

**Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie,
Portfolio Management und Versicherungswirtschaft**

Nr. 146

**Intertemporale Diversifikation
im VAR-Ansatz**

**Erklärung "paradoxe Phänomene"
bei langen Prognosezeiträumen**

von

ELKE EBERTS

Mannheim 03/2003

Intertemporale Diversifikation im VAR-Ansatz

Erklärung "paradoxe Phänomene" bei langen Prognosezeiträumen

Elke Eberts

Abstract

Die vorliegende Studie intendiert, die Einflüsse intertemporaler Renditezusammenhänge und fester Startwerte in Vektorautoregressions-(VAR-)Modellen für stetige Renditen anhand des Vergleichs mit einem statischen Random-Walk-Modell zu analysieren. Zunächst werden die Zusammenhänge zwischen der Prognosegenauigkeit und der Breite von Prognoseintervallen visualisiert. In einem weiteren Schritt wird die Bedeutung des Anlagehorizonts für Portfolioentscheidungen vor dem Hintergrund einer VAR-Modellierung genauer herausgearbeitet.

Stichworte

Intertemporale Diversifikation, VAR- und Random-Walk-Modelle,
Stetige und diskrete Renditen, Effiziente Portfolios

JEL-Klassifikation

C 32, C 52, G 11-12

Intertemporale Diversifikation im VAR-Ansatz

Erklärung "paradoxe Phänomene" bei langen Prognosezeiträumen*

1 Einleitung

Um die Rentabilität von Finanzanlagen über die Zeit zu analysieren werden im ökonometrischen Bereich üblicherweise stetige Renditen (Log-Renditen) herangezogen. Diese werden als absolute Veränderungen logarithmierter Indizes bzw. durch Logarithmierung des Wachstumsfaktors der gewöhnlichen diskreten Renditen berechnet und repräsentieren damit die zeitstetige Verzinsung des eingesetzten Kapitals über den betrachteten Zeitraum. Hintergrund ihrer Verwendung im Zeitreihenkontext ist, dass sich die stetige Durchschnittsverzinsung von Kapitalanlagen im Zeitablauf unter Berücksichtigung von Zinseszinsseffekten durch einen einfachen arithmetischen Mittelwert bestimmen lässt. Gleichzeitig besitzen Vektorautoregressions-(VAR-)Modelle heute hohe Popularität zur Beschreibung intertemporaler empirischer Zusammenhänge von Zeitreihen. Mangels eines umfassenden ökonomischen Erklärungskonzeptes zur Entwicklung von Finanzmarktreihen sind diese VAR-Modelle deshalb für den finanzmarktökonomischen Bereich besonders prädestiniert. Tatsächlich jedoch ist der seit Jahrzehnten gängige Ansatz in der Finanzmarktökonomie das einfache Random-Walk-(RW-)Modell, das auf verzögerte Endogene vollständig verzichtet und damit anders als das VAR-Modell die in den historischen Zeitreihen enthaltenen Informationen über multiple intertemporale Korrelationen ignoriert. So ergibt sich zum einen die Frage, wie gut das sparsamer parametrisierte Random-Walk-Modell einen datengenerierenden VAR-Prozess approximieren kann. Zum anderen ist der Zusammenhang zwischen einer sparsameren Parametrisierung, der Prognosegenauigkeit und insbesondere der Breite von Prognoseintervallen für die künftige Zeitreihenentwicklung zu erklären.

* Ich danke Herrn Prof. Dr. Winckler ganz herzlich für die intensive und anregende Begutachtung meiner Dissertation "Strategische stochastische Investmentmodelle für den deutschen Kapitalmarkt", Universität Mannheim 2002. Der vorliegende Beitrag setzt sich mit der im Rahmen der Begutachtung aufgeworfenen Aussage auseinander, dass die engeren Prognoseintervalle beim Random-Walk- im Vergleich zum empirischen Zeitreihenansatz bei langen Prognosehorizonten erklärungsbedürftig seien.

Im weiteren Verlauf dieses Beitrages wird exemplarisch für einen – unter Berücksichtigung von Stationaritätsrestriktionen – beliebigen K-dimensionalen VAR-Prozess der Ordnung G ein VAR(1)-Ansatz für stetige Renditen unterschiedlicher Anlagealternativen betrachtet. Dabei dient die Beschränkung auf die Ordnung Eins lediglich der Vereinfachung der Notation. Die Diversifikationseffekte intertemporaler Renditezusammenhänge im VAR-Modell werden am Beispiel eines konkreten datengenerierenden Prozesses (DGP) mit bekannten Parametermatrizen verdeutlicht. Um die Zusammenhänge zwischen der Prognosegenauigkeit und der Breite von Prognoseintervallen zu durchleuchten, wird ein stationäres VAR- einem korrespondierenden RW-Modell einerseits und einem entsprechenden stabilen VAR-Modell mit festen Startwerten andererseits gegenüber gestellt. Darauf aufbauend wird in einem weiteren Abschnitt der Gesamteffekt über die Zeit kumulierter Portfolio-Renditen und damit die Abhängigkeit effizienter Anlageentscheidungen vom Investmenthorizont in den drei Modellen genau unter die Lupe genommen.

2 Prognosegenauigkeit bei zunehmendem Prognosehorizont

Es wird von folgender VAR(1)-Spezifikation ausgegangen:

$$\nabla \ln Y_t = \gamma + \phi_1 \nabla \ln Y_{t-1} + U_t \quad (1)$$

Alle Vektoren sind K-dimensional. $\nabla \ln Y_t$ bezeichnet einen Vektor stetiger Renditen; γ stellt einen Parametervektor und U_t einen Vektor stochastischer Störterme zum Zeitpunkt t dar. Die Zufallsvektoren U_t sind von sämtlichen verzögerten $\nabla \ln Y_{t-i}$ ($i = 1, 2, \dots, t$) unabhängig. Darüber hinaus seien die U_t im Zeitablauf unabhängig identisch normalverteilt mit Erwartungsvektor Null und einer positiv-definiten Varianz-Kovarianz-Matrix Σ , $U_t \sim \text{i.i.d. } N(0, \Sigma)$. Kontemporale Verknüpfungen der verschiedenen in $\nabla \ln Y_t$ zusammengefassten Renditevariablen werden damit durch die Komponenten von Σ über kontemporale Kovarianzen beschrieben, die multiple intertemporale Korrelationsstruktur wird in der VAR-Koeffizientenmatrix ϕ_1 aufgefangen. In stationären Zeitreihenmodellen wird üblicherweise anstelle von intertemporalen Korrelationen von der sogenannten Mean-Reversion-Eigenschaft der Prozesse gesprochen. Die Annahme der Stationarität beinhaltet in der strengen Form, dass die multivariate Verteilung des Vektors $\nabla \ln Y_t$ zeitinvariant ist. In ihrer schwächeren Form begnügt sie sich dagegen mit

