UNIVERSITÄT MANNHEIM

MANNHEIMER MANUSKRIPTE ZU RISIKOTHEORIE,
PORTFOLIO MANAGEMENT UND VERSICHERUNGSWIRTSCHAFT

Nr. 188

Safety first-Portfoliooptimierung bei Beschränkung des Conditional Value at Risk

Peter Albrecht

August 2012

Safety first-Portfoliooptimierung bei Beschränkung des Conditional Value at Risk

Peter Albrecht, Universität Mannheim

Zusammenfassung

Das Safety first-Prinzip nach *Telser* beinhaltet eine Limitierung der tolerierten Shortfallwahrscheinlichkeit bzw. äquivalent hierzu eine Beschränkung des Value at Risk. Die weitverbreitete Kritik am Value at Risk als valides Risikomaß aufgreifend, ersetzen wir beim Safety first-Ansatz die Value at Risk-Restriktion durch eine Beschränkung des Conditional Value at Risk und analysieren das hieraus resultierende Entscheidungsverhalten von Investoren auf Kapitalmärkten. Zunächst sind wir in der Lage, ein Separationsresultat nachzuweisen. Auf dieser Grundlage wird eine risikoadjustierte Performancekennziffer (CVaR-Ratio), die das Downside-Risiko berücksichtigt, theoretisch fundiert. Schließlich wird eine strukturelle Charakterisierung des Kapitalmarktgleichgewichts vorgenommen. Im Falle des Vorliegens von elliptischen Renditeverteilungen stimmt dieses mit dem CAPM überein. Am Beispiel einer endlichen Mischung von Normalverteilungen wird der Fall von nicht-symmetrischen Verteilungen illustriert.

JEL-Classification: G 11 · G 32

Keywords : Safety first; Conditional Value at Risk; Separation; CVaR-Ratio; Kapitalmarktgleichgewicht.

Safety first; Conditional Value at Risk; Separation; CVaR Ratio; Capital Market Equilibrium.

1 Einführung

Das Safety first (SF)-Prinzip in der Version[1] von *Telser* (1955/56) stellt eine Alternative[2] zur Markowitzschen Portfoliotheorie dar. Das SF-Prinzip hat entsprechend eine Vielzahl von Anwendungen gefunden, sowohl im Rahmen des Investmentmanagements als auch im Hinblick auf kapitalmarkttheoretische Überlegungen. Die genannten Anwendungen erstrecken sich auf die Portfoliooptimierung, insbesondere Asset Allocation-Entscheidungen[3], die risikoadjustierte Performancemessung[4] und den Problembereich des Hedging[5]. Darüber hinaus weisen *Arzac/Bawa* (1977) ein Separationstheorem für SF-Investoren nach und zeigen auf dieser Grundlage, dass hieraus im Kapitalmarktgleichgewicht bei normalverteilten Renditen das Capital Asset Pricing-Modell (CAPM) wieder gewonnen werden kann.

Das Grundmodell des Safety first-Prinzips beruht auf einer zweistufigen Vorgehensweise. In der ersten Stufe wird eine gewünschte Mindestrendite z (Desaster Level) vorgegeben und die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von Renditerealisierungen, die das Desaster Level unterschreiten (Shortfallwahrscheinlichkeit), klein und kontrolliert gehalten (Shortfallrestriktion). In diesem ersten Schritt findet somit eine strikte Risikolimitierung statt. Dies führt zu einer korrespondierenden Einschränkung in der Menge der ökonomischen Handlungen. Handlungen, aus denen eine zu hohe Wahrscheinlichkeit eines Desasters resultiert, sind nicht tolerierbar und werden ausgeschlossen. Da in dieser ersten Stufe das Risiko aus dem getätigten Investment unter Kontrolle gebracht wird, wird konsequenterweise in der zweiten Stufe unter den Handlungen, die noch tolerierbar sind, diejenige ausgewählt, die zu einer maximalen erwarteten Rendite führt.

Die Kritik an dieser traditionellen Operationalisierung des Safety first-Prinzips setzt nun daran an, ob die Shortfallwahrscheinlichkeit tatsächlich ein valides Maß ist, um das Eintreten eines Desasters angemessen zu quantifizieren und die Kontrolle der Shortfallwahrscheinlichkeit ein valides Mittel, um das Eintreten von Desaster-Ereignissen auf einem akzeptablen Niveau zu halten. Diese Kritik wird bestätigt durch einen Literaturstrang, der sich mit den Konsequenzen der Verwendung des Risikomaßes Value at Risk

---

1 Das Safety first-Prinzip nach *Telser* (1955/56) ist zu unterscheiden vom Safety first-Prinzip nach *Roy* (1952). Die Variante von *Roy* beruht auf einem rein risikominimierenden Ansatz.

2 Auf diesen Punkt werden wir in Abschnitt 2 näher eingehen.

3 Vgl. etwa *Leibowitz/Kogelman* (1991), *Jansen/Koedijk/De Vries* (2000) und *Campbell/Huisman/Koedijk* (2001)

4 Vgl. hierzu *Favre/Galeano* (2002).

5 Dieser Problembereich wurde von *Telser* selbst untersucht.

(VaR) für das Risikomanagement befasst. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Ansätzen besteht dabei darin, dass - wie in Abschnitt 2 noch nachgewiesen wird - eine Beschränkung der Shortfallwahrscheinlichkeit äquivalent zu einer Limitierung des Value at Risk ist.[6]

Die Verwendung des VaR als Risikomaß unterliegt nun einer Reihe von Kritikpunkten, die in der Literatur ausführlich erörtert worden sind[7]. Im Zentrum dieser Kritik steht dabei zum einen die Tatsache, dass sich der VaR nur an der Wahrscheinlichkeit der Unter- bzw. Überschreitung (in Abhängigkeit davon, ob Renditen oder Verluste die Basisgrößen für die VaR-Bestimmung sind) bestimmter kritischer Werte orientiert und keine Informationen darüber verarbeitet, in welchem Umfang die kritischen Werte unter- bzw. überschritten werden. Zum anderen mangelt es dem VaR im allgemeinen Fall an der Eigenschaft der Sub-Additivität, d.h. intuitiv führt ein Zusammenlegen von Risikopositionen nicht notwendigerweise zu einem Diversifikationseffekt, d.h. zu einer (relativen) Risikoreduktion. Insofern erfüllt der VaR nicht die Eigenschaft der Kohärenz eines Risikomaßes im Sinne des vielbeachteten und weithin akzeptierten Axiomensystems von *Artzner et al.* (1999). Als Alternative wird vor diesem Hintergrund in der Literatur regelmäßig der Conditional Value at Risk (CVaR) als (im Dichtefall) kohärentes Risikomaß vorgeschlagen, das zugleich auch Informationen über die Unter- bzw. Überschreitung bestimmter kritischer Werte berücksichtigt.

Die konzeptuelle Problematik des VaR überträgt sich bei seiner Anwendung im Kontext einer Risikosteuerung. So weist *Vorst* (2001) darauf hin, dass Finanzinstitutionen die Erfahrung gemacht haben, dass Portfolios trotz beschränktem VaR hohe Verluste realisieren können, wenn am Markt außergewöhnlich hohe Verluste auftreten, die den VaR überschreiten (im weiteren Beitrag als Worst Case-Ereignisse bezeichnet). Dies legt die mangelnde Fähigkeit des VaR offen, solche Worst Case-Ereignisse angemessen zu kontrollieren. In einem viel beachteten Beitrag untersuchen *Basak/Shapiro* (2001) optimale Investmentstrategien für Investoren, die den Erwartungsnutzen ihres Endvermögens unter Einhaltung einer (anfänglichen) VaR-Restriktion maximieren. Sie kommen zu dem Ergebnis, dass in den „most adverse states of the world" ein solches VaR-basiertes Risikomanagement zu einem höheren Exposure in riskanten Titeln (und damit zu höheren realisierten Verlusten) führt als Investmentstrategien, die auf die Einhaltung der

---

6 Dieser Zusammenhang wurde im Kontext der Portfoliooptimierung erstmals von *Campbell/Huisman/Koedijk* (2001) verwendet.

