Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft

Nr. 132

Management von Marktrisiken auf der Basis des Value-at-Risk (VaR)-Ansatzes

von

PETER ALBRECHT

Mannheim 09/2001

Management von Marktrisiken auf der Basis des Value-at-Risk (VaR)-Ansatzes*

Peter Albrecht, Universität Mannheim

1. Einführung

Unter die Kategorie der Marktrisiken einer bestimmten Finanzposition subsumieren wir allgemein alle Risiken, die aus der *Veränderung des Marktpreises* dieser Position über eine bestimmte Zeitperiode resultieren. Die Finanzposition kann dabei ein einzelner Finanztitel, eine Klasse von Finanztiteln (z.B. Aktien) oder aber ein beliebiges Portefeuille aus Finanztiteln sein. Entsprechend der betrachteten Klasse von Finanztiteln kann man etwa Aktienkursänderungsrisiken, Zinsänderungsrisiken, Währungsrisiken sowie Risiken aus derivativen Instrumenten (Forwards/Futures, Optionen, Swaps) unterscheiden. Die resultierenden Risiken hängen dabei von dem Unternehmen/der Institution ab, die die Finanzposition erworben (oder aber leerverkauft) hat, z.B. kann man die Marktrisiken im Handelsbereich einer Bank betrachten, Marktrisiken im Finanzbereich eines Industrieunternehmens, oder aber Marktrisiken im Kapitalanlagebereich eines Versicherungsunternehmens.

Kennzeichnet V_t die Höhe des Marktwertes der Finanzposition zum Zeitpunkt t, so beschreibt

$$\Delta V_h = V_{t+h} - v_t \qquad (1a)$$

die entsprechende *Marktwertänderung* über das Zeitintervall (Haltedauer) [t, t+h], wobei der Marktwert zum Zeitpunkt t als bekannt angenommen werde. Da Verlustrisiken im Vordergrund des Interesses stehen, betrachtet man alternativ den potentiellen Periodenverlust (auf Marktwertbasis)

$$L_h = -\Delta V_h = v_t - V_{t+h} \qquad (1b)$$

der Finanzposition über die betrachtete Haltedauer.

Die mathematische Modellierung von Marktrisiken umfaßt im Kern drei Problemkreise:

---

* Ausarbeitung für das DAV-Seminar „Spezialwissen Finanzmathematik“, Mannheim, 12./13. Oktober 2001.

1) Die *Spezifikation eines* (diskreten oder zeitstetigen) *stochastischen Prozesses* für die Marktwertentwicklung der Finanzposition während der betrachteten Zeitperiode oder vereinfachend die *Spezifikation einer Wahrscheinlichkeitsverteilung* für die Änderung des Marktwertes über die betrachtete Zeitperiode

2) Die Spezifikation eines *Risikomaßes*, einer Meßgröße für das Ausmaß des resultierenden (Markt)-Risikos.

3) Die *Risikoevaluation*, gegeben die Spezifikation des Risikomaßes und der Zufallsgesetzmäßigkeit der Marktwertentwicklung der Finanzposition.

Im weiteren soll zunächst ein (jeweils sehr knapper) Überblick über die vorstehend genannten Problemkreise gegeben werden. Anschließend steht die Standard-Value-at-Risk-Methodologie im Zentrum der Ausführungen.

2. Spezifikation der Zufallsgesetzmäßigkeit der Marktwertentwicklung

Wir wenden uns zunächst dem Gebiet der Modellierung von Aktienkursen V_t im Zeitablauf zu. Zur Analyse der Wertänderungen (1a) bzw. (1b) geht man dabei von einer Modellierung der Renditeentwicklung oder aber der absoluten Kursentwicklung aus. Dabei stellt im Rahmen von Ein-Periodenmodellen die *Normalverteilung* die Basis-Zufallsgesetzmäßigkeit für diskrete Renditen

$$R_h = (V_{t+h} - v_h)/v_h \sim N(\mu, \sigma^2) \tag{2a}$$

bzw. analog für zeitstetige Renditen dar

$$R_h = \ln(V_{t+h}/v_h)\,. \tag{2b}$$

Die absoluten Kurse V_t sind entsprechend normal- bzw. logarithmisch normalverteilt. Allgemeinere Ein-Periodenmodelle versuchen primär, die Abweichungen empirischer Aktienrenditen von der Normalverteilung (z.B. „fat tails“) zu erfassen.

Im Rahmen von diskreten stochastischen Prozessen (Zeitreihen) ist das Standardmodell der *Random Walk*, angewendet entweder auf die absoluten Preisdifferenzen V_{t+h}-V_t oder die logarithmierten Preise. Der Random Walk beinhaltet in seiner Basisform unabhängig und identisch verteilte Änderungen der (logarithmierten) Kurse und wird oftmals mit einer Normalverteilungsannahme verbunden. Entsprechend konzentrieren sich Verallgemeinerungen auf die Verteilungsannahme, die Annahme der Stationarität (z.B. Mean Reversion) sowie die Modellierung der Volatilitäts- und Autokorrelationsentwicklung (z.B. ARCH-, GARCH-Modelle).

Im Rahmen von zeitstetigen Modellen sind die arithmetische bzw. geometrische *Brownsche Bewegung* (Wiener Prozeß) die Standardmodelle, die wiederum auf unabhängige und identisch normalverteilte (logarithmierte) Kurszuwächse führen. Entsprechende Verallgemeinerungen bestehen im Ansatz allgemeinerer *Diffusionsprozesse* (insbesondere beinhaltet dies stetige Pfade), z.B. Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse, oder von *Lévy-Prozessen* (nicht-stetige Pfade).

Neben eine direkte Modellierung von Aktienkursen treten Möglichkeiten der Modellierung der Einflüsse von erklärenden Variablen auf die Kurse (*Single-/Multi-Indexmodelle*, *Multifaktormodelle*).

Schließlich gelangt man durch die Verbindung der Spezifikation der Zufallsgesetzmäßigkeit von Aktienrenditen mit Annahmen eines Kapitalmarkts im Gleichgewicht (*Gleichgewichtsmodelle*, *No Arbitrage-Ansätze*) über die rein mathematisch/statistisch/ökonometrische Modellierung von Aktienkursverläufen hinaus zu ökonomisch/kapitalmarkttheoretisch basierten Modellen (CAPM, Arbitrage Pricing Theorie) von Aktienkursverläufen.

Wenden wir uns nun dem Bereich der Modellierung von Zinstiteln zu. Hier steht das *Barwertkonzept* zur Bestimmung von Marktpreisen im Vordergrund. Auf der Grundlage von deterministisch oder stochastisch modellierten Entwicklungen der fristigkeitsabhängigen Zinssätze (Spot Rates), d.h. der Modellierung der *Zinsstruktur* und ihrer zeitlichen Entwicklung, kann man entsprechend die Kursentwicklung von Zinstiteln/Zinstitelportefeuilles ableiten. Eine zentrale Rolle spielt in diesem Bereich die Analyse von Zinsänderungsrisiken, d.h. die Auswirkungen der Änderungen der Zinsstruktur auf die Bar- und Endwerte von Zinstiteln. Im Bereich der deterministischen Modellierung der Zinsstruktur führt dies insbesondere zu linearen bzw. quadratischen Approximationen der Barwertänderung auf der Basis von *Durations-* bzw. *Konvexitätsanalysen*. Wie im Falle von Aktienkursentwicklungen lassen sich auch die Entwicklung der Preise von Zinstiteln bzw. der Zinsstrukturkurve auf die Entwicklung von exogenen Einflußgrößen zurückführen (z.B.: *Faktormodelle*).

