

**Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie,
Portfolio Management und Versicherungswirtschaft**

Nr. 141

**Der Aktienmarktverbund
zwischen Deutschland und den USA
Ergebnisse einer Kointegrationsstudie**

von

ELKE EBERTS

Mannheim 12/2002

Der Aktienmarktverbund zwischen Deutschland und den USA

Ergebnisse einer Kointegrationsstudie

Elke Eberts

Abstract

Das vorliegende Papier verfolgt, den empirischen Zusammenhang zwischen den realen Aktienmarktniveaus von Deutschland und den USA zur Aktienmarktprognose zu verwenden. Ausgangspunkt stellt der traditionelle Random-Walk-Ansatz dar, der bis heute regelmäßig zur Prognose von Aktienmarktrenditen verwendet wird. Allerdings wird das Ausgangsmodell um einen Kointegrationseffekt erweitert. Die relative Prognosegüte gegenüber dem statischen Random-Walk-Modell wird dann anhand des Theilschen U evaluiert. Da der Kointegrationszusammenhang Informationen über eine systematische Verknüpfung der Aktienmarktindizes berücksichtigt, die gerade für die strategische Analyse interessant ist, ergeben sich in der langen Sicht besonders deutliche Abweichungen. So ergibt sich im Betrachtungszeitraum, dass sich die reale deutsche diskrete Aktienmarktrendite mit wachsendem Prognosehorizont zunehmend besser prognostizieren lässt, als es der statische Random-Walk-Ansatz reflektiert.

Stichworte

Kointegration internationaler Aktienmärkte, Random-Walk, Stetige und diskrete Rendite, Impulse/Response-Folgen, Theilscher Ungleichheitskoeffizient

JEL-Klassifikation

C 52/53, F 36, G 12

Der Aktienmarktverbund zwischen Deutschland und den USA

Ergebnisse einer Kointegrationsstudie*

1 Einleitung

Die systematische Prognostizierbarkeit von Renditen stellt eine der ersten und persistenten Fragen der Finanzmarktökonomie dar.¹ Gerade die Aktienmarktprämie - d.h. die durchschnittliche Risikoprämie von Aktienanlagen gegenüber risikolosen Anlageformen – ist dabei eine zentrale, wenn auch schwer fassbare Größe.² Lange Zeit galt das *Capital Asset Pricing Model (CAPM)* als richtungweisend für eine risikokonforme Bewertung von Aktientiteln. Dennoch ist es im Laufe neuerer empirischer Arbeiten zunehmend durch Multifaktorenmodelle abgelöst worden, welche Aktienrenditen durch Risikoprämien einer Reihe von risikobeeinflussenden Faktoren erklären.³ Ebenso wird heute nicht mehr selbstverständlich vom Postulat über die Zeit unabhängiger einperiodischer Aktienrenditen ausgegangen. Selbst aggregierte Aktienmärkte, denen über kurze Betrachtungszeiträume eine besonders ausgeprägte Random-Walk-Eigenschaft zugesprochen wird, besitzen über längere Perioden prognostizierbare Komponenten.⁴ Dieser Grad an langfristiger Prognostizierbarkeit von Aktienmärkten wird einer im Zeitablauf systematisch variierenden Renditeerwartung zugeschrieben.⁵ Dabei führte allerdings der auf Merton (1980) zurückgehende Ansatz, zeitvariable Renditeerwartungen durch bedingte Volatilitäten zu beschreiben, nicht zu den gewünschten klaren empirischen Resultaten.

* Ich danke Herrn Prof. Dr. K. Winckler, Herrn Prof. Dr. P. Albrecht, Herrn Dr. A. Ziegler und Herrn S. Sebastian für konstruktive Kritik und wertvolle Anregungen.

¹ Vgl. Campbell / Lo / MacKinlay (1997), S. 27.

² Vgl. Pastor / Stambaugh (2001), S. 1207.

³ Aktuelle Erklärungsansätze sind stark durch die sogenannte Kapitalmarktanomalien-Forschung und die einflussreichen Aufsätze von Fama und French geprägt, vgl. etwa Fama / French (1993, 1996) sowie Davis / Fama / French (2000).

⁴ Vgl. Cochrane (1999a), S. 36; Barberis (2000), S. 225.

⁵ Vgl. Campbell / Lo / MacKinlay (1997), S. 80.

Wenn Preise keinem Random-Walk folgen, erhält der Anlagehorizont eine wesentliche Rolle für die Portfolio-Entscheidung. Die üblicherweise relativ hohen Risikoprämien für Aktienanlagen sind zumindest teilweise damit verbunden, negative Entwicklungen in Zeiten adverser Finanzmarktbedingungen über die Zeit zu kompensieren.⁶ Mean-Reversion-Eigenschaften rufen intertemporale Diversifikationseffekte hervor, weshalb langfristige Aktienanlagen weniger riskant sind als kurzfristige. Die Idee des vorliegenden Beitrags ist es, dass diese Effekte auf stabilisierenden Interdependenzen der internationalen Aktienmärkte beruhen. Konkret soll der empirische Zusammenhang zwischen den realen Aktienmarktniveaus von Deutschland und den USA betrachtet und hinterfragt werden, ob damit weitergehende Erkenntnisse zur Prognose der deutschen Aktienmarkttrendite verbunden sind.

Die weitere Arbeit ist wie folgt konzipiert. Im zweiten Abschnitt werden geeignete Indizes der deutschen und der US-amerikanischen Aktienmarkttrendite sowie die Verflechtung der preisniveaubereinigten Indizes durchleuchtet. Anschließend wird im dritten Abschnitt der traditionelle Random-Walk-Ansatz um den Einfluss stabiler Strukturen zwischen den realen Aktienmarktindizes erweitert, das Modell anhand der historischen Interdependenzen spezifiziert, geschätzt und ausgewertet. Dem Vorteil des Kointegrations- gegenüber einem reinen Random-Walk-Ansatz für Prognosezwecke wird besonderes Augenmerk geschenkt. Im vierten Abschnitt werden die Hauptergebnisse der vorliegenden Studie zusammengefasst und ein Ausblick auf eine mögliche Erweiterung der Kointegrationsuntersuchung gegeben.

2 Deskriptive Analyse des Aktienmarktverbundes

2.1 Auswahl repräsentativer nationaler Aktienindizes

Zur Informationsbündelung von Aktienmarktendenzen in einer einzigen Kennzahl werden meist repräsentative Aktienindizes auf Total-Return-Basis (Gesamtrenditebasis) verwendet, sogenannte Performance-Indizes. Diese stellen unter der Fiktion sofortiger Reinvestitionen zugeflossener Dividenden- und Bonuszahlungen in die Herkunftsquellen bereinigte Kursindizes dar. Im Zuge der Dividendenbereinigungen werden Bardividenden ohne steuerliche An-

⁶ Vgl. *Cochrane* (1999b), S. 59.

rechnungsguthaben einbezogen, so dass der Performance-Index faktisch die durchschnittliche Nach-Steuer-Rendite des Aktienmarktes abbildet. Bei zueinander konsistenter Konstruktion sind diese Indizes jedoch geeignete Vergleichsmaßstäbe der Entwicklung verschiedener nationaler Märkte, insbesondere da sich internationale Einflüsse weniger auf Einzeltitelebene als auf Indexebene auswirken.

Nach Börsenkapitalisierung und Zahl börsennotierter Unternehmen steht der deutsche Aktienmarkt (Frankfurt a.M.) im Vergleich zu den USA (New York), zu Japan (Tokyo) und zu Großbritannien (London) noch auf einer relativ schmalen Basis. Gerade mit ihrer elektronischen Handelsplattform *Xetra* verfügt die *Deutsche Börse* aber über eines der international leistungsfähigsten Handelssysteme und hat sich bereits zur weltweit zweitgrößten vollelektronischen Börse entwickelt.⁷ Den größten Aktienmarkt besitzen die USA. Da diesem weltweit eine hohe Referenzfunktion für die einzelnen nationalen Aktienmärkte zugesprochen wird, soll er auch in der vorliegenden Arbeit verwendet werden, Interdependenzen des deutschen und des globalen Aktienmarktes darzustellen. Zu Vergleichszwecken bieten sich die nationalen kapitalisierungsgewichteten Aktien-Performance-Indizes der *Morgan Stanley Capital International (MSCI)*-Indexfamilie (Basiszeitpunkt Ultimo 1969, Basiswert 100) an, die sich durch einheitliche Konstruktionsweisen auszeichnen. Eine lange Reihe des *MSCI-Dividend-Gross-Indexes* ist für Deutschland – anders als für die USA – allerdings nur bis Juli 2001 verfügbar. Da sich der deutsche Performance-Index strukturell aber kaum vom *Deutsche Aktienindex (DAX)* als dem gängigen Repräsentanten für die Gesamtentwicklung des deutschen Aktienmarktes unterscheidet, wird im Weiteren der *DAX* herangezogen.⁸ In der Gegenüberstellung der in einem festen Zeitpunkt auf einen einheitlichen Startwert normierten sehr gleichläufigen Indizes verläuft der deutsche *MSCI-Index* etwas oberhalb des *DAX*. Gleichzeitig liegt mit dem von *Stehle / Huber / Maier* (1996) bis 1955 zurückberechneten *DAX* vergleichsweise verlässliches, vielfach überprüftes Datenmaterial vor. Das ihm zugrunde liegende Portefeuille besteht aus den an der *Deutschen Börse* in Frankfurt a.M. gehandelten Titeln der 30 größten deutschen Aktiengesellschaften. Mit dieser geringen Zahl an Gesellschaften gibt der *DAX* hinsichtlich Börsenkapital und Börsenumsätzen einen bereits breiten Überblick auf den deut-

⁷ Seit dem 21.6.1999 basiert auch die *DAX*-Reihe auf *Xetra*-Preisen.