7 Vgl. exemplarisch hierzu *Szegö* (2003), *Yamai/Yoshiba* (2005) sowie *Hanisch* (2006), S. 24ff.

VaR-Restriktion verzichten. *Basak/Shapiro* (2001) kommen des Weiteren zu dem Ergebnis, dass dieses Resultat nicht auftritt, wenn an Stelle der VaR-Restriktion eine Re striktion hinsichtlich des Conditional Value at Risk (CVaR) tritt. Damit scheint[8] sich in einem zeitstetigen Rahmen das vorstehend erwähnte von *Vorst* (2001) angesprochene Phänomen zu bestätigen, dass eine VaR-Restriktion nicht in der Lage ist, Worst Case-Ereignisse angemessen zu kontrollieren und sogar zu einer Erhöhung der Verlustgefahr bei Worst Case-Ereignissen führen kann. Ein möglicher Ausweg besteht zudem in der Anwendung einer CVaR-basierten Restriktion. Vor diesem Hintergrund untersuchen *Alexander/Baptista* (2004) im Rahmen eines traditionellen einperiodigen Erwartungswert/Varianz-Ansatzes die Einführung einer VaR-Restriktion sowie einer CVaR-Restriktion. Gemäß den Ergebnissen von *Alexander/Baptista* (2004) treten im Kontext eines Portfoliooptimierungsproblems ohne sichere Anlage die adversen Effekte einer VaR-Restriktion für stark risikoaversive Investoren wieder auf und werden im Falle einer CVaR-Restriktion sogar noch verstärkt. Allerdings verschwinden diese Effekte, wenn das Portfoliooptimierungsproblem unter Einbeziehung einer sicheren Anlage untersucht wird (dies ist auch zugleich der Fall, den wir im Weiteren untersuchen werden).

Angesichts der vorstehend dargestellten Ergebnisse hinsichtlich möglicher adverser Effekte einer VaR-Restriktion (bzw. äquivalent einer Restriktion der Shortfallwahrscheinlichkeit) modifizieren wir im vorliegenden Beitrag das SF-Prinzip nach *Telser* dahin gehend, dass die VaR-Restriktion durch eine CVaR-Restriktion ersetzt wird. Safety first wird also dahingehend reinterpretiert, dass nicht die *Wahrscheinlichkeit* des Eintretens eines Desasters (Worst Case-Ereignisses) kontrolliert wird, sondern die *mittlere Verlusthöhe bei Eintritt eines Worst Case-Ereignisses* (d.h. einer Überschreitung des VaR). Ein entsprechender Modellansatz ist unseres Wissens bislang nicht in der Literatur untersucht worden. Die größte Nähe besteht dabei zu dem Beitrag von *Alexander/Baptista* (2004). Wie *Alexander/Baptista* unterstellen wir ein einperiodiges Portfoliooptimierungsproblem, wobei von vorneherein nur von dem Fall der Einbeziehung einer sicheren Anlage ausgegangen wird. Wie *Alexander/Baptista* berücksichtigen wir ebenfalls eine CVaR-Restriktion. Im Unterschied zu *Alexander/Baptista* besteht unsere Zielfunktion allerdings in der Maximierung der erwarteten Rendite und nicht eines Tra-

---

[8] Allerdings kommt die dem Ansatz von *Basak/Shapiro* nachfolgende Literatur zu gemischten Ergebnissen. *Berkelaar/Cumperayot/Kouwenberg* (2002) kommen zu gleich gelagerten Ergebnissen. *Cuoco/He/Issaenko* (2008) hingegen attestieren *Basak/Shapiro* eine in einem dynamischen Modellrahmen inkonsistente, da statische Konstruktion der VaR-Restriktion. In einer dynamisch konsistenten Modellvariante verschwinden die von *Basak/Shapiro* gefundenen adversen Effekte des VaR. *Leippold/Trojani/Vanini* (2006) schließlich kommen zu gemischten Ergebnissen hinsichtlich der risikokonformen Wirkung einer VaR-Restriktion.

de-off zwischen erwarteter Rendite und Renditevarianz[9]. Vor allem unterscheiden sich die im vorliegenden Beitrag behandelten Problemfelder. Während *Alexander/Baptista* die Implikationen der Einführung einer VaR- bzw. CVaR-Restriktion bei Variation von Signifikanzniveau und Grad der Risikoaversion für Erwartungswert-Varianz-optimale Portfolios untersuchen (dabei jeweils den Fall normalverteilter Renditen unterstellend), sind wir im vorliegenden Beitrag in der Lage, ein Separationstheorem zu gewinnen und ziehen hieraus Schlussfolgerungen für eine risikoadjustierte Performancemessung und für das Kapitalmarktgleichgewicht. Der Beitrag der vorliegenden Ausarbeitung zur Literatur besteht daher in der Einführung und Analyse eines am Safety first-Prinzip orientierten Entscheidungsmodells, bei dem die Limitierung des Value at Risk ersetzt wird durch eine Beschränkung des Conditional Value at Risk. Das von *Arzac/Bawa* (1977) für das SF-Prinzip gewonnene Separationsresultat lässt sich auch in dem neuen Modellrahmen nachweisen. Analog zur Vorgehensweise bei der Fundierung der Sharpe-Ratio im Falle von Erwartungswert/Varianz-Investoren lässt sich auf der Basis des Separationsresultats ein risikoadjustiertes Performancemaß, die CVaR-Ratio, herleiten, die das Downside-Risiko berücksichtigt. CVaR-Ratio stimmen überein im Falle von elliptischen Renditeverteilungen, weichen aber im Falle von nicht-symmetrischen Verteilungen voneinander ab. Auf der Basis von Ergebnissen im Kontext von Quantilableitungen lässt sich unter schwachen Voraussetzungen eine allgemeine strukturelle Charakterisierung des Kapitalmarktgleichgewichts angeben. Im Falle von elliptischen Renditeverteilungen resultiert hieraus das CAPM. Der nicht-symmetrische Fall wird am Beispiel einer endlichen Mischung von Normalverteilungen illustriert.

2 Das Entscheidungsprinzip

Die Basisversion[10] des SF-Prinzips lässt sich wie folgt formulieren, wobei wir uns aufgrund der intendierten Anwendungen auf Renditegrößen als Resultate von ökonomischen Handlungen konzentrieren. Gegeben sei daher eine Menge D von Einperiodenrenditen $R \in D$, die, um technisch aufwändige Fallunterscheidungen zu vermeiden, stets eine (strikt positive) Dichtefunktion aufweisen mögen. Spezifiziert werde nun eine

---

[9] Nach unserer Auffassung, die wir in Abschnitt 2 weiter ausführen werden, ist dies zudem die konsistentere Modellvariante bei Einbeziehung einer VaR- bzw. CVaR-Restriktion.

[10] *Arzac/Bawa* (1977) formulieren eine allgemeinere lexikographische Variante des SF-Prinzips, die eine vollständige Präferenzordnung induziert. Für den im vorliegenden Beitrag behandelten Fall ist jedoch die im Haupttext dargestellte Basisversion bereits wohldefiniert und ausreichend.

vorgegebene Zielrendite[11] z sowie eine vorgegebene (kleine) Wahrscheinlichkeit $0 < \alpha < 1$, mit der die Zielrendite z höchstens unterschritten (bzw. nicht übertroffen) werden kann.

Existiert im Entscheidungsraum D mindestens eine Rendite R, die der Shortfall-Restriktion $P(R \leq z) \leq \alpha$ genügt – in der im Weiteren analysierten Entscheidungssituation ist diese Annahme stets erfüllt –, so ergibt sich die optimale Handlung auf der Basis des folgenden Optimierungsproblems

(1a) $$E(R) \rightarrow \max! \quad (R \in D)$$

(1b) $$P(R \leq z) \leq \alpha .$$

Dies entspricht dem SF-Prinzip in der Originalvariante von *Telser* (1955/56). Die Größen z (Zielrendite) und α (Signifikanzniveau) sind dabei modellexogen zu spezifizieren.

Definieren wir nun das α-Quantil $Q_\alpha(R)$ wie üblich durch[12] $P[R \leq Q_\alpha(R)] = \alpha$, so ist offenbar die Shortfallrestriktion (1b) äquivalent zu

(1b') $$Q_\alpha(R) \geq z .$$

Definieren wir zudem wie üblich den Value at Risk auf Renditeebene durch $\mathrm{VaR}_\alpha(R) = Q_{1-\alpha}(-R)$, so gilt im Dichtefall $\mathrm{VaR}_\alpha(R) = -Q_\alpha(R)$ und wir erhalten als weitere äquivalente Variante der Shortfallrestriktion (1b)

(1b'') $$\mathrm{VaR}_\alpha(R) \leq -z .$$

Dies stellt eine Verbindung zur Portfoliooptimierung unter Einbeziehung einer VaR-Restriktion dar, so wie sie etwa in *Campbell/Huisman/Koedijk* (2001) oder *Alexander/Baptista* (2004) behandelt wird.