Abschließend gehen wir noch kurz auf den Bereich der Derivate ein. Hier läßt sich die Preisbildung auf die Kursentwicklung der zugrunde liegenden Basistitel zurückführen (*Cost-of-Carry-Ansatz* für Forwards/Futures, *Optionspreistheorie* für Optionen, Bewertung von Swaps analog zu der Bewertung von Zinstiteln). Entsprechend lassen sich Preisänderungen bei Derivaten bei gegebenem Bewertungsmodell auf die Preisänderungen des Basistitels sowie weiterer preisbeeinflussender Faktoren zurückführen.

3. Spezifikation eines Risikomaßes

Das zentrale Risikomaß zur Quantifizierung von Marktrisiken im Rahmen der Value-at-Risk-Methodologie stellt der *Value-at-Risk* (VaR) dar. Formal ist der Value-at-Risk einer Finanzposition zum Konfidenzniveau $0<\alpha<1$ über einen Zeitraum der Länge h definiert durch

$$P(L_h \geq VaR_h) = \alpha \, . \qquad (3)$$

Der Value-at-Risk zum Konfidenzniveau α ist somit diejenige Ausprägung der Verlusthöhe, die mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit nicht überschritten wird. Interpretiert man den VaR als Höhe eines den eingegangenen Risiken zu unterlegenden Kapitals, dann besagt (3), daß die Wahrscheinlichkeit der Aufzehrung dieses Kapitals durch ein negatives Investmentergebnis kontrolliert klein ist.

Des weiteren entspricht der VaR gerade dem $(1-\alpha)$-Quantil der Verteilung der potentiellen Verlusthöhe $L_h = v_t - V_{t+h}$ formal $VaR_h = F_h^{-1}(1-\alpha)$, wobei F_h die Verteilungsfunktion von L_h bezeichnet. Nachfolgende Abbildung illustriert diesen Sachverhalt.

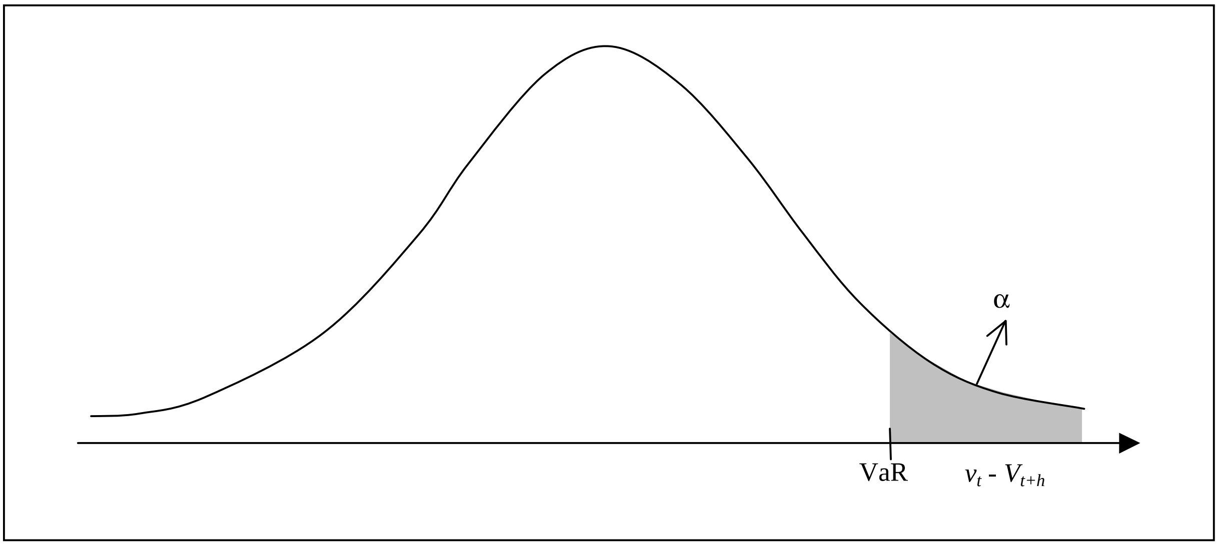

Abbildung: Value-at-Risk als $(1-\alpha)$-Quantil der Verteilung der Verlusthöhe

Des weiteren besteht eine Dualität[1] zwischen der Shortfall-Wahrscheinlichkeit $P(X \leq z)$ relativ zu einem bestimmten Target und dem VaR. Bei der Shortfallwahrscheinlichkeit wird das Target vorgegeben und die Höhe der Shortfallwahrscheinlichkeit bestimmt. Beim Value-at-Risk wird die Höhe der Shortfallwahrscheinlichkeit vorgegeben und das Target für die Zufallsgröße V_{t+h} bzw. ΔV_h bestimmt. Es gilt $z = v_t - VaR_h$ bzw. $z = -VaR_h$. Entsprechend läßt sich eine VaR-Restriktion immer in eine entsprechende Shortfall-Restriktion transformieren und vice versa.

Im folgenden soll der Value-at-Risk quantifiziert werden, wenn von der Annahme ausgegangen wird, daß die Rendite $R_h = (V_{t+h} - v_t)/v_t$ einer Normalverteilung mit Parametern folgt, die proportional zum betrachteten Zeitraum sind, d.h. $R_h \sim N(\mu h, \sigma^2 h)$. Die explizite Berechnung des VaR kann dann auf der Basis der folgenden Überlegung erfolgen. Zunächst beachten wir, dass das $(1-\alpha)$-Quantil einer beliebigen normalverteilten Zufallsvariable X den Wert $N_{1-\alpha}\sigma(X) + E(X)$ annimmt, wobei $N_{(1-\alpha)}$ das $(1-\alpha)$-Quantil der Standard-Normalverteilung bezeichne. Dies liegt darin begründet, dass $[X-E(X)]/\sigma(X)$ einer Standard-Normalverteilung folgt. Unter den getroffenen Annahmen für R_h gilt des weiteren $L_h = v_t - V_{t+h} = -v_t R_h \sim N(-v_t \mu h, v_t^2\ \sigma^2 h)$. Insgesamt folgt damit:

$$\begin{aligned} \mathrm{VaR}_h &= N_{1-\alpha}\sigma(L_h) + E(L_h) \\ &= v_t N_{1-\alpha}\sigma\sqrt{h} - v_t \mu h \quad . \end{aligned} \tag{4}$$

Nimmt man an, daß die mittlere Rendite μh über das betrachtete Zeitintervall approximativ gleich null ist (was vor allem für kurze Zeitintervalle, etwa ein Tag, eine Woche, in praxi als erfüllt angesehen werden kann), so verschwindet der zweite Term auf der rechten Seite der Beziehung (4) und der Value-at-Risk wird damit proportional zur Standardabweichung. Diese Variante unterstreicht den Charakter des Value-at-Risk als Risikomaß.