⁸ Vgl. *MSCI* (1998); *Richard* (1992); *Janßen / Rudolph* (1992). Anders als beim Performanceindex *DAX* werden bei den *MSCI-Dividend-Gross-Indizes* Dividendenzahlungen nicht gemäß ihres genauen zeitlichen Anfalls fiktiv reinvestiert, sondern am Monatsende in Höhe von 1/12 der kumulierten Jahresdividende. Vgl. *MSCI* (1998), S. 44.

schen Aktienmarkt.⁹ Die weiteren Aktienmarktuntersuchungen basieren daher auf dem *DAX* für Deutschland und dem *MSCI-Gross-Dividend-Index* für die USA (im Weiteren kurz *MSCI-USA*).

2.2 Neutralisierung der nationalen Preisniveaueffekte

Der direkte Vergleich von *DAX* und *MSCI-USA* ist dahingehend problematisch, als beide Reihen auf unterschiedlichen nationalen Währungen beruhen. Daher wird der *MSCI-USA* zusätzlich auf DM-Basis betrachtet. Seit dem offiziellen Zusammenbruch des Wechselkurssystems von Bretton Woods im März 1973 besteht zwischen der Bundesrepublik Deutschland und den USA ein flexibles Wechselkurssystem. Den folgenden statistischen Analysen wird entsprechend der Zeitraum von März 1973 bis August 2002 zugrunde gelegt.¹⁰ Auf Grund der noch jungen deutschen Wiedervereinigung mangelt es gesamtdeutschen Analysen an einer Langzeithistorie, so dass dabei implizit angenommen wird, dass sich der gesamtdeutsche Finanzmarkt künftig weitgehend konform mit der Historie der Bundesrepublik entwickelt.¹¹ Mittels Wechselkursen wird der *MSCI-USA* auf US-Dollar (USD)-Basis in jedem Zeitpunkt zumindest approximativ folgendermaßen in einen entsprechenden DM-Index umgerechnet.¹²

$$\begin{aligned} \text{MSCI-USA [DM]} &= \text{MSCI-USA [USD]} * (100 / 127,862) \\ &* (\text{Wechselkurs [DM/USD]} / 2,8132) \end{aligned} \quad (1)$$

Der Multiplikator in der zweiten Zeile setzt den Wechselkurs des jeweiligen Monats in Relation zum Wechselkurs vom März 1973. Mittels des Klammersausdrucks in der ersten Zeile wird der *MSCI-USA* [USD], der Ultimo März 1973 einen Wert von 127,862 besitzt,

⁹ Andere deutsche Aktienindizes mit einem größerem Portfolio berücksichtigen viele selten gehandelte Werte, woraus eine geringere Portefeuille-Kontinuität mit kurzfristig entsprechend persistenten Kursen und tendenziell stärker autokorrelierten Renditen resultiert. Ein hohes Grundkapital geht zumeist mit hohen Umsätzen einher, ist im Gegensatz zur Umsatzstärke aber schwerer zu manipulieren. Seit Juni 2002 wird die Größe einer Aktiengesellschaft anstelle des Grundkapitals nach der Marktkapitalisierung des Streubesitzes (Beteiligungen von weniger als 5% der Marktkapitalisierung des Unternehmens) sowie nach den Börsenumsätzen bemessen. Der Anteil des Streubesitzes ist nun gleichzeitig für die Gewichtung im *DAX* relevant.

¹⁰ Seit Januar 1999 herrscht mit 1,95583 ein festes DM/Euro-Wechselkursverhältnis.

¹¹ Bezüglich des *DAX* selbst ist die Problematik deswegen irrelevant, da börsennotierten ostdeutschen Aktienunternehmen praktisch keine Bedeutung zukommt.

¹² Vgl. auch *MSCI* (1998), S. 47.

rechnerisch auf den Startwert 100 umbasiert. Der *DAX* muss entsprechend mit $(100 / 371,65)$ multipliziert werden. Auf Grundlage dieser Währungsumrechnung wird in Abbildung 1 der *DAX* dem *MSCI-USA* vor und nach der Währungsumrechnung von USD auf DM gegenüber gestellt, wobei zur besseren Vergleichbarkeit alle drei Reihen im März 1973 mit einem Basiswert von 100 starten.

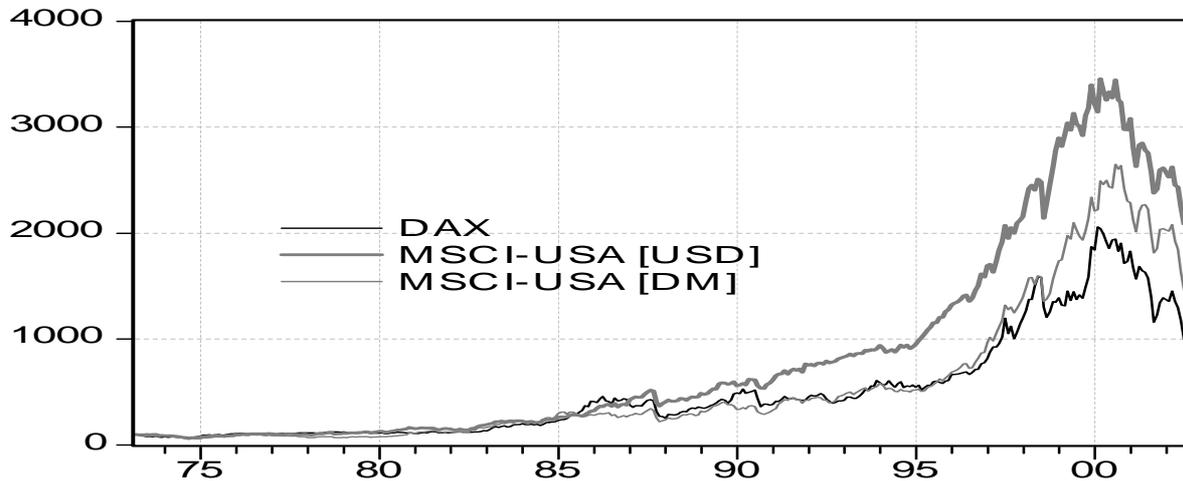


Abb. 1: Repräsentative Aktienindizes für Deutschland und die USA zum Monatsultimo (März 1973 = 100)

Zumindest bis 1999 und damit bis zur Fixierung fester Eurowechselkurse unter den Mitgliedsländern der Europäischen Währungsunion (EWU) ähnelt die Entwicklung des *MSCI-USA* [DM] weitgehend der des *DAX*. Bereits seit Mitte der neunziger Jahre liegt der *DAX* jedoch auch nach Währungsumrechnung des *MSCI-USA* fast durchgängig unterhalb des US-amerikanischen Aktienmarktrepresentanten. Ab 1999 scheint sich die gleichläufige Entwicklung des deutschen und des US-amerikanischen Aktien-Performance-Indexes (bedingt etwa durch zusätzliche Einflüsse aus anderen EWU-Ländern) endgültig gelockert zu haben. Die Zeit nach 1999 mit den anhaltenden enormen Aktienmarkteinbrüche seit 2000 soll aus den weiteren Analysen aber nicht ausgeschlossen werden. So kann die zusätzliche Variation in den Daten die Trennschärfe statistischer Tests verbessern. Statt einer Währungsumrechnung des *MSCI-USA* nach (1) werden wegen der Euro-Problematik im Weiteren die realen nationalen Aktien-Performance-Indizes gegenüber gestellt. Ein Vorteil dieser Betrachtung liegt darin, dass rationale Anleger gerade bei langfristigen Anlageentscheidungen keiner Geldillusion unterliegen und deshalb selbst reale Renditen fokussieren.¹³

¹³ Vgl. auch die Untersuchung von *Albrecht / Maurer / Ruckpaul* (2001) zur langfristigen Performance der realen Aktienrendite.

Nach der absoluten Kaufkraftparitätentheorie wird angenommen, dass gleiche Güter in unterschiedlichen offenen Volkswirtschaften nach der Umrechnung in eine einheitliche Währung gleiche Preise besitzen.¹⁴ Damit bringt der Wechselkurs in flexiblen Wechselkurssystemen genau das Verhältnis inländischer gegenüber ausländischer Güterpreise zum Ausdruck. Die weniger restriktive relative Kaufkraftparitätentheorie bezieht sich demgegenüber nur auf das allgemeine Preisniveau und besagt, dass die Inflationsdifferenzen zweier Länder über einen bestimmten Zeitraum durch eine entsprechende Veränderung des flexiblen Wechselkurses in voller Höhe aufgefangen werden. Gleichzeitig findet der Übergang von der Wechselkursadjustierung auf die Betrachtung inflationsbereinigter Aktienindizes hierin eine theoretische Fundierung.

Die Bereinigung erfolgt derart, dass die Aktien-Performance-Indizes durch die jeweiligen nationalen Indizes des allgemeinen Preisniveaus dividiert werden. Verbraucherpreisindizes privater Haushalte (Consumer Price Indices) stellen hierfür die üblichen Kennzahlen dar. Das gängige Maß für die Bundesrepublik Deutschland stellt der Preisindex für die Lebenshaltung aller privaten Haushalte dar. Für das frühere Bundesgebiet ist dieser ab Januar 1962 auf Monatsbasis verfügbar. Für die Neuen Länder einschließlich Berlin-Ost existiert ein entsprechender Index seit Mitte 1990, für Gesamtdeutschland ab 1991. Aus Kontinuitätsgründen wird die Entwicklung des Preisindex im früheren Bundesgebiet betrachtet (kurz: CPI-D-West). So war die Steigerung des Preisniveaus in den Neuen Ländern und in Berlin-Ost wegen der Entwicklung marktwirtschaftlicher Preise und wegen angestauten Anschaffungsbedarfen unmittelbar nach der deutschen Wiedervereinigung überproportional hoch.¹⁵ Inzwischen haben sich die aus der west- und aus der gesamtdeutschen Indexreihe ergebenden Inflationsraten jedoch deutlich aneinander angepasst. Das direkte US-amerikanische Äquivalent zum deutschen Preisindex für die Lebenshaltung aller privaten Haushalte stellt der saisonal unbereinigte Consumer-Price-Index-for-All-Urban-Consumers (CPI-USA) dar. Verglichen mit den Wechselkursen ist der Quotient der beiden nationalen Preisindizes deutlich weniger volatil. Die zeitlichen Glättungseffekte basieren auf den unterschiedlichen Erhebungsmethoden. Während es sich bei den Wechselkursen um Austauschverhältnisse im Tagesdurchschnitt des Monatsultimos handelt, werden für Verbraucherpreisindizes Preise der zugrundeliegenden Güteraus-

¹⁴ Vgl. *Poddig* (1996), S. 245.

