bad Soden/Ts., 85-107.
- Pflug, G. C.* (2000): Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk, in: *Uryasev, S.* (2000, Hrsg.): *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*, Kluwer, Dordrecht, 272-281.
- Plantinga, A., S. de Groot* (2001): Preference functions and risk-adjusted performance measures, in: *Sortino/Satchell* (Hrsg., 2001), 169-193.
- Rockafellar, R. T., S. Uryasev* (2002): Conditional value-at-risk for general loss distributions, *Journal of Banking and Finance* 26, 1443-1471.
- Rockafellar, R. T., S. Uryasev, M. Zabarankin* (2002): Deviation Measures in Risk Analysis and Optimization, Research Report 2002-7, Risk Management and Financial Engineering Lab/Center for Applied Optimization, University of Florida, Gainesville.
- Ross, S. A.* (1978): Mutual Fund separation and financial theory- The separating distributions, *Journal of Economic Theory* 17, 254-286.
- Rothschild, M., J. E. Stiglitz* (1970): Increasing Risk I: A Definition, *Journal of Economic Theory* 2, 225-243.
- Sandmann, K., P. J. Schönbucher* (2002, Hrsg.): *Advances in Finance and Stochastics*, Springer, Berlin.

- Sarin, R. K., M. Weber* (1993): Risk-value models, *European Journal of Operational Research* 72, 135-149.
- Satchell, S. E.* (2001): Lower partial-moment capital asset pricing models: A re-examination, in: *Sortino/Satchell* (2001, Hrsg), 156-168.
- Schmeidler, D.* (1989): Subjective probability and expected utility without additivity, *Econometrica* 57, 571-587.
- Slovic, P.* (2000): *The Perception of Risk*, Earthscan Publications, London.
- Sortino, F. A.* (2001): From alpha to omega, in: *Sortino/Satchell* (Hrsg.), 3-25.
- Sortino, F., S. Satchell* (2001, Hrsg.): *Managing Downside Risk in Financial Markets*, Butterworth-Heinemann, Oxford u.a.
- Sterk, H. P.* (1979): *Selbstbeteiligung unter risikotheorischen Aspekten*, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
- Stone, B. K.* (1970): *Risk, Return and Equilibrium*, MIT Press, Cambridge, London.
- Stone, B. K.* (1973): A General Class of Three-Parameter Risk Measures, *Journal of Finance* 28, 675-685.
- Szegö, G.* (2002): Measures of risk, *Journal of Banking and Finance* 26, 1253-1272.
- Tasche, D.* (2002): Expected shortfall and beyond, *Journal of Banking and Finance* 26, 1519-1533.
- Tobin, J.* (1958): Liquidity preference as a behavior towards risk, *Review of Economic Studies* 25, 65-86.
- Tsiang, S. C.* (1972): The rationale of the mean-standard deviation analysis, skewness preferences, and demand for money, *American Economic Review* 62, 354-450.
- Van der Hoek, J., M. Sherris* (2001): A class of non-expected utility risk measures and implications for asset allocations, *Insurance: Mathematics and Economics* 29, 69-82.
- Wang, S. S.* (1996): Premium calculation by transforming the layer premium density, *ASTIN Bulletin* 26, 71-92.
- Wang, S. S.* (1998): An Actuarial Index of the Right-Tail Risk, *North American Actuarial Journal* 2, 88-101.
- Wang, S. S.* (2002): A Risk Measure That goes Beyond Coherence, 12th AFIR International Colloquium, Mexico.
- Wang, S. S., V. R. Young, H. H. Panjer* (1997): Axiomatic characterization of insurance prices, *Insurance: Mathematics and Economics* 21, 173-183.

- Wilson, L. T. C.* (1998): Value at Risk, in: *Alexander, C.* (1998, Hrsg.): Risk Management and Analysis, Vol. 1, Wiley, Chichester, 61-124.
- Wirch, J. R.* (1999): Raising Value at Risk, *North American Actuarial Journal* 3, 106-115.
- Wirch, J. R., M. L. Hardy* (1999): A Synthesis of Risk Measures for Capital Adequacy, *Insurance: Mathematics and Economics* 25, 337-347.
- Yaari, M. E.* (1987): The dual theory of choice under risk, *Econometrica* 55, 95-115.
- Yamai, Y., T. Yoshida* (2002a): On the Validity of Value-at-Risk: Comparative Analysis with Expected Shortfall, *Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan*, Vol. 20, January 2002, 57-85.
- Yamai, Y., T. Yoshida* (2002b): Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk: Their Estimation Error, Decomposition and Optimization, *Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan*, Vol. 20, January 2002, 87-121.
- Zagst, R.* (2002): *Interest Rate Management*, Berlin, Heidelberg, New York.