Beispiel: Value-at-Risk bei Normalverteilungsannahme

> Nehmen wir an, der heutige Kurs eines getätigten Finanzinvestments betrage $v_t = 100$. Über den Zeitraum des nächsten Tages gehen wir von einer Normalverteilung mit Mittelwert 3% und Standardabweichung 5% aus. Wie hoch ist der Value-at-Risk bei einem Konfidenzniveau in Höhe von $\alpha = 1\%$? (Hinweis: $N_{0.99} = 2.33$).
>
> Gemäß (4) ergibt sich der Value-at-Risk für die betrachtete Halteperiode von einem Tag in der angenommenen Konstellation zu VaR = 100(2,33 · 0,05 – 0,03) = 8,65. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein höherer Kursverlust als 8,65 eintritt, d.h. der Kurs am nächsten Tag unter 91,35

[1] Vgl. hierzu allgemein auch Portmann/Wegmann (1998).

sinkt, ist dann gleich dem gewählten Konfidenzniveau von $\alpha = 1\%$. Bildet der Investor eine Kapitalreserve in Höhe von 8,65, dann kann der aus dem Finanzinvestment resultierende potentielle Verlust am nächsten Tag mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% aufgefangen werden.

Offenkundig hängt die Höhe des Value-at-Risk von der getroffenen Verteilungsannahme ab. Um dies zu illustrieren, betrachten wir alternativ den Fall, daß der Kursprozeß einer geometrischen Brownschen Bewegungen mit Drift μ und Diffusion σ folgt. Es gilt dann $\ln(V_{t+h}/v_t) \sim N(mh, \sigma^2 h)$, wobei $m = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$. In diesem Fall ist $X_h := [\ln(V_{t+h}/v_t) - mh]/\sigma\sqrt{h}$ standardnormalverteilt. Damit gilt:

$\alpha = P(X_h \le -N_{1-\alpha}) = P(\ln(V_{t+h}/v_t) \le mh - N_{1-\alpha}\sigma\sqrt{h}) = P(V_{t+h} \le v_t \exp(mh - N_{1-\alpha}\sigma\sqrt{h})) =$

$P(v_t - V_{t+h} \ge v_t[1 - \exp(mh - N_{1-\alpha}\sigma\sqrt{h})])$. Aufgrund der Definition des VaR folgt hieraus insgesamt:

$$VaR_h = v_t[1 - \exp(mh - N_{1-\alpha}\sigma\sqrt{h})]. \tag{5}$$

Unter der Vornahme der Approximation $e^x \approx 1 + x$ reduziert sich dieser Ausdruck auf einen zu (4) identischen.

Das gemäß (3) definierte Risikomaß VaR_h unterliegt der Kritik aus entscheidungstheoretischer Sicht. Zum einen ist es nicht konsistent zur Bernoulli-Nutzentheorie[2], zum anderen besitzt es nicht generell – wohl aber im Normalverteilungsfall für $\alpha < ½$ – die Eigenschaft der Sub-Additivität. Es lassen sich damit Konstellationen konstruieren[3], in denen der Value-at-Risk einer aus zwei Einzelpositionen kombinierten Finanzposition höher ist, als die Summe der Value-at-Risks der Einzelpositionen. Dies widerspricht einer von dem Diversifikationsgedanken geprägten Intuition[4].

Auf der Basis einer axiomatischen Vorgehensweise stellen Artzner et al. (1999) Bedingungen an ein Risikomaß mit wünschenswerten Eigenschaften („kohärentes Risikomaß“), darunter die Subadditivität[5]. Ein Spezialfall ist von besonderem Interesse: Ist V_t eine stetige Zufallsvariable[6] (Existenz einer Dichtefunktion) mit bekannter Verteilung, so ist der bedingte Value-at-Risk oder Tail-VaR

---

2 Vgl. hierzu etwa Guthoff/Pfingsten/Wolf (1998).

3 Vgl. etwa Artzner et al. (1999, S. 216) oder Wirch (1999, S. 107 ff.).

4 Ausführlich zur praktischen Relevanz und Wünschbarkeit der Subadditivitätseigenschaft vgl. Artzner et al. (1999).

5 Allgemein ist im Rahmen der Verteilungsklasse der elliptischen Verteilungen der VaR für $0 < \alpha < 0.5$ ein kohärentes Risikomaß, vgl. Embrechts/McNeil/Straumann (1999, S. 12).

$$\begin{aligned} C\mathrm{VaR}_{\alpha} &= E(L_h \mid L_h \geq \mathrm{VaR}_h) \\ &= \mathrm{VaR}_h + E(L - VaR_h \mid L_h \geq VaR_h) \end{aligned} \tag{6}$$

ein kohärentes Risikomaß. Aus dem letzten Term von (6) wird deutlich, daß der bedingte Value-at-Risk stets ein höheres Risiko aufweist (bzw. zu einer höheren Kapitalunterlegung führt) als der Value-at-Risk. Der CVaR besitzt zudem die Eigenschaft, daß er nicht nur die Verlustwahrscheinlichkeit berücksichtigt, sondern auch die Verlusthöhe, wenn ein solcher Verlust eintreten sollte. Trotz dieser theoretischen Vorzüge des CVaR ist der Value-at-Risk nach wie vor der gültige Standard in der Investmentpraxis, so daß wir uns im folgenden hierauf beschränken werden.

Die bislang diskutierten Risikomaße waren statistische Risikomaße in dem Sinne, daß in ihre Berechnung sowohl Eintrittshöhen als auch Eintrittswahrscheinlichkeiten der zugrunde liegenden Wertentwicklung eingehen. Alternativ bzw. ergänzend kann man Risikomaße betrachten, die auf unter der Annahme bestimmter besonders ungünstiger Szenarien[7] (Worst-Case-Szenarien, Stress-Szenarien) resultierenden Wertentwicklungen beruhen.

4. Verfahren der Risikoevaluation

Unter Vorgabe eines Risikomaßes und einer vollständigen Spezifikation der Zufallsgesetzmäßigkeit der Wertentwicklung (inkl. der Bestimmung der Parameter auf der Basis empirischer Daten) kann zunächst versucht werden, die numerische Ausprägung des Risikomaßes in *analytisch geschlossener* Form exakt oder unter Verwendung *analytischer Approximationsverfahren* approximativ zu berechnen. Ist dies nicht möglich, so kann man alternativ auf der Grundlage einer vollständig spezifizierten Zufallsgesetzmäßigkeit entsprechende Realisationen der betrachteten Wertentwicklung im Wege einer *Monte-Carlo-Simulation* generieren und pro Simulation eine Ausprägung des zu evaluierenden Risikomaßes gewinnen. Auf der Basis „genügend vieler" Simulationen läßt sich so eine durchschnittliche Ausprägung gewinnen, die eine Approximation der gesuchten wahren Größe darstellt.

---

[6] Im Falle einer beliebigen Verteilungsfunktion ist noch eine Modifikation durchzuführen, vgl. Acerbi/Tasche (2001).

[7] Vgl. allgemein zu Scenario-Ansätzen sowie zu weiteren Verfahren des Stress-Testing Dowd (1998, Kapitel 6).

