

**Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie,  
Portfolio Management und Versicherungswirtschaft**

**Nr. 154**

**Cost-Average-Strategie versus Einmalanlage :  
Shortfallrisiken und Probable Minimum Wealth**

von

Peter Albrecht, Ivica Dus und Raimond Maurer

Mannheim 12/2003

# **Cost-Average-Strategie versus Einmalanlage : Shortfallrisiken und Probable Minimum Wealth**

*Peter Albrecht, Ivica Dus und Raimond Maurer*

- A. Einleitung
  
- B. CA-Strategie und Durchschnittspreiseffekt
  - B.I Basiseigenschaften
  - B.II Ex-post-Vergleich von Einmalinvestment und CA-Strategie
  
- C. Ex-ante Rendite-/Risikoanalyse des Cost-Averaging
  - C.I Strategiedefinition und Spezifikation der Kursdynamik
  - C.II Erwartungswert/Varianz-Analyse
  - C.III Analyse von Shortfallrisiken
  - C.IV Analyse des Probable Minimum Wealth
  
- D. Fazit und Ausblick

**Prof. Dr. Peter Albrecht**, Lehrstuhl für ABWL, Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft, Universität Mannheim, Email: [risk@bwl.uni-mannheim.de](mailto:risk@bwl.uni-mannheim.de).

**Prof. Dr. Raimond Maurer/Dipl. Wirtsch.-Inf. Ivica Dus**, Lehrstuhl für Investment, Portfolio Management und Alterssicherung, J.W. Goethe-Universität Frankfurt am Main, Email: [investment@wiwi.uni-frankfurt.de](mailto:investment@wiwi.uni-frankfurt.de).

## A. Einleitung

Ist es günstiger, ein zu einem bestimmten Zeitpunkt vorhandenes Vermögen unmittelbar in risikobehaftete Fondsanteile anzulegen (Einmalanlage) oder aber über den vorbestimmten Anlagezeitraum verteilt, in gleichmäßigen Abständen und gleich hohen Beträgen zu investieren (Cost-Average(CA)-Strategie)? Das zentrale Argument für die Cost-Average-Strategie besteht in der Nutzung des sogenannten Durchschnittspreiseffekts (Cost-Average Effekt). Durch die zeitliche Verteilung des Investitionsbudgets im Sparplankontext werden im Zeitablauf bei niedrigen Kursen jeweils relativ mehr Fondsanteile erworben, bei hohen Kursen jeweils relativ weniger. Intuitiv führt dies dazu, dass der durchschnittliche Einstandskurs der Fondsanteile unter dem durchschnittlichen Fondspreis im betreffenden Zeitraum liegt. Aus dem Vorliegen eines Durchschnittspreiseffekts kann allerdings nicht auf eine grundsätzliche Überlegenheit der CA-Strategie gegenüber der Einmalanlage geschlossen werden. Vielmehr ist es für die Beantwortung der gestellten Frage notwendig, eine Explikation der Rendite-/Risikoprofile der beiden alternativen Investitionsstrategien vorzunehmen.

In der Literatur wird die Frage um die Rendite-/Risikowirkungen des Cost-Average-Effekts kontrovers beantwortet.<sup>1</sup> So kommt etwa Rozeff (1994) in seiner Untersuchung zur Folgerung „Those who hesitate, lose“. Methodisch gesehen vergleicht Rozeff dabei eine Variante einer Einmalanlage, bei der ein Teilbetrag in Fonds, der andere Teilbetrag mit sicherer Verzinsung angelegt wird. Diese Aufspaltung wird dabei derart festgelegt, dass (gemessen an der Standardabweichung des Endvermögens) ein identisches Risiko resultiert wie bei einem alternativen Sparplan. Rozeff kommt unter diesen Bedingungen zur Schlussfolgerung, dass die Einmalanlage zu einem höheren mittleren Endvermögen führt, risikoadjustiert somit dem Sparplan überlegen ist. Für diese Schlussfolgerung liefert Rozeff die folgende Begründung: Eine Einmalanlage unterliegt einer größeren Anzahl von unabhängigen Realisationen (implizit wird somit eine Random-Walk-Hypothese für den Wertverlauf des Investments getroffen), was das Risiko im Sinne der Standardabweichung reduziert. Allerdings ist die zum Sparplan betrachtete Alternative nicht wirklich eine Einmalanlage in dasselbe Asset, sondern eine Mischung aus einer Einmalanlage in dieses Asset und einer sicheren Anlage. Ferner geht Rozeff im allgemeinen Fall von einer Approximationsformel für den Erwartungswert sowie die Varianz des Endvermögens aus, auch dies kann zu Verzerrungen führen.

Die alleinige Aufarbeitung der Literatur zum Thema Cost-Average ist dabei nicht ausreichend. Zum einen werden in der Literatur in diesem Zusammenhang meist nur kurzfristige Zeithorizonte<sup>2</sup> betrachtet, zum anderen verbleibt die Rendite/Risiko-Analyse in der Regel im klassischen Markowitz-Rahmen (Erwartungswert/Varianz-Analyse). In dem vorliegenden Beitrag betrachten wir hingegen - aufgrund der stei-

genden Bedeutung einer privaten Altersvorsorge - zum einen langfristig ausgerichtete Sparpläne<sup>3</sup>. Zum anderen wird sowohl eine weitergehende Risikoanalyse auf der Basis von Shortfallrisikomaßen durchgeführt als auch der Value-at-Risk (im vorliegenden Kontext als wahrscheinliches Endvermögen bzw. Probable Minimum Wealth interpretiert) als Variante eines risikoadjustierten Performancemaßes in die Analyse mit einbezogen<sup>4</sup>.

## B. CA-Strategie und Durchschnittspreiseffekt

### B.I Basiseigenschaften

Wenden wir unsere Aufmerksamkeit zunächst der Formalisierung des angesprochenen „Kerneffektes“ des Cost-Averaging zu. Hierzu wird ein Investor unterstellt, der über ein anfängliches Vermögen  $V_0$  verfügt, das er zu den äquidistanten Zeitpunkten  $t = 0, 1, \dots, T-1$  sukzessive und in gleich hohen Sparraten  $V_0/T$  vollständig in risikobehaftete Fondsanteile investiert. Ist  $S_t$  der (unsichere) Anteilspreis im Zeitpunkt  $t$ , so werden in diesem Zeitpunkt  $n_t = \frac{V_0/T}{S_t}$  Fondsanteile erworben. Für den durchschnittlichen

Einstandspreis der Fondsanteile im Rahmen einer CA-Strategie  $D_{CA,T}$  ergibt sich damit:

$$D_{CA,T} = \frac{V_0}{\sum_{t=0}^{T-1} n_t} = \frac{V_0}{\sum_{t=0}^{T-1} \frac{V_0}{T} \frac{1}{S_t}} = \frac{T}{\sum_{t=0}^{T-1} \frac{1}{S_t}} \leq \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} S_t = D_T. \quad (1)$$

Die letzte Ungleichung beruht darauf, dass das harmonische Mittel stets kleiner gleich dem arithmetischen Mittel ist (die Gleichheit gilt dabei nur im Falle  $S_0 = S_1 = \dots = S_{T-1}$ ). Damit ist der durchschnittliche Einstandspreis der CA-Strategie  $D_{CA,T}$  stets geringer ist als der Durchschnittskurs der Fondsanteile  $D_T = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} S_t$  über den betreffenden Zeitraum.

Allerdings kann hieraus nicht gefolgert werden, dass ein Sparplan bei gleichem Kapitaleinsatz stets zu einem günstigeren Endvermögen im Vergleich zu einem Einmalinvestment führt. Um die zu illustrieren, wird das (ex-ante unsichere) Endvermögen der beiden Investitionsstrategien betrachtet. Im Falle des Einmalinvestments resultiert ein Endvermögen in Höhe von

$$V_{LS}(T) = \frac{V_0}{S_0} S_T = V_0 \frac{S_T}{S_0}. \quad (2)$$

Hierbei stellt  $V_0/S_0$  die Anzahl der erworbenen Fondsanteile dar, die im Zeitpunkt  $t=0$  erworben wurden, und  $S_T$  den unsicheren Preis des Fondsanteils in  $T$ . Das bedeutet, das realisierte Endvermögen hängt von der absoluten Höhe der Wertsteigerung der Fondsanteile ab und zwar unabhängig davon über welchen Kurspfad diese realisiert worden ist. Im stochastischen Sinne ist die Einmalanlage damit pfadunabhängig.