zeitinvariablen Erwartungsvektoren $E\nabla \ln Y_t$ und Varianz-Kovarianz-Matrizen $\text{var}\nabla \ln Y_t$. Voraussetzung für die schwache Stationarität eines VAR-Prozesses ist, dass alle Eigenwerte des Prozesses betragsmäßig kleiner als Eins sind. Im VAR(1)-Ansatz ist diese Voraussetzung erfüllt, wenn alle Hauptdiagonalelemente von φ_1 absolut kleiner als Eins sind. Sobald jedoch bei einem VAR-Prozess von festen Startwerten ausgegangen wird, geht die Stationarität verloren. Da deterministische Startwerte selbst keine Varianz haben, wird $\text{var}\nabla \ln Y_t$ zeitabhängig. Bei Erfüllung der Eigenwertvoraussetzung sind diese VAR-Prozesse dann nur noch stabil.

Modell 1: Stationärer VAR

Zur Veranschaulichung wird im Weiteren exemplarisch von einem dreidimensionalen und zunächst stationären VAR-Prozess $\nabla \ln Y_t = \gamma + \varphi_1 \nabla \ln Y_{t-1} + U_t = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i (\gamma + U_{t-i})$ mit folgenden Parametermatrizen ausgegangen

$$\begin{aligned} \gamma &= \begin{pmatrix} 0,0150 \\ 0,0001 \\ 0,0005 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} 0,0250 & -0,3000 & 0,0400 \\ -0,0005 & 0,6000 & 0,5000 \\ 0,0015 & -0,0020 & 0,7500 \end{pmatrix}, \\ \Sigma &= \begin{pmatrix} 0,003600 & 0,000150 & 0,000006 \\ 0,000150 & 0,00000725 & 0,00000045 \\ 0,000006 & 0,00000045 & 0,00000405 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

Mit den oben formulierten Annahmen über die Vektoren der stochastischen Störterme, U , ergibt sich daraus für die einperiodige stetige Rendite

$$\begin{aligned} E \nabla \ln Y_t &= \gamma + \varphi_1 E \nabla \ln Y_t = (I - \varphi_1)^{-1} \gamma = \begin{pmatrix} 0,014604 \\ 0,002813 \\ 0,002065 \end{pmatrix} \\ \text{var}\nabla \ln Y_t &= E (\nabla \ln Y_t - E\nabla \ln Y_t) (\nabla \ln Y_t - E\nabla \ln Y_t)' = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i \Sigma \varphi_1^{i'} \\ &= \begin{pmatrix} 0,003602 & 0,000148 & 0,0000048 \\ 0,000148 & 0,0000216 & 0,0000073 \\ 0,0000048 & 0,0000073 & 0,00000925 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

Um den Effekt der Prognose über zunehmende Anlagehorizonte zu evaluieren, wird die Durchschnittsrendite über h Perioden ($h = 1, 2, \dots$) betrachtet. Da hier sukzessive einperiodige stetige Renditen zugrunde gelegt werden, beinhaltet das Konzept der einfachen arithmetischen Durchschnittsbildung die Berücksichtigung von Zinseszinsseffekten. Hingegen wäre für die intertemporale Durchschnittsbildung bei diskreten Renditen das geometrische Mittel heranzuziehen. Für die h -periodige stetige Durchschnittsrendite ergibt sich

$$\frac{1}{h} \nabla_h \ln Y_t = \frac{1}{h} (\ln Y_t - \ln Y_{t-h}) = \frac{1}{h} \sum_{\tau=0}^{h-1} \nabla \ln Y_{t-\tau} = \frac{1}{h} \sum_{\tau=0}^{h-1} \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i (\gamma + U_{t-\tau-i}) \quad (4)$$

Bei schwacher Stationarität resultiert als Erwartungsvektor der h -periodigen Durchschnittsrenditen gerade der einperiodige Erwartungsvektor. Aufgrund der durch den VAR(1)-Prozess generierten multiplen intertemporalen Kovarianzstrukturen der $\nabla \ln Y_t$ taucht in den Varianz-Kovarianz-Matrizen der Durchschnittsrendite für $h > 1$ dagegen eine Doppelsumme auf

$$\begin{aligned} E \frac{1}{h} \nabla_h \ln Y_t &= E \nabla \ln Y_t = (I - \varphi_1)^{-1} \gamma \\ \text{var} \frac{1}{h} \nabla_h \ln Y_t &= \frac{1}{h^2} \sum_{\tau=0}^{h-1} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i \right) \Sigma \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i \right)' = \frac{1}{h} (I - \varphi_1)^{-1} \Sigma (I - \varphi_1)^{-1} \\ &= \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0,003537 & 0,000388 & 0,0000193 \\ 0,000388 & 0,000159 & 0,0000857 \\ 0,0000193 & 0,0000857 & 0,0000636 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

Beim vorliegenden DGP sind die Elemente des Matrizenproduktes $\left(\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i \right) \Sigma \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i \right)'$ mit Ausnahme der in der oberen linken Ecke liegenden Komponente größer als die entsprechenden Komponenten der in (3) angegebenen Matrix $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i \Sigma \varphi_1^{i'}$. Die Begründung für die Ausnahme liegt in der spezifischen Zusammensetzung der Matrix φ_1 . So ist die Varianz der ersten Komponente von $\frac{1}{h} \nabla_h \ln Y_t$ durch vergleichsweise sehr niedrige Werte in der ersten Zeile von φ_1 gekennzeichnet, wobei insbesondere der stark negative Wert von $-0,3$ ins Gewicht fällt.