Analytische Evaluation und Monte Carlo-Simulation erfordern jeweils eine vollständige Spezifikation der zugrunde liegenden Zufallsgesetzmäßigkeit (parametrischer Ansatz). Im Falle von Quantilberechnungen und damit auch dem Value-at-Risk ist nur der untere bzw. obere Randbereich der Wahrscheinlichkeitsverteilung von Bedeutung. Mit Verfahren der *Extremwerttheorie* läßt sich dieser Verteilungsbereich durch eine Grenzverteilung (z.B. verallgemeinerte Pareto-Verteilung) approximieren. und die entsprechende Quantilgröße bestimmen (semi-parametrischer Ansatz)[8].

Gänzlich ohne Annahmen über die zugrunde liegende Zufallsgesetzmäßigkeit kommt die „*historische Simulation*“ aus, bei der die interessierenden Größen rein auf der Basis der in der Vergangenheit beobachteten Realisationen (die als aus einer unabhängig und identisch verteilten Zufallsgesetzmäßigkeit entstammend angenommen werden) der betreffenden Finanzposition gewonnen werden. Bei nicht genügend vielen (unabhängigen) Realisationen eröffnet das *Bootstrapping*-Verfahren eine Möglichkeit der Erhöhung des Stichprobenumfangs.

5. Anwendungen der VaR-Methodologie

Die Anwendungen des VaR-Ansatzes sind vielfältig. Im Hauptanwendungsfall, der Marktrisikosteuerung von Banken, wird der VaR zunächst zur Bestimmung risikobasierter Eigenkapitalanforderungen auf der Basis von internen Risikomanagementmodellen eingesetzt. Neben der Kapitalunterlegung von Risiken kann auf VaR-Basis eine Risikokontrolle durchgeführt werden. Dies geschieht entweder durch die Setzung von VaR-basierten Risikolimits oder durch ein risikokontrolliertes Portfoliomanagement unter Beachtung einer VaR-Restriktion oder durch Hedgestrategien etwa mit dem Ziel der VaR-Minimierung. Schließlich kann auf der Basis der Kennzahl Return-on-Risk-Adjusted-Capital (RORAC), auch als Return-on-Value-at-Risk bezeichnet,

$$\mathrm{RORAC} = \frac{\mathrm{Ergebnis}}{\mathrm{VaR}} \tag{7}$$

eine risikoorientierte Ergebnissteuerung durchgeführt werden, etwa durch Vorgabe einer risikoadjustierten Mindestprofitabilität.

Im Falle von Versicherungsunternehmen lassen sich Teile der VaR-Methodologie im Rahmen der Steuerung des Kapitalanlagebereiches anwenden, etwa zur Kontrolle von Verlust- bzw. Abschrei-

8 Man vgl. hierzu den Anhang.

bungsrisiken. Generell bestehen jedoch deutliche strukturelle Unterschiede (z.B. andere Fristigkeit des Zeithorizonts, Nicht-Existenz eines Handelsbestandes, Liability-Bezug) zum Bankenfall[9]. Konzeptionell jedoch läßt sich die VaR-Methodologie übertragen[10] bis hin zur Risikokontrolle und einer risikobasierten Ergebnissteuerung (Risk Adjusted Performance Management, RAPM) auf Gesamtunternehmensebene. Begründet liegt dies in der engen Verbindung zwischen dem VaR-Ansatz und der Shortfallwahrscheinlichkeit (im Versicherungsfall: Verlust- bzw. Ruinwahrscheinlichkeit).

Hinsichtlich der Anwendungen der VaR-Methodologie im einzelnen sei auf die Literaturhinweise des Abschnitts 7 verwiesen. Im folgenden konzentrieren wir uns auf spezifische Verfahren der (analytischen) VaR-Bestimmung.

6. VaR-Berechnung

6.1 Risiko-Mapping

In praxi besteht die zu evaluierende Finanzposition zum einen aus einer Vielzahl von heterogenen Einzelpositionen, deren Einfluß (inkl. Interaktionen) auf die Gesamtposition in expliziter Form erfaßt werden soll. Dies gelingt problemlos und in einfacher Form (lineare Aggregation) nur unter starken Restriktionen an die zugelassenen Zufallsgesetzmäßigkeiten, was in der Regel auf die Postulierung einer multivariaten Normalverteilung hinausläuft. Zum anderen bestehen Abhängigkeiten zu Basisgrößen des Finanzmarktes (Zinssätze, Wechelkurse), die sinnvollerweise explizit erfaßt werden, um eine einheitliche Bewertung zu gewährleisten.

Beide Gesichtspunkte werden im Rahmen des sog. Risiko-Mappings, dem zentralen Baustein der Risk-Metrics-Methodik[11] von J.P. Morgan, berücksichtigt. Im Rahmen des Mappings werden die in einem Portefeuille enthaltenen Finanztitel in ihre Grundbausteine zerlegt und diese dann mittels Sensitivitätsmaßen (dies beinhaltet insbesondere eine Linearisierung nicht-linearer Preisänderungen) standardisierten Assets (Risikofaktoren) zugeordnet. Im folgenden soll zunächst diese strukturelle Vorgehensweise dargestellt werden. Anschließend behandeln wir beispielhaft einzelne Assetklassen zur Illustration der allgemeinen Vorgehensweise.

---

9 Vgl. hierzu etwa Albrecht/Bährle/König (1997, S. 93 ff.).
10 Vgl. etwa Albrecht (1998) und Albrecht/Koryciorz (2000).

Wir gehen aus von einem Bestand von n Finanztiteln mit Marktwertentwicklungen $V_1(t), ..., V_n(t)$. Diese Wertentwicklungen seien ihrerseits beeinflußt von der Entwicklung der m Größen (Risikofaktoren) $Z_1(t), ..., Z_m(t)$. Entsprechend gibt es Funktionen $v_j(z_1, ..., z_m)$, j= 1, ..., n mit

$$V_j(t) = v_j(Z_1(t), ..., Z_m(t)) \quad . \tag{8}$$

Wir nehmen nun eine Taylorapproximation 1. Ordnung für die v_j vor in der Form

$$\begin{aligned} \Delta v_j &= v_j(z_1 + \Delta z_1, ..., z_m + \Delta z_m) - v_j(z_1, ..., z_m) \\ &\approx \frac{\partial v_j}{\partial z_1} \Delta z_1 + ... + \frac{\partial v_j}{\partial z_m} \Delta z_m \quad , \end{aligned} \tag{9}$$

dabei gilt $z_i = z_i(t)$, $\Delta z_i = z_i(t+h) - z_i(t)$.

Damit gilt insgesamt – nun auf Ebene der Zufallsvariablen –

$$\Delta V_h^j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial v_j}{\partial z_i} \cdot \Delta Z_i = \sum_{i=1}^{m} d_{ij} \Delta Z_i \tag{10a}$$

mit $d_{ij} = (\partial v_j / \partial z_i)$ bzw. entsprechend in Vektorform

$$\Delta V_h^j = d_j^T \, \Delta Z \quad , \tag{10b}$$

wobei $d_j = (d_{1j}, ..., d_{mj})^T$ und $\Delta Z = (\Delta Z_1, ..., \Delta Z_m)^T$.