Im Falle der CA-Strategie wird fortlaufend zu den äquidistanten Zeitpunkten  $t = 0, 1, \dots, T-1$  ein konstanter Geldbetrag in Höhe von  $I = V_0/T$  investiert. Dies führt zu einem Endvermögen  $V_{CA}(T)$  in Höhe von:

$$\begin{aligned} V_{CA}(T) &= \left( \frac{I}{S_0} + \frac{I}{S_1} + \dots + \frac{I}{S_{T-1}} \right) S_T \\ &= I \sum_{t=0}^{T-1} (S_T / S_t) \\ &= V_0 \frac{S_T}{D_{CA,T}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Im Unterschied zum Einmalinvestment kommt es bei der CA-Strategie damit nicht nur auf das Verhältnis der Fondspreise zu Anfang und Ende der Investitionsperiode an, sondern auch auf das Verhältnis von mittlerem Einstandskurs  $D_{CA,T}$  zum Preis des Anlageobjekts am Ende Investitionsperiode. Die CA-Strategie führt dann zu einem höheren Endvermögen als die Einmalanlage, wenn der resultierende durchschnittliche Einstandskurs  $D_{CA,T}$  geringer ist als der Fondspreis  $S_0$  zu Beginn der Investitionsperiode. Da zu Beginn der Investitionsperiode die zukünftigen Fondspreise jedoch unsichere Größen sind, ist die Einhaltung der Bedingung abhängig von jeweils realisierten Kurspfad. Im Gegensatz zu Einmalinvestments ist das resultierende Endvermögen bei der CA-Strategie damit pfadabhängig. Dies soll am Beispiel eines einfachen Zweiperiodenmodells illustriert werden, welches in der nachfolgenden Tabelle 1 enthalten ist.

| Zeitpunkt  | $t = 0$ | $t = 1$ | $t = 2$ | $V_{LS}$ | $V_{CA}$ |
|------------|---------|---------|---------|----------|----------|
| Kurspfad 1 | 100     | 50      | 150     | 150      | 225      |
| Kurspfad 2 | 100     | 200     | 150     | 150      | 112,5    |

Tabelle 1: Pfadabhängigkeit der CA-Strategie

Verfügt der Anleger über ein Anfangskapital von 100 Euro und ist der Wert des Fondsanteils im Startzeitpunkt ebenfalls 100 ( $V_0 = S_0 = 100$ ), so ergibt sich beim Einmalinvestment für beide Kursentwicklungen ein Endvermögen in Höhe von  $V_{LS} = 150$ . Dagegen ergibt sich bei der CA-Strategie ein Endvermögen in Höhe von  $V_{CA} = 225$  Euro beim ersten Kurspfad und  $V_{CA} = 112,5$  Euro beim zweiten Kurspfad. Ein Szenario mit anfänglichem Kursverlust und anschließendem Kursgewinn ist demnach bei der CA-Strategie günstig zu bewerten. Dagegen ist es für die CA-Strategie ungünstig, wenn die Kurse zunächst steigen und am Ende des Anlagehorizonts fallen.

Um die beiden Investitionsstrategien hinsichtlich des resultierenden Endvermögens zu vergleichen, gilt es weiterhin zu bedenken, dass bei der CA-Strategie der noch nicht im Fondsinvestment gebundene Teil des Gesamtbudgets zu einem risikolosen Zinssatz (etwa in einem Geldmarktfonds) angelegt werden kann. Dabei erhöhen die erzielbaren Anlagezinsen den insgesamt für das Fondsinvestment zur Verfügung stehenden Betrag. Um die beiden Investitionsstrategien hinsichtlich der jeweiligen Kapitalbindung unmittelbar miteinander vergleichen zu können, muss daher der Barwert aller Sparraten dem anfänglich vorhandenen Investitionsbudget entsprechen. Verlangt man zusätzlich, dass die Sparraten konstant bleiben<sup>5</sup>, mithin die entstehenden Zinsgewinne gleichmäßig auf die Raten verteilt werden, bedeutet dies bei einem sicheren Einperiodenzins von  $i$ :

$$I \cdot \sum_{t=0}^{T-1} (1+i)^{-t} = V_0. \quad (4)$$

Daraus ergibt sich als konstante Sparrate

$$I(i, T) = \frac{1 - (1+i)^{-1}}{1 - (1+i)^{-T}} \cdot V_0. \quad (5)$$

Der Zinssatz beeinflusst damit das erzielbare Endvermögen der CA-Strategie, indem er auf die Höhe der Sparraten einwirkt. Je höher der sichere Anlagezins, desto höher die geleisteten Sparraten und desto höher damit auch das erzielbare Endvermögen.

Insgesamt können damit keine unmittelbaren Aussagen über eine generelle Überlegenheit eines Einmalinvestments gegenüber der CA-Strategie bzw. vice versa getroffen werden. Im Einzelfall ist diese Überlegenheit sowohl „pfadabhängig“ (abhängig vom konkreten realisierten Kursverlauf), „zeithorizontabhängig“ (abhängig vom im Einzelnen fixierten Zeitabschnitt) als auch „zinsabhängig“ (abhängig vom jeweils spezifizierten sicheren Zins).

## B.II Ex-post-Vergleich von Einmalinvestment und CA-Strategie

In diesem Abschnitt soll die Vorteilhaftigkeit der beiden betrachteten Investitionsalternativen – Einmalinvestment versus CA-Strategie – im Rahmen einer ex-post Betrachtung verglichen werden. Hierzu wird die historische Wertentwicklung von fünf- bzw. zehnjährigen Einmalinvestments bzw. Sparplänen über verschiedene Startzeitpunkte betrachtet. Datenbasis der Auswertungen ist die Kurszeitreihe des (um steuerliche Effekte bereinigten) Deutschen Aktienindex (DAX) im Zeitraum von 1972 bis 2001. Dieser kann als Repräsentant für die Wertentwicklung eines diversifizierten Index-Portfolios aus deutschen Blue Chip-Aktien aufgefasst werden. Es wird unterstellt, dass der Investor über ein Anfangskapital in Höhe von 100 EUR verfügt, welches er über eine Halteperiode von fünf (zehn) Jahren investieren möchte. Dabei wird beim Einmalinvestment der gesamte zur Verfügung stehende Anlagebetrag sofort in den DAX investiert. Dagegen wird bei der CA-Strategie ein anfängliches Vermögen sukzessive in fünf (zehn) gleich hohen Beträgen jeweils am Jahresanfang in den DAX investiert. Der dabei jeweils noch nicht im Aktieninvestment gebundene Teil des Gesamtbudgets kann zu einem risikolosen Zinssatz angelegt werden, wobei die erzielbaren Anlagezinsen den insgesamt für den Aktieninvestment zur Verfügung stehenden Betrag erhöhen. Dabei gehen wir von einem (fristunabhängigen) risikolosen Zinssatz aus, welcher der Umlaufrendite für inländische Staatsanleihen mit einer mittleren Restlaufzeit zu Beginn der Anlageperiode entspricht. Die Höhe des im Rahmen des Sparplans jährlich vorschüssig in Aktien angelegten Betrages hängt damit sowohl von der Länge des vorgegebenen Zeithorizontes als auch von der Höhe des risikolosen Zinssatzes ab. Im Besonderen wird somit für jeden fixierten Zeithorizont, unter Wahrung der Finanzierungsgleichheit eine andere Sparplanstrategie mit dem Einmalinvestment verglichen.

Beginnt im Jahr 1972 die erste, im Jahr 1973 die zweite und im Jahr 1997 die letzte Investitionsperiode, so resultieren insgesamt 26 überlappende Fünf-Jahreszeiträume. Entsprechend ergeben sich 21 überlappende Zehn-Jahreszeiträume. Für jede Anlageperiode wird das resultierende Endvermögen des Einmalinvestments mit dem der CA-Strategie verglichen. In der nachfolgenden Tabelle 2 wird die relative Häufigkeit angegeben, dass das Einmalinvestment zu einem höheren Endvermögen geführt hat als die CA-Strategie ( $V_{LS} > V_{CA}$ ). Weiterhin sind die Endvermögen für die jeweils drei besten Investitionszeiträume aufgeführt, bei denen die Wertentwicklungsdifferenz des Einmalinvestments höher war als die des Sparplans bzw. umgekehrt.

| <b>5 Jahres Zeitraum: Anteil <math>V_{LS} &gt; V_{CA} = 77\%</math></b>  |  |           |           |                                  |           |           |
|--|--|-----------|-----------|----------------------------------|-----------|-----------|
|  | Überlegenheit Einmalinvestment („Top 3“) |           |           | Überlegenheit Sparplan („Top 3“) |           |           |
|  | 1982-1986                                | 1996-2000 | 1995-1999 | 1987-1991                        | 1990-1994 | 1973-1977 |
| $V_{LS}$   | 397                                      | 294       | 342       | 108                              | 125       | 130       |
| $V_{CA}$   | 267                                      | 191       | 256       | 128                              | 139       | 142       |
| <b>10 Jahres Zeitraum: Anteil <math>V_{LS} &gt; V_{CA} = 85\%</math></b> |  |           |           |                                  |           |           |
|  | Überlegenheit Einmalinvestment („Top 3“) |           |           | Überlegenheit Sparplan („Top 3“) |           |           |
|  | 1977-1986                                | 1980-1989 | 1981-1990 | 1987-1996                        | 1986-1995 | 1973-1982 |
| $V_{LS}$   | 495                                      | 515       | 393       | 208                              | 172       | 172       |
| $V_{CA}$   | 392                                      | 335       | 228       | 222                              | 180       | 173       |