Da bezüglich der U_t angenommen wird, sie seien unabhängig identisch normalverteilt – $U_t \sim \text{i.i.d. } N(0, \Sigma)$ – ist auch $\frac{1}{h} \nabla_h \ln Y_t$ als lineare Funktion unabhängig normalverteilter stochastischer Störterme selbst normalverteilt,

$$\begin{aligned} \nabla \ln Y_t &\sim N\left((I - \varphi_1)^{-1} \gamma, \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i \Sigma \varphi_1^{i'}\right) \\ \frac{1}{h} \nabla_h \ln Y_t &\sim N\left((I - \varphi_1)^{-1} \gamma, \frac{1}{h} (I - \varphi_1)^{-1} \Sigma (I - \varphi_1')^{-1}\right) \quad \text{für } h > 1 \end{aligned} \quad (6)$$

Auf Basis des stationären VAR(1)-Modells ergeben sich dementsprechend als unkonditionierte Prognoseintervalle zum Sicherheitsgrad $(1 - \alpha)$ für Linearkombinationen der h -periodigen Durchschnittsrenditen $q' \nabla_h \ln Y_t / h$ (mit $0 < q, q' \mathbf{1} = 1$)

$$\begin{aligned} &\left[q'(I - \varphi_1)^{-1} \gamma \pm z_{\alpha/2} \sqrt{q' \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i \Sigma \varphi_1^{i'} q} \right] \quad \text{für } h = 1 \\ &\left[q'(I - \varphi_1)^{-1} \gamma \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{q'(I - \varphi_1)^{-1} \Sigma (I - \varphi_1')^{-1} q}{h}} \right] \quad \text{für } h > 1 \end{aligned} \quad (7)$$

Modell 2: Random Walk

Im nächsten Schritt sind die unkonditionierten Intervallprognosen aus (7) mit denen eines einfachen Random-Walk-Ansatzes zu vergleichen. Der VAR(1)-Prozess wird zu diesem Zweck durch einen RW-Prozess approximiert, der auf den gleichen Verteilungsannahmen des einperiodigen Renditevektors beruht. Dabei handelt es sich um das Modell

$$\nabla \ln Y_t = \tilde{\gamma} + \tilde{U}_t \sim \text{i.i.d. } N(\tilde{\gamma}, \tilde{\Sigma}) \text{ mit}$$

$$\tilde{\gamma} = E \nabla \ln Y_t := (I - \varphi_1)^{-1} \gamma \quad (8)$$

$$\tilde{\Sigma} = \text{var} \nabla \ln Y_t := \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i \Sigma \varphi_1^{i'}$$

Folglich unterscheiden sich die Prognoseintervalle für beliebige Linearkombinationen einperiodiger Renditen $q' \nabla \ln Y_t$ nicht von jenen des stationären VAR-Modells in (7). Da die einperiodigen Renditen im RW-Modell unabhängig identisch verteilt sind, besitzt die h -periodige Durchschnittsrendite

$$\frac{1}{h} \nabla_h \ln Y_t = \frac{1}{h} \sum_{\tau=0}^{h-1} \nabla \ln Y_{t-\tau} = \tilde{\gamma} + \frac{1}{h} \sum_{\tau=0}^{h-1} \tilde{U}_{t-\tau} \quad (9)$$

die üblichen Eigenschaften des arithmetischen Mittels einer Stichprobe aus einer Verteilung. So gilt für beliebige $h \geq 1$

$$\begin{aligned} E \frac{1}{h} \nabla_h \ln Y_t &= E \nabla \ln Y_t = \tilde{\gamma} = (I - \phi_1)^{-1} \gamma \\ \text{var} \frac{1}{h} \nabla_h \ln Y_t &= \frac{1}{h} \text{var} \nabla \ln Y_t = \frac{1}{h} \tilde{\Sigma} = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \Sigma \phi_1^{i'} \end{aligned} \quad (10)$$

Bei normalverteilten $\nabla \ln Y_t$ ist auch $\frac{1}{h} \nabla_h \ln Y_t$ als lineare Funktion unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen selbst normalverteilt, $\frac{1}{h} \nabla_h \ln Y_t \sim N(\tilde{\gamma}, \frac{1}{h} \tilde{\Sigma})$, so dass sich im Random-Walk-Modell als Prognoseintervall für beliebige Linearkombinationen der h -periodigen Durchschnittsrenditen $q' \nabla_h \ln Y_t / h$ (mit $\underline{0} < q, q' \underline{1} = 1$) zum Sicherheitsgrad $(1-\alpha)$

$$\left[q'(I - \phi_1)^{-1} \gamma \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{q' \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \Sigma \phi_1^{i'} q}{h}} \right] \quad (11)$$

ergibt. Im Vergleich zu (7) resultieren aus (11) für $h > 1$ Prognoseintervalle differierender Breite. Dieser Effekt beruht darauf, dass das RW- anders als das VAR-Modell intertemporale Renditeinterdependenzen nicht explizit über die Prozessgleichung beschreibt, sondern implizit von intertemporaler Unabhängigkeit der Ein-Perioden-Renditen ausgeht. Ob die Prognoseintervalle eines RW-Modells bei gleicher Verteilungsannahme der einperiodischen Renditen für die mehrperiodigen Durchschnitte nun aber breiter oder schmaler als die des vektorautoregressiven Ansatzes sind, hängt von der durch das VAR-Modell in der Koeffizientenmatrix ϕ_1 abgebildeten tatsächlichen multiple intertemporalen Korrelationsstruktur ab. Dabei handelt

es sich im Prinzip um eine Art des in der statischen Portfoliotheorie beschriebenen Diversifikationseffektes in Bezug auf Renditemittel im Zeitablauf: Je geringer die Autokorrelationen eines univariaten Prozesses sind, d.h. je weiter sie von +1 entfernt und je näher sie an -1 liegen, desto stärker sinkt das Prognoserisiko mit zunehmender Prognoseschrittweite. Von der Korrelationsstruktur des DGP hängt es entsprechend ab, ob das Random-Walk-Modell mit der vereinfachenden Annahme der intertemporalen Unkorreliertheit die exakten Diversifikationseffekte über- oder unterschätzt. Dementsprechend dürfen engere Prognoseintervalle keinesfalls mit einer höheren Prognosegenauigkeit verwechselt werden. Ein Prognoseintervall ist vielmehr dann als genau anzusehen, wenn es die tatsächliche Risikostruktur zutreffend abbilden vermag – wobei gegebenenfalls eine genauere Beschreibung intertemporaler Renditezusammenhänge zu breiteren Intervallen führt.