Wir nehmen nun für den Vektor ΔZ eine multivariate Normalverteilung an, dabei haben alle ΔZ_j den Erwartungswert 0 und es sei $h\sigma_{ij} = Cov(\Delta Z_i, \Delta Z_j)$, d.h. insgesamt $\Delta Z \sim N(0, h\Sigma)$ mit $\Sigma = (\sigma_{ij})$. Damit ist auch ΔV_h^j normalverteilt mit $E(\Delta V_h^j) = 0$ und

[11] Vgl. neben den Originaldokumentationen (Technical Documents) von J.P. Morgan etwa Holtorf/Rudolf (2000).

$$Var(\Delta V_h^j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial z_k} h\sigma_{ik}$$
$$= h(d_j^T \Sigma d_j) \;. \tag{11}$$

Entscheidend für die Vorgehensweise ist damit neben der Annahme der multivariaten Normalverteilung für die Änderung der Risikofaktoren die *Linearisierung der Bewertungsfunktion der Finanztitel* in bezug auf die Risikofaktoren (Sensitivitäten, Deltas).

Wir kommen nun zu der Analyse auf Portefeuilleebene. Es sei $x = (x_1, ..., x_n)^T$ der Vektor der absoluten Zahl der Finanztitel zum Zeitpunkt t im betrachteten Bestand. Für die Marktwertentwicklung V des Bestandes gilt damit $V(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j V_j(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j(Z_1(t), ..., Z_m(t))$. Für die „Portfolio-Deltas" $d_i^P := \partial V / \partial z_i \, , i = 1, ..., m$ gilt damit

$$d_i^P = \sum_{j=1}^{n} x_j (\partial v_j / \partial z_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j d_{ij} \tag{12a}$$

bzw. vektoriell mit $d_P = (d_1^P, ..., d_m^P)^T$:

$$d_P = \sum_{j=1}^{n} x_j d_j \;. \tag{12b}$$

Damit ist insgesamt ΔV_h normalverteilt mit $E(\Delta V_h) = 0$ und

$$Var(\Delta V_h) = h(d_P^T \Sigma d_P) \;. \tag{13}$$

Als Portfolio Value-at-Risk resultiert hieraus schließlich

$$VaR_h^P = N_{1-\alpha} \sqrt{d_P^T \Sigma d_P} \sqrt{h} \;. \tag{14}$$

Im Falle der Normalverteilung (α < ½) weist der VaR die Subadditivitätseigenschaft auf, d.h. wenn wir den isolierten Value-at-Risk VaR_j des j-ten Finanztitels gemäß (11) berechnen zu

$$VaR_j = N_{1-\alpha}\sqrt{d_j^T \Sigma d_j}\sqrt{h}\ , \tag{15}$$

so gilt

$$VaR \leq \sum_{j=1}^{n} |\, x_j \,| VaR_j\ . \tag{16}$$

Hinsichtlich der am VaR gemessenen Risikoposition bestehen somit Diversifikationseffekte im Portefeuille.

Die vorstehend dargestellte Vorgehensweise wird als Delta-Normal-Methode (auf Titel- oder auf Portfolioebene) bezeichnet, da sie charakterisiert ist durch eine Linearisierung der Wertfunktion in Verbindung mit einer Normalverteilungsannahme. Die Problematik dieses Ansatzes besteht dementsprechend in beiden dieser Annahmen. Die Normalverteilungsannahme impliziert, daß die Risikofaktoren negative Werte annehmen können, dies ist problematisch z.B. wenn Zinssätze (Spot Rates) als Risikofaktoren betrachtet werden. Die Linearisierung führt zu einer Unterdrückung nicht-linearer Preisrisiken, was z.B. im Falle von Optionen problematisch ist. Zudem wird bei der Linearisierung eine lokale Approximation vorgenommen, d.h. der Approximationsfehler ist umso größer, je größer die Änderung der Risikofaktoren im Rahmen der Haltedauer ist.

Auf der anderen Seite weist die Delta-Normal-Methode eine Reihe von Vorzügen hinsichtlich ihres praktischen Einsatzes auf. Zur Berechnung des Portfolio-VaR ist nur die Kenntnis der Varianz/Kovarianz-Matrix[12] der Veränderungen der Risikofaktoren notwendig. Wie wir gesehen haben, lassen sich zudem die VaR-Beiträge von Teil-Portfolios (Assetklassen) in einfacher Form (Portfolio-Deltas) aggregieren. Zudem existiert eine einfache Skalierungsbeziehung des VaR in bezug auf unterschiedliche Haltedauern.

Zu einer teilweisen Verbesserung der geschilderten Problemlage kann alternativ mit einer Taylorapproximation 2. Ordnung in bezug auf die Risikofaktoren gearbeitet werden (Delta-Gamma-Methode)

$$\Delta v_j = \sum_i \frac{\partial v_j}{\partial z_i} \Delta z_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \frac{\partial v_j}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial z_k} (\Delta z_i)(\Delta z_k) \,. \tag{17}$$

Allerdings tritt hierbei nun die Problematik auf, daß unter der Annahme einer multivariaten Normalverteilung für $\Delta Z_1, ..., \Delta Z_m$ die Werte ΔV_h^j bzw. ΔV_h einer nicht bekannten Verteilung folgen[13]. Ein einfacher Ausweg besteht dabei in der Durchführung einer Monte-Carlo-Simulation auf der Basis multivariat normalverteilter ΔZ_i. Darüber hinaus sind eine Reihe von Approximationsmethoden für diesen Fall entwickelt worden[14 15].

6.2 VaR-Berechnung für ein Aktienportfolio

Gehen wir aus von einem Markt(index)modell für die Aktienrenditen über die betrachtete Zeitperiode, d.h. $R_j = a_j + \beta_j R_M + \varepsilon_j$, mit $\beta_j = Cov(R_j, R_M)/Var(R_M)$, so liegt bereits ein lineares Modell vor. Unter der Annahme einer zweidimensionalen Normalverteilung für die Marktrendite und das Residuum bestimmt sich der VaR auf Titelebene unter den üblichen Annahmen aufgrund von $\Delta V_h^j = v_t^j (a_j + \beta_j R_M + \varepsilon_j)$ zu[16]

$$VaR_j = N_{1-\alpha} v_t^j \sqrt{\beta_j^2 \, Var(R_M) + Var(\varepsilon_j)} \,. \tag{18}$$

Auf eine Aggregierung auf Portfolioebene verzichten wir an dieser Stelle.

In praxi wird dieser Ausdruck durch Vernachlässigung von Var(ε_j) z.T. weiter vereinfacht. Diese einfache VaR-Berechnung auf der Basis der Betafaktoren der Aktien im betrachteten Bestand führt allerdings zu einer z.T. deutlichen Unterschätzung[17] des VaR.

---

12 Zur Bestimmung dieser Matrix vgl. vertiefend Alexander/Leigh (1997).

13 Geht man von einem Risikofaktor, z.B. Aktienkurs, aus, dessen Logarithmus normalverteilt ist, so führt die Delta-Gamma-Approximation in spezifischen Konstellationen zu einer nicht-zentralen Chiquadrat-Verteilung, vgl. etwa Britten-Jones/Schaefer (1999), Huschens (2000, S. 195) und Read (1998).