Albrecht/Maurer/Möller (1998, S. 263) unterscheiden in konzeptioneller Hinsicht kompensatorische Risiko/Wert-Modelle – hier kann ein beliebiger Trade-off zwischen Risikomaß und Wertmaß erfolgen – von nicht-kompensatorischen Risiko/Wert-Modellen, die ein strikte Limitierung des Verlustpotentials beinhalten. Das SF-Prinzip (1) gehört

[11] In der Literatur auch als Benchmarkrendite, (angestrebte) Mindestrendite, Targetrendite, Threshold oder Desaster Level bezeichnet.

[12] Da wir stets die Existenz einer Dichtefunktion voraussetzen, ist in diesem Falle das so definierte Quantil eindeutig bestimmt.

zu den nicht-kompensatorischen Risiko/Wert-Modellen. Dies hat aber unmittelbar zur Konsequenz, dass das SF-Prinzip nicht kompatibel zum Bernoulli-Prinzip sein kann. Entsprechend weisen *Arzac/Bawa* (1977, S. 379) darauf hin, dass das SF-Prinzip weder das Stetigkeits- noch das Unabhängigkeitsaxiom erfüllt. Risiko/Wert-Modelle des Erwartungswert/VaR-Typus oder des Erwartungswert/CVaR-Typus, so wie sie beispielsweise in *Alexander/Baptista* (2002) behandelt werden, zählen hingegen zu den kompensatorischen Risiko/Wert-Modellen und sind damit zumindest unter bestimmten Bedingungen[13] kompatibel zum Bernoulli-Prinzip.

Was hat nun diese Nichtkompatibilität des SF-Prinzips mit dem Bernoulli-Prinzip zur Konsequenz? *Arzac/Bawa* (1977, S. 279) legen sehr deutlich klar, dass SF-Investoren andere Präferenzstrukturen aufweisen als Investoren, die ihren Erwartungsnutzen maximieren. Auf der anderen Seite gibt es – angesichts der schon klassischen Kontroverse über die Validität von Stetigkeits- und Unabhängigkeitsaxiom – laut *Arzac/Bawa* weder zwingende A priori-Gründe noch eine entsprechende empirische Basis, um das Bernoulli-Prinzip als das einzig zulässige Entscheidungsprinzip anzusehen. Das SF-Prinzip stellt ein Entscheidungsprinzip dar, das als eigenständige Alternative zum Bernoulli-Prinzip anzusehen ist.

Im Rahmen einer Untersuchung der Zielfunktion von Versicherungsunternehmen weist *Albrecht* (1994) zudem darauf hin, dass die im Versicherungssektor bestehende Solvabilitätsregulierung (d.h. intuitiv die Regulierung des Risikokapitals als Funktion des eingegangenen Risikoexposures) verhindert[14], dass Versicherungsunternehmen beliebig hohe Risiken eingehen können und damit in praxi Stetigkeits- und Unabhängigkeitsaxiom de facto ebenfalls verletzt werden. Zudem kann eine Solvabilitätsregulierung in Form von Shortfall-Restriktionen der Form $P(R \leq z) \leq \alpha$ quantifiziert werden[15]. Es spricht also einiges dafür, dass die reale Entscheidungssituation von Versicherungsunternehmen besser durch das SF-Prinzip quantifiziert werden kann als durch das Bernoulli-Prinzip. Die vorstehende Argumentation kann unverändert auf alle Finanzdienstleistungsunternehmen übertragen werden, die einer VaR-basierten Regulierung ihres Risikokapitals unterliegen. Soweit noch zur Substantiierung der praktischen Relevanz des SF-Prinzips.

---

13 Für den analogen Fall von Erwartungswert/Lower Partial Moments-Kalkülen und deren Verallgemeinerungen vgl. beispielsweise *Albrecht/Maurer/Möller* (1998), S. 264 ff.

14 Zumindest auf der konzeptuellen Ebene.

15 Vgl. *Albrecht* (1994), S. 6 ff.

Abschließend soll aber noch darauf hingewiesen werden, dass aus unserer Sicht die Nichtkompatibilität des SF-Prinzips mit dem Bernoulli-Prinzip eine weitere Konsequenz hat. In den Abschnitten 1 und 2 wurde auf Beiträge hingewiesen, die entweder in einem Einperiodenmodell oder im Rahmen eines zeitstetigen Ansatzes Zielfunktionen des Erwartungswert/Varianz-Typus oder aber den Erwartungsnutzen des Endvermögens kombinieren mit einer VaR-Restriktion, d.h. einen Bernoulli-kompatiblen Ansatz mit der Restriktion aus einem SF-Ansatz. Dies ist zum einen insoweit inkonsistent, als das resultierende Gesamtmodell nicht mehr Bernoulli-kompatibel sein kann. Zum anderen vermischt man intuitiv zwei verschiedene Trade-offs zwischen Risiko und Rendite (bzw. Risikopräferenz und Höhenpräferenz), nämlich zum einen in der Zielfunktion (Erwartungsnutzen) als zum anderen separat hiervon in der Nebenbedingung. Dass eine VaR-Restriktion (und analog eine CVaR-Restriktion) implizit einen Trade-off zwischen Risiko und Rendite beinhaltet, sieht man am einfachsten im Normalverteilungsfall, in dem die Restriktion (1b') lautet

$$E(R) - N_{1-\alpha}\,\sigma(R) \geq z\,, \tag{2}$$

wobei $N_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$-Quantil der Standardnormalverteilung bezeichne. Vor diesem Hintergrund werden wir im Weiteren das SF-Prinzip dahingehend verallgemeinern, dass wir die VaR-Restriktion durch eine CVaR-Restriktion ersetzen, die Zielfunktion (Maximierung der erwarteten Rendite) aber beibehalten.

Hierzu führen wir zunächst die Größe CVaR formal ein und definieren wir den Conditional Value at Risk zum Signifikanzniveau α auf Renditeebene durch

$$\begin{aligned} CVaR_\alpha(R) &= E[-R \mid -R \geq VaR_\alpha(R)] \\ &= -E[R \mid R \leq Q_\alpha(R)] \end{aligned} \tag{3}$$

Der CVaR quantifiziert damit die Höhe des mittleren Verlusts (in Renditetermen) im Falle einer Überschreitung des VaR.

Im Falle des Vorliegens einer Dichtefunktion stimmt der CVaR überein[16] mit dem Tail Value at Risk[17]

[16] Vgl. etwa *Dhaene et al.* (2006), S. 579.

[17] Die Bezeichnungsweise in der Literatur ist uneinheitlich. So bezeichnen etwa *Acerbi/Tasche* (2002) den CVaR als Tail Conditional Mean und den TVaR als Expected Shortfall.

(4) $$\mathrm{TVaR}_{\alpha}(R) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} \mathrm{VaR}_u(R)\,du = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} Q_u(R)\,du$$

und ist damit[18] ein kohärentes Risikomaß im Sinne von *Artzner et al.* (1999).

Zwecks einer direkteren Interpretationsmöglichkeit des Risikokontrollkriteriums führen wir noch die Größe Worst Case Average Return (WCAR) ein, definiert durch

(5) $$\begin{aligned}\mathrm{WCAR}_{\alpha}(R) &= E[R \mid R \le R_{\alpha}(R)] \\ &= E[R \mid -R \ge \mathrm{VaR}_{\alpha}(R)] = -\mathrm{CVaR}_{\alpha}(R)\end{aligned}$$

ein. Während der CVaR gemäß (3) die Höhe des mittleren Verlusts (in Renditetermen) im Falle der Überschreitung des VaR quantifiziert, misst die WCAR die Höhe der mittleren Rendite im Falle einer VaR-Überschreitung. Eine Restriktion der Form

(6) $$\mathrm{WCAR}_{\alpha}(R) \ge z$$

sichert somit, dass nicht nur wie im Falle $Q_{\alpha}(R) \ge z$ gemäß (1b') die gewünschte Zielrendite in $100(1-\alpha)\%$ der Fälle überdeckt wird, sondern im Mittel auch bei Eintreten eines Worst Case-Ereignisses, d.h. einer Überschreitung des VaR. Dies führt zu einer deutlich verbesserten Risikokontrolle im Vergleich zu einer VaR-Restriktion.