Tabelle 2: Wertentwicklung Einmalinvestments bzw. Sparplan für alternative Zeiträume

Die Tabelle bestätigt die zuvor getroffenen Aussagen: Je nach Startzeitpunkt und Investmenthorizont führt einmal der Sparplan, ein anderes mal das Einmalinvestment zu einem höheren Wertzuwachs. Bei einer 5-jährigen Haltedauer ist das Endvermögen des Sparplans in 77% der Fälle größer als bei der CA-Strategie. Dieser Anteil erhöht sich bei einer 10-jährigen Haltedauer auf 85%. Der Zeitraum mit der deutlichsten Überlegenheit eines Einmalinvestments gegenüber dem Sparplan war von 1982 bis 1986 für 5-jährige und von 1977 bis 1986 für 10-jährige Anlagehorizonte. Für diese Zeiträume beträgt die Endvermögensdifferenz zwischen Einmalinvestment und Sparplan 130 EUR für den Fünf- und 103 EUR für den Zehn-Jahreszeitraum. Der Sparplan war dem Einmalinvestment in den Jahren 1987 bis 1991 bzw. 1987 bis 1996 am deutlichsten überlegen. Allerdings fallen die entsprechenden Endvermögensdifferenzen in Höhe von 20 EUR bzw. 14 EUR deutlich geringer aus als beim Einmalinvestment.

Eine Betrachtung der konkreten Kursentwicklung zeigt, dass der Sparplan besonders dann gut abgeschnitten hat, wenn am Anfang des Investitionszeitraums eine Abwärts- oder Seitwärtsbewegung aufgetreten ist und die Kurse sich anschließend wieder erholt haben. Dagegen ist in Situationen anhaltender Kurssteigerungen das Einmalinvestment dem Sparplan überlegen. Auch in Anlageperioden in denen anfänglich eine Seitwärtsbewegung oder ein Kursanstieg erfolgt und gegen Ende des Investitionszeitraums eine Konsolidierung stattfindet, ist die CA-Strategie dem Einmalinvestment unterlegen.

## **C. Ex-ante Rendite-/Risikoanalyse des Cost-Averaging**

### **C.I Strategiedefinition und Spezifikation der Kursdynamik**

Die Analyse auf der Basis historischer Wertentwicklungen besitzt den Vorteil, dass nur wenige Modellannahmen getroffen werden müssen und die Auswertungen auf der Basis tatsächlicher Marktpreise erfolgen. Dem steht allerdings der Nachteil gegenüber, dass die gesamten Auswertungen nur auf einem, dem realisierten, Kurspfad basieren. Mit Ausnahme der Ein-Jahreszeiträume wurden die verwendeten Wertentwicklungen aus sich (stark) überlappenden sukzessiven Perioden gewonnen. Dies bedingt eine hohe Autokorrelation der verwendeten rollierenden Renditen, was besonders für langfristige Investitionsperioden zu erheblichen Verzerrungen bei der Wahrscheinlichkeitsermittlung führen kann. Eine hohe Schätzsicherheit würde erst die Verwendung von unabhängigen, sich nicht überlappenden 5-, 10-, 15- oder 20-Jahresperioden ergeben. Doch die bestehende Kurshistorie ist zu kurz, um auf diese Weise eine ausreichende Datengrundlage zu gewinnen.

Eine alternative Möglichkeit besteht darin, ein geeignetes wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell bezüglich der Preis- bzw. Renditeentwicklung eines Investments zu spezifizieren, dessen Parameter aus unabhängigen Beobachtungen zu ermitteln und dann die interessierenden Rendite-/Risikoprofile aus dem durch das Verteilungsmodell spezifizierten Spektrum der möglichen Wertentwicklungen zu gewinnen. Zu treffen ist in diesem Zusammenhang dann eine Hypothese über die Zufallsgesetzmäßigkeit der Kursentwicklung. Als „traditionelle“ These kann man hierbei von einer Random Walk-Annahme ausgehen<sup>6</sup>, d.h. die Wertveränderungen über künftige Investmentperioden sind unabhängig und identisch verteilt. Insbesondere sind dann die „im Mittel“ gewonnenen Aussagen unabhängig von der konkreten Wahl des Startzeitpunktes des Investments.

Zur Quantifizierung der unterschiedlichen Rendite- und Risikowirkungen des Sparplan- bzw. Einmalinvestments bedarf es vorab einer Spezifikation der Dynamik der zufallsabhängigen Wertentwicklungen des getätigten DAX-Investments. Wir unterstellen dabei das Standard-Referenzmodell der modernen Finanzmathematik, die geometrische Brownsche Bewegung (geometrischer Wiener-Prozess). Für die kontinuierlichen Jahresrenditen (Log-Renditen) ist dies äquivalent zur Annahme einer Normalverteilung. Zur Gewinnung der Parameter der Verteilung der (kontinuierlichen) Jahresrenditen legen wir die Entwicklung des DAX über den Zeitraum von 1972 – 2001 zugrunde. Die Parameter mittlere (kontinuierliche) Rendite und Renditestandardabweichung (Volatilität) nehmen über diesen Zeitraum die Werte 10,74% bzw. 22,76% an. Es kann gezeigt werden, dass unter diesen Voraussetzungen das Endvermögen des Einmalinvestments nach T Jahren logarithmisch normalverteilt ist. Dies erlaubt wiederum, verschiedene hier interessierende Rendite-/Risikokennziffern bezüglich des

resultierenden Endvermögens (Erwartungswert, Median, Varianz, Value-at-Risk sowie verschiedene Shortfallrisikokenngrößen) in geschlossener analytischer Form zu spezifizieren. Dagegen ist die Endvermögensverteilung der CA-Strategie nicht bekannt, was (regelmäßig) den Einsatz von Monte-Carlo-Simulationstechniken erfordert.

Im Zentrum der weiteren Analysen steht der Vergleich der resultierenden Rendite-/Risikoprofile über Investmenthorizonte von 1 bis 30 Jahren eines Einmalinvestments und einer (finanzierungsäquivalenten) CA-Strategie in den Deutschen Aktienindex. Bei der CA-Strategie wird angenommen, dass der jeweils noch nicht im Aktieninvestment gebundene Teil des Gesamtbudgets zu einem (zeithorizontunabhängigen) risikolosen Zinssatz von 3% p.a. angelegt wird, wobei die erzielbaren Anlagezinsen den insgesamt für das Aktieninvestment zur Verfügung stehenden Betrag erhöhen.

## C.II Erwartungswert/Varianz-Analyse

Die nachstehende Abbildung 1 vermittelt zunächst einen Eindruck von der mittleren Entwicklung des Endvermögens der beiden alternativen Investmentstrategien über verschiedene Zeithorizonte.

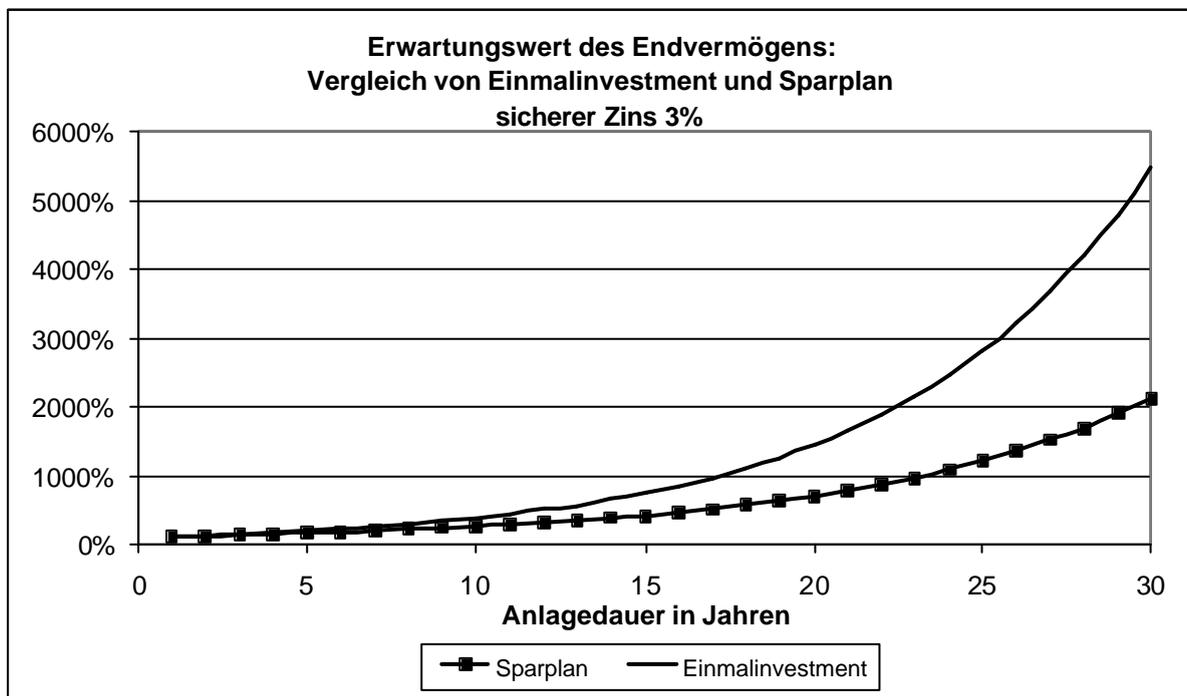


Abbildung 1: Einmalinvestment vs. Sparplan: Mittlerer Wert des Endvermögens

Es wird deutlich, dass das Einmalinvestment zu einem höheren mittleren Endvermögen führt, wobei die Differenz umso größer wird, je länger der Zeithorizont ist. Dieses

Ergebnis ist systematisch, d.h. generell valide<sup>7</sup>, solange der sichere Zins unterhalb der angenommenen erwarteten DAX-Rendite liegt.