14 Vgl. etwa Wilson (1998, S. 86 ff.).

15 Darüber hinaus besteht die Möglichkeit, bei Vorgabe der Momente unter Benutzung der Cornish-Fisher-Entwicklung, vgl. Johnson/Kotz (1970, S. 33 f.), die Quantile und damit den VaR zu approximieren.

16 Dabei wurde wie üblich E(R_j) = 0 vorausgesetzt.

17 Vgl. etwa Huschens (2000, S. 193 f.).

Unterstellen wir ein Multifaktormodell der Form

$$R_i = a_i + b_{i1}F_1 + ..., + b_{im}F_m + \varepsilon_i \,, \quad i = 1,...,n \quad , \tag{19a}$$

bzw. in Matrixform

$$R = a + BF + \varepsilon \quad , \tag{19b}$$

so gilt[18] für ein Portfolio P die folgende Darstellung der Portfoliovarianz:

$$Var(R_P) = x^T B Var(F) B^T x + x^T D_\varepsilon x \,, \tag{20}$$

dabei ist $D_\varepsilon = Var(\varepsilon)$ eine Diagonalmatrix. Unter der Annahme einer multivariaten Normalverteilung[19] für die Faktoren F und der Annahme $E(R_P) = 0$ gilt damit für den Portfolio-VaR:

$$VaR_P = N_{1-\alpha} v_t^P \sqrt{x^T B Var(F) B^T x + x^T D_\varepsilon x} \,. \tag{21}$$

Dabei ist v_t^P der (bekannte) Wert des Portfolios zum Zeitpunkt t.

6.3 VaR-Berechnung für Zinstitel

Es sei $r_t = r$ ein fristigkeitsunabhängiger deterministischer Zinssatz und es gelte $r_{t+h} = r + \Delta r$. Dann folgt für die Funktion $P_t = P(r) = \sum_{t=1}^{n} Z_t (1+r)^{-t}$ eines Zinstitels aus der Taylorapproximation (9)

$$P_{t+h} - P_t \approx -D_A(r)\Delta r \quad . \tag{22a}$$

Dabei ist $D_A(r) = -P_t'(r)$ die absolute Duration des Zinstitels ausgewertet in $r_t = r$. Die Durationsapproximation[20] ist damit zugleich ein einfaches Beispiel für die in Abschnitt 6.1 dargestellte

---

18 Vgl. Albrecht/Maurer (2001, Anhang 7A, Beziehung (7A.9b).

19 Auch die alternative Ananhme einer multivariaten Normalverteilung für ln F führt zu keinen neuen Problemen.

Linearisierungstechnik. Unterstellt man nun, daß die Zinsänderung eine Zufallsvariable ist, so lautet die Approximation

$$P_{t+h} - P_t \approx -D_A(r_t)(R_{t+h} - r_t)\,. \tag{22b}$$

Unterstellen wir des weiteren unter Inkaufnahme negativer Zinsen eine Normalverteilung für die Zinsänderung, d.h. $\Delta R = R_{t+h} - r_t \sim N(0, h\sigma^2)$, so ergibt sich unter Anwendung der Standardargumentation

$$\begin{aligned} VaR_h &= N_{1-\alpha} D_A(r_t)\sigma\sqrt{h} \\ &= N_{1-\alpha} D_M(r_t) P_t \sigma\sqrt{h} \quad . \end{aligned} \tag{23}$$

dabei ist $D_M(r) = D_A(r)/P_t(r)$ die modifizierte Duration.

Eine direkte Verallgemeinerung dieser Vorgehensweise kann auf der Basis der Key-Rate-Durations[21] erfolgen. Seien dabei die ausgewählten Restlaufzeiten $0 < t_1 < \ldots < t_n$ und betrachten wir einen Zinstitel, der nur zu den Zeitpunkten $t + t_i$Zahlungen aufweist, so gilt approximativ

$$\Delta P \approx -\sum_{i=1}^{n} KRD_i^A \, \Delta r_i \;, \tag{24a}$$

dabei sind $KRD_i^A(r_1,\ldots,r_n) = \partial P(r_1,\ldots,r_n)/\partial r_i = -t_i Z(t_i)(1+r_i)^{-t_i}/(1+r_i)$ die absoluten Key Rate-Durationen und $r_i = r(t, t+t_i)$ die Spot Rates in t mit Restlaufzeit t_i. Unterstellen wir einen zufallsabhängigen Vektor $\Delta R = (\Delta R_1,\ldots,\Delta R_n)$ von Zinsratenänderungen, so geht die Approximation (24a) über in

$$\begin{aligned} \Delta P &\approx -\sum_{i=1}^{n} KRD_i^A \cdot \Delta R_i \\ &= -KRD^T \Delta R \quad , \end{aligned} \tag{24b}$$

---

20 Der Unterschied zur traditionellen Durationsapproximation besteht darin, dass diese für alternative Werte $r_t = r + \Delta r$ zum gleichen Zeitpunkt t durchgeführt wird.

21 Vgl. Albrecht/Maurer (2001, Abschnitt 9.2.3).

wobei $KRD = (KRD_1^A, ..., KRD_n^A)^T$. Zur Gewinnung eines Value-at-Risk Wertes für den betrachteten Zinstitel bzw. ein Portefeuille aus Zinstiteln kommt man dann wieder standardmäßig unter Annahme einer multivariaten Normalverteilung[22] für ΔR, d.h. $\Delta R \sim N(0, h\Sigma)$.

6.4 VaR-Berechnung für Optionen

Bezeichne $C_t = C_t(S_t)$ den Wert einer Call-Option zum Zeitpunkt t in Abhängigkeit vom Wert S_t des Basistitels, so gilt die folgende Approximation (Delta-Approximation)

$$\Delta C = C_{t+h} - C_t \approx \Delta_C(t)(S_{t+h} - S_t). \tag{25}$$

Dabei ist $\Delta_C(t) = \partial C / \partial S$ das Optionsdelta. Auch die Deltaapproximation besteht in einer (lokalen) linearen Preisapproximation, intuitiv geht man dabei von dem in Einheiten des Basistitels umgerechneten Exposure der Optionsposition aus. Zu einem Value-at-Risk-Wert der Optionsposition gelangt man wieder standardmäßig durch Annahme einer Normalverteilung für $\Delta S = S_{t+h} - S_t$ bzw. $\ln \Delta S$. Eine verbesserte Approximation, die partiell auch nicht-lineare Preisänderungen berücksichtigt, liefert die Delta-Gamma-Approximation[23]

$$\Delta C = \Delta_C(t)\Delta S + \frac{1}{2}\Gamma_C(t)(\Delta S)^2, \tag{26}$$

dabei ist $\Gamma_C(t) = \partial C^2 / \partial S^2 = \partial \Delta C / \partial S$ das Optionsgamma.

Durch Einbeziehung weiterer Optionssensitivitäten[24] kann eine weitere Verbesserung der vorgenommenen Approximation erfolgen[25].