Damit sind wir nun in der Lage, das Safety first-Prinzip mit beschränktem CVaR (im Weiteren kurz: CVaR-SF-Prinzip) einzuführen. Es lautet

(7a) $$E(R) \to \max! \quad (R \in D)$$

(7b) $$\mathrm{WCAR}_{\alpha}(R) \ge z\,.$$

Die zu (2b') äquivalente CVAR-Restriktion lautet analog zu (1b'')

(7b') $$\mathrm{CVaR}_{\alpha}(R) \le -z\,.$$

3 Optimale Portfolios von CVaR-SF-Investoren: Ein Separationstheorem

Investoren, die ihre Entscheidungen auf der Grundlage von (7) anstelle von (1) treffen, bezeichnen wir im Weiteren als *Conditional Value at Risk-Safety first(CVaR-SF)-*

---

[18] Vgl. *Acerbi/Tasche* (2002).

Investoren. Zur Explikation der zulässigen Renditegrößen $R \in D$ unterstellen wir im Weiteren das traditionelle Einperioden-Grundmodell der Portfoliotheorie unter Einbeziehung einer sicheren Anlage. Neben n (rein) riskanten Finanztiteln mit zugehörigen Einperiodenrenditen $R_i (i = 1,...,n)$ existiere ein sicherer Zins r_0, zu dem beliebige Beträge angelegt bzw. Kredite aufgenommen werden können. Im Folgenden konzentrieren wir uns zunächst auf Kombinationen von einem beliebigen, aber zunächst fixierten rein riskanten Portfolio P aus den n riskanten Finanztiteln und der sicheren Anlage. Bezeichne $0 \leq a < \infty$ das anteilige Investment in P und $-\infty < 1-a \leq 1$ das anteilige Investment in die sichere Anlage, so gilt für die zugehörige Gesamtrendite R des Kombinationsportfolios[19]

(8) $$R_a = aR_P + (1-a)r_0 .$$

Ziel der weiteren Analyse ist nun die Ableitung eines Separationstheorems (Two Fund-Theorem) für CVaR-SF-Investoren in Analogie zum Separationstheorem von *Tobin* im Rahmen der Markowitzschen Portfoliotheorie, d.h. im Falle von Erwartungswert-Varianz (EV)-Investoren. Für SF-Investoren wurde ein entsprechendes Resultat erstmals von *Arzac/Bawa* (1977, S. 280 ff.) abgeleitet. Im Folgenden wollen wir nachweisen, dass ein solches Resultat auch für CVaR-SF-Investoren erzielt werden kann.

Zunächst bemerken wir, dass für die Zielrendite z

(9) $$z \leq r_0$$

gelten muss[20]. Ebenso ist sinnvollerweise eine positive Risikoprämie $E(R_P) - r_0$ für riskante Portfolios vorauszusetzen, d.h.

(10) $$E(R_P) > r_0 .$$

Für den Erwartungswert des Kombinationsportfolios gilt nun

(11) $$E(R_a) = aE(R_P) + (1-a)r_0 = r_0 + a[E(R_P) - r_0].$$

---

19 Der Fall a = 0 entspricht damit einer sicheren Anlage, d.h. $R \equiv r_0$. Zur Bestimmung des Quantils einer sicheren Anlage müssen wir auf die verallgemeinerte Definition eines Quantils zurückgreifen, so wie sie etwa in *McNeil et al.* (2005), S. 39 dargestellt wird. Unter Ausnutzung des Lemmas 2.13 in *McNeil et al.* (2005) sieht man, dass dann $Q_\alpha(r_0) = r_0$. Entsprechend gilt $WCAR_\alpha(r_0) = r_0$.

20 $R_0 \equiv r_0$ ist eine zulässige Rendite und es muss daher $WCAR(r_0) = r_0 \geq z$ gelten.

Aufgrund von (11) ist somit der Erwartungswert des Kombinationsportfolios streng monoton steigend im Investmentgewicht a.

Aufgrund der Linearitätseigenschaft von (bedingten) Erwartungswerten gilt des Weiteren

(12) $$WCAR_\alpha(R_a) = a\,WCAR_\alpha(R_P) + (1-a)\,r_0 = r_0 - a[r_0 - WCAR_\alpha(R_P)].$$

Wir gehen nun noch davon aus, dass

(13) $$Q_\alpha(R_P) < r_0$$

gilt. Für empirisch repräsentative (d.h. sehr kleine) Konfidenzniveaus kann von dieser Eigenschaft ausgegangen werden, da aufgrund von[21] $R_P \geq -1$ die Beziehung $\lim_{\alpha \to 0} Q_\alpha(R_P) = -1$ gilt.

Da generell gilt

$$\begin{aligned} WCAR &= E[Q(R) + R - Q(R) \mid R \leq Q(R)] \\ &= Q(R) - E[Q(R) - R \mid R \leq Q(R)] \leq Q(R)\ , \end{aligned}$$

folgt aus (13) auch $WCAR_\alpha(R_P) < r_0$.

Unter Annahme der Bedingung (13) ist somit die Größe $WCAR_\alpha(R_a)$ gemäß (12) eine im Investmentgewicht a streng monoton fallende Größe. Insbesondere gilt

(14) $$\lim_{a \to \infty} WCAR_\alpha(R_a) = -\infty, \quad \lim_{a \to 0} WCAR_\alpha(R_a) = r_0 .$$

Die Shortfall-Restriktion (7b) konkretisiert sich für Kombinationsportfolios somit zu $r_0 - a[r_0 - WCAR_\alpha(R_P)] \geq z$ bzw.

(15) $$a \leq \frac{r_0 - z}{r_0 - WCAR_\alpha(R_P)} .$$

Ist die Ungleichung (15) nicht erfüllt, so ist der Investmentanteil des rein riskanten Portfolios P im Kombinationsportfolio "zu groß", das resultierende Risiko ist nicht mehr tolerierbar.

---

[21] Wird eine Verteilung von R_P mit Träger $(-\infty, +\infty)$ unterstellt, dann gilt sogar $\lim_{\alpha \to 0} Q_\alpha(R_P) = -\infty$.

Da $r_0 \geq z$ und $r_0 > \mathrm{WCAR}_\alpha(R_P)$, ist der Quotient auf der rechten Seite von (15) nicht-negativ und damit die Ungleichung erfüllbar. Durch "genügend geringes" anteiliges Investment in das riskante Portfolio kann das Gesamtrisiko des Kombinationsportfolios somit genügend klein gemacht werden – egal wie groß das Risiko des riskanten Portfolios selbst ist.

Welches der zulässigen Portfolios mit tolerierbarem Risiko wird aber nun der CVaR-SF-Investor wählen? Da er gemäß (7a) grundsätzlich den Erwartungswert maximiert und der Erwartungswert des Kombinationsportfolios gemäß (11) monoton steigend in a ist, wird er unter den zulässigen Investmentgewichten a gemäß (15) das maximal realisierbare wählen. Das optimale Kombinationsportfolio ist daher durch die folgende Wahl $a = a(P)$ des Investmentgewichts gegeben:

$$a(P) = \frac{r_0 - z}{r_0 - Q_\alpha(R_P)}. \tag{16}$$

Für jedes fixierte rein riskante Portfolio P kann daher ein für den CVaR-SF-Investor optimales Kombinationsportfolio gefunden werden. Erforderlich hierfür ist dabei die (modellexogene) Spezifikation der Größen z und α.

Wir geben nun die Fixierung des rein riskanten Portfolios P auf und lassen P in einer Menge von zulässigen Portfolios M variieren, beispielsweise könnte $R_P = \Sigma x_i R_i$ sein und die Menge M der zulässigen Portfolios durch die Forderung $\Sigma x_i = 1$ (Zulässigkeit von Leerverkäufen) oder durch die Forderungen $\Sigma x_i = 1$ und $x_i \geq 0$ $(i = 1,\ldots,n)$ (Ausschluss von Leerverkäufen) bestimmt sein. Wie lässt sich nun das (global) optimale Kombinationsportfolio bestimmen? Verbinden wir (11) mit (16), so ergibt sich

$$E(R_a) = r_0 + (r_0 - z)\frac{E(R_P) - r_0}{r_0 - \mathrm{WCAR}_\alpha(R_P)}. \tag{17}$$

Für jedes feste P entspricht (17) dem Erwartungswert des zugehörigen optimalen Kombinationsportfolios. Variieren wir P, so wird offenbar (17) maximiert, wenn die Größe

$$\frac{E(R_P) - r_0}{r_0 - \mathrm{WCAR}_\alpha(R_P)} \tag{18}$$

maximiert wird. Diese Größe bezieht sich nur noch auf das rein riskante (Teil-)Portfolio P. Die Maximierung des Quotienten (18) liefert das optimale rein riskante Portfolio P^*.