Werden Prognoseintervalle nach (7) bzw. (11) auf Basis des vorliegenden DGP für jede der drei Komponenten von $\nabla_h \ln Y_t$ verglichen, ergibt sich aus den aus (5) bzw. (3) ableitbaren Varianzen, dass die Prognoseunsicherheit der zweiten und dritten Komponente höher ist als es die statische Random-Walk-Prognose suggeriert. Demgegenüber liegt für die erste Komponente des Renditevektors negative Korrelation über die Zeit vor, so dass die Varianz der Durchschnittsrendite mit zunehmendem Prognosehorizont im Vergleich zum RW-Modell überproportional sinkt. Auf Basis der impliziten Unterstellung solcher negativer Autokorrelationseigenschaften sagt die Investmentpraxis Aktienanlagen nach, sie seien langfristig vergleichsweise sicherer als kurzfristig und relativ zu anderen Anlageformen bei langen Anlagehorizonten besonders attraktiv.

Modell 3: Stabiler VAR mit festen Startwerten

Im Allgemeinen basieren Renditeprognosen im VAR-Ansatz nicht auf dem unconditionierten Modell 1, sondern beruhen auf bedingten Verteilungen. So sind die Auswirkungen auf die Prognose zu analysieren, wenn statt eines stationären ein entsprechendes auf feste Startwerte

konditioniertes VAR(1)-Modell $\nabla \ln Y_t = \gamma + \phi_1 \nabla \ln Y_{t-1} + U_t = \phi_1^t \nabla \ln Y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \phi_1^i (\gamma + U_{t-i})$

betrachtet wird. In diesem Fall stellt $\text{var} \nabla \ln Y_0$ als Varianz-Kovarianz-Matrix eines determi-

nistischen Vektors die Nullmatrix dar. Um die Untersuchung der Intervallprognosen ausschließlich auf die Varianzunterschiede zu konzentrieren, wird der Vektor der Startwerte auf $\nabla \ln Y_0 := (I - \phi_1)^{-1} \gamma$ normiert. So ergibt sich dann für die auf $\nabla \ln Y_0 = (I - \phi_1)^{-1} \gamma$ bedingten Erwartungsvektoren und Varianz-Kovarianz-Matrizen der einperiodigen stetigen Renditen für $t > 0$

$$\begin{aligned} E(\nabla \ln Y_t | \nabla \ln Y_0 = (I - \phi_1)^{-1} \gamma) &= \phi_1^t (I - \phi_1)^{-1} \gamma + \sum_{i=0}^{t-1} \phi_1^i (\gamma + E U_{t-i}) \\ &= \phi_1^t (I - \phi_1)^{-1} \gamma + (I - \phi_1^t) (I - \phi_1)^{-1} \gamma = (I - \phi_1)^{-1} \gamma \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{var}(\nabla \ln Y_t | \nabla \ln Y_0 = (I - \phi_1)^{-1} \gamma) = E\left(\sum_{i=0}^{t-1} \phi_1^i U_{t-i} \right) \left(\sum_{i=0}^{t-1} \phi_1^i U_{t-i} \right)' = \sum_{i=0}^{t-1} \phi_1^i \Sigma \phi_1^i$$

Mit der Normierung der Startwerte auf die unbedingten Erwartungswerte stimmen die bedingten Erwartungen einperiodiger Renditevektoren gerade mit den unbedingten Erwartungsvektoren aus (3) überein. Die konditionierten Varianz-Kovarianz-Matrizen differieren hingegen von den korrespondierenden unbedingten Momentenmatrizen, wobei die Matrizendifferenzen $[\text{var} \nabla \ln Y_t - \text{var}(\nabla \ln Y_t | \nabla \ln Y_0 = (I - \phi_1)^{-1} \gamma)] = \sum_{i=t}^{\infty} \phi_1^i \Sigma \phi_1^i$ für alle $t \geq 0$ positiv definit sind.

Gleichzeitig konvergiert $\text{var}(\nabla \ln Y_t | \nabla \ln Y_0 = (I - \phi_1)^{-1} \gamma)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen $\text{var} \nabla \ln Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \Sigma \phi_1^i$. Die Varianzen von Linearkombinationen $q' \nabla \ln Y_t | \nabla \ln Y_0$ sind somit umso größer,

je höher t ist, d.h. je weiter mit den aktuellen Informationen in die Zukunft prognostiziert wird; sie sind aber stets kleiner als die unbedingten Varianzen von $q' \nabla \ln Y_t$. Speziell für $\nabla \ln Y_1$ entspricht die bedingte Varianz-Kovarianz-Matrix gerade noch Σ , also der Varianz-Kovarianz-Matrix des stochastischen Störterms U_1 . Insofern bieten bedingte Prognosen dahingehend einen Präzisionsgewinn, dass sie auf die aktuelle Information zum Prognosezeitpunkt abgestellt sind. Dieser Präzisionsgewinn äußert sich in der Tat in engeren einperiodigen Prognoseintervallen für alle $t > 0$.

Die h -periodige stetige Durchschnittsrendite ergibt sich auf Basis der Startinformation $\nabla \ln Y_0$

$$\frac{1}{h} \nabla_h \ln Y_h = \frac{1}{h} \sum_{\tau=0}^{h-1} \nabla \ln Y_{h-\tau} = \frac{1}{h} \sum_{\tau=0}^{h-1} \left(\varphi_1^{h-\tau} \nabla \ln Y_0 + \sum_{i=0}^{h-\tau-1} \varphi_1^i (\gamma + U_{h-\tau-i}) \right) \quad (13)$$

Für die auf $\nabla \ln Y_0 = (I - \varphi_1)^{-1} \gamma$ konditionierten Erwartungsvektoren und Varianz-Kovarianz-Matrizen dieser Durchschnittsrendite folgt für $h \geq 1$

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{h} \nabla_h \ln Y_h \mid \nabla \ln Y_0 = (I - \varphi_1)^{-1} \gamma\right) &= (I - \varphi_1)^{-1} \gamma \\ \text{var}\left(\frac{1}{h} \nabla_h \ln Y_h \mid \nabla \ln Y_0 = (I - \varphi_1)^{-1} \gamma\right) &= \frac{1}{h^2} \sum_{\tau=0}^{h-1} \left(\sum_{i=0}^{h-\tau-1} \varphi_1^i \right) \Sigma \left(\sum_{i=0}^{h-\tau-1} \varphi_1^i \right)' \quad (14) \\ &= \frac{1}{h^2} \sum_{\tau=0}^{h-1} \left(I - \varphi_1^{h-\tau} \right) \left(I - \varphi_1 \right)^{-1} \Sigma \left(I - \varphi_1 \right)^{-1} \left(I - \varphi_1^{h-\tau} \right)' \\ &= \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^h \left(I - \varphi_1^i \right) \left(I - \varphi_1 \right)^{-1} \Sigma \left(I - \varphi_1 \right)^{-1} \left(I - \varphi_1^i \right)' \end{aligned}$$