Intuitiv liegt dieses Ergebnis begründet in der positiven Drift-Differenz bzw. Risiko-prämie der Aktienanlage relativ zur sicheren Anlage im Beispiel in Höhe von 7,78% (auf kontinuierlicher Basis). Je mehr Kapital unter diesen Bedingungen investiv in Aktien gebunden ist, desto besser ist im Erwartungswert das Ergebnis. Die größere Kapitalbindung in Aktien besteht beim Einmalinvestment, die Kapitalbindungsdifferenz ist dabei umso größer, je länger der Zeithorizont für das Cost-Averaging ist. Die Höhe der Drift-Differenz ist wiederum abhängig von der angenommenen Höhe der sicheren Verzinsung, je höher der sichere Zins, desto geringer der dargestellte Vorteil der Aktienanlage und damit des Einmalinvestments.

Nun ist bekannt, dass gerade mit zunehmendem Zeithorizont aufgrund der damit einhergehenden Zunahme der Schiefe der Endvermögensverteilung, der Erwartungswert immer weniger aussagekräftig hinsichtlich der „im Durchschnitt“ zu erwartenden Endvermögensposition wird. So weist unter den getroffenen Annahmen der Schiefeffizient für das Endvermögen bei einem Einmalinvestment und einen Investitionszeitraum von 1, 10, 20 bzw. 30 Jahren entsprechende Werte von 0,70/ 3,03/ 6,50/ 13,01 auf. Bei einem Sparplan (mit einem sicheren Zins von 3%) liegen die entsprechenden Werte bei 0,70/ 2,13/ 4,21/ 7,78. Insofern steigt die Rechtsschiefe des zufallsabhängigen Endvermögens sowohl beim Einmalinvestment als auch beim Sparplan mit zunehmendem Investitionszeitraum deutlich an. Allerdings fällt dieser Effekt beim Sparplan geringer aus als beim Einmalinvestment.

Hinsichtlich der Analyse einer mittleren Wertentwicklung ist daher der Median (50%-Quantil), d.h. diejenige Position, oberhalb und unterhalb derer jeweils die Hälfte der Wahrscheinlichkeitsmasse liegt, ebenfalls von Interesse. Zur Vervollständigung des Bildes enthält daher Abbildung 2 die Entwicklung des Medians der beiden Strategiealternativen.

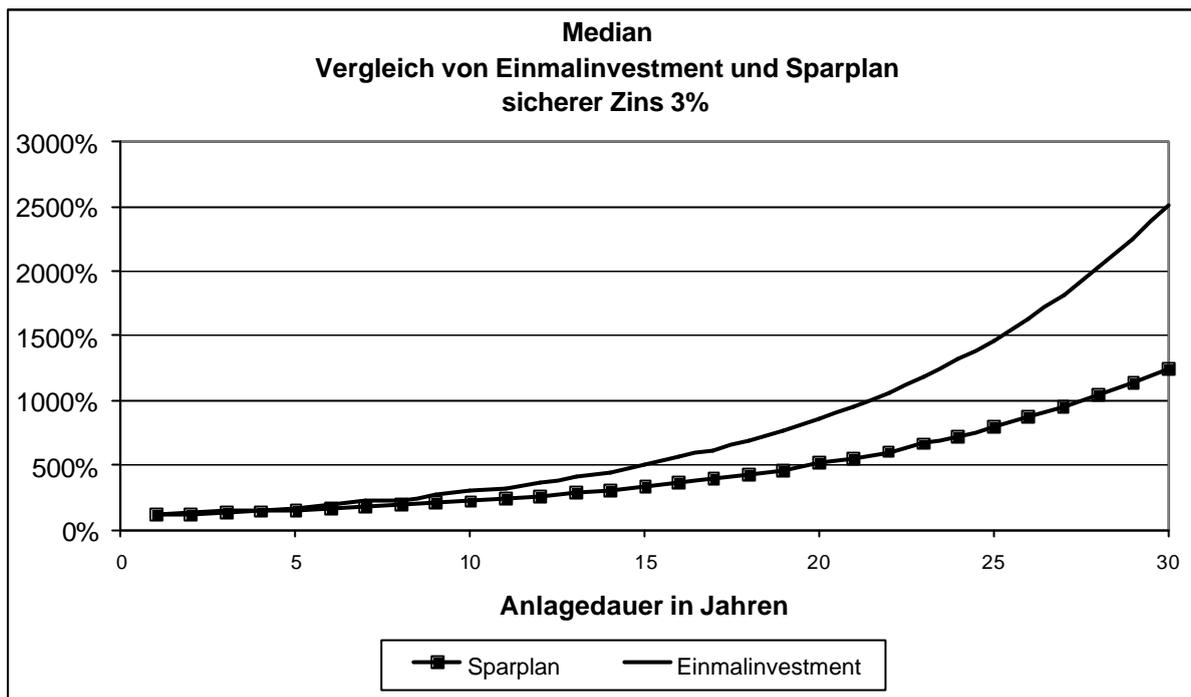


Abbildung 2: Median des Endvermögens

Es wird deutlich, dass hinsichtlich des Medians grundsätzlich die gleichen Aussagen wie beim Erwartungswert gelten, die Differenz des mittleren Endvermögens aber (deutlich) geringer ausfällt.

Abbildung 3 stellt schließlich entsprechend die Entwicklung der Volatilität (Standardabweichung) des Endvermögens der beiden alternativen Strategien dar.

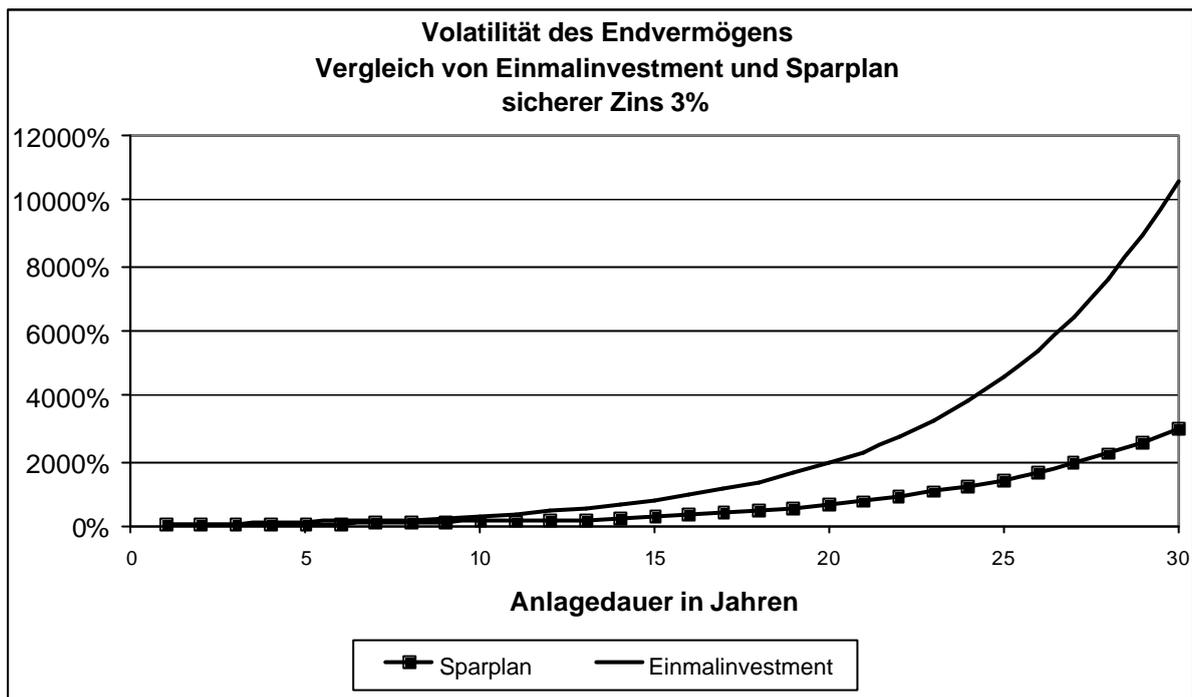


Abbildung 3: Volatilität des Endvermögens.