Das Investmentgewicht $a(P^*)$ legt auf der Basis von (17) dann das insgesamt optimale Kombinationsportfolio fest. Der Umfang, mit dem hierbei in das rein riskante Portfolio investiert wird, hängt gemäß (17) noch ab von der Zielrendite z, die Investmentgewichte des optimalen rein riskanten Portfolios hingegen nur von dem gewählten Konfidenzniveau α. Das optimale rein riskante Portfolio P^* ist also unabhängig von der gewählten Zielrendite z ! Damit haben wir das gewünschte Separationsresultat nachgewiesen und die Bestimmung des optimalen (Kombinations-)Portfolios eines CVaR-SF-Investors kann demgemäß in zwei Schritten erfolgen:

1. Die Bestimmung des optimalen rein riskanten Portfolios P^* auf der Basis der Maximierung von (18).
2. Die Bestimmung des optimalen Gesamtportfolios auf der Basis von (17) durch Festlegung der Zielrendite z.

Offenbar legt die Wahl des Konfidenzniveaus α quasi implizit das Risikomaß fest, hier $r_0 - WCAR_\alpha(R_P)$, auf das sich der CVaR-SF-Investor bei der Bewertung der Investmentalternative stützt, und die Wahl von z den Grad der Risikoaversion. Dieses Resultat ist damit in vollkommener Analogie zum Separationstheorem von Tobin. Hier ist[22] das optimale rein riskante Portfolio das Tangentialportfolio und die optimalen Portfolios unterscheiden sich nur durch den Umfang, mit dem in das Tangentialportfolio investiert wird. Das Tangentialportfolio selbst ist charakterisierbar[23] durch den maximalen Wert des Quotienten

$$SR(R_P) = \frac{E(R_P) - r_0}{\sigma(R_P)}, \tag{19}$$

der Sharpe-Ratio.

Die Gültigkeit eines Separationstheorems auch für CVaR-SF-Investoren erweitert das Spektrum der in der Literatur erzielten Ergebnisse, die auf eine Verallgemeinerung des für EV-Investoren gültigen Separationstheorems abzielen. Typischerweise findet dies im Rahmen des Bernoulli-Prinzips statt und betrifft entweder die Spezifikation der zu-

---

22 Vgl. etwa *Albrecht/Maurer* (2008), S. 306.

23 Ebenda.

grunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung[24] oder der zugrunde liegenden Präferenzen[25].

Das in den Quotienten (18) implizit eingehende Risikomaß $r_0 - WCAR_\alpha$ besitzt nun den Nachteil, dass es nicht lageunabhängig ist[26]. Am einfachsten kann dieser Sachverhalt unter Zugrundelegung einer normalverteilten Rendite R illustriert werden. In diesem Fall gilt[27]

$$WCAR_\alpha(R) = E(R) - \frac{\varphi(N_{1-\alpha})}{\alpha}\sigma(R), \tag{20}$$

wobei $N_{1-\alpha}$ wieder das $(1-\alpha)$-Quantil der Standardnormalverteilung bezeichne und φ die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung. Damit geht die Höhe des Erwartungswerts auch in die Größe PMR_α ein.

Damit ist der Quotient (18) auch nicht direkt vergleichbar mit der Sharpe Ratio (19), in die das lageunabhängige Risikomaß $\sigma(R)$, die Renditestandardabweichung, einfließt. Aus diesem Grund nehmen wir noch einen weiteren Analyseschritt vor. Es gilt offenbar

$$r_0 - WCAR_\alpha(R) = r_0 + E(R) - E(R) - WCAR_\alpha(R) = E(R) - WCAR_\alpha(R) - [E(R) - r_0]$$

und damit

$$\frac{E(R) - r_0}{r_0 - WCAR_\alpha(R)} = \frac{1}{\frac{E(R) - WCAR_\alpha(R)}{E(R) - r_0} - 1} \tag{21}$$

Die linke Seite wird also offenbar maximiert, wenn äquivalent der Quotient

$$\frac{E(R) - r_0}{E(R) - WCAR_\alpha(R)} \tag{22}$$

maximiert wird.

Zur Gewinnung einer intuitiv besser verständlichen Variante von (22) führen wir nun noch die Größe Mean Conditional Value at Risk (MCVaR) ein. Der MCVaR ist analog

---

[24] Vgl. etwa *Owen/Rabinovitch* (1983), die elliptische Renditeverteilungen zugrundelegen.

[25] Vgl. etwa *Cass/Stiglitz* (1970).

[26] Im Sinne der Terminologie von *Albrecht/Maurer* (2008), S. 120 liegt ein Risikomaß des Typus II (Risiko als notwendiges Kapital bzw. als notwendige Rendite) und nicht des Typus I (Risiko als Ausmaß der Abweichungen von einer Zielgröße) vor. *Rockafellar et al.* (2008) bezeichnen Risikomaße des Typus I als Deviation Measures, geben für diese eine Axiomatisierung und leiten eine generelle Beziehung zu kohärenten Risikomaßen (des Typus II) her.

[27] Vgl. etwa *Albrecht/Maurer* (2008), S. 135.

zu konstruieren wie der Mean Value at Risk[28] und beruht auf der Anwendung des CVaR auf die zentrierte Größe $R - E(R)$. Unter Zugrundelegung von (5) und der Ausnutzung der Linearität von Quantilen gilt dann

$$\begin{aligned} \text{MCVaR}(R) &:= \text{CVaR}[R - E(R)] \\ &= -E[R - E(R) \mid R - E(R) \le Q_\alpha(R - E(R))] \\ &= -E[R - E(R) \mid R \le Q_\alpha(R)] \\ &= E(R) + \text{CVaR}(R)\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Der MCVaR ist per Konstruktion ein lageunabhängiges Risikomaß, was auch nochmals im Fall der Normalverteilung direkt transparent wird. Auf der Basis von (20) und der Beziehung CVaR = –WCAR gilt hier

$$\text{MCVaR}_\alpha(R) = \frac{\varphi(N_{1-\alpha})}{\alpha}\sigma(R)\,. \tag{24}$$

Auf Basis der Einführung des MCVaR gewinnen wir daher eine äquivalente Darstellung des Quotienten (22), nämlich $[E(R) - r_0] / \text{MCVaR}_\alpha(R)$.

Vor dem Hintergrund der vorstehenden Überlegungen können wir damit insgesamt festhalten:

i) CVaR-SF-Investoren treffen ihre Investmententscheidungen unter Verwendung des Risikomaßes $\text{MCVaR}_\alpha(R)$, dem Mean Conditional Value at Risk auf Renditeebene.

ii) Das optimale riskante Portfolio R_P wird von CVaR-SF-Investoren auf der Basis des Quotienten

$$\text{CVaR-Ratio}(R) = \frac{E(R) - r_0}{\text{MCVaR}_\alpha(R)}\,, \tag{25}$$

bestimmt, den wir im Weiteren als *CVaR-Ratio*[29] bezeichnen.

Im nächsten Abschnitten wird dieses risikoadjustierte Performancemaß im Rahmen eines partialanalytischen Ansatzes (im Gegensatz zu einem Kapitalmarktgleichgewichts-

---

[28] Vgl. hierzu etwa *McNeil/Frey/Embrechts* (2005), S. 38.

[29] Diese Bezeichnung ist konsistent mit der in der Literatur üblichen Bezeichnung des Quotienten (25), vgl. etwa *Biglova et al.* (2004),S. 106. In einer verteilungsgebundenen Variante wird der CVaR-Ratio bei Zugrundelegung einer symmetrischen stabilen Verteilung in der Literatur auch als STARR (Stable Tail-Adjusted Return-Ratio) bezeichnet.

ansatz) einer ökonomischen Anwendung, der risikoadjustierten Performancemessung, zugeführt. Betrachtet wird dabei jeweils ein Investor bzw. Entscheidungsträger, der als Preisnehmer agiert.

4 Risikoadjustierte Performancemessung

Die Sharpe-Ratio[30] (19) ist nach wie vor unzweifelhaft *das* Standardmaß für eine risikoadjustierte Performancemessung im Bereich des Investmentmanagements. Intuitiv misst sie die Höhe der Risikoprämie $E(R) - r_0$ pro Einheit Risiko, quantifiziert durch die Renditestandardabweichung. Das in die Sharpe-Ratio eingehende Risikomaß, die Renditestandardabweichung liefert zugleich den zentralen Kritikpunkt an der Sharpe-Ratio. Die Standardabweichung ist[31] nur für solche Verteilungen ein gutes Risikomaß, die (approximativ) symmetrisch um den Erwartungswert verteilt sind, wie etwa die Normalverteilung oder generell elliptische Verteilungen. Zu den "Stylized Facts" der Zeitreihen von Finanzmarktdaten zählt aber insbesondere[32], dass viele Finanzmarktrenditen asymmetrischer Natur sind (dies gilt insbesondere für Alternative Investments oder Optionspositionen).