Für $E\left(\frac{1}{h} \nabla_h \ln Y_h \mid \nabla \ln Y_0 = (I - \varphi_1)^{-1} \gamma\right)$ resultiert erneut der dementsprechend konditionierte Erwartungsvektor der einperiodigen Rendite. Aufgrund der gewählten Normierung des Vektors der Startwerte ergibt sich also auch kein Unterschied zum unbedingten Erwartungsvektor $E \nabla_h \ln Y_h / h$ des stationären VAR-Prozesses. Die konditionierten Varianz-Kovarianz-Matrizen differieren allerdings aufgrund der im Prognosezeitpunkt zusätzlich genutzten Informationen – wie schon für $h = 1$ – von den korrespondierenden unbedingten Momentenmatrizen, wobei für $t \rightarrow \infty$ Konvergenz von $\frac{1}{h} \text{var}(\nabla_h \ln Y_h \mid \nabla \ln Y_0 = (I - \varphi_1)^{-1} \gamma)$ gegen $\frac{1}{h} \text{var}(\nabla_h \ln Y_h)$ vorliegt. Aufgrund der durch den VAR(1)-Prozess generierten intertemporalen Interdependenzen der $\nabla \ln Y_t$ taucht in den Varianz-Kovarianz-Matrizen der Durchschnittsrendite für $h > 1$ nicht $\sum_{i=0}^{h-\tau-1} \varphi_1^i \Sigma \varphi_1^i$, sondern in Analogie zu (5) der Term $\left(\sum_{i=0}^{h-\tau-1} \varphi_1^i \right) \Sigma \left(\sum_{i=0}^{h-\tau-1} \varphi_1^i \right)'$ auf. Dieser ist wiederum für die Erfassung der exakten intertemporalen Diversifikationseffekte verantwortlich.

Mit dem deterministischen Startvektor $\nabla \ln Y_0$ und der Annahme $U_t \sim \text{i.i.d. } N(0, \Sigma)$ ist auch $\frac{1}{h} \nabla_h \ln Y_h | \nabla \ln Y_0 = (I - \phi_1)^{-1} \gamma$ als lineare Funktion unabhängig normalverteilter stochastischer Störterme selbst normalverteilt, nämlich

$$\frac{1}{h} \nabla_h \ln Y_t | \nabla \ln Y_0 = (I - \phi_1)^{-1} \gamma \sim N\left((I - \phi_1)^{-1} \gamma, \frac{1}{h^2} \sum_{\tau=0}^{h-1} \left(\sum_{i=0}^{h-\tau-1} \phi_1^i \right) \Sigma \left(\sum_{i=0}^{h-\tau-1} \phi_1^i \right)'\right) \quad (15)$$

Speziell gilt nun für die bedingte Ein-Schritt-Prognose $\nabla \ln Y_1 | \nabla \ln Y_0 = (I - \phi_1)^{-1} \gamma \sim N((I - \phi_1)^{-1} \gamma, \Sigma)$. Auf Basis des stabilen VAR(1)-Modells ergeben sich dementsprechend als auf $\nabla \ln Y_0 = (I - \phi_1)^{-1} \gamma$ konditionierte Prognoseintervalle zum Sicherheitsgrad $(1 - \alpha)$ für Linearkombinationen der h-periodigen Durchschnittsrenditen $q' \nabla_h \ln Y_t / h$ (mit $\underline{0} < q, q' \underline{1} = 1$) für $h \geq 1$

$$\left[q'(I - \phi_1)^{-1} \gamma \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{q' \sum_{\tau=0}^{h-1} \left(\sum_{i=0}^{h-\tau-1} \phi_1^i \right) \Sigma \left(\sum_{i=0}^{h-\tau-1} \phi_1^i \right) q}{h^2}} \right] \quad (16)$$

Im Vergleich zur statischen Random-Walk-Prognose nach (11) liegen mit (16) wesentlich genauere Intervallprognosen vor. Dabei sind bezüglich der Breite der Prognoseintervalle bei wachsender Prognoseschrittweite h zwei unterschiedliche Effekte voneinander zu trennen. Zum einen bewirkt die Berücksichtigung der im Prognosezeitpunkt aktuellen Ein-Perioden-Renditen eine dauerhafte Reduktion der Varianz der zukünftigen bedingten Renditen. Zum anderen fließen über die VAR-Koeffizientenmatrix ϕ_1 außerdem genauere Informationen bezüglich intertemporaler Diversifikationseffekte ein. Wie beim Vergleich von Modell 1 und Modell 2 erläutert wurde, führt dies je nach Struktur der multiplen Autokorrelation dazu, dass die Unsicherheit der künftigen Renditeentwicklung im Vergleich zum RW-Fall mit zunehmendem Prognosezeitraum zu- oder abnimmt.

Zur Veranschaulichung dieser Effekte werden abschließend exemplarisch für die zweite Komponente des Renditevektors die sich aus den drei Modellen ergebenden 95%-Prognoseintervalle der mehrperiodigen Durchschnittsrendite für zunehmende Prognosehorizonte, $h = 1, 2, \dots, 100$, graphisch gegenüber gestellt. Es liegt hierbei die Konstellation vor, dass das

Random-Walk-Modell durch die Annahme der intertemporalen Unkorreliertheit die exakten Diversifikationseffekte überschätzt und damit zu engeren Prognoseintervallen als die unbedingte VAR-Prognose nach Modell 1 führt.