¹⁵ Vgl. *Statistisches Bundesamt* (1997), S. 333 sowie Tab. 1, S. 334.

wahl monatlich in einer repräsentativen Stichprobe mit Auskunftspflicht erhoben.¹⁶ In Abbildung 2 sind die beiden realen Aktien-Performance-Indizes einander gegenüber gestellt – d.h. der *DAX* dividiert durch *CPI-D-west* und der *MSCI-USA* dividiert durch *CPI-USA*. Zur besseren Vergleichbarkeit werden beide Reihen wiederum so normiert, dass sie im März 1973 mit einem Basiswert von 100 beginnen.

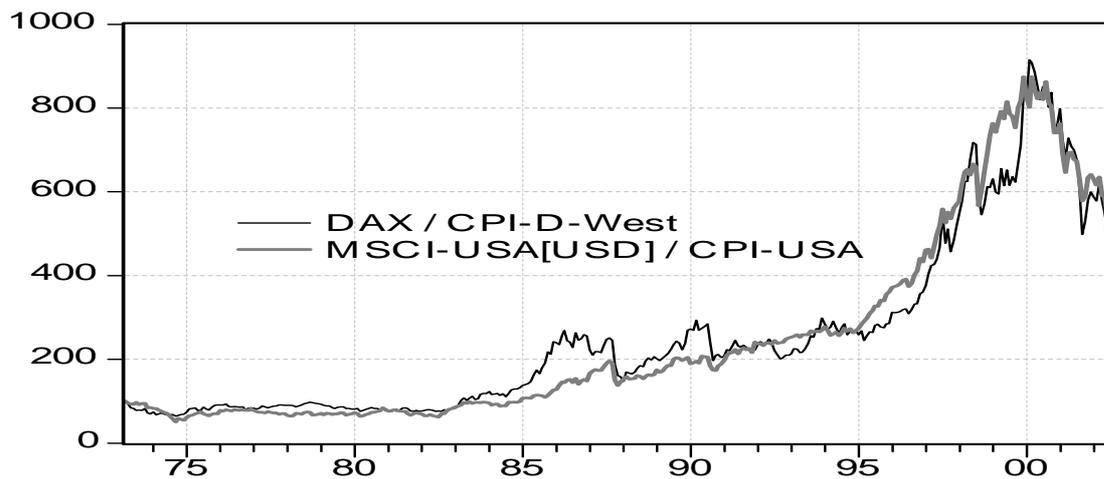


Abb. 2: Reale Aktien-Performance-Indizes für Deutschland und die USA

Bei dieser Darstellung wird die tendenzielle Gleichentwicklung der um das mittlere Preisniveau bereinigten nationalen Aktien-Performance-Indizes noch deutlicher sichtbar. Es liegt insbesondere kein offensichtlicher Strukturbruch seit Ende der Neunziger Jahre vor. Dabei ist Deutschland seit der Fixierung fester Wechselkurse innerhalb der EWU nicht mehr vor Inflationseinflüssen aus anderen Mitgliedsländern geschützt. So reflektiert der aufgezeigte Zusammenhang die intuitive Vorstellung von integrierten Aktienmärkten. Im Folgenden soll geklärt werden, inwiefern er sich mittels Kointegrationsanalysen auswerten und nutzen lässt.

¹⁶ Vgl. Statistisches Bundesamt (1997), S. 331.

3 Kointegrationsanalyse des Aktienmarktverbundes

3.1 Empirische Modellspezifikation

Ausgangspunkt der Modellspezifikation ist die Frage, ob zwischen *DAX* und *MSCI-USA* [USD] nach Bereinigung mittels des jeweils herangezogenen nationalen Verbraucherpreisindex überhaupt eine Kointegrationsbeziehung vorliegt. Anstelle dieser, in Abbildung 2 dargestellten Reihen werden in Abbildung 3 zunächst jedoch die zeitlichen Entwicklungen ihrer natürlichen Logarithmen betrachtet.

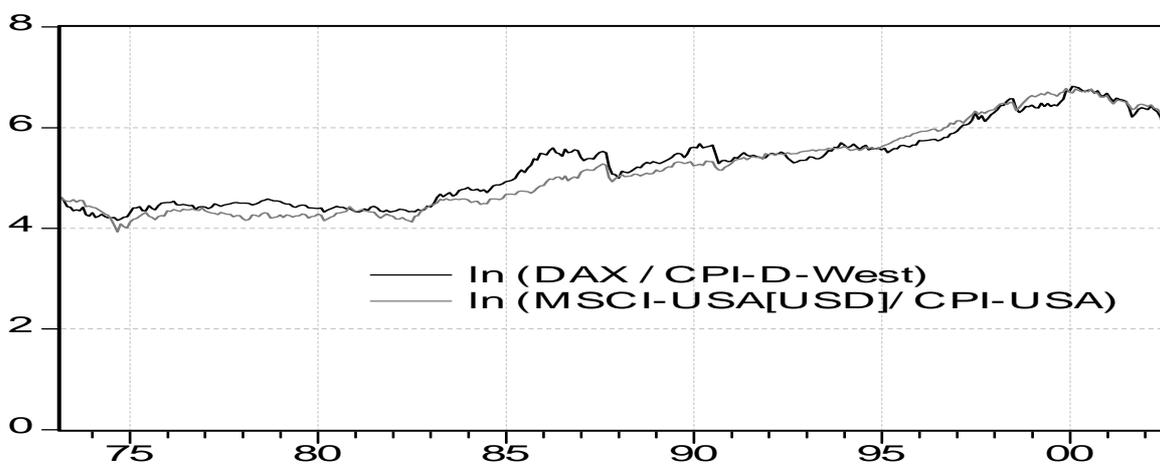


Abb. 3: Logarithmierte reale Aktien-Performance-Indizes für Deutschland und die USA

Die Logarithmierung bewirkt, dass die Zeitreihenverläufe stärker linearisiert sind. Der enge Gleichlauf der beiden realen Aktien-Performance-Indizes wird optisch verstärkt. Tatsächlich werden bei Renditeanalysen im Zeitreihenkontext üblicherweise stetige Renditen herangezogen.¹⁷ Diese werden als absolute Veränderungen logarithmierter Indizes berechnet und repräsentieren damit die zeitstetige Verzinsung des eingesetzten Kapitals über den betrachteten Zeitraum.¹⁸ Auf Basis stetiger Renditen lässt sich die Random-Walk-Eigenschaft des deutschen und des US-amerikanischen Aktienmarktes für $t = 1, 2, \dots, T$ folgendermaßen präzisieren:

$$\ln Y_t = \gamma + I \cdot \ln Y_{t-1} + U_t \quad (2)$$

¹⁷ Zur Abgrenzung diskreter und stetiger Renditen vgl. aktuell *Dorleitner* (2002); *Eberts* (2002), S. 11-15.

¹⁸ Die Logarithmusdifferenzen des *MSCI-USA* [USD] und des *MSCI-USA* [DM] unterscheiden sich dabei nur durch die Differenzen der logarithmierten Wechselkurse (stetigen Änderungsraten) über den entsprechenden Zeitraum.

Y_t wird als zweidimensionaler Vektor mit dem Wert des normierten realen *DAX* zum Zeitpunkt t an erster Stelle und dem korrespondierenden normierten preisniveaubereinigten *MSCI-USA* als zweite Komponente angenommen. $\ln Y_t$ bezeichnet also den Vektor der beiden entsprechenden logarithmierten Indizes zum Zeitpunkt t . Dazu korrespondierend stellt γ einen zweidimensionalen Parametervektor und U_t einen zweidimensionalen Vektor stochastischer Störterme dar. Die Multiplikation mit einer Einheitsmatrix I der Ordnung 2 in (2) dient der Veranschaulichung, ist jedoch redundant. Die Zufallsvektoren U_t sind von sämtlichen verzögerten $\ln Y_{t-i}$ ($i = 1, 2, \dots, t$) unabhängig. Meist wird weiter angenommen, dass die U_t im Zeitablauf unabhängig identisch verteilt seien mit Erwartungsvektor Null und Varianz-Kovarianz-Matrix Σ . Für die einperiodischen stetigen Aktienrenditen folgt aus (2) unmittelbar

$$\nabla \ln Y_t = \ln Y_t - \ln Y_{t-1} = \gamma + U_t. \quad (3)$$

Auf Grund der Annahmen über die Störterme sind die stetigen Renditen im Random-Walk-Ansatz folglich im Zeitablauf unabhängig identisch verteilt mit Erwartungsvektor γ und Varianz-Kovarianz-Matrix Σ . Damit folgen sie über die Zeit einem statischen stationären Entwicklungsgesetz.¹⁹ Die einzige Verknüpfung der verschiedenen im Vektor $\nabla \ln Y_t$ zusammengefassten endogenen Variablen sind kontemporale Korrelationen, die für Prognosezwecke einzelner Märkte allerdings wenig hilfreich sind. Um zusätzlich einen Zusammenhang der Indizes zu modellieren, bietet sich folgende zeitreihenanalytische Erweiterung an:

$$\ln Y_t = \gamma + (I + \Pi) \ln Y_{t-1} + U_t \quad (4)$$

sodass nunmehr hinsichtlich der einperiodischen stetigen Renditen von

$$\nabla \ln Y_t = \gamma + \Pi \ln Y_{t-1} + U_t \quad (5)$$

ausgegangen wird. Die (2x2)-dimensionale Matrix Π , um welche (2) bzw. (3) dabei erweitert werden, wird Kointegrationsmatrix genannt. Bei einem nichtstationären (trendbehafteten) Prozess $\ln Y_t$ besitzt Π nicht den vollen Rang r , $0 \leq r < 2$. Sind beide Komponenten von $\ln Y_t$ sowie jede Linearkombination der Komponenten nichtstationär – wie im klassischen Random-Walk-Fall (2) –, so müssen $\Pi = 0$ und damit $r = 0$ sein. Gilt hingegen $r = 1$, dann ist höchstens eine Komponente des Vektors $\ln Y_t$ stationär. Falls unter $r = 1$ keine Komponente