Vor diesem Hintergrund sind in der Literatur zahlreiche Risikomaße entwickelt worden[33], die im Gegensatz zur Standardabweichung auf einer asymmetrischen Risikomessung, auf einer Berücksichtigung des Downside-Risikos, beruhen. Korrespondierend sind in der Literatur zahlreiche risikoadjustierte Performancemaße entwickelt worden[34], die auf asymmetrischen Risikomaßen beruhen. Diese sind jedoch dem Grunde nach reine Ad hoc-Modifikationen der Sharpe-Ratio, indem einfach das Risikomaß Standardabweichung durch ein asymmetrisches Risikomaß ersetzt wird. Im Gegensatz zur Sharpe-Ratio besitzen sie aber keine theoretische Begründung. Die zentrale entscheidungstheoretische Eigenschaft der Sharpe-Ratio besteht darin, dass[35]

---

[30] Vgl. für viele *Albrecht/Maurer* (2008), S. 314 ff.

[31] Vgl. etwa *McNeil/Frey/Embrechts* (2005), S. 43 f.; *Albrecht/Maurer* (2008), S. 122 f.

[32] Vgl. etwa *Cont* (2001), S. 224.

[33] Für einen aktuellen Überblick vgl. etwa *Biglova et al.* (2004).

[34] Für aktuelle Überblicke vgl. etwa *Biglova et al.* (2004); *Eling/Schuhmacher* (2006); *Farinelli et al.* (2008).

[35] Vgl. hierzu etwa *Albrecht/Maurer* (2008), S. 306.

i) alle Erwartungswert-Varianz (EV)-Investoren im rein riskanten Teil ihres Portfolios das Tangentialportfolio, d.h. das Portfolio mit der maximalen Sharpe-Ratio, realisieren,

ii) alle optimalen (Kombinations-) Portfolios die gleiche Sharpe-Ratio aufweisen wie das Tangentialportfolio.

Dieses für EV-Investoren gültige Resultat lässt sich in vollkommener Analogie für CVAR-SF-Investoren formulieren. Alle SF-Investoren realisieren dasjenige rein riskante Portfolio mit maximalem Quotienten (18) bzw. – wie wir gezeigt haben – äquivalent hierzu mit maximaler CVaR-Ratio (25). Alle optimalen Kombinationsportfolios weisen zudem die gleiche maximale CVaR-Ratio auf. Dies sieht man etwa wie folgt. Ist P das optimale rein riskante Portfolio, so hat offenbar jedes auf P beruhende Kombinationsportfolio mit zugehöriger Rendite R_a gemäß (8) die gleiche CVaR-Ratio wie P. Im Zähler der CVaR-Ratio haben wir unter Verwendung von (11)
$E(R_a) - r_0 = r_0 + a[E(R_P) - r_0] - r_0 = a[E(R_P) - r_0]$. Im Nenner der CVaR-Ratio haben wir unter Verwendung von (11) und (12)

$$\begin{aligned} MCVaR_\alpha(R_a) &= E(R_a) - WCAR_\alpha(R_a) \\ &= r_0 + a[E(R_P) - r_0] - r_0 + a[r_0 - WCAR_\alpha(R_P)] \\ &= a[E(R_P) - WCAR_\alpha(R_P)] \\ &= a[E(R_P) + CVaR_\alpha(R_P)]. \end{aligned}$$

Damit haben wir insgesamt

$$(26)\ \text{CVaR-Ratio}(R_a) = \frac{a[E(R_P) - r_0]}{a[E(R_P) + CVaR(R_P)]} = \frac{E(R_P) - r_0}{MCVaR_\alpha(R_P)} = \text{CVaR-Ratio}(R_P),$$

d.h. den Nachweis der getätigten Behauptung.

So wie die Sharpe-Ratio die adäquate risikoadjustierte Performancekennzahl für EV-Investoren ist, so ist somit die CVaR-Ratio die adäquate risikoadjustierte Performancekennzahl für SF-Investoren. Damit erhält die in der Literatur auf der Grundlage einer reinen Ad hoc-Modifikation der Sharpe-Ratio verwendete CVaR-Ratio eine entscheidungstheoretische Fundierung.

Im Fall normalverteilter Renditen konkretisiert sich die CVaR-Ratio auf der Basis von (24) zu

(27) $$\text{CVaR-Ratio}(R) = \frac{E(R) - r_0}{\varphi(N_{1-\alpha})\sigma(R)/\alpha} = \frac{\alpha}{\varphi(N_{1-\alpha})} \cdot SR(R).$$

Die CVaR-Ratio ist in diesem Fall somit ein konstantes Vielfaches der Sharpe-Ratio. Dieses Resultat lässt sich systematisch ausdehnen auf den Fall elliptischer Verteilungen[36], wie wir im Folgenden skizzieren werden. Folgt die Renditeverteilung einer (hier univariaten) elliptischen Verteilung mit Dichtegenerator g, $R \sim E_1(\mu, \sigma^2, g)$, so besitzt sie eine Dichtefunktion der Form

(28) $$f(x) = \frac{1}{\sigma} g\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right].$$

Gilt für den Dichtegenerator $g(x) = \exp(-x/2)/(2\pi)^{1/2}$, so liegt im Spezialfall eine Normalverteilung vor. Elliptische Verteilungen stellen also insoweit Verallgemeinerungen der Normalverteilung dar, als dass sie ebenfalls nur von den Parametern μ und σ abhängen, jedoch eine andere Form der Dichte besitzen. Die Form des Dichtegenerators g legt die betreffende Unterfamilie der Familie der elliptischen Verteilungen fest. Allgemein gelten dabei die Beziehungen $E(R) = \mu$ und $Var(R) = c\sigma^2$ mit einer Proportionalitätskonstante $c > 0$ (wobei im Falle der Normalverteilung $c = 1$ ist). Im Falle $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ ergibt sich die zu dieser Unterfamilie gehörige sphärische Verteilung (im Falle der Normalverteilung ist dies die Standardnormalverteilung) mit zugehöriger Dichtefunktion $g(x^2)$.

Aus der Beziehung (28) wird zudem deutlich, dass die Dichten elliptischer Verteilungen wie im Falle der Normalverteilung symmetrisch zum Erwartungswert sind. Bekannte Vertreter der elliptischen Verteilungen sind die t-Verteilung $(c = n/(n-2)$, wobei n dem Freiheitsgrad der Verteilung entspricht) sowie die logistische Verteilung $(c = \pi^2/3)$. Daneben gehören die (symmetrische) stabile Verteilung und die (symmetrische) hyperbolische Verteilung zur Familie der elliptischen Verteilungen. Insbesondere können innerhalb der Familie der elliptischen Verteilungen beliebig schwere Verteilungsenden repräsentiert werden, was in Übereinstimmung mit den bereits angeführten Stylized Facts von Finanzmarktzeitreihen steht. Lediglich Asymmetrien in der Vertei-

---

[36] Für elliptische Verteilungen und ihre Standardeigenschaften verweisen wir generell auf *Fang/Kotz /Ng* (1990), Kapitel 2 und 3 sowie *McNeil/Frey/Embrechts* (2005), S. 89 ff.

lung (wie etwa bei optionierten Positionen oder alternativen Investments regelmäßig der Fall) können im Rahmen elliptischer Verteilungen nicht abgebildet werden.

Definieren wir $L := -R$ als korrespondierende Verlustvariable, so besitzt auch L die Dichte (28), wobei nur $\mu = -E(R)$ zu wählen ist.