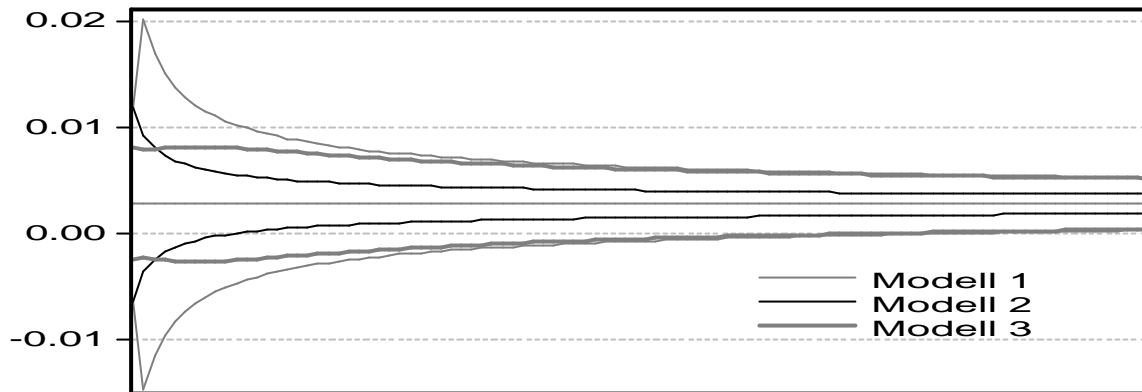


Abbildung: Prognoseintervalle der Durchschnittsrendite über 100 Perioden

Aufgrund der zusätzlichen Berücksichtigung der Startwerte führt die bedingte VAR-Prognose kurzfristig zu engeren Prognoseintervallen als das Random-Walk-Modell. Längerfristig werden die Intervalle jedoch aufgrund der zusätzlichen Erfassung positiver intertemporaler Korrelationszusammenhänge breiter als im statischen RW-Modell. Mit zunehmendem Prognosehorizont gleichen die Intervalle dabei immer stärker jenen des stationären VAR-Prozesses.

3 Prognose von Portfolio-Renditen über h Perioden

Nach der Betrachtung intertemporaler Diversifikationseffekte liegt deren Verknüpfung mit kontemporalen Diversifikationseffekten nahe. Bei Linearkombinationen der kumulierten h -periodigen stetigen Renditen $q' \nabla_h \ln Y_h$ (mit $0 < q, q \leq 1$) handelt es sich allerdings – sobald mehr als eine Komponente des Gewichtungsvektors q größer als Null ist – allenfalls um Approximationen kumulierter Portfolio-Renditen. Zur Berechnung von Renditedurchschnitten im Querschnitt mittels arithmetischen Mittelwerten sind nicht stetige Renditen, sondern die Komponenten des diskreten Renditevektors $\nabla_h Y_h / Y_0$ die geeigneten Maßgrößen. Kontemporale und intertemporale Diversifikationseffekte lassen sich somit exakt nur durch Verknüpfung der beiden unterschiedlichen Renditekonzepte erfassen.

Die statische Portfoliotheorie basiert bei der Analyse kontemporaler Diversifikationseffekte auf einem Endvermögensvergleich. Anstelle von der bislang betrachteten stetigen Durchschnittsrendite wird deshalb in diesem Abschnitt von der kumulierten stetigen Rendite über den Zeitraum von h Perioden ausgegangen, $\nabla_h \ln Y_h = \ln Y_h / Y_0 \sim N(\mu, \Omega)$. $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K)'$ beschreibt den Erwartungsvektor der stetigen h -Perioden-Rendite, Ω mit den Komponenten σ_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, K$) deren Varianz-Kovarianz-Matrix. So gilt speziell für die drei in Abschnitt 2 betrachteten Modelle bezüglich der über h Perioden kumulierten Renditevektoren

$$\begin{aligned}
 \text{Modell 1:} \quad & \nabla \ln Y_1 \sim N(\tilde{\gamma}, \tilde{\Sigma}) \\
 & \nabla_h \ln Y_h \sim N(h \tilde{\gamma}, h \tilde{\Sigma}) \text{ für } h > 1 \text{ mit } \tilde{\Sigma} := (I - \phi_1)^{-1} \Sigma (I - \phi_1')^{-1} \\
 \text{Modell 2:} \quad & \nabla_h \ln Y_h \sim N(h \tilde{\gamma}, h \tilde{\Sigma}) \tag{17} \\
 \text{Modell 3:} \quad & \nabla_h \ln Y_h \sim N\left(h \tilde{\gamma}, \sum_{i=1}^h (I - \phi_1^i) \tilde{\Sigma} (I - \phi_1^i)'\right)
 \end{aligned}$$

Wegen der Annahme der Multinormalverteilung für den stetigen h -periodigen Renditevektor ist der Vektor der Wachstumsfaktoren Y_h/Y_0 multivariat lognormalverteilt. Dessen Komponenten $Y_{h,i}/Y_{0,i}$ besitzen damit die Erwartung $E \frac{Y_{h,i}}{Y_{0,i}} = \exp\{\mu_i + \sigma_{ii}/2\}$ und die (Ko-) Varianzen $\text{cov}\left(\frac{Y_{h,i}}{Y_{0,i}}, \frac{Y_{h,j}}{Y_{0,j}}\right) = \exp\{\mu_i + \mu_j + (\sigma_{ii} + \sigma_{jj})/2\} * (\exp\{\sigma_{ij}\} - 1)$ für alle $i, j = 1, 2, \dots, K$ [vgl. Anhang, Gleichung (A1) bzw. (A3)]. Dementsprechend sind die Komponenten des diskreten Renditevektors, $R_{h,i} = \frac{Y_{h,i}}{Y_{0,i}} - 1$, ihrerseits dreiparametrisch lognormalverteilt mit Verschiebungsparameter -1 . Für Erwartungswert und Varianz der diskreten Portfolio-Rendite

$$R_h(q) = \sum_{i=1}^K q_i R_{h,i} \text{ (mit } 0 \leq q_i, \sum_{i=1}^K q_i = 1) \text{ folgt daraus}$$

$$\begin{aligned}
 E R_h(q) &= \sum_{i=1}^K q_i (\exp\{\mu_i + \sigma_{ii}/2\} - 1) = \sum_{i=1}^K q_i \exp\{\mu_i + \sigma_{ii}/2\} - 1 \\
 \text{var } R_h(q) &= \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K q_i q_j \exp\{\mu_i + \mu_j + (\sigma_{ii} + \sigma_{jj})/2\} * (\exp\{\sigma_{ij}\} - 1) \tag{18}
 \end{aligned}$$

Die diskrete Portfolio-Rendite $R_h(q)$ ist als Linearkombination gemeinsam lognormalverteilter Zufallsvariablen selbst aber nicht lognormalverteilt, so dass die korrespondierende stetige Portfolio-Rendite $\ln[R_h(q) + 1] \leq R_h(q)$ wiederum nicht normalverteilt ist.