¹⁹ In der Literatur wird dies auch als Submartingal bezeichnet. Vgl. *Fama* (1970), S. 386.

stationär ist, existieren dagegen Linearkombinationen $\beta' \ln Y_t$ der beiden nichtstationären Komponenten, die stationär sind. In dem Fall heißt Ansatz (4) respektive (5) gemäß der Idee von *Engle/ Granger* (1987) kointegriert. Nichtstationäre kointegrierte Variablen besitzen folglich einen gemeinsamen stochastischen Trend, so dass bestimmte Linearkombinationen einer stabilen Gesetzmäßigkeit folgen, die mit der theoretischen Vorstellung einer langfristigen statistischen Gleichgewichtsbeziehung korrespondiert.²⁰ Im zweidimensionalen Fall lässt sich $\Pi := \alpha\beta'$ gerade in die beiden zweidimensionalen Koeffizientenvektoren α und β zerlegen, die jeweils den vollen Spaltenrang besitzen. Zur Identifikation von β wird üblicherweise eine seiner zwei Komponenten auf Eins normiert. Darauf aufbauend können dann die Parameter von α als Maß für die Anpassung der i -ten Modellvariable ($i = 1, 2$) an die Kointegrationsbeziehung $\beta' \ln Y_t$ interpretiert werden.

Anstatt die Random-Walk-Eigenschaft auf $\ln Y_t$ zu beziehen, wird sie häufig in Bezug auf Y_t selbst formuliert. Alternativ zu (4) und (5) werden daher auch

$$Y_t = \tilde{\gamma} + (I + \tilde{\Pi}) Y_{t-1} + \tilde{U}_t \quad (6)$$

bzw.

$$\nabla Y_t = \tilde{\gamma} + \tilde{\Pi} Y_{t-1} + \tilde{U}_t \quad (7)$$

betrachtet. Um zu kennzeichnen, dass sich die Werte der Parameter und der stochastischen Störterme von jenen in (4) bzw. (5) unterscheiden, werden hierbei Tildennotierungen verwendet. In ihren allgemeinen Eigenschaften sind $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\Pi}$ und $\tilde{U}_t = (\tilde{U}_{t,1}; \tilde{U}_{t,2})'$ vollkommen analog zu γ , Π und U_t zu verstehen. In Tabelle 1 werden die Ergebnisse des λ -trace-Tests der Nullhypothese $H_0: r = r_0$ gegen die Alternativhypothese $H_1: r > r_0$ wie auch die Ergebnisse des λ -max-Tests von $H_0: r = r_0$ gegen $H_1: r = r_0 + 1$ sowohl in Bezug auf $\ln Y_t$ als auch in Bezug auf Y_t berichtet ($r_0 = 0, 1$). Die Prüfgrößen und deren asymptotische Verteilungen hängen – analog zu univariaten Einheitswurzeltests – von der Spezifikation der Konstanten γ bzw. $\tilde{\gamma}$ ab.²¹ Diesbezüglich lassen sich (5) bzw. (7) mit $\gamma := \gamma_0 + \alpha\beta_0$ und $\Pi := \alpha\beta'$ bzw. mit $\tilde{\gamma} := \tilde{\gamma}_0 + \tilde{\alpha} \tilde{\beta}_0$ und $\tilde{\Pi} := \tilde{\alpha} \tilde{\beta}'$ folgenderweise separieren:

²⁰ Vgl. *Enders* (1995).

²¹ Eine Erläuterung der Zusammenhänge findet sich in *Eberts* (2002), S. 71–74.

$$\nabla \ln Y_t = \gamma_0 + \alpha (\beta_0 + \beta' \ln Y_{t-1}) + U_t \quad (8)$$

bzw.

$$\nabla Y_t = \tilde{\gamma}_0 + \tilde{\alpha} (\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}' Y_{t-1}) + \tilde{U}_t \quad (9)$$

Die Untersuchungen beruhen auf je 353 deutschen und US-amerikanischen Beobachtungen logarithmierter Aktien-Performance-Indizes im Zeitraum von März 1973 bis August 2002. Zwar ist theoretisch zur Analyse langfristiger Trends der Aktienindizes die Jahresbasis ideal.²² Allerdings lägen dann maximal 29 Beobachtungen pro Zeitreihe auf Jahresbasis vor, so dass – insbesondere im Kontext der Einheitswurzelproblematik – nicht von hinreichend trennscharfen statistischen Tests ausgegangen werden kann.²³ Insofern stellt die Betrachtung der Aktienmärkte am Monatsende einen Ausweg aus dem Problem weniger Datenpunkte dar.

Tab. 1: Tests des Kointegrationsrangs r

von Π bezüglich $\ln Y_t$						
Konstante	$\gamma = 0$ ($\gamma_0 = \beta_0 = 0$)		$\gamma = \alpha \beta_0$ ($\gamma_0 = 0$)		$\gamma = \gamma_0 + \alpha \beta_0$	
λ -trace-Tests ($H_0: r = r_0$ gegen $H_1: r > r_0$)						
$r_0 = 0$	9,45	(12,53)	13,02	(19,96)	9,39	(15,41)
$r_0 = 1$	3,18	(3,84)	3,55	(9,24)	0,001	(3,76)
λ -max-Tests ($H_0: r = r_0$ gegen $H_1: r = r_0 + 1$)						
$r_0 = 0$	6,27	(11,44)	9,47	(15,67)	9,39	(14,07)
$r_0 = 1$	3,18	(3,84)	3,55	(9,24)	0,001	(3,76)
von $\tilde{\Pi}$ bezüglich Y_t						
Konstante	$\tilde{\gamma} = 0$ ($\tilde{\gamma}_0 = \tilde{\beta}_0 = 0$)		$\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} \tilde{\beta}_0$ ($\tilde{\gamma}_0 = 0$)		$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_0 + \tilde{\alpha} \tilde{\beta}_0$	
λ -trace-Tests ($H_0: r = r_0$ gegen $H_1: r > r_0$)						
$r_0 = 0$	17,50 *	(12,53)	25,26 *	(19,96)	23,50 *	(15,41)
$r_0 = 1$	0,29	(3,84)	1,38	(9,24)	0,23	(3,76)
λ -max-Tests ($H_0: r = r_0$ gegen $H_1: r = r_0 + 1$)						
$r_0 = 0$	17,21 *	(11,44)	23,88 *	(15,67)	23,27 *	(14,07)
$r_0 = 1$	0,29	(3,84)	1,38	(9,24)	0,23	(3,76)

Anmerkungen: Die Tabelle gibt die Werte der Teststatistiken unter drei alternativen Konstantenspezifikationen wieder. In Klammern findet sich jeweils die zum Signifikanzniveau 5% simulierte untere kritische Grenze des Verwerfungsbereichs nach *Osterwald-Lenum* (1992). Werte der Prüfgröße, für welche die jeweilige Nullhypothese zu verwerfen ist, sind mit * gekennzeichnet.

²² So werden mit der Jahresperiode saisonale Effekte ausgeblendet, die etwa durch zeitliche Häufungen von höheren Dividendenausschüttung zwischen Mai und Juli in Deutschland hervorgerufen sein können Vgl. *Richard* (1992), S. 180.

²³ Überlappende Jahresdifferenzen stellen nur formal eine Verbreiterung der Datenbasis dar. Im Grunde handelt es sich um ein gewogenes Mittel der 28 überlappungsfreien Beobachtungen.

Die Testresultate sprechen unabhängig von der gewählten Konstantenspezifikation und unabhängig vom herangezogenen Testverfahren einheitlich gegen das Vorliegen einer Kointegrationsbeziehung zwischen den logarithmierten realen Aktien-Performance-Indizes in $\ln Y_t$. Interessanterweise ergibt sich ein differierendes Ergebnis, wenn die unlogarithmierten Indizes betrachtet werden. Im gleichen Untersuchungszeitraum lässt sich unabhängig von Konstantenspezifikation und Testverfahren das Vorliegen eines Kointegrationsrangs von Eins zwischen den Komponenten von Y_t zum Signifikanzniveau 5% nachweisen.²⁴

Die modellierten absoluten Indexdifferenzen ∇Y_t stellen erst nach der Transformation $\nabla Y_t / Y_{t-1}$ diskrete Aktienrenditen dar. Auf Grund der statistischen Eleganz stetiger Renditen im Zeitreihenkontext ist das vorliegende Resultat, dass sich eine signifikante (lineare) Kointegrationsbeziehung lediglich zwischen den unlogarithmierten Indizes feststellen lässt, zunächst enttäuschend. Dieses Ergebnis darf aber keinesfalls als Indiz dafür interpretiert werden, dass der Einfluss der Kointegrationsbeziehung der Indizes auf die Renditeentwicklung nur schwach sein und keine nennenswerten Auswirkungen auf die langfristige Prognostizierbarkeit der Aktienmärkte haben kann. Gerade im Fall von Aktienmarktbeobachtungen mit zeitweise deutlich von Null abweichenden Renditen sind stetigen Renditen häufig substantiell geringer als die korrespondierenden diskreten Werte. Auf Grund der enormen Volatilität sind damit die Unterschiede der beiden verschiedenen Rendite-Kennzahlen nicht mehr vernachlässigbar. Entsprechend sind Evidenzen für $\Pi = 0$ und $\tilde{\Pi} \neq 0$ durchaus miteinander zu vereinen. Für den weiteren Verlauf des vorliegenden Papiers interessiert somit, welchen Effekt die Verwendung von (7) zur Prognose der realen diskreten Aktienmarktrendite Deutschlands und der USA im Vergleich zum traditionellen statischen Random-Walk-Modell hat.