Es gilt daher

$$\begin{aligned} \mathrm{CVaR}_\alpha(R) &= E[-R \mid -R \geq \mathrm{VaR}_\alpha(R)] \\ &= E[L \mid L \geq Q_{1-\alpha}(L)] \\ &= \frac{1}{P[L \geq Q_{1-\alpha}(L)]} \int_{Q_{1-\alpha}}^{\infty} x \, \frac{1}{\sigma} \, g\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx \, . \end{aligned} \tag{29}$$

Offenbar gilt zunächst $P[L \geq Q_{1-\alpha}(L)] = \alpha$. Zur Bestimmung des Integrals nehmen wir die Substitution $z = (x-\mu)/\sigma$, d.h. den Übergang zur korrespondierenden sphärischen Verteilung, vor. Bezeichne $Z_{1-\alpha} = Z_{1-\alpha}(g)$ das $(1-\alpha)$-Quantil der zu L gehörigen sphärischen Verteilung, so ergibt sich mit $dx = \sigma dz$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha} \int_{Q_{1-\alpha}}^{\infty} x \, \frac{1}{\sigma} \, g\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx = \frac{1}{\alpha} \int_{Z_{1-\alpha}}^{\infty} (\mu + \sigma z) g(z^2) \, dz \\ &= \frac{1}{\alpha} \mu \int_{Z_{1-\alpha}}^{\infty} g(z^2) \, dz + \frac{\sigma}{\alpha} \int_{Z_{1-\alpha}}^{\infty} z \, g(z^2) \, dz \, . \end{aligned}$$

Dabei entspricht $g(z^2)$ der Dichte der zu L gehörigen sphärischen Verteilung. Der erste Ausdruck reduziert sich somit auf die Größe μ. Treffen wir die Bezeichnung

$$H_{1-\alpha}(g) = \frac{1}{\alpha} \int_{Z_{1-\alpha}}^{\infty} z g(z^2) \, dz \, , \tag{30}$$

so erhalten wir entsprechend

$$\begin{aligned} \mathrm{MCVaR}(R) &= -E(-R) + \mathrm{CVaR}(R) \\ &= -\mu + \mu + H_{1-\alpha}(g) \sigma \quad , \\ &= H_{1-\alpha}(g) \sigma(R) / \sqrt{c} \, . \end{aligned}$$

Im Falle elliptischer Verteilungen (mit existierender Dichtefunktion) gilt somit

$$\mathrm{MCVaR}_\alpha(R) = \frac{1}{\sqrt{c}} H_{1-\alpha}(g) \sigma(R) \, , \tag{31}$$

d. h. der Mean Conditional Value at Risk auf Renditeebene ist proportional zur Standardabweichung. Entsprechend lautet die CVaR-Ratio im Falle elliptischer Verteilungen

(32) $$\text{CVaR-Ratio}(R) = \frac{E(R) - r_0}{H_{1-\alpha}(g)\,\sigma(R)/\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c}}{H_{1-\alpha}(g)} SR(R)$$

und ist damit proportional zur Sharpe-Ratio. Die Maximierung der CVaR-Ratio und die Maximierung der Sharpe-Ratio sind somit im Falle elliptischer Verteilungen zueinander äquivalent. Dieses Ergebnis ist durchaus wünschenswert, denn im Falle des Vorliegens einer elliptischen Verteilung unterliegt die Standardabweichung als Risikomaß und damit die Sharpe-Ratio als risikoadjustiertes Performancemaß auch nicht der Kritik. Erst im Falle asymmetrischer Renditeverteilungen sollte es daher zu unterschiedlichen Ergebnissen kommen, wenn man die CVaR-Ratio anstelle der Sharpe-Ratio zu Zwecken der Performancemessung verwendet. Dass dies so ist, demonstrieren wir im Weiteren anhand des Standardfalls einer (verschobenen) logarithmischen Normalverteilung, d. h. $1 + R \sim LN(m, v^2)$, wobei dieses Ergebnis ohne Probleme auf log-elliptische Verteilungen ausgedehnt werden kann. Es gilt zunächst[37] $E(R) = \exp(m + \frac{1}{2}v^2) - 1$ sowie $\sigma(R) = E(R)\sqrt{\exp(v^2) - 1}$, d. h. die Sharpe-Ratio ergibt sich bei Annahme einer logarithmischen Normalverteilung von $1 + R$ zu

(33) $$SR(R) = \frac{\exp(m + \frac{1}{2}v^2) - (1 + r_0)}{[\exp(m + \frac{1}{2}v^2) - 1]\sqrt{\exp(v^2) - 1}}.$$

Des Weiteren ist der WCAR in diesem Fall gegeben durch[38]
$WCAR = \{[1 + E(R]\Phi(-N_{1-\alpha} - v)/\alpha\} - 1$, wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichne. Für die CVaR-Ratio gilt daher im Falle einer logarithmisch normalverteilten Größe $1 + R$ somit

(34) $$\text{CVaR-Ratio}(R) = \frac{\exp(m + \frac{1}{2}v^2) - (1 + r_0)}{\exp(m + \frac{1}{2}v^2)[1 - \Phi(-N_{1-\alpha} - v)/\alpha]}.$$

Der Nenner der Sharpe Ratio (37) ist gegeben durch $E(R) \cdot \sqrt{\exp(v^2) - 1}$, der Nenner der CVaR-Ratio hingegen durch $[1 + E(R)][1 - \Phi(-N_{1-\alpha} - v)/\alpha]$. Offenbar stehen diese

---

[37] Vgl. etwa *Albrecht/Maurer* (2008), S. 109.

[38] Ebenda, S. 135.

beiden Größen nicht in einer zueinander proportionalen (von m und v unabhängigen) Beziehung. CVaR-Ratio und Sharpe-Ratio führen daher im Falle logarithmisch normalverteilter Renditen (bzw. präzise logarithmisch normalverteilter Aufzinsungsfaktoren $1+R$) im Allgemeinen zu unterschiedlichen Rankings bei Durchführung einer Performancemessung.

5 Kapitalmarktgleichgewicht

Auf der Basis des Separationstheorems von Tobin lassen sich im Falle von EV-Investoren die erwarteten Renditen von Wertpapierportfolios im Kapitalmarktgleichgewicht durch Maximierung der Sharpe-Ratio bestimmen[39]. Das entsprechende Resultat, die sog. Wertpapiermarktlinie, ist eines der beiden Hauptresultate des Capital Asset Pricing-Modells (CAPM). Entsprechend lässt sich auch für SF-Investoren eine Kapitalmarktgleichgewichtsbeziehung herleiten. *Arzac/Bawa* (1977) gelingt diesbezüglich eine allgemeine strukturelle Charakterisierung des Kapitalmarktgleichgewichts sowie eine explizite Lösung (die mit der CAPM-Wertpapiermarktlinie übereinstimmt) für den Fall der Normalverteilung. Ziel der im Weiteren vorgenommenen Untersuchungen ist es daher, auch für den Fall von CVaR-SF-Investoren Aussagen über das korrespondierende Kapitalmarktgleichgewicht zu gewinnen.

Zur Vorbereitung der weiteren Ableitungen definieren wir zunächst die CVaR-Ratio (25) in Termen der Portfoliogewichte der rein riskanten Finanztitel:

$$\text{(35)} \qquad SFR(x_1,\ldots,x_n) = \frac{E(R)-r_0}{MCVaR_\alpha(R)} = \frac{F(x_1,\ldots,x_n)}{G(x_1,\ldots,x_n)}.$$

Dabei sind die Größen $x_1,\ldots,x_n$ beliebige reelle Zahlen. Diese müssen sich nicht mehr zu eins aufaddieren, da die Differenz zu eins den Umfang der risikolosen Anlage bzw. der risikolosen Kapitalaufnahme angibt. Mit $R-r_0 = \Sigma x_i(R_i - r_0)$ ergibt sich

$$F(x_1,\ldots,x_n) = E(R-r_0) = \Sigma\, x_i[E(R_i)-r_0]$$

sowie

$$G(x_1,\ldots,x_n) = \Sigma\, x_i[E(R_i) - WCAR_\alpha(\Sigma\, x_i R_i)].$$

---

[39] Vgl. hierzu etwa *Albrecht/Maurer* (2008), S. 310.

Im Optimum müssen die Bedingungen 1. Ordnung gelten, d.h. $\partial SFR/\partial x_j = 0$ für alle $j = 1,...,n$. Dies ist offenbar äquivalent zu

(36) $$\partial F/\partial x_j = \partial G/\partial x_j \cdot \frac{F}{G} \quad (j = 1,...,n).$$

Die partiellen Ableitungen $\partial F/\partial x_j$ sind dabei gegeben durch die Größe $E(R_j) - r_0$. Zur Bestimmung der Größen $\partial G/\partial x_j$ müssen zunächst die Ableitungen $\partial WCAR_\alpha(R)/\partial x_j$ bestimmt werden. Hierzu greifen wir zurück auf Ergebnisse im Kontext von Quantilableitungen, wie sie von *Gourieroux/Laurent/Scaillet* (2000), *Martin/Wilde* (2002) sowie *Rau-Bredow* (2004) vorliegen. Auf Basis dieser Ergebnisse erhalten wir

(37) $$\frac{\partial WCAR_\alpha(R)}{\partial x_j} = \frac{\partial E[R \mid R \le Q_\alpha(R)]}{\partial x_j} = E[R_j \mid R \le Q_\alpha(R)].$$

Die Validität dieses Ergebnisses setzt dabei (nur) voraus, dass der Vektor $(R_1,...,R_n)$ der riskanten Finanztitel eine gemeinsame (multivariate) Dichtefunktion $f(r_1,...,r_n) \ge 0$ besitzt. Das Ergebnis (37) ist somit unter relativ schwachen Voraussetzungen valide. Strukturell ist die Ableitung bestimmbar durch den bedingten Erwartungswert der Größe R_j gegeben die Information, dass die Realisation der Rendite des Kombinationsportfolios kleiner oder gleich dem Quantil der Renditeverteilung ist. Die Größe $E[R_j \mid R \le Q_\alpha(R)]$ ist dabei charakterisierbar[40] als die beste Vorhersage[41] (best prediction) der Größe R_j gegeben die Information $R \le Q_\alpha(R)$.