---

22 Alternativ: Die Annahme einer multivariaten Normalverteilung für $\ln \Delta R$.

23 Vgl. Albrecht/Maurer (2001, Abschnitt 11.3.2, Beziehung 11.49).

24 Vgl. Albrecht/Maurer (2001, Abschnitt 11.3.2).

25 So weisen etwa Bühler/Korn/Schmidt (1998) darauf hin, dass bei der Evaluation von Optionspositionen die Zeitwertänderung der Option über eine Theta-Approximation berücksichtigt werden sollte.

7. Literaturhinweise

Monographien zur Value-at-Risk-Thematik sind *Dowd (1998*) und *Jorion (1997)*. Ausführliche Übersichten enthalten ferner *Huschens (2000), Eisele/Knobloch (2000)* und *Wilson (1998)*, eine vertiefende Übersicht bieten *Duffie/Pan (1997).* Vielfältige Anwendungen der Value-at-Risk-Methodologie sind dargestellt in *Beeck/Johanning/Rudolph (1999), Chow/Kritzman (2001), Eller/Gruber/Reif (2001), Johanning (1998), Johanning/Rudolph (2000)* und *Kleeberg/Schlenger (2000).* Zur Spezifikation der Zufallsgesetzmäßigkeit der Marktwertentwicklung vgl. vertiefend *Duffie/Pan (1997, S. 10ff).* Nicht-normale Änderungen der Risikofaktoren behandeln *Hull/White (1998).* Zu statistischen Methoden der Quantilschätzung vgl. *Abberger/Feng/Heiler (1998)* und *Ridder (1998).* Zu Anwendungen der Extremwerttheorie vgl. *Borkovec/Klüppelberg (2000), Embrechts et al. (1995), Jansen/Koedijk/de Vries (2000), McNeil/Frey (2000)* sowie *Neftci (2000).*

Einen Vergleich der unterschiedlichen Ansätze der Risikoevaluation (Korrelationsansatz, Monte-Carlo-Simulation, historische Simulation) bieten *Bühler/Korn/Schmidt (1998).*

Zum Mapping-Verfahren vgl. vertiefend *Ridder/Stahl (2000).*

Zur VaR-Berechnung von Aktienpositionen vgl. neben der bereits genannten Literatur *Gaumert (1997)* und *Neumann (2000).*

Zur VaR-Berechnung von Zinspositionen vgl. vertiefend *Ho/Chen/Eng (1996), Schween (1998), Tobler/Walder (1998)* und *Zagst (1997).*

Zur VaR-Berechnung von Optionspositionen vgl. des weitern *Duffie/Pan (1997, S. 23ff.), El Jahel et al. (1999), Klaus (1997)* und *Locarek-Junge (1998).*

Anhang A: Extremwerttheorie und Value-at-Risk: Peaks over Threshold-Methode

Ausgangspunkt der weiteren Überlegungen ist die verallgemeinerte Paretoverteilung (a > 0)

$$GP_{a,b}(x) = 1-(1+\frac{xa}{b})^{-1/a} \quad \text{für } x \geq 0 \quad . \tag{A1}$$

Es sei u ein Schwellenwert (Threshold), unter bestimmten Bedingungen gilt dann die Grenzwertaussage

$$\lim_{u\to\infty} P\left(\frac{X-u}{h(u)} > x \mid X > u\right) = (1+ax)^{-1/a} \tag{A2}$$

für eine geeignete Funktion h.

Mit $\overline{F}(x) := 1-F(x)$ und $\overline{F_u}(x)$ definiert durch

$$\overline{F_u}(x) = P(X-u > x \mid X > x) = \frac{\overline{F}(u+x)}{\overline{F}(u)} \quad , \tag{A3}$$

kann man dann[26] die Approximation

$$\overline{F_u}(x) \approx 1 - GP_{a,b(u)}(x) \tag{A4}$$

vornehmen, wobei der Parameter b = b(u) von dem gewählten Schwellenwert abhängt.

Es sei nun $F(x) = P(L_h \leq x) = P(v_t - V_{t+h} \leq x)$ dieVerteilungsfunktion des Periodenverlustes L_h. $\overline{F}(u+x) = P(L_h > u+x)$ ist dann der Tail der Verteilung von L_h im Bereich$[u,\infty)$. Gemäß (A3) gilt $\overline{F}(u+x) = \overline{F}(u)\overline{F_u}(x)$. $\overline{F}_u(x)$ kann man gemäß (A4) approximieren, $\overline{F}(u)$ durch

$$\widehat{\overline{F}(u)} = \frac{N_u}{n} \; , \tag{A5}$$

[26] Die Skalenfunktion h(u) wird dabei als Parameter in die Grenzverteilung integriert.

wobei N_u die Anzahl der Überschreitungen von L_h über der Grenze u bei n Beobachtungen von L_h ist. Insgesamt ergibt sich als Tailschätzer

$$\widehat{\overline{F}(u+x)} = \frac{N_u}{n}[1 - GP_{a,b}(x)] \quad , \tag{A6}$$

wobei noch die Parameter a und b = b(u) geeignet zu schätzen sind, etwa aufgrund einer Maximum Likelihood-Schätzung. Durch Inversion erhält man als Schätzgröße für das $(1-\alpha)$-Quantil von L_h und damit für den Value-at-Risk

$$VaR = u + \frac{b}{a}\left\{\left[\frac{n}{N_u}(1-\alpha)\right]^{-a} - 1\right\}. \tag{A7}$$

Ein zentrales Problem dieser Methode ist die Festlegung des Schwellenwertes u. Je größer u, desto besser gilt die Approximation (A2), desto weniger aussagekräftig ist aber die empirische Schätzgröße gemäß (A5). Hier ist ein Trade-off durchzuführen. Die Vorgehensweise verdeutlicht zudem den Charakter der POT-Methode als semiparametrische Vorgehensweise, die zugrundeliegende Verteilung bleibt dem Grunde nach unspezifiziert, es wird lediglich mit einer wahrscheinlichkeitstheoretisch begründeten asymptotischen (parametrischen) Verteilung für den Tail gearbeitet.

Eine alternative Vorgehensweise auf der Basis des Hill-Schätzers für 1/a findet man in Jansen/Koedijk/de Vries (2000, S. 253 f.).

Literatur

Abberger, K., Y. Feng, S. Heiler (1998): Non Parametric Smoothing and Quantile Estimation in Time Series,in: Bol et al. (Hrsg., 1998), S. 1 – 16.

Acerbi, C., D. Tasche (2001): On the coherence of expected shortfall, Arbeitspapier, TU München.

Albrecht, P. (1998): Risikoadjustierte Performancesteuerung in der Schadenversicherung, in: Oehler, A. (Hrsg., 1998); S. 229 –257.

Albrecht, P., R. Bährle, A. König (1997): Value-at-Risk: Eine risikotheoretische Analyse der konzeptionellen Grundlagen mit Folgerungen für die Risikokontrolle der Kapitalanlage von Versicherungsunternehmen, Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft 86, S. 81 – 101.

Albrecht, P., R. Maurer (2001): Investment, Vorlesungsskriptum, Universität Mannheim/Universität Frankfurt.