Es wird deutlich, dass das Einmalinvestment eine höhere Volatilität (und damit auch eine höhere Varianz) des Endvermögens besitzt als der Sparplan. Auch dieses Resultat ist generell valide.

Zusammengenommen bedeuten die beiden vorstehenden Resultate, dass hinsichtlich des Markowitzschen Erwartungswert/Varianz-Kriteriums keine Dominanz einer der beiden Strategiealternativen vorliegt. Der Sparplan beinhaltet im Vergleich zum Einmalinvestment sowohl einen niedrigeren Erwartungswert des Endvermögens als auch ein geringeres Risiko, gemessen anhand der Standardabweichung des Endvermögens.

### C.III Analyse von Shortfallrisiken

Die Varianz bzw. die Standardabweichung als Wurzel aus der Varianz stellen zwar „die“ traditionellen Risikomaße dar, unterliegen in dieser Hinsicht jedoch der Kritik. Zum einen erhöhen aufgrund ihrer symmetrischen Konstruktion sowohl negative als auch positive Abweichungen vom Erwartungswert das Risiko, wohingegen bei einem intuitiven Risikoverständnis nur negative Abweichungen Risikorelevanz besitzen. Zum anderen setzt die symmetrische Konstruktion auch eine Symmetrie der zugrunde liegenden Verteilung voraus, was – wie bereits dargestellt – mit zunehmenden Zeithorizont immer unrealistischer wird.

Insofern ist es gerade aufgrund der mit dem Zeithorizont zunehmenden Rechtsschiefe von Interesse entsprechende asymmetrische Risikomaße in die Analyse mit einzubeziehen. Hierzu sollen Risikomaße des Shortfall-Typus betrachtet werden. Generell quantifizieren Shortfallrisikomaße Risiko als die Gefahr der Unterschreitung einer (vorzugebenden) Zielgröße<sup>8</sup>. Im Folgenden wählen wir diese Zielgröße einheitlich als die Wertentwicklung der sicheren Anlage, d.h. gehen in den Illustrationen von einer (diskreten) Zielrendite von 3% per annum aus.

Als einfachstes Shortfallrisikomaß wird zunächst die Shortfallwahrscheinlichkeit, d.h. die Wahrscheinlichkeit der Verfehlung der spezifischen Targetgröße, betrachtet. Neben der Wahrscheinlichkeit für einen Shortfall ist auch die mittlere Höhe eines Shortfalls relativ zum Target von Relevanz, d.h. es wird der Shortfallerwartungswert bestimmt. Darüber hinaus wird der sog. Mittlere Verlust im Verlustfall (Mean Excess Loss) betrachtet. Dieser misst die mittlere Shortfallhöhe unter der Bedingung, dass ein Shortfall eintritt. Im Unterschied zum Shortfallerwartungswert wird hierbei nicht die mittlere Unterschreitung der Targetrendite über alle künftigen Realisationen betrachtet, sondern nur über diejenigen, die zu einer Verfehlung des Target führen. Der Mean Excess Loss kann intuitiv als Worst Case-Risikomaß apostrophiert werden, denn er misst nur die Konsequenzen (mittlere Targetunterschreitung) für die Fälle, in denen der Worst Case (hier: Targetunterschreitung) eintritt. Ein fundamentaler Zusammenhang zwischen den vorstehenden Risikomaßen besteht darin, dass der Shortfallerwartungswert das Produkt aus Shortfallwahrscheinlichkeit und Mean Excess Loss ist.

Die Abbildung 4 vermittelt zunächst einen Eindruck von der Entwicklung der Shortfallwahrscheinlichkeit bei Vorgabe einer Zielrendite von 3% p.a. im Zeitablauf.

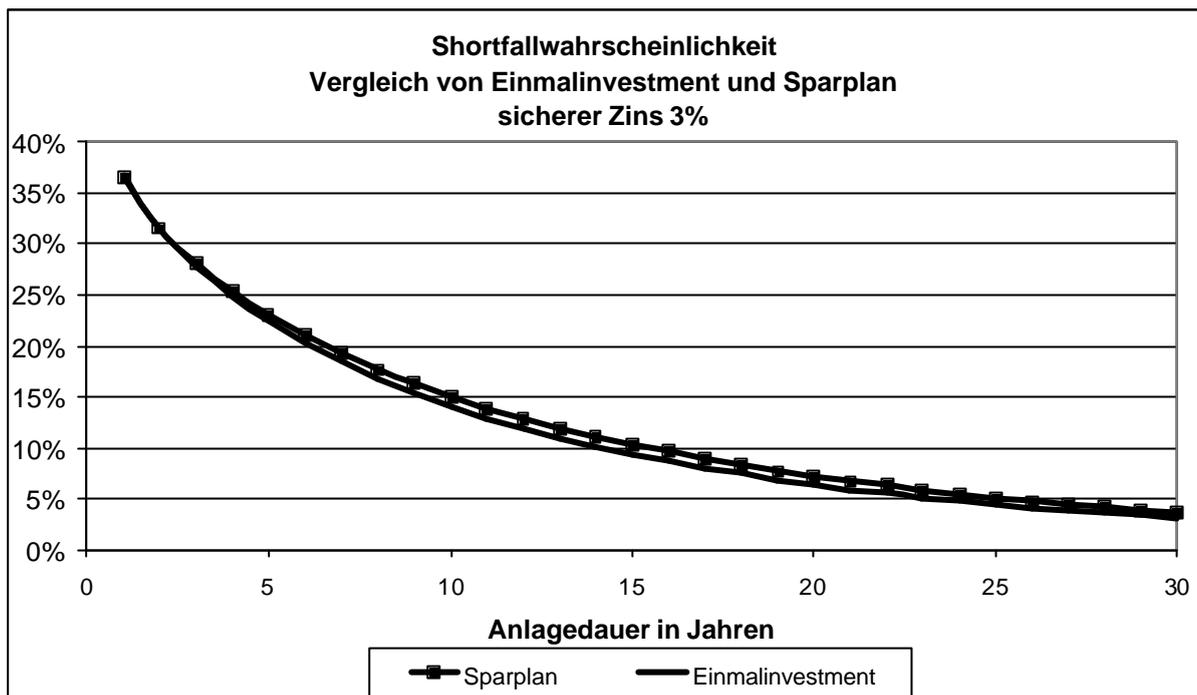


Abbildung 4: Shortfallwahrscheinlichkeit: Targetverzinsung 3% p.a.

Es wird deutlich, dass das Einmalinvestment nicht nur hinsichtlich der mittleren Wertentwicklung, sondern auch hinsichtlich der Wahrscheinlichkeit der Verfehlung einer Targetrendite von 3% dem Sparplan überlegen ist. Es weist damit (nur) in diesem Sinne ein geringeres Risiko auf. Intuitiv liegt dies wiederum begründet in dem „Drifteffekt“, der schon bei der mittleren Wertentwicklung für die Überlegenheit des Einmalinvestments ausschlaggebend war. Auch hinsichtlich der Vorgabe einer Targetrendite führt dieser Effekt dazu, dass beim Einmalinvestment weniger Realisationen das Target verfehlen. Das Ausmaß der Wirkung des Drifteffektes ist aber deutlich weniger stark ausgeprägt als im Falle der mittleren Wertentwicklung. Die Shortfallwahrscheinlichkeiten beim Einmalinvestment sind nur geringfügig geringer als beim Sparplan. Zudem wird diese Differenz umso geringer, je höher der als sicher angenommene (Anlage- und) Targetzins gewählt wird.

Wenden wir uns nun dem Mittleren Verlust im Verlustfall (Mean Excess Loss) zu. Die entsprechende Situation wird in Abbildung 5 dargestellt.