In den meisten Anwendungen der statischen Portfolio-Theorie wird anders als in dem vorliegenden Beitrag davon ausgegangen, dass nicht der stetige Renditevektor $\nabla_h \ln Y_h$, sondern der diskrete Renditevektor $R_h = (R_{h,1}, R_{h,2}, \dots, R_{h,K})'$ normalverteilt sei mit $N(\mu, \Omega)$. Sofern aber sowohl der Erwartungswert als auch die Varianz der Portfoliorendite linear in h wachsen, wie z.B. bei der Annahme $R_h \sim N(h \tilde{\gamma}, h \tilde{\Sigma})$ bzw. $R_h \sim N(h \tilde{\gamma}, h \tilde{\Sigma})$ für $h > 1$, hat der Anlagehorizont – im VAR(1)-Fall zumindest für $h > 1$ – keinen Einfluss auf die Zusammensetzung effizienter Portfolios. Kontemporale Diversifikationseffekte hängen dann folglich nicht von der Länge des Betrachtungszeitraums ab. Schließlich lassen sich effiziente Portfolios über einen Lagrangeansatz als Anlagemischungen berechnen, die bei gegebenem Erwartungswert eine minimale Varianz bzw. bei gegebener Varianz einen maximalen Erwartungswert aufweisen. Tatsächlich jedoch ist die Normalverteilung für symmetrisch verteilte stetige Renditen eine sinnvollere Annahme als für linkssteil verteilte diskrete Renditen – insbesondere da die sich aus normalverteilten stetigen Renditen für die korrespondierenden diskreten Renditen ergebende Lognormalverteilung linkssteil ist. Auf Basis einer Lognormalverteilung der diskreten Renditen bekommt der Investmenthorizont nun aber nicht nur in nichtstationären (wie in Modell 3), sondern bereits in stationären Modellen (wie in den Modellen 1 und 2) einen Einfluss auf kontemporale Diversifikationseffekte. So z.B. ergibt sich aus (18) für die beiden stationären

Modelle 1 und 2 (für alle $h > 1$) $E R_h(q) = \sum_{i=1}^K q_i \exp\{\mu_i + \sigma_{ii} / 2\}^h - 1$ und $\text{var } R_h(q) =$

$$\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K q_i q_j \exp\{\mu_i + \mu_j + (\sigma_{ii} + \sigma_{jj}) / 2\}^h * (\exp\{\sigma_{ij}\}^h - 1).$$

Darin spiegelt sich, dass der Investmenthorizont h bei der Optimierung keinen redundanten Parameter mehr darstellt. Für die

drei in Abschnitt 2 betrachteten Modelle sind in der folgenden Tabelle exemplarisch für fünf unterschiedliche Prognoseschrittweiten h zwischen 1 und 100 jeweils die sich auf Basis der Annahme (17) berechneten Erwartungswerte, Varianzen, Kovarianzen und Korrelationen der drei diskreten Einzelrenditen einander gegenüber gestellt. Zur besseren Vergleichbarkeit des Wachstums der Parameterwerte mit zunehmendem Zeithorizont h , sind sämtliche Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen durch h dividiert.

Tabelle: Momente der Komponenten des diskreten Renditevektors

	Modell 1			Modell 2			Modell 3		
h=1	0,016540	0,002828	0,002072	0,016540	0,002828	0,002072	0,016539	0,002821	0,002069
	0,003729	0,000150	0,000005	0,003729	0,000150	0,000005	0,003727	0,000153	0,000006
	0,5282	0,000022	0,000007	0,5282	0,000022	0,000007	0,9277	0,000007	0,000000
	0,0263	0,5162	0,000009	0,0263	0,5162	0,000009	0,0496	0,0830	0,000004
h=12	0,018091	0,002944	0,002124	0,018131	0,002872	0,002096	0,018117	0,002905	0,002111
	0,005351	0,000491	0,000024	0,005457	0,000186	0,000006	0,005420	0,000429	0,000027
	0,5128	0,000171	0,000091	0,5234	0,000023	0,000008	0,6097	0,000091	0,000047
	0,0403	0,8515	0,000067	0,0260	0,5162	0,000010	0,0556	0,7529	0,000042
h=25	0,020231	0,003000	0,002153	0,020280	0,002926	0,002124	0,020246	0,002980	0,002147
	0,008384	0,000632	0,000031	0,008559	0,000239	0,000008	0,008439	0,000593	0,000033
	0,5079	0,000185	0,000097	0,5177	0,000025	0,000008	0,5442	0,000141	0,000073
	0,0398	0,8514	0,000071	0,0257	0,5161	0,000010	0,0466	0,8136	0,000058
h=50	0,025347	0,003113	0,002211	0,025421	0,003033	0,002181	0,025358	0,003102	0,002208
	0,019887	0,001028	0,000049	0,020355	0,000388	0,000012	0,019961	0,000996	0,000050
	0,4985	0,000214	0,000110	0,5068	0,000029	0,000009	0,5139	0,000188	0,000097
	0,0389	0,8511	0,000079	0,0251	0,5161	0,000011	0,0420	0,8343	0,000071
h=100	0,041408	0,003355	0,002333	0,041576	0,003263	0,002300	0,041421	0,003348	0,002331
	0,112122	0,002719	0,000123	0,115338	0,001017	0,000030	0,112374	0,002677	0,000124
	0,4797	0,000287	0,000142	0,4852	0,000038	0,000012	0,4866	0,000269	0,000133
	0,0372	0,8506	0,000097	0,0240	0,5160	0,000014	0,0386	0,8426	0,000093

Anmerkungen: Jedes (4x3)-dimensionale Feld der Tabelle repräsentiert Momente des diskreten Renditevektors für alternative Anlagehorizonte ($h = 1, 12, 25, 50, 100$) unter den drei Spezifikationen aus Abschnitt 2 (Modell 1 bis 3). In der ersten abgesetzten Zeile sind jeweils die diskreten Erwartungswerte nach Division durch h ausgewiesen, in der darunter aufgeführten (3x3)-Matrix über und auf der Hauptdiagonale die entsprechenden durch h dividierten Elemente der Varianz-Kovarianz-Matrix. Unterhalb der Hauptdiagonale sind die daraus resultierenden Korrelationen fett hervorgehoben.