²⁴ Unter $\gamma = \gamma_0 + \alpha\beta_0$ ist der Test von $H_0: r = 1$ gegen $H_1: r = 2$ allerdings unsinnig. Vgl. *Lütkepohl* (2001), S. 688. Unabhängig von der gewählten Konstantenspezifikation kann $r = 2$ – d.h. der Fall, dass die Indizes keiner trendbehafteten Entwicklung folgen – in der vorliegenden Fragestellung aus Plausibilitätsüberlegungen ausgeschlossen werden. Vgl. Abbildung 2.

3.2 Modellschätzung

Für die Modellschätzung wird vom bezüglich $\tilde{\gamma}$ unrestringierten Ansatz

$$\nabla Y_t = \tilde{\gamma}_0 + \tilde{\alpha} (\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}' Y_{t-1}) + \tilde{U}_t \quad (10)$$

ausgegangen und dieser auf einen Kointegrationsrang von $r = 1$ konditioniert. Zur Identifikation von $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ wird die erste Komponente des Kointegrationsvektors $\tilde{\beta}$ auf den Wert Eins restringiert. Für die absoluten Differenzen der normierten realen Aktien-Performance-Indizes für Deutschland ($\nabla Y_{t,1}$) und die USA ($\nabla Y_{t,2}$) ergeben sich nach der simultanen Schätzprozedur von *Johansen* folgende Parameterschätzungen (10):

$$\begin{aligned} \nabla Y_{t,1} &= 0,9191 - 0,1374 (Y_{t-1,1} - 0,8941 Y_{t-1,2} - 29,6619) + \tilde{U}_{t,1} \\ \nabla Y_{t,2} &= 1,1402 - 0,0675 (Y_{t-1,1} - 0,8941 Y_{t-1,2} - 29,6619) + \tilde{U}_{t,2} \end{aligned} \quad (11)$$

Der Vektor $\tilde{\gamma}_0$ besitzt keine standardmäßige Verteilung. Mittels eines Likelihood-Ratio-Tests kann jedoch die Hypothese $H_0: \tilde{\gamma}_0 = 0$ überprüft werden, welche die Existenz eines linearen deterministischen Trends in den Aktienindizes ausschließt. Im vorliegenden Fall kann die Restriktion $\tilde{\gamma}_0 = 0$ zum Signifikanzniveau von 5% nicht verworfen werden, was auf Grund der Zeitreihenverläufe in Abbildung 2 durchaus intuitiv ist. Der Klammerausdruck in beiden Gleichungen von (11) stellt die geschätzte Kointegrationsbeziehung dar. Diese wird als Realisation eines stationären Prozesses aufgefasst und dient der Beschreibung der Indexzuwächse. Beide betrachteten Indizes entwickeln sich hinsichtlich der Vorzeichen der geschätzten Modellkoeffizienten vollkommen parallel. Zwar hängt die Schätzung $\hat{\alpha}$ des Vektors $\tilde{\alpha}$ der Anpassungskoeffizienten von der Normierung des Vektors $\tilde{\beta}$ ab. Trotzdem lässt sich auf Basis der asymptotischen Normalverteilung von $\sqrt{353}(\hat{\alpha} - \tilde{\alpha})$ überprüfen, ob die Komponenten von $\tilde{\alpha}$ Null sind. Mit Koeffizienten von -0,1374 bei einer Standardabweichung von 0,0281 bzw. von -0,0675 bei einer Standardabweichung von 0,0208 ist die Kointegrationsbeziehung zur Beschreibung der Zuwächse sowohl des deutschen als auch des US-amerikanischen realen Aktien-Performance-Index mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% signifikant. Die Kointegrationskoeffizienten selbst folgen asymptotisch einer gemischten Normalverteilung. Es

lässt sich wiederum mittels eines Likelihood-Ratio-Tests prüfen, ob sich der Schätzwert -0,8941 signifikant von -1 unterscheidet. Die Prüfgröße und deren asymptotische χ_1^2 -Verteilung ist dabei auf $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_0 + \tilde{\alpha} \tilde{\beta}_0$ und $r = 1$ konditioniert. Mit einer Prüfgröße von 6,05 kann im vorliegenden Fall nicht von $\beta = (1, -1)$ ausgegangen werden.

Die geschätzte Kointegrationsbeziehung in (11) ermöglicht Aussagen über die Struktur des intertemporalen Zusammenhangs der betrachteten preisniveaubereinigten Aktienindizes: Ist die Abweichung von der Gleichgewichtsbeziehung in der Vorperiode sehr hoch - indem etwa der reale deutsche Aktien-Performance-Index relativ zum US-amerikanischen hoch ist - bewirkt der Anpassungsprozess, dass die Änderungen des deutschen Indexes in der Folgeperiode überproportional niedrig ausfallen. Ist umgekehrt der reale deutsche Aktien-Performance-Index vergleichsweise niedrig, werden die Änderungen des deutschen Indexänderungen in der Folgeperiode tendenziell hoch sein. Dieses Resultat spiegelt sich auch in den in Abbildung 4 dargestellten orthogonalisierten Impulse/Response-Folgen. Diese betrachten, wie sich einmalige (positive) Schocks - in Höhe einer Standardabweichung - auf $\tilde{U}_{t,1}$ bzw. auf $\tilde{U}_{t,2}$ in den folgenden 60 Perioden auf $\nabla Y_{t,1}$ und auf $\nabla Y_{t,2}$ auswirken. Im Gegensatz zum statischen Random-Walk-Ansatz besitzen einmalige Schocks in (10) wegen des vorliegenden Kointegrationszusammenhangs nicht nur ein-, sondern mehrperiodische Auswirkungen auf die Aktienmarktentwicklung. Der deutsche und der US-amerikanische reale Aktien-Performance-Index entfernen sich auf Dauer nicht beliebig weit voneinander. So führt ein positiver Impuls auf den deutschen Aktienmarkt in den Folgeperioden zur Abnahme des realen deutschen Aktien-Performance-Indexes, wodurch der kontemporale Effekt über die Zeit aufgehoben wird. Demgegenüber bewirkt ein positiver Impuls auf den US-amerikanischen Aktienmarkt für den jeweils betrachteten Aktienmarkt im Absolutbetrag zwar vergleichbar hohe, aber positive reale Effekte. D.h. sowohl der deutsche als auch der US-amerikanische reale Aktien-Performance-Index schrauben sich dauerhaft auf ein höheres Niveau, wobei der Gesamteffekt wesentlich stärker ist als die kontemporale Wirkung.

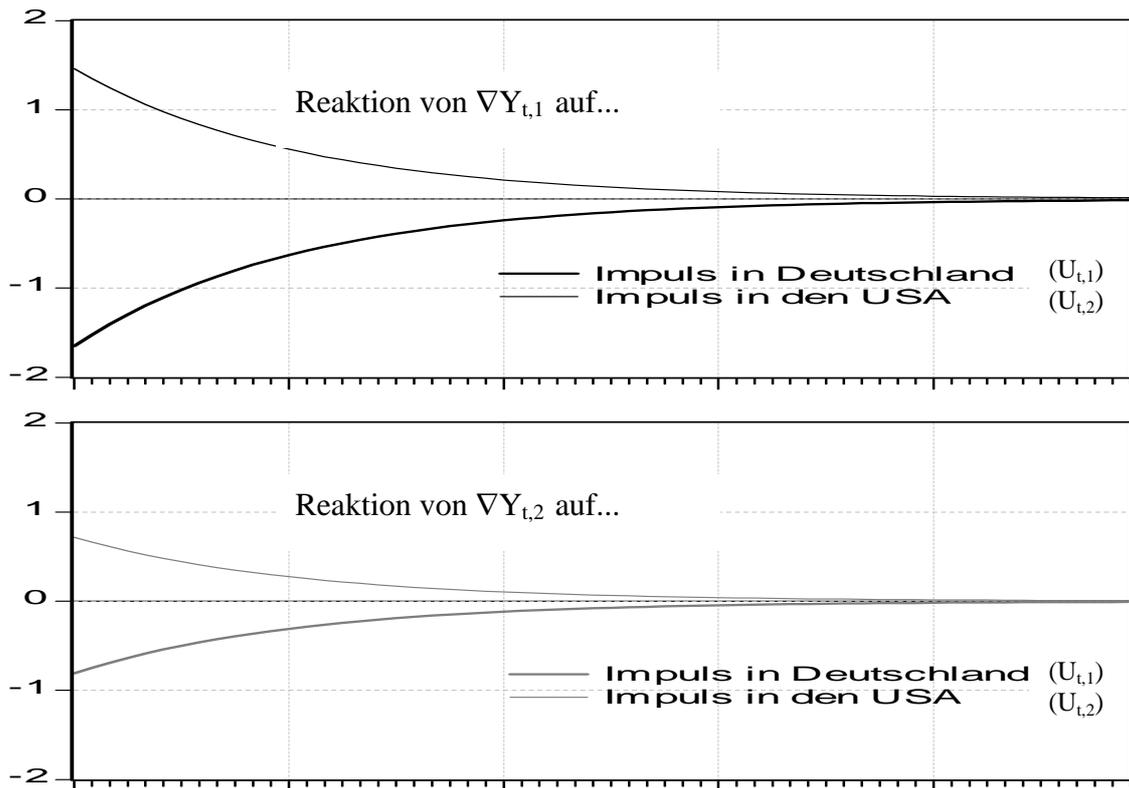


Abb. 4: Impulse/Response-Folgen für ∇Y_t über 60 Perioden

3.3 Diskrete reale Aktienmarkt-Renditen

Interessant ist nun, ob der geschätzte Ansatz einen Fortschritt bei der Beschreibung der diskreten realen Renditeentwicklung bietet. Zu diesem Zweck werden die jeweils 353 Realisationen von $\nabla Y_t / Y_{t-1}$ und von deren zufällige Komponenten \tilde{U}_t / Y_{t-1} im Schätzzeitraum gegenüber gestellt. Tabelle 2 zeigt die daraus resultierenden deskriptive Statistiken:

Tab. 2: Deskriptive Statistiken der einperiodischen realen diskreten Aktienmarkt-Renditen und deren zufällige Komponenten für Deutschland (1) und die USA (2)

	$\nabla Y_{t,1} / Y_{t-1,1}$	$\nabla Y_{t,2} / Y_{t-1,2}$	$\tilde{U}_{t,1} / Y_{t-1,1}$	$\tilde{U}_{t,2} / Y_{t-1,2}$
Mittelwert	0,0057	0,0057	-0,0058	-0,0042
Standardabweichung	0,0568	0,0462	0,0605	0,0503
Schiefe	-0,45	-0,30	0,01	-0,14
Kurtosis	4,59	4,63	3,99	3,86

Die monatlichen Kennzahlen zeigen, dass wegen der hohen Volatilitäten sämtliche Mittelwerte nicht signifikant von Null verschieden sind. Dabei sind die Standardabweichungen bei den Zufallstermen sogar noch höher als bei den beschriebenen Renditevariablen. Teils lässt sich dieses Resultat auf die im Vergleich zu den entsprechenden Renditeverteilungen geringere Linksschiefe und kleinere Überkurtosis der Verteilungen zurückführen.²⁵ Während die diskreten Realrenditen eine signifikante Linksschiefe aufweisen, ist die Schiefe der Komponenten des Vektors \tilde{U}_t / Y_{t-1} mit Werten betragsmäßig kleiner als $1,96 \sqrt{6/353} > 0,25$ auf Basis der asymptotischen Verteilung der Teststatistik mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% insignifikant. Danach kann Kointegration der Indexreihen als Erklärung der Linksschiefe der realen Renditeverteilungen herangezogen werden. Wenngleich die Kurtosis mit 0,99 bzw. $0,86 > 2 * 1,96 \sqrt{6/353}$ noch immer signifikant vom Wert 3 einer normalverteilten Zufallsvariablen abweicht, sind die Verteilungen jeweils wesentlich weniger gewölbt als bei den korrespondierenden Renditen. Die in Abbildung 5 aufgezeigten zeitlichen Entwicklungen von $\tilde{U}_{t,1} / Y_{t-1,1}$ und $\tilde{U}_{t,2} / Y_{t-1,2}$ dienen der Veranschaulichung:

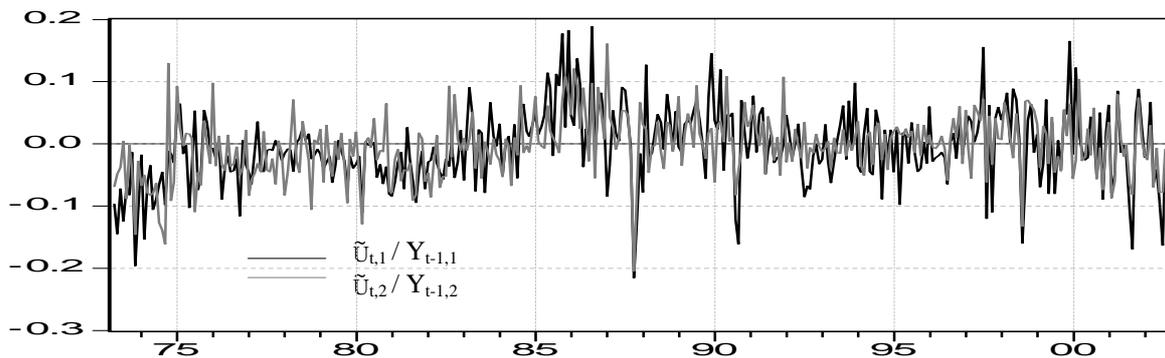


Abb. 5: Zeitreihenentwicklung der zufallsabhängigen Renditeterme

²⁵ Demgegenüber besitzt $\tilde{U}_{t,i}$ selbst eine leicht geringere Standardabweichung, Schiefe wie auch Überkurtosis als $\nabla Y_{t,i}$ ($i = 1,2$). Die Kombination von Überkurtosis und Linksschiefe der Aktienrenditen ist eine zentrale Risikoeigenschaft von Aktienanlagen.

3.4 Prognoseeigenschaften

Auf Grund der Beschreibung von Korrelationszusammenhängen sind explorative Zeitreihenansätze gerade im finanzwirtschaftlichen Bereich zu Prognosezwecken prädestiniert. Auch Ansatz (11) stellt letztlich nichts als eine Abbildung historischer Wirkungszusammenhänge deutscher und US-amerikanischer realer Aktienmarktrenditen dar. Mangels eines dahinter stehenden Erklärungsansatzes bleibt unklar, wann er gute oder weniger gute Prognosen liefert. Wegen der gezielten Nutzung der Informationen über einen historischen Kointegrationszusammenhang sollte das dynamische Modell unter konstanten ökonomischen Rahmenbedingungen jedoch besser funktionieren als ein Random-Walk- als der übliche statische Prognoseansatz. Zunächst werden deshalb die Eigenschaften von bedingten realen Renditeprognosen in der Schätzperiode betrachtet. Als Kriterium der Prognoseperformance dienen mittlere quadratische Prognosefehler (Forecast Mean Squared Error, FMSE). Die Berücksichtigung der Streuung der Parameterschätzer führt dabei auf Grund der In-Sample-Betrachtung zu einer Steigerung der Prognosegenauigkeit.²⁶ Insofern scheint es – zumindest bei In-Sample-Analysen – die bessere Strategie zu sein, Abweichungen der Schätzwerte von den unbekannt wahren Koeffizienten zu vernachlässigen. Damit wird es nicht zuletzt auch im Zeitreihenmodell möglich, bedingte mittlere quadratische Prognosefehler von mehrperiodischen bedingten Renditen analytisch zu bestimmen. Bleibt die Streuung der Parameterschätzung unbeachtet, dann ergibt sich der bedingte einstufige FMSE unter Standardannahmen als geschätzte Residuenvarianz der betrachteten Prozesse. Eine mehrperiodische Random-Walk-Fortschreibung impliziert dann weiterhin ein mit dem Prognosehorizont h lineares Wachstum der h -Schritt-FMSE auf Ebene von $\nabla_h Y_{t,i} = Y_{t,i} - Y_{t-h,i}$ ($i = 1,2$). Im Zeitreihenmodell (10) ergibt sich für den bedingten FMSE unter Vernachlässigung der intrinsischen Ungenauigkeit der Parameterschätzung der Term $\sum_{j=0}^{h-1} \psi_{(i\bullet)}^{(j)} \Sigma_U \left(\psi_{(i\bullet)}^{(j)} \right)'$. Dabei bezeichnet $\psi_{(i\bullet)}^{(j)}$ die i -te Zeile der Matrizenpotenz Ψ^j , wobei $\Psi := (I + \tilde{\Pi})$. Die \tilde{U}_t aus (10) seien im Zeitablauf unabhängig identisch verteilt mit Erwartungsvektor Null und Varianz-Kovarianz-Matrix Σ_U , während für das Random-Walk-Modell eine Varianz-Kovarianz-Matrix Σ bezüglich des stochastischen Störterm unterstellt und deren i -tes Hauptdiagonalelement mit $\Sigma_{(ii)}$ bezeichnet wird.

²⁶ Vgl. Anhang A.

Im Rahmen des Ungleichheitskoeffizienten nach *Theil* wird dann der FMSE einer bedingten h-Schritt-Prognose eines dynamischen Modells in Relation zu jenem einer h-stufigen Random-Walk-Prognose betrachtet. Als relatives Vergleichskriterium wird das Theilsche U im Folgenden als Wurzel des bedingten h-Schritt-FMSE des Zeitreihenmodells im Verhältnis zur Wurzel des entsprechenden h-Schritt-FMSE des Random-Walk-Ansatzes spezifiziert:

$$U = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^{h-1} \psi_{(i\bullet)}^{(j)} \Sigma_U \left(\psi_{(i\bullet)}^{(j)}\right)'}{h \Sigma_{(ii)}}} \quad (12)$$

Werden anstelle von $\nabla_h Y_{t,i} = Y_{t,i} - Y_{t-h,i}$ diskrete Renditen fokussiert, so ergeben sich die auf die Information im Zeitpunkt t-h bedingten mittleren quadratischen Prognosefehler in Abhängigkeit vom Prognosezeitpunkt t anhand der Division durch den Wert Y_{t-h}^2 . Wenn allerdings für die diskreten realen Aktienrenditeprognosen lediglich das Theilsche U interessiert, dann kürzt sich der Divisor im Zähler und Nenner heraus, so dass (12) bereits die Prognoseperformance bezüglich diskreter Renditen beschreibt.

In Tabelle 3 ist die Entwicklung des Theilschen U über verschiedene Prognosehorizonte zwischen einem und 60 Monaten zusammengefasst.

Tab. 3: Theilsches U der h-Schritt-Prognoseperformance

	$\nabla Y_{t,1} / Y_{t-1,1}$	$\nabla Y_{t,2} / Y_{t-1,2}$
h = 1	0,9676	0,9854
h = 3	0,9012	0,9883
h = 6	0,8271	1,0001
h = 12	0,7461	1,0357
h = 18	0,7192	1,0733
h = 24	0,7174	1,1065
h = 30	0,7256	1,1340
h = 36	0,7367	1,1564
h = 48	0,7581	1,1893
h = 60	0,7746	1,2113

Anmerkungen: Betrachtet wird der bedingte FMSE von h-stufigen Prognosen in der Schätzperiode von März 1973 bis August 2002 im Verhältnis zur extrinsischen Prognoseungenauigkeit eines statischen Modells.