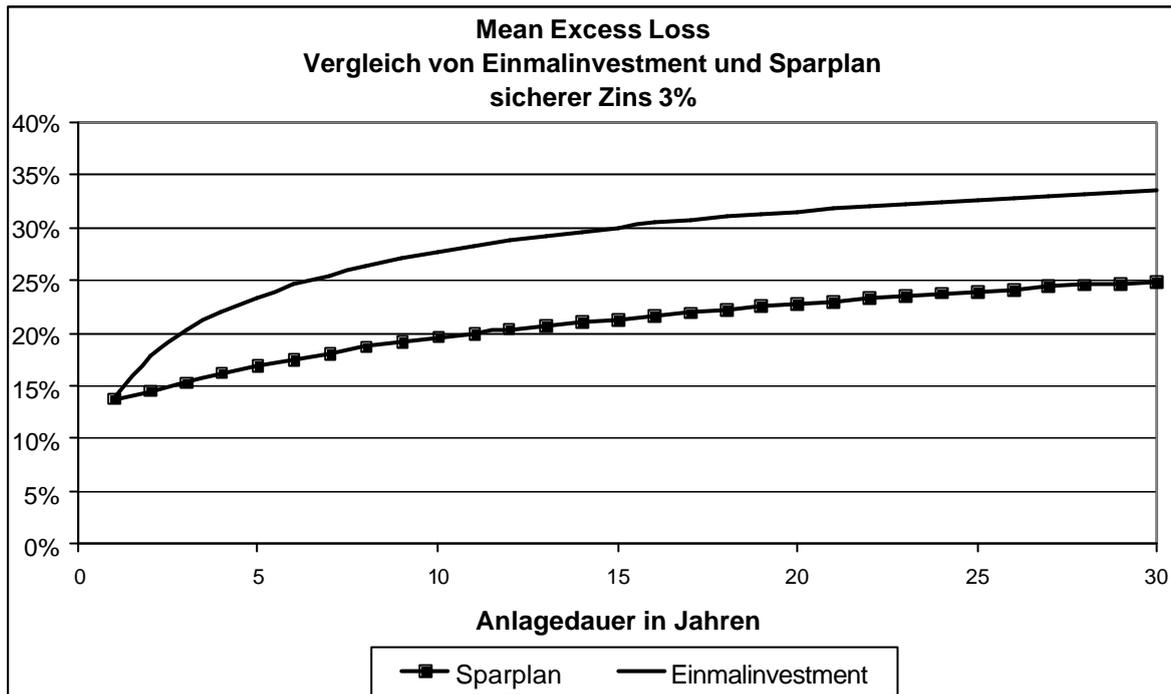


Abbildung 5: Mean Excess Loss: Targetverzinsung 3% p.a.

Abbildung 5 macht deutlich, dass die festgestellte Überlegenheit eines Einmalinvestments hinsichtlich der Shortfallwahrscheinlichkeit ins Gegenteil umschlägt, wenn man sich auf diejenigen Realisationen beschränkt, die zu einer Verfehlung der Targetrendite führen. Die mittlere Unterschreitung der Targetrendite ist dann beim Sparplan deutlich geringer als beim Einmalinvestment. Der Sparplan wirkt als „Risikodämpfer“, er schützt besser im Falle von Worst Case-Ereignissen (hier: Verfehlung der Targetrendite). Je länger der Investmenthorizont, desto besser ist die Risikodämpfung durch den Sparplan relativ zum Einmalinvestment. Dieses strukturelle Ergebnis gilt auch für alternative (Anlage- und) Targetrenditen.

Wenden wir uns abschließend dem Verlauf des Shortfallerwartungswertes der beiden alternativen Strategien bei Vorgabe einer Target-Rendite von 3% zu.

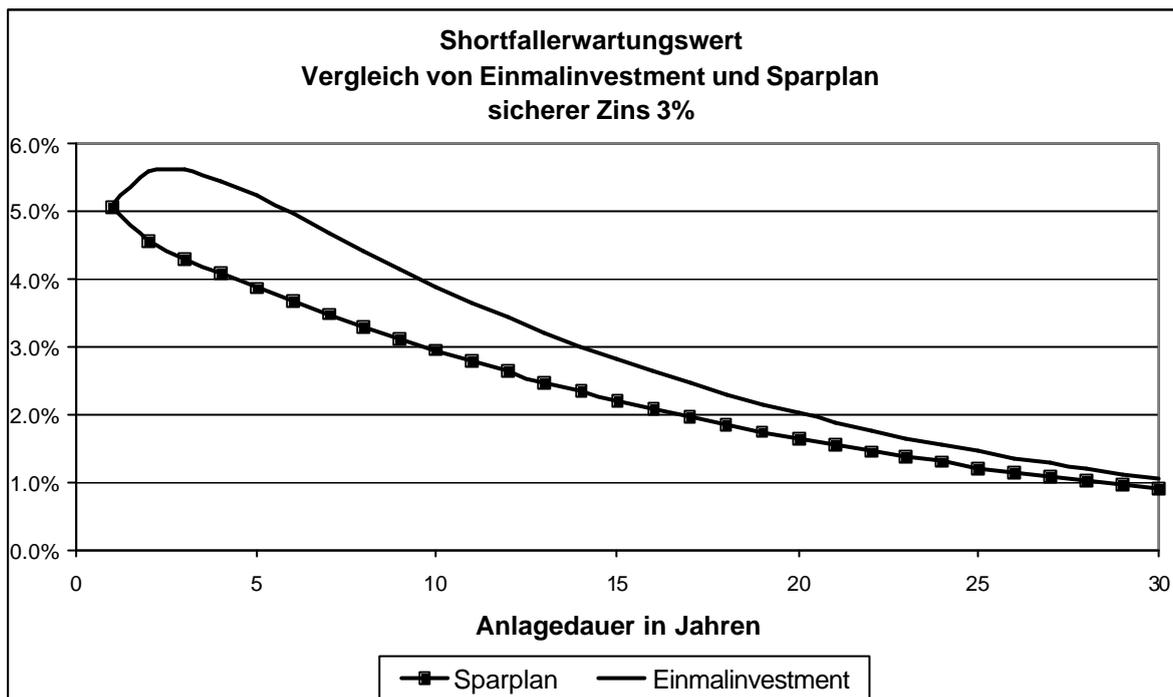


Abbildung 6: Shortfallerwartungswert: Targetverzinsung 3% p.a.

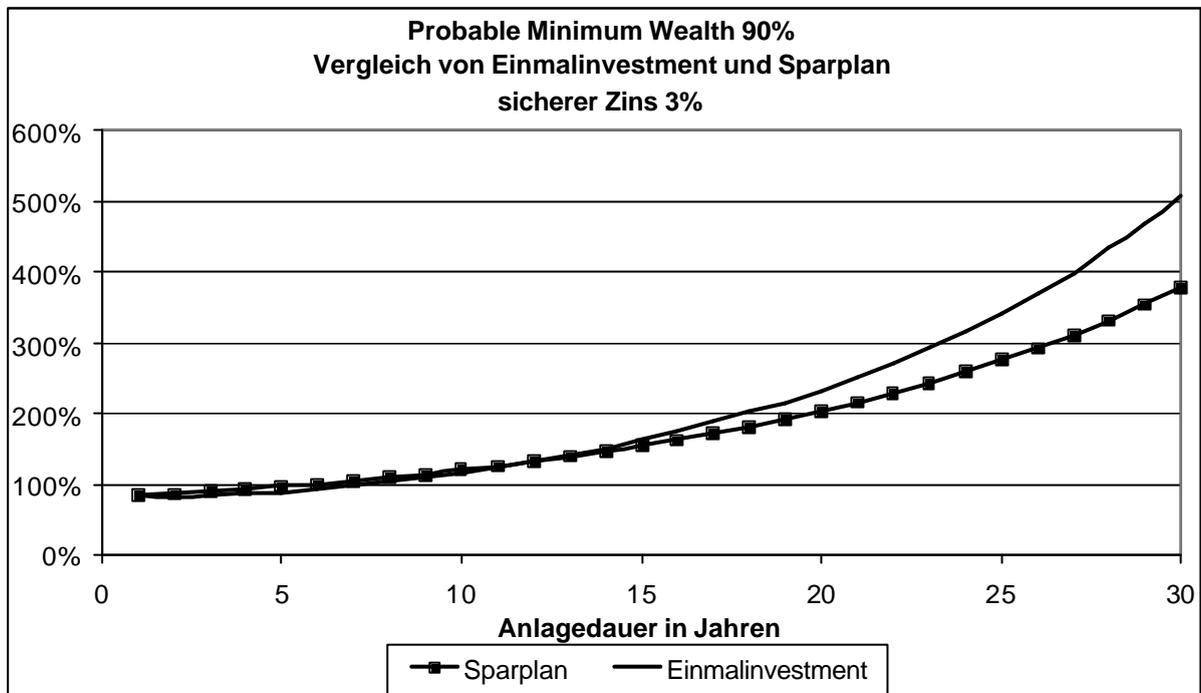
Der Shortfallerwartungswert ist das Produkt aus Shortfallwahrscheinlichkeit und Mean Excess Loss. Im Saldo wirkt die deutlich bessere Risikodämpfung beim Sparplan hinsichtlich des Mean Excess Loss offenbar stärker als die geringfügig niedrigere Shortfallwahrscheinlichkeit beim Einmalinvestment. Dies führt zu einer geringeren mittleren Benchmarkunterschreitung im Falle des Sparplans bei einer Mittlung über alle künftigen Renditerealisationen. Auch für alternative Festlegungen der (Anlage- und) Targetrenditen bestätigt sich dieses strukturelle Ergebnis.