Während bezüglich der stetigen Rendite die Erwartungswerte in allen drei Modellen bis auf die Multiplikation mit h gleich sind und die Varianzen und Kovarianzen in den stationären Modellen 1 und 2 linear mit h wachsen, steigen die Erwartungswerte ebenso wie die Varianzen und Kovarianzen der diskreten Zuwachsraten überproportional mit h . Für die betrachteten Werte für $h \geq 12$ ergibt sich aus den Relationen der Varianzen der stetigen Einzelrenditen in den drei Modellen Folgendes: Erwartungswerte, Varianzen und kontemporale Kovarianzen des auf feste Startwerte konditionierten stabilen VAR-Modells gleichen sich immer stärker jenen des stationären VAR-Modells an. Da je nach multipler intertemporaler Korrelationsstruktur die stetige Varianz im Random-Walk-Ansatz höher oder niedriger als die des stationären Zeitreihenansatzes ist, sind Erwartungswerte und Varianzen der diskreten Rendite entsprechend im RW-Fall entsprechend höher oder niedriger als im Modell 1. Die Kovarianzen

beider VAR-Modelle sind deutlich höher als im statischen Modell 2. In den beiden stationären Modellen 1 und 2 bleiben die Korrelation weitgehend unbeeinflusst vom Zeithorizont h . Dabei unterscheiden sich beide stark in der Korrelation zwischen der zweiten und dritten Komponenten des diskreten Renditevektors. Wiederum passen sich die Korrelationen im Modell 3 zwar langfristig jenen des unconditionierten VAR-Modells an. In der kurz- bis mittelfristigen Sicht ergeben sich jedoch enorme Unterschiede. Da für die praktische Ausnutzung von Portfolio-Effekten nicht die Asymptotik entscheidend ist, zeigen sich hierin die positiven Informationsgewinne durch die Berücksichtigung von Startinformationen hinsichtlich der Prognosegenauigkeit, insbesondere auch hinsichtlich der präziseren Darstellung kontemporaler Diversifikationseffekte in Abhängigkeit vom Investmenthorizont – v.a. in der kürzeren Sicht.

Zusammenfassend lassen sich ausgehend vom RW- als Benchmark-Modell folgende Effekte festhalten. Im Random-Walk-Modell für stetige Renditen besitzt der Anlagehorizont geringfügige Auswirkungen auf die Zusammensetzung effizienter Portfolios, da Erwartungsvektor und Varianz-Kovarianz-Matrix der diskreten Rendite nicht gleichmäßig und nicht linear in h steigen. Im dynamischen, aber stationären Zeitreihenmodell kommen durch die Erfassung zeitlicher Renditeabhängigkeiten intertemporale Diversifikationseffekte hinzu. Diese führen zu anderen Korrelationsstrukturen zwischen den diskreten kumulierten Renditen über h Perioden und können damit zu wesentlich anderen effizienten Anlagemischungen führen als das RW-Modell. Schließlich bietet das entsprechende, auf die Startinformationen konditionierte VAR-Modell zusätzlich einen enormen Präzisionsgewinn in der kurzen bis mittelfristigen Sicht. Die höhere Genauigkeit äußert sich nicht zuletzt darin, dass die Korrelationsstruktur h -periodiger diskreter Renditen zumindest anfänglich stark mit h variiert. Entsprechend hängt die optimale Mischung von Einzelanlagen bei Gültigkeit des VAR-Modells mit bekannten Startwerten ganz zentral vom Anlagehorizont ab.

Anhang:

Zusammenhang der Multinormalverteilung und der multivariaten Lognormalverteilung

Eine normalverteilte Zufallsvariable $\ln Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ besitzt für alle $\ln y \in \mathfrak{R}$ die Dichtefunktion

$f(\ln y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$. Nach dem Dichtentransformationssatz ist dann Y wegen

$y = \exp\{\ln y\}$ und $\frac{d \ln y}{dy} = \frac{1}{y}$ lognormalverteilt mit Dichte $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} \exp\left\{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$ für alle $y > 0$, 0 sonst.

Nun sei $Z := \frac{\ln Y - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$, so dass $\frac{dy}{dz} = \frac{d \exp\{\mu + \sigma z\}}{dz} = \exp\{\mu + \sigma z\} * \sigma$. Damit ergibt sich für den Erwartungswert der lognormalverteilten Zufallsvariablen Y

$$\begin{aligned} EY &= \int_{y=0}^{\infty} y g(y) dy = \int_{z=-\infty}^{+\infty} y g(y) \frac{dy}{dz} dz \\ &= \int_{z=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} * \exp\{\mu + \sigma z\} * \sigma dz & (A1) \\ &= \exp\{\mu\} * \int_{z=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-z^2/2\} * \exp\{\sigma z\} dz \\ &= \exp\{\mu + \sigma^2/2\} * \int_{z=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-(z - \sigma)^2/2\} dz = \exp\{\mu + \sigma^2/2\} \end{aligned}$$

Gemäß der Schwartz'schen Ungleichung gilt also $E \ln Y = \mu < \ln EY = \mu + \sigma^2/2$ für $\sigma > 0$. Wegen $r * \ln Y = \ln Y^r \sim N(r\mu, r^2\sigma^2)$ sind Y^r in direkter Verallgemeinerung von (A1) lognormalverteilt mit $EY^r = \exp\{r\mu + r^2\sigma^2/2\}$ und $\text{var} Y = EY^2 - (EY)^2 = \exp\{2\mu + \sigma^2\} (\exp\{\sigma^2\} - 1)$.

Bei multivariater Normalverteilung des Vektors $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_K)'$ mit Erwartungsvektor $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K)'$ und den Komponenten σ_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, K$) der Varianz-Kovarianz-Matrix sind auch beliebige Linearkombinationen der Komponenten von Y normalverteilt, wie etwa

$r \cdot \ln Y_i + s \cdot \ln Y_j \sim N(r\mu_i + s\mu_j, r^2\sigma_{ii} + s^2\sigma_{jj} + 2rs\sigma_{ij})$. Entsprechend ist die Zufallsvariable $Y_i^r Y_j^s = \exp\{r \cdot \ln Y_i + s \cdot \ln Y_j\}$ lognormalverteilt. Dabei gilt wiederum in direkter Verallgemeinerung von (A1)

$$E Y_i^r Y_j^s = \exp\left\{r\mu_i + s\mu_j + \frac{r^2\sigma_{ii} + s^2\sigma_{jj} + 2rs\sigma_{ij}}{2}\right\} \quad (\text{A2})$$

Also folgt für die Komponenten der Varianz-Kovarianz-Matrix gemeinsam lognormalverteilter Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_i, Y_j) &= E Y_i Y_j - E Y_i E Y_j \\ &= \exp\left\{\mu_i + \mu_j + \frac{\sigma_{ii} + \sigma_{jj} + 2rs\sigma_{ij}}{2}\right\} - \exp\left\{\mu_i + \mu_j + \frac{\sigma_{ii} + \sigma_{jj}}{2}\right\} \\ &= \exp\left\{\mu_i + \mu_j + \frac{\sigma_{ii} + \sigma_{jj}}{2}\right\} (\exp\{\sigma_{ij}\} - 1) \end{aligned} \quad (\text{A3})$$