Die bedingten FMSE steigen als kumulierende Größe mit zunehmender Schrittweite h , worin sich die wachsende Unsicherheit langfristiger Prognosen ausdrückt. Sie spiegeln die wachsende Unsicherheit in der Zeitreihenentwicklung wider, die auf zufällige, nicht durch das Modell beschriebene und daher im Störterm aufgefangene Effekte zurückgehen. Bei einperiodischen In-Sample-Prognosen ergeben sich im (höher parametrisierten) Zeitreihenmodell jedoch im Vergleich zum Random-Walk-Ansatz systematisch kleinere Werte des bedingten FMSE und damit Werte kleiner als Eins für das Theilsche U . Da die Indizes im vorliegenden dynamischen Modell ebenso wie beim Random-Walk nichtstationären Prozessen folgen, liefert der Kointegrationsansatz – wegen fehlspezifizierter intertemporaler Varianz-Kovarianz-Strukturen – aber nicht notwendigerweise auch langfristig kleinere bedingte FMSE. Im vorliegenden Fall sinkt das Theilsche U mit zunehmender Prognoseschrittweite auf Werte kleiner als 0,72 für die diskrete reale deutsche Aktienmarktrendite. Erst ab einem Prognosehorizont von etwa zwei Jahren steigt es dann leicht an. Dabei ist allerdings anzumerken, dass der bedingte FMSE bereits für $h = 24$ bei 353 monatlichen Beobachtungen nur auf 14 überlappungsfreien Zwei-Jahres-Renditen beruht. Mit zunehmendem h sinkt die Verlässlichkeit der Schätzung entsprechend weiter. Die stabilisierenden Kointegrationsbeziehungen bewirken demnach, dass sich die diskrete deutsche Realrendite auf Grund des internationalen Aktienmarktverbundes genauer prognostizieren lässt, als es der statische Prognoseansatz suggeriert – und zwar nicht nur in der kurzfristigen, sondern auch in der strategischen Analyse.²⁷

Für die diskreten realen US-amerikanischen Aktienmarktrenditen ergeben sich dagegen abweichende Schlussfolgerungen. Die Werte des Ungleichheitskoeffizienten nach *Theil* wachsen mit zunehmender Prognoselänge auf Werte größer als Eins (ab $h = 6$). Darin drückt sich eine im Prognosezeitraum überproportional steigende Prognoseunsicherheit aus, welche im statischen Fall ignoriert wird. So überschätzt der Random-Walk-Ansatz das kurzfristige Renditerisiko geringfügig, unterschätzt aber das langfristige Renditerisiko. Tatsächlich korrespondiert diese zunehmende Prognoseunsicherheit mit den Evidenzen aus der Impulse-Response-Analyse, wonach der US-amerikanische reale Aktien-Performance-Index anders als der deutsche empfindlich und dauerhaft auf unvorhersehbare exogene Schocks reagiert.

²⁷ Vgl. auch *Granger* (1986), S. 219.

3.5 Strukturbruchtest

Im Schätzzeitraum führt die dynamische Modellspezifikation (10) konstruktionsbedingt zu einer Präzisierung der Prognoseunsicherheit. Dass das dynamische Modell auch außerhalb der Schätzperiode genauere Aussagen als das statische Benchmark-Modell ermöglicht, ist jedoch keineswegs gesichert. Daher werden abschließend Strukturbruchtests betrachtet. Wird im Betrachtungszeitraum kein Strukturbruch offensichtlich, dann liegt zumindest kein Anhaltspunkt vor, dass das Zeitreihenmodell zukünftig keinen Bestand hat.

Da statistische Inferenzen im Kointegrationskontext auf asymptotischen Verteilungen basieren, sind Testresultate in kleinen Schätzperioden wenig vertrauenswürdig. Unterteilungen des Untersuchungszeitraums in verhältnismäßig lange Schätz- und entsprechend relativ kurze Out-of-Sample-Perioden sind umgekehrt ebenfalls unbefriedigend. Schließlich sind stärkere Abweichungen vom Random-Walk-Ergebnis – über den gesamten Untersuchungszeitraum – gerade mit zunehmender Prognoseschrittweite aufgetreten, so dass längerfristige Aktienmarktprojektionen ins Zentrum des Interesses rücken. Auf Grund dieser Problematik wird das folgende Vorgehen gewählt: Der Gesamtzeitraum wird in zwei Subperioden unterteilt und die Schätzungen der verschiedenen Modellparameter in beiden Subperioden gegenüber gestellt. Dabei soll die Subperiodengrenze jedoch nicht ad hoc festgelegt werden. Statt dessen werden die Koeffizientenschätzer für alle Unterteilungen der Gesamtperiode in zwei Subperioden berechnet. Die Ergebnisse sind in Anhang B in graphischer Form für jeden Modellparameter dargestellt, wobei allerdings nur die Schätzergebnisse abgebildet sind, für welche die entsprechende Subperiode einen gewissen Mindestbeobachtungsumfang nicht unterschreitet.

Zunächst fällt auf, dass sich die rekursiven Parameterschätzer für wachsende Schätzzeiträume ausgehend vom Endzeitpunkt August 2002 vergleichsweise glatter entwickeln als ausgehend vom Startzeitpunkt April 1973.²⁸ Dies kann als Indiz gewertet werden, dass die Aktienmarktentwicklung zu Beginn des Untersuchungszeitraums nicht mehr vollständig mit der heutigen korrespondiert. Tatsächlich sind die Aktienmärkte heute – schon wegen der zeitgenaueren elektronischen Momentaufnahmen – volatiler. Bezüglich der beiden Kointegrationskoeffizienten sind besonders Ausreißer im Dezember 1996 auffällig. Davon abgesehen stimmen die

²⁸ Die Ränder der sechs Schaubilder in Anhang B repräsentieren also Schätzungen über den gesamten Untersuchungszeitraum. Deshalb geben sie exakt die in (11) angegebenen jeweiligen Parameterwerte wieder.

Parameterschätzer der Kointegrationsbeziehung in den jeweils gegenübergestellten Subperioden grundsätzlich überein - zumindest, wenn Periodengrenzen seit 1983 betrachtet werden. Insofern scheint der geschätzte Kointegrationszusammenhang auch für die Zukunft vertrauenswürdig zu sein. Speziell ist ein deutlicher Strukturbruch seit 1999 nicht zu entdecken, so dass die reale diskrete Aktienmarktrendite zum Vergleich des deutschen und des US-amerikanischen Aktienmarktes weiterhin eine geeignete Vergleichsgröße darstellt. Bei den übrigen Regressionsparametern ergeben sich auffällige Subperiodendifferenzen. Die beiden Konstantenschätzer zeigen einen volatilen Verlauf mit deutlichem Aufwärtstrend, je aktueller die Schätzperiode ist. Zumindest im Mittel über die gesamte Betrachtungszeit, sind die konstanten Effekte nicht signifikant von Null verschieden.²⁹ Demgegenüber ergibt sich, dass die Anpassungskoeffizienten sowohl am deutschen als auch am US-amerikanischen Aktienmarkt gegenwärtig gesunken sind. Daraus kann geschlossen werden, dass die Anpassungseffekte in ihrer Höhe für die Prognose an Bedeutung verlieren. Das bedeutet jedoch nicht, dass die traditionelle Random-Walk-Fortschreibung eine für die Zukunft angemessene Approximation ist. So lässt sich insgesamt folgern, dass die Schätzung (11) einen begründeten Prognoseansatz v.a. für die deutsche reale Aktienmarktrendite darstellt. Zur Berücksichtigung sinkender Anpassungskoeffizienten und wachsender zeitkonstanter Effekte können jedoch Adjustierungen der Regressionsparameter sinnvoll sein.

4 Ergebnisse und Ausblick

Abbildung 2 belegt einen empirischen Zusammenhang zwischen den realen Performance-Indizes des deutschen und des US-amerikanischen Aktienmarktes. Kointegrationstests ergeben, dass sich dieser Aktienmarktverbund in einer signifikanten statistischen Kointegrationsbeziehung zwischen den betrachteten Indizes äußert. Deshalb wird das traditionelle Random-Walk-Modell zur Prognose diskreter realer Aktienmarktrenditen im vorliegenden Papier um einen Kointegrationszusammenhang der realen Aktien-Performance-Indizes von Deutschland und den USA erweitert. Der konstante Term bleibt im Schätzansatz unrestringiert, ohne dass sich Evidenzen für einen linearen Zeittrend in den realen Aktienindizes ergeben.

²⁹ Vgl. Abschnitt 3.2.

Mit dem Modell sind neue Erkenntnisse insbesondere zur Prognostizierbarkeit der deutschen Aktienmarktrendite verbunden. Die systematische Verknüpfung der nicht-stationären realen Aktien-Performance-Indizes von Deutschland und den USA, nämlich deren gemeinsamer stochastischer Trend, bewirkt, dass die Indizes zumindest in der langen Sicht aneinander gekoppelt sind. Entsprechend ergeben sich gerade in der strategischen Perspektive besonders deutliche Abweichungen von der statischen Random-Walk-Prognose. So lässt sich die reale deutsche diskrete Aktienmarktrendite im Betrachtungszeitraum über eine Periode besser, mit wachsendem Prognosehorizont zunehmend besser und langfristig deutlich besser prognostizieren als es das traditionelle Random-Walk-Konzept reflektiert. Für die diskrete US-amerikanische reale Aktienmarktrendite erweist sich die mehrperiodische Random-Walk-Fortschreibung dagegen als gefährlich, da sie das in den historischen Informationen enthaltene Renditerisiko unterschätzt.

Aus der Untersuchung der geschätzten Kointegrationsbeziehung ergeben sich Hinweise für deren Beständigkeit über die Jahrzehnte, wenngleich ihr Einfluss für die Prognose der zukünftigen diskreten realen Aktienmarktrenditen tendenziell an Stärke verliert. Es zeigt sich darüber hinaus, dass die Kointegration einen Erklärungsbeitrag für die Linksschiefe der diskreten Realrenditen liefert. Um auch die Wölbung der diskreten Realrenditeverteilungen zu beschreiben, könnten die Residuenprozesse in einer vertiefenden Analyse auf mögliche GARCH-Effekte untersucht werden. Durch GARCH-Ansätze lässt sich die Varianz der Modellresiduen und das damit abgebildete Prognoserisiko genauer auf aktuelle Informationen abstimmen. Die Existenz der vierten Momente der Störterme ist durch die Beschreibung über GARCH-Prozesse jedoch nicht mehr gesichert und leptokurtische Verteilungen können entstehen. Dabei bleibt individuell zu prüfen, inwieweit die herangezogenen statistischen Grundlagen der Kointegrationsanalyse Bestand dann noch haben.