#### C.IV Analyse des Probable Minimum Wealth

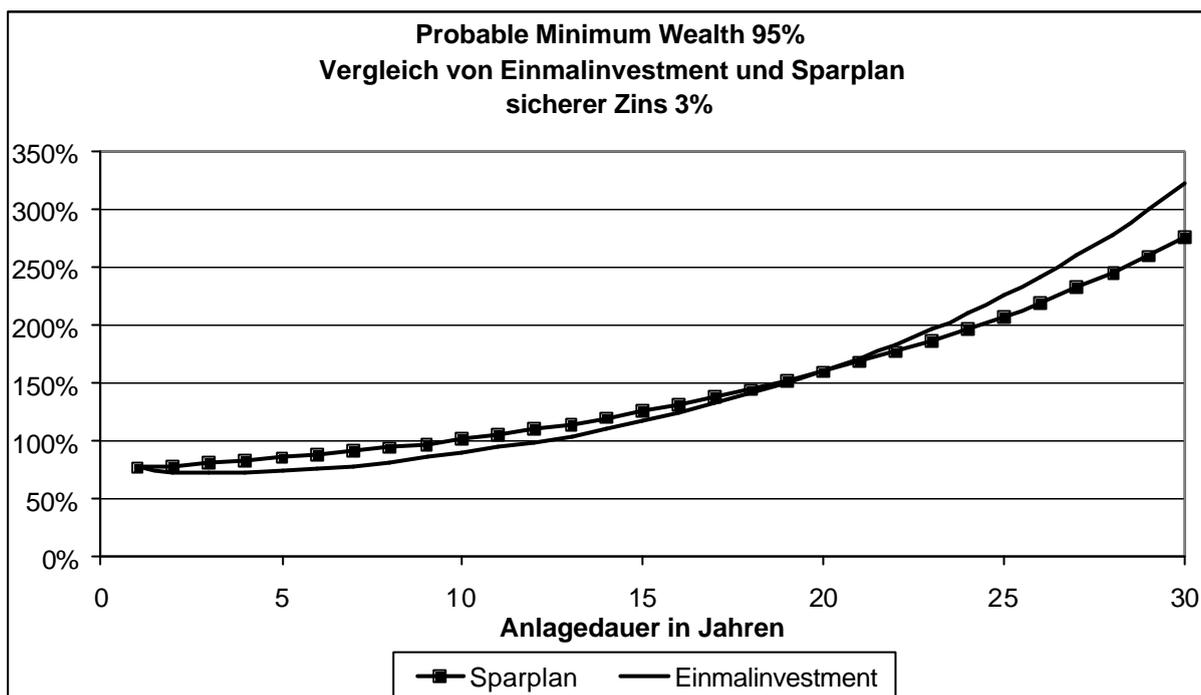
Der Value-at-Risk (VaR) zum Konfidenzniveau  $\alpha$  ist allgemein<sup>9</sup> derjenige Wert, der maximal mit Wahrscheinlichkeit  $\alpha\%$ , d.h. vereinfacht gesagt nur in maximal  $100\alpha$  von 100 Perioden unterschritten wird. Im vorliegenden Kontext kennzeichnet der Value-at-Risk den  $100(1-\alpha)\%$ -Probable Minimum Wealth (PMW), d.h. ein Endvermögensniveau, das in  $100(1-\alpha)\%$  der Fälle mindestens erreicht wird, bzw. in  $100\alpha\%$  der Fälle unterschritten wird.

Wir gehen des Weiteren von der Interpretation<sup>10</sup> aus, dass der Value-at-Risk (und damit der PMW) als ein spezifisches risikoadjustiertes Performancemaß aufgefasst werden kann, insoweit bei seiner Bestimmung ein spezifischer Trade-off zwischen „Risiko“ und „(mittlerer) Rendite“ durchgeführt wird.

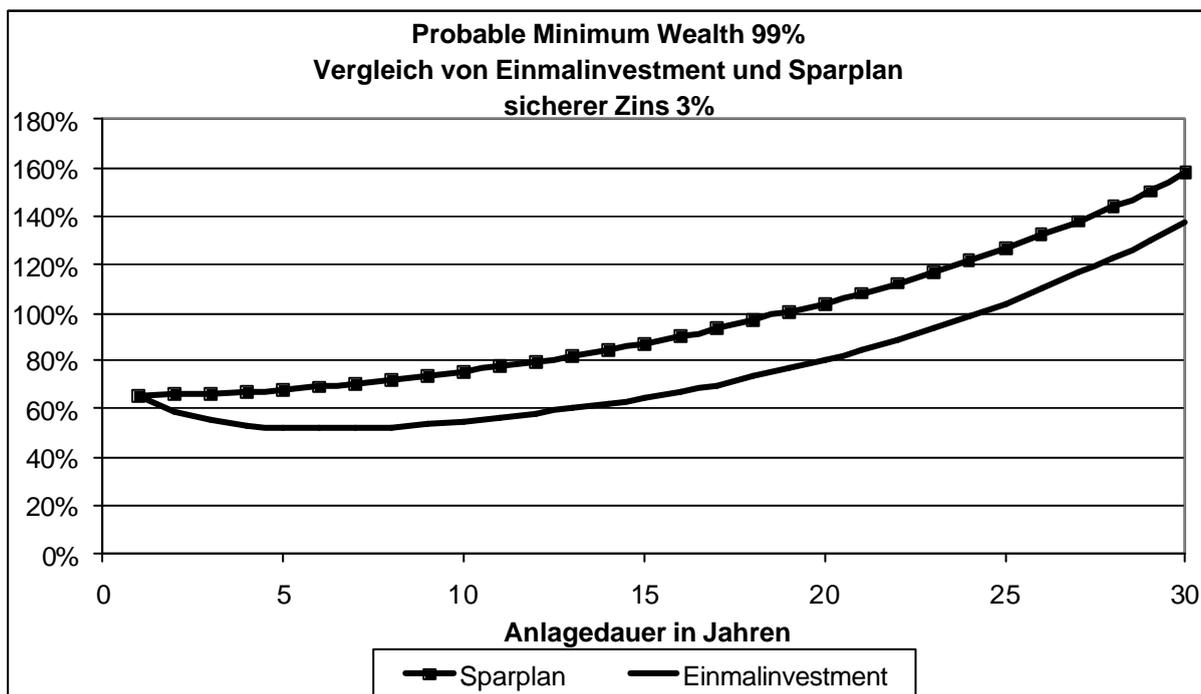
Die folgenden Abbildungen 7-9 enthalten den Verlauf des Probable Minimum Wealth des Endvermögens unter den beiden betrachteten alternativen Investmentstrategien, jeweils für ein Konfidenzniveau von 10%, 5% und 1%.



*Abbildung 7: 90% Probable Minimum Wealth*



*Abbildung 8: 95% Probable Minimum Wealth*



*Abbildung 9: 99% Probable Minimum Wealth*

Es zeigt sich dabei insgesamt, dass der Sparplan generell in einer „Startphase“ einen höheren wahrscheinlichen Endvermögen impliziert und damit in dieser Startphase aus risikoadjustierter Sicht<sup>11</sup> der Einmalanlage überlegen ist. Die Länge dieser Startphase

hängt dabei entscheidend von dem tolerierten Risikoniveau ab. Je risikoaverser der Investor, desto länger hält die risikoadjustierte Überlegenheit des Sparplans an. Bei Wahl eines Konfidenzniveaus in Höhe von 99% ist diese Überlegenheit wie in Abbildung 9 ersichtlich für mehr als dreißig Jahre gegeben. Auch die angenommene Höhe des sicheren (Anlage- und) Targetzinses beeinflusst die Länge dieser Startphase. Alternativrechnungen zeigen, dass diese Startphase umso länger ist, je höher der sichere Zins (und vice versa).

#### **D. Fazit und Ausblick**

Die vorliegenden Ausführungen hatten den Vergleich der Rendite/Risiko-Profile von DAX-Sparplan und DAX-Einmalanlage zum Gegenstand. Unter den Hypothesen eines Random Walk für die künftigen Renditerealisationen eines Aktieninvestments sowie der Möglichkeit einer sicheren Anlage des beim Sparplan jeweils nicht in Aktien gebundenen Kapitals können die folgenden Ergebnisse resümiert werden.