Albrecht, P., S. Koryciorz (2000): Value-at-Risk für Versicherungsunternehmen: Konzeptionelle Grundlagen und Anwendungen, in: Johanning/Rudolph (Hrsg., 2000), Band 2, S. 1105 – 1130.

Alexander, C.O., C.T. Leigh (1997): On the Covariance Matrices Used in Value at Risk Models, Journal of Derivatives, Spring1997, S. 50 – 62.

Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath (1999): Coherent Measures of Risk, Mathematical Finance 9, S. 203 – 228.

Beeck, H., L. Johanning, B. Rudolph (1999): Value-at-Risk-Limitstrukturen zur Steuerung und Begrenzung von Marktrisiken, in: OR Spektrum 21, S. 259 – 286.

Bol, G., G. Nakhaeizadeh, K.-H. Vollmer (Hrsg., 1998): Risk Measurement, Econometrics and Neural Networks, Heidelberg.

Borkovec, M., C. Klüppelberg (2000): Extremwerttheorie für Finanzzeitreihen - ein unverzichtbares Werkzeug im Risikomanagement, in: Johanning/Rudolph (Hrsg., 2000), S. 219 – 244.

Britten-Jones, M.B., S.M. Schaefer (1999): Non-linear Value-at-Risk, European Finance Review 2, S. 1 - 27.

Bühler, W., O. Korn, A. Schmidt (1998): Ermittlung von Eigenkapitalanforderungen mit „Internen Modellen“, Die Betriebswirtschaft 58, S. 64 – 85.

Chow, G., M. Kritzmann (2001): Risk Budgets, Journal of Portfolio Management, Winter 2001, S. 56 – 60.

Dowd, K. (1998): Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management, Chichester.

Duffie, D., J. Pan (1997) : An Overview of Value at Risk, Journal of Derivatives, Spring 1997, S. 7 – 49.

Eisele, W., A.P. Knobloch (2000): Value at Risk: Tool for Managing Trading Risks, in: Frenkel/Hommel/Rudolf (Hrsg.,2000), S. 155 – 179.

El-Jahel, L., W. Perraudin, S. Sellin (1999): Value at Risk for Derivatives, Journal of Derivatives, Spring 1999, S. 7 - 26.

Eller, R., W. Gruber, M. Reif (Hrsg.): Handbuch Gesamtbanksteuerung, Stuttgart 2001.

Embrechts, P., A. McNeil, D. Straumann (1999): Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls, Arbeitspapier, ETH Zürich.

Embrechts, P., S. Resnick, R. Samorodnitsky (1999): Extreme Value Theory as a Risk Management Tool, North American Actuarial Journal 3, S. 30 – 41.

Frenkel, M., U. Hommel, M. Rudolf (Hrsg., 2000): Risk Management, Berlin u.a.

Gaumert, U. (1997): Die Messung des spezifischen Marktrisikos durch Value-at-Risk-Modelle, Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen 20, S. 993 – 997.

Guthoff, A., A. Pfingsten, J. Wolf (1998): Der Einfluß der Begrenzung des Value-at-Risk oder des Lower Partial Moment One auf die Risikoübernahme, in: Oehler, A. (Hrsg., 1998), S. 111 – 153.

Holtorf, C., M. Rudolf (2000): Market Risk: Benchmark and Standard Model, in: Frenkel/Hommel/Rudolf (Hrsg., 2000), S. 121 - 140.

Hull, J., A. White (1998): Value at Risk when daily changes in market variables are not normally distributed, Journal of Derivatives, Spring 1998, S. 9 – 28.

Huschens, S. (1998): Messung des besonderen Kursrisikos durch Varianzzerlegung, Kredit und Kapital 1998, Heft 4, S. 567 – 591.

Huschens, S. (2000): Verfahren zur Value-at-Risk-Berechnung im Marktrisikobereich,in: Johanning/Rudolph (Hrsg., 2000), S. 181-218.

Ho, T.S.Y., M.Z.H. Chen, F.H.T. Eng (1996): VAR Analytics: Portfolio Structure, Key Rate Convexities, and VAR Betas, Journal of Portfolio Management, Fall 1996, S. 89 – 98.

Jansen, D.W., K.G. Koedijk, C.G. de Vries (2000): Portfolio selection with limited downside risk, Journal of Empirical Finance 7, S. 247 – 269.

Johanning, L. (1998): Value-at-Risk zur Marktrisikosteuerung und Eigenkapitalallokation, Bd. Soden/Taunus.

Johanning, L., B. Rudolph (Hrsg., 2000): Handbuch Risikomanagement, 2 Bände, Bad Soden/Ts.

Johnson, N.L., S. Kotz (1970): Continuous Univariate Distributions, Vol. 1, New York u.a.

Jorion, P. (1997): Value at Risk, Chicago u.a.

Klaus, M. (1997): Die Value-at-Risk-Berechnung für Optionen – praktische Probleme nichtlinearer Produkte, Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen 50, S. 375 – 379.

Kleeberg, J.M., C. Schlenger(2000): Value-at-Risk im Asset Management, in: Johanning/Rudolph (Hrsg., 2000), S. 973 – 1013.

Locarek-Junge, H. (1998): Risikomessung in Portefeuilles mit Derivaten, in: Oehler, A. (Hrsg.): Credit Risk und Value-at-Risk Alternativen, Stuttgart, S. 199 – 277.

McNeil, A.J., R. Frey (2000): Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: An extreme value approach, Journal of Empirical Finance 7, S.271 –300.

Neftci, S.N. (2000): Value at Risk Calculations, Extreme Events, and Tail Estimation, Journal of Derivatives, Spring 2000, S. 23 – 37.

Neumann, K. (2000): Zeitreihenmodelle zur Schätzung des Value at Risk von Aktien, Lohmar, Köln.

Oehler, A. (Hrsg., 1998): Credit Risk und Value-at-Risk Alternativen, Stuttgart.

Portmann, T., P. Wegmann (1998): Lower Partial Moments und Value-at-Risk: Eine Synthese, Finanzmarkt und Portfolio Management 12,S. 326 – 341.

Read, O. (1998): Parametrische Modelle zur Ermittlung des Value-at-Risk, Dissertationsschrift, Universität zu Köln.

Ridder, T. (1998): Basics of statistical VaR-estimation, in: Bol et al. (Hrsg., 1998), S. 161 – 187.

Ridder, T., G. Stahl (2000): Flexibles oder starres Cashflow-Mapping?, in: Johanning/Rudolph (Hrsg., 2000), S. 269 – 288.

Schween, O. (1998): Zinsänderungsrisiken im Commercial Banking, Wiesbaden.

Tobler, J., R. Walder (1998) : Die Modellierung von Zinsrisikofaktoren in einem Value-at-Risk-Modell, Finanzmarkt und Portfolio Management 12, S. 342 - 370.

Wirch, J.L. (1999): Raising Value at Risk, North American Actuarial Journal 3, S. 106 – 115.

Wilson, T.C. (1998): Value at Risk, in: Alexander, C. (Hrsg.): Risk Management and Analysis, Vol. 1, Chichester et al., S. 61 – 124.

Zagst, R. (1997): Effiziente Value-at-Risk Berechnung für Rentenportfolios, Finanzmarkt und Portfolio Management 11, S. 165 – 178.