Literaturverzeichnis

- Albrecht, P. / Maurer, R. / Ruckpaul, U.* (2001): Shortfall-Risks of Stocks in the Long Run, in: *Financial Markets and Portfolio Management*, 15, S. 481-499
- Barberis, N.* (2000): Investing for the Long Run when Returns Are Predictable, in: *The Journal of Finance*, 55, S. 225-264
- Campbell, J.Y. / Lo, A.W. / MacKinlay, A.C.* (1997): *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton, New Jersey
- Cochrane, J.H.* (1999a): New Facts in Finance, in: *Federal Reserve Bank of Chicago* (Hrsg): *Economic Perspectives*, S. 36-58
- Cochrane, J.H.* (1999b): Portfolio Advice for a Multifactor World, in: *Federal Reserve Bank of Chicago* (Hrsg): *Economic Perspectives*, S. 59-78
- Davis, J.L. / Fama, E.F. / French, K.R.* (2000): Characteristics, Covariances, and Average Returns: 1929 to 1997, in: *The Journal of Finance*, 55, S. 389-406
- Dorfleitner, G.* (2002): Stetige versus diskrete Renditen, Überlegungen zur richtigen Verwendung beider Begriffe in Theorie und Praxis, in: *Kredit und Kapital*, 35, S. 216-241
- Eberts, E.* (2002): *Strategische stochastische Investmentmodelle für den deutschen Kapitalmarkt*, Karlsruhe
- Enders, W.* (1995): *Applied Econometric Time Series*, New York u.a.
- Engle, R.F. / Granger, C.W.J.* (1987): Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing, in: *Econometrica*, 55, S. 251-276
- Fama, E.F.* (1970): Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work, in: *The Journal of Finance*, 25, S. 383-417
- Fama, E.F. / French, K.R.* (1993): Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds, in: *Journal of Financial Economics*, S. 3-56
- Fama, E.F. / French, K.R.* (1996): Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies, in: *The Journal of Finance*, 51, S. 55-84
- Granger, C.W.J.* (1986): Developments in the Study of Cointegrated Economic Variables, in: *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, S. 213-228
- Janßen, B. / Rudolph, B.* (1992): *Der Deutsche Aktienindex DAX, Konstruktion und Anwendungsmöglichkeiten*, Frankfurt a.M.
- Johansen, S.* (1995): *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*, Oxford

- Lütkepohl, H.* (2001): Vector Autoregressions, in: *Baltagi, B.* (Hrsg.): Companion to Theoretical Econometrics, Oxford, Kapitel 32, S. 678-699
- Merton, R.C.* (1980): On Estimating the Expected Return on the Market: An Exploratory Investigation, in: *Journal of Financial Economics*, 8, S. 323–361
- MSCI* (1998): Methodology & Index Policy, März 1998 (<http://www.msci.com>)
- Osterwald-Lenum, M.* (1992): A Note on Quantiles of the Asymptotic Distribution of the Maximum Likelihood Cointegration Rank Test Statistics, in: *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 54, S. 461-472
- Pastor, L. / Stambaugh, R.F.* (2001): The Equity Premium and Structural Breaks, in: *The Journal of Finance*, 56, S. 1207-1239
- Poddig, T.* (1996): Analyse und Prognose von Finanzmärkten, Bad Soden
- Richard, H.-J.* (1992): Aktienindizes, Grundlagen ihrer Konstruktion und Verwendungsmöglichkeiten unter besonderer Berücksichtigung des Deutschen Aktienindex - DAX, Bergisch Gladbach, Köln
- Statistisches Bundesamt* (1997): Datenreport, Zahlen und Fakten über die Bundesrepublik Deutschland, Bonn
- Stehle, R. / Huber, R. / Maier, J.* (1996): Rückberechnung des DAX für die Jahre 1955 bis 1987, in: *Kredit und Kapital*, 29, S. 277-303

Anhang A

Renditeprognose

Zunächst wird die einperiodische diskrete Rendite $\nabla Y_{t,j} / Y_{t-1,j}$ unter $\tilde{\Pi} = 0$ betrachtet, so dass $\nabla Y_{t,j} = \tilde{\gamma}_j + \tilde{U}_{t,j}$, und unter der Annahme $\tilde{U}_{t,j}$ i.i.d. mit $E\tilde{U}_{t,j} = 0$ und $\text{var}\tilde{U}_{t,j} = \Sigma_{(jj)}$. Mittels des GLS-Schätzers $\hat{\tilde{\gamma}}_j$ für $\tilde{\gamma}_j$ ergibt sich dann für den bedingten mittleren quadratischen Prognosefehler der diskreten Rendite über h Perioden $\nabla_h Y_{t,j} / Y_{t-h,j} := (Y_{t,j} - Y_{t-h,j}) / Y_{t-h,j}$ für jede Periode t innerhalb des Schätzzeitraums ($t = 1, 2, \dots, T$):

$$\text{FMSE}_{t,j}(h) | Y_{t-h} = \text{var} \left[h \left(\hat{\tilde{\gamma}}_j - \tilde{\gamma}_j \right) - \sum_{i=0}^{h-1} \tilde{U}_{t-i,j} \right] \cdot \frac{1}{Y_{t-h}^2} = h \Sigma_{(jj)} \left(1 - \frac{h}{T} \right) \cdot \frac{1}{Y_{t-h,j}^2} \quad (\text{A.1})$$

Der mittlere quadratische Prognosefehler wird dabei durch die Anpassung des Parameterschätzers an die Beobachtungen im Schätzzeitraum reduziert. Dagegen führt die Streuung der Parameterschätzfunktion außerhalb der Schätzperiode - unter der Annahme intertemporaler Unabhängigkeit der Störterme - zu einer Erhöhung der Prognose-Unsicherheit, da die beiden Kreuzprodukte im Erwartungswert Null sind:

$$\text{FMSE}_{T+h,j}(h) | Y_T = h \Sigma_{(jj)} \left(1 + \frac{h}{T} \right) \cdot \frac{1}{Y_{T,j}^2} \quad (\text{A.2})$$

Unter Vernachlässigung der Varianz des GLS-Schätzers ergibt sich also für beliebiges t :

$$\text{FMSE}_{t,j}(h) | \tilde{\gamma}_j, Y_{t-h} = h \Sigma_{(jj)} \cdot \frac{1}{Y_{t-h,j}^2} \quad (\text{A.3})$$

Komplexer wird der Fall, wenn die Restriktion $\tilde{\Pi} = 0$ aufgegeben und statt dessen die Prognose im kointegrierten Zeitreihenmodell betrachtet wird. Die Schätzung der normierten Kointegrationskoeffizienten kann vernachlässigt werden, da die Schätzer superkonsistent sind.

Deshalb lassen sich die Vektoren $\tilde{\gamma}_0$ und $\tilde{\alpha}$ aus (10), $\nabla Y_t = \tilde{\gamma}_0 + \tilde{\alpha} (\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}' Y_{t-1}) + \tilde{U}_t$, unter Verwendung der geschätzten Kointegrationsbeziehung als exogene Größe wie übliche GLS-Schätzer ermitteln. Die Varianz-Kovarianz-Matrix der intertemporal unabhängigen und homoskedastischen \tilde{U}_t mit $E \tilde{U}_t = 0$ wird im Unterschied zum Random-Walk-Fall mit Σ_U bezeichnet, deren Hauptdiagonalelemente mit $\Sigma_{U(jj)}$. Zur Vereinfachung der Notation sei $X_{t,j} := (1; \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}' Y_{t-1})$ und $X_j' := (X_{1,j}; X_{2,j}; \dots; X_{T,j})$. So ergibt sich für den einperiodischen bedingten mittleren quadratischen Prognosefehler der diskreten Rendite für jede Periode t innerhalb des Schätzzeitraums ($t = 1, 2, \dots, T$):

$$FMSE_{t,j}(1)|Y_{t-1} = \Sigma_{U(jj)} \left(1 - X_{t,j} (X_j' X_j)^{-1} X_{t,j}' \right) \cdot \frac{1}{Y_{t-1,j}^2} \quad (A.4)$$

während die einperiodische Out-of-Sample-Prognose zu

$$FMSE_{T+1,j}(1)|Y_T = \Sigma_{U(jj)} \left(1 + X_{T,j} (X_j' X_j)^{-1} X_{T,j}' \right) \cdot \frac{1}{Y_{T,j}^2} \quad (A.5)$$

führt. Da mit $\nabla Y_t = \tilde{\Pi} Y_{t-1} + (\tilde{\gamma} + \tilde{U}_t)$ allgemein $\nabla_h Y_t = (\Psi^h - I) Y_{t-h} + \sum_{i=0}^{h-1} \Psi^i (\tilde{\gamma} + \tilde{U}_{t-i})$

gilt, $\Psi = (I + \tilde{\Pi})$, hängt die mehrstufige Prognose nichtlinear von den Parameterschätzern ab. So wird die Berechnung des mehrstufigen bedingten mittleren quadratischen Prognosefehlers erst bei Vernachlässigung der Varianz der GLS-Schätzers möglich und es ergibt sich für beliebiges t :

$$FMSE_{t,j}(h) | \tilde{\gamma}, \Psi, Y_{t-h} = \sum_{i=0}^{h-1} \Psi_{(j\bullet)}^{(i)} \Sigma_U \left(\Psi_{(j\bullet)}^{(i)} \right)' \cdot \frac{1}{Y_{t-h,j}^2} \quad (A.6)$$

Anhang B

Subsample-Analyse: Rekursive VECM-Schätzung