- Das Einmalinvestment ist systematisch überlegen hinsichtlich der mittleren Wertentwicklung. Dieser Vorteil steigt generell mit der Länge des Investmenthorizonts und vermindert sich mit der angenommenen Höhe des sicheren Zinses.
- Der Sparplan ist hingegen systematisch überlegen hinsichtlich der Standardabweichung des Endvermögens.
- Hinsichtlich des Erwartungswert/Varianz-Kriteriums besteht somit keine Dominanz einer der beiden Investmentalternativen über die andere.
- Das Einmalinvestment weist geringfügig geringere Wahrscheinlichkeiten für die Verfehlung der Targetrendite auf.
- Der Sparplan ist ein besserer Dämpfer hinsichtlich der Risikohöhe im Sinne des Risikomaßes Mean Excess Loss. Gemessen wird dabei die mittlere Unterschreitung der Targetrendite in den Szenarien, in denen eine solche Unterschreitung eintritt.
- Auch hinsichtlich des Risikomaßes Shortfallerwartungswert ist der Sparplan überlegen.
- Hinsichtlich des Value-at-Risk bzw. im vorliegendem Kontext des Probable Minimum Wealth (hier interpretiert als risikoadjustiertes Performancemaß) besteht in einer „Startphase“ eine Überlegenheit des Sparplans. Diese Startphase ist umso länger, je höher das gewählte Konfidenzniveau und je höher der sichere Zins ist.

Die Vorteilhaftigkeit der beiden alternativen Investmentstrategien ist somit differenziert zu sehen. Sowohl These (Überlegenheit des Sparplans) als auch Gegenthese (Überlegenheit des Einmalinvestments) sind nicht generell valide.

Zur Bestimmung eines „Saldoeffektes“ über die hinsichtlich des Shortfallrisikos gewonnenen Teileffekte müsste der Investor sowohl Trade-offs zwischen Shortfallwahr-

scheinlichkeit und Mean Excess Loss als Teilrisikomaße, als auch mit dem Erwartungswert als Chancenmaß durchführen, um zu einer persönlich optimalen Entscheidung hinsichtlich Einmalinvestment versus Sparplan zu gelangen.<sup>12</sup> Das Ergebnis hängt entscheidend vom jeweiligen Ausmaß dieser beiden Trade-offs ab. Im vorliegenden Beitrag beschränken wir uns jedoch auf die Offenlegung der Teileffekte, die beim Einmalinvestment bzw. Sparplan wirksam sind.

Auch bei Quantifizierung des „Saldoeffektes“ auf der Basis des Probable Minimum Wealth in seiner Interpretation als risikoadjustiertes Performancemaß ergibt sich keine eindeutige Überlegenheit einer der beiden Strategien. In einer (vom gewählten Konfidenzniveau und der angenommenen Höhe des sicheren Zinses abhängigen) „Startphase“ ist dabei jedoch die Sparplanstrategie überlegen.

## Literaturverzeichnis

- Abeysekera, S./Rosenbloom, E. (2000): A Simulation Model for Deciding Between Lump-Sum and Dollar-Cost Averaging, *Journal of Financial Planning*, June 2000, S. 86 - 96.
- Albrecht, P. (2003): Zur Messung von Finanzrisiken, *Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft*, Nr. 143, Universität Mannheim [Download: [www.bwl.uni-mannheim.de/Albrecht](http://www.bwl.uni-mannheim.de/Albrecht); dort unter: Forschung/Schriftenreihen/Mannheimer Manuskripte].
- Albrecht, P./Dus, I./Maurer, R./Ruckpaul, U. (2003): Langfristiger Sparplan versus Einmalanlage: Value-at-Risk und Shortfallrisiken", *Der Aktuar* 9, 2003, Heft 1, S. 7-12.
- Albrecht, P./Maurer, R. (2002): *Investment- und Risikomanagement*, Stuttgart.
- Albrecht, P./Maurer, R./Ruckpaul, U. (2001): Shortfall-Risks of Stocks in the Long Run, *Financial Markets and Portfolio Management* 15, S. 481 - 499.
- Bacon, P./Williams, R./Ainina, M. (1997): Does Dollar-Cost Averaging Work for Bonds?, *Journal of Financial Planning* 10, S. 78 - 80.
- Constantinides, G. (1979): A Note on the Suboptimality of Dollar-Cost Averaging as an Investment Policy, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 14, S. 443 - 450.
- Ebertz, T./Scherer, B. (1998a): Cost Averaging – Fakt oder Fiktion?, *Die Bank* 2/1998, S. 84 – 87.
- Ebertz, T./Scherer, B. (1998b): Cost Averaging versus Einmalanlage, *Die Bank* 7/1998, S. 448.
- Ebertz, T./Scherer, B. (2003): Cost Averaging: An Expensive Strategy for Maximising Terminal Wealth, *Financial Markets and Portfolio Management* 17, S. 186 – 193.
- Knight, J./Mandell, L. (1993): Nobody Gains from Dollar Cost Averaging, *Analytical, Numerical and Empirical Results*, *Financial Services Review* 2, S. 51 - 61.
- Langer, T./Nauhauser, N. (2002): Zur Bedeutung von Cost-Averaging-Effekten bei Einzahlungsplänen und Portefeuilleumschichtungen, *Working Paper No. 02-50, SFB 504, Universität Mannheim*.
- Löffler, G. (2000): Bestimmung von Anlagerisiken bei Aktiensparplänen, *Die Betriebswirtschaft* 60, S. 350-361.
- Milevsky, M./Posner, S. (2003): A Continuous Time Reexamination of Dollar-Cost Averaging, erscheint in: *International Journal of Theoretical and Applied Finance*.
- Reichling, P./Schulmerich M. (1998): Der Cost-Average-Effekt, *Solutions 04/98, Risk Lab Germany, München*.
- Rozeff, M.S. (1994): Lump-Sum Investing Versus Dollar-Averaging, Those who hesitate, lose, *Journal of Portfolio Management*, Winter 1994, S. 45 - 50.
- Samuelson, P.A. (1994): The Long-Term Case for Equities, *Journal of Portfolio Management*, Fall 1994, S. 15 - 24.
- Stephan, T.G./Telöken, K. (1997): Sparplan versus Einmalanlage: Der Cost-Average-Effekt, *Die Bank* 10/1997, S. 696 - 619.
- Stephan, T.G./Telöken, K. (1998): Cost Averaging versus Einmalanlage, *Die Bank* 5/1998, S. 321.

---

<sup>1</sup> Vgl. etwa Constantinides (1979), Knight/Mandell (1993), Samuelson (1994), Rozeff (1994), Stephan/Telöken (1997, 1998), Ebertz/Scherer (1998a, 1998b, 2003), Reichling/Schulmerich (1998), Abeysekera/Rosenbloom (2000), Langner/Nauhauser (2002) sowie Milevsky/Posner (2003).

- 
- <sup>2</sup> In der Regel sind es zwölf Monate; eine Ausnahme bildet etwa der Beitrag von Reichling/Schulmerich (1998).
- <sup>3</sup> Für eine detaillierte Rendite/Risiko-Analyse von Aktiensparplänen vgl. etwa Löffler (2000). Hier ist die betrachtete Alternative jedoch ein Rentensparplan und keine Einmalanlage in Aktien.
- <sup>4</sup> Erste Ergebnisse zum Value-at-Risk für eine Cost-Average Strategie enthalten auch die Beiträge von Reichling/Schulmerich (1998) und Albrecht/Dus/Maurer/Ruckpaul (2003).
- <sup>5</sup> Alternativ könnte der jeweils nicht riskante investierte Teil sicher angelegt werden und der erzielte Zinsgewinn zusätzlich zu den Raten investiert werden, vgl. hierzu etwa Bacon/Williams/Ainina (1997), Abeysekera/Rosenbloom (2000) oder Milevsky/Posner (2003).
- <sup>6</sup> Vgl. etwa Albrecht/Maurer (2002), S. 140 ff.
- <sup>7</sup> Vgl. etwa Reichling/Schulmerich (1998).
- <sup>8</sup> Vgl. allgemein Albrecht/Maurer (2002), S. 108 ff.
- <sup>9</sup> Vgl. allgemein Albrecht/Maurer (2002), S. 115 ff. sowie S. 673 ff.
- <sup>10</sup> Vgl. zu dieser Interpretation Albrecht (2003), S.9 und S.30. Im Falle des Vorliegens einer Normalverteilung wird dabei der im Haupttext angesprochene Trade-off zwischen Risiko und mittlerer Rendite besonders deutlich, da hier der VaR explizit als „Erwartungswert minus Vielfaches der Standardabweichung“ bestimmt werden kann, vgl. etwa Albrecht/Maurer (2002), S. 674ff. Im allgemeinen Fall erfolgt der entsprechende Trade-off implizit. Bei vielen Anwendungen in der Literatur wird dagegen der VaR als reines Risikomaß verstanden. Dies liegt darin begründet, dass der Erwartungswert hierbei approximativ gleich null gesetzt wird (z.B. in Fällen, in denen die mittlere Rendite eines Finanzmarktittels über einen sehr kurzen Zeithorizont betrachtet wird).
- <sup>11</sup> Zumindest bei Zugrundelegung des Value-at-Risk als riskoadjustiertes Performancemaß.
- <sup>12</sup> Vgl. Albrecht/Maurer/Ruckpaul (2001), S.488, Fußnote 17 zu einer entsprechenden Formalisierung.