Insgesamt haben wir damit das Ergebnis

(38) $$\partial G/\partial x_j = E(R_j) - E[R_j \mid R \le Q_\alpha(R)].$$

Berücksichtigt man nun noch, dass im Kapitalmarktgleichgewicht das optimale riskante Portfolio dem Marktportfolio entsprechen muss[42], so lauten die Bedingungen 1. Ordnung insgesamt

(39a) $$E(R_j) - r_0 = [E(R_M) - r_0] \cdot \frac{E(R_j) - E[R_j \mid R_M \le Q_\alpha(R_M)]}{MCVaR_\alpha(R_M)}.$$

[40] Vgl. etwa *Klenke* (2005), S. 171, Bemerkung 8.15.

[41] Im Sinne der Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers.

[42] Vgl. zu diesem Argument etwa *Albrecht/Maurer* (2008), S. 308.

Der korrespondierende Betafaktor im CVaR-SF-Kapitalmarktgleichgewicht lautet somit

$$\begin{aligned}\beta_{CVaR}(R_j, R_M) &= \frac{E(R_j) - E[R_j \mid R_M \leq Q_\alpha(R_M)]}{MCVaR_\alpha(R_M)} \\ &= \frac{E(R_j) - E[R_j \mid R_M \leq Q_\alpha(R_M)]}{E(R_M) - WCAR_\alpha(R_M)}\,.\end{aligned} \tag{39b}$$

Dieses Resultat setzt nur die Existenz der Quantilableitungen (37) voraus, wofür – wie bereits ausgeführt – nur die Existenz einer gemeinsamen Dichtefunktion von $(R_1,...,R_n)$ erforderlich ist.

Da sowohl der Erwartungswert als auch der bedingte Erwartungswert linear ist, gilt ferner (wobei x_j^M dem Gewicht des j-ten Finanztitels im Marktportfolio entspreche)

$$\begin{aligned}MCVaR_\alpha(R_M) &= E(R_M) - WCAR_\alpha(R_M) \\ &= E(\Sigma x_j^M R_j) - E[\Sigma x_j^M R_j \mid R_M \leq Q_\alpha(R_M)] \\ &= \Sigma x_j^M \{E(R_j) - E[R_j \mid R_M \leq Q_\alpha(R_M)]\}.\end{aligned}$$

Damit entspricht somit Zähler von (39b) den Risikobeiträgen des j-ten Finanztitels zum Gesamtrisiko $MCVaR_\alpha(R_M)$ des Marktportfolios. Dieses Ergebnis ist vollständig analog zum CAPM, d.h. dem Kapitalmarktgleichgewicht für EV-Investoren. Hier lautet der Betafaktor $\beta(R_j, R_M) = Cov(R_j, R_M)/Var(R_M)$ und es gilt

$$\Sigma x_j^M Cov(R_j, R_M) = \Sigma Cov(x_j^M R_j, R_M) = Cov(R_M, R_M) = Var(R_M)\,.$$

Die zentrale Problematik des erzielten Resultats (39a) im Hinblick auf die CVaR-SF-Wertpapiermarktlinie (39a) besteht darin, dass der Zähler des Betafaktors β_{SF} in (39b) zunächst nur strukturell gegeben ist und nicht durch einen expliziten analytischen Ausdruck. Aus empirischer Sicht stellt dies aber nicht wirklich ein Problem dar. So lässt auf sich der in (39b) eingehende (bedingte) Erwartungswert etwa durch den Nadaraya-Watson-Kernschätzer[43] (in der entsprechend bedingten Variante) im Rahmen einer nichtparametrischen Schätzung bestimmen. Im Weiteren soll der Fokus jedoch darauf liegen, auf der analytischen Ebene weitere Ergebnisse zu erzielen.

Hierzu greifen wir wieder auf die bereits in Abschnitt 4 eingeführte Familie der elliptischen Verteilungen zurück. Für diese können bedingte Erwartungen explizit bestimmt

---

[43] Vgl. etwa *Pagan/Ullah* (1999), Theorem 3.4.

werden und sind zudem linear in der bedingenden Variablen[44]. Im vorliegenden Kontext folgt hieraus mit $\beta(R_j, R_M) := \mathrm{Cov}(R_j, R_M) / \mathrm{Var}(R_M)$ zunächst die Beziehung

$$(40) \qquad E[R_j \mid R_M = Q_\alpha(R_M)] = E(R_j) + \beta(R_j, R_M)[Q_\alpha(R_M) - E(R_M)]$$

Zur Auswertung des Ausdrucks (39b) benutzen wir nun die Eigenschaft (einer Variante des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit)

$E[X \mid Y \leq H] = \int_{-\infty}^{H} E[X \mid Y = y] dF_Y(y \mid Y \leq H)$. In Termen bedingter Erwartungswerte gilt damit $E[X \mid Y \leq H] = E[E[X \mid Y] \mid Y \leq H]$. Hieraus ergibt sich für den vorliegenden Fall $E[R_j \mid R_M \leq Q_\alpha(R_M)] = E[E[R_j \mid R_M] \mid R_M \leq Q_\alpha(R_M)]$. Aus (40) erhalten wir hieraus insgesamt

$$(41) \qquad \begin{aligned} &E[R_j \mid R_M \leq Q_\alpha(R_M)] \\ &= E(R_j) + \beta(R_j, R_M)\{E[R_M \mid R_M \leq Q_\alpha(R_M)] - E(R_M)\} \\ &= E(R_j) - \beta(R_j, R_M)\, \mathrm{MCVaR}_\alpha(R_M)\,. \end{aligned}$$

Auf der Basis dieses Resultats erhalten wir für den Betafaktors im CVaR-SF-Kapitalmarktgleichgewicht gemäß (39b) offenbar das Ergebnis

$$(42) \qquad \beta_{CVaR}(R_j, R_M) = \beta(R_j, R_M)\,,$$

d.h. wir gewinnen genau den Betafaktor des CAPM wieder. Damit kann also festgehalten werden, dass im Falle elliptischer Verteilungen die Wertpapiermarktlinie für CVaR-SF-Investoren und EV-Investoren identisch ist. Insbesondere ist dieses Resultat dabei vollständig unabhängig von dem gewählten Signifikanzniveau α !Angesichts der Eigenschaft (31), dass im Falle der elliptischen Verteilungen der Mean Conditional Value at Risk auf Renditeebene proportional zur Standardabweichung ist, ist dieses Ergebnis allerdings auch nicht weiter verwunderlich. Wie schon im Falle der risikoadjustierten Performacemessung ergeben sich Abweichungen von den Standardresultaten für EV-Investoren erst im Falle asymmetrischer Renditeverteilungen. Dies soll noch abschließend illustriert werden, wobei wir uns auf eine Skizze der Vorgehensweise beschränken werden, um die technischen Details in Grenzen zu halten.

Wir nehmen zu diesem Zwecke an[45], dass der Renditevektor $(R_1, \ldots, R_n)$, der die Komponenten des Marktportfolios repräsentiert, einer endlichen Mischung von (multivaria-

---

44 Vgl. hierzu etwa *Fang/Kotz/Ng* (1990), S. 45.

ten) Normalverteilungen[46] folgt. Die mischende Verteilung werde dabei durch die Zufallsvariable I mit

(43) $$P(I = i) = p_i \qquad (i = 1,...,K;\ p_i \geq 0;\ \Sigma p_i = 1)$$

beschrieben.

Es ist aus der Literatur bekannt, dass endliche Mischungen von Normalverteilungen sehr flexible Formen von Dichtefunktionen beinhalten[47] und in der Lage sind – im Gegensatz zur Normalverteilung – Schiefe und Kurtosis zu erfassen[48]. Die Mischungsstruktur von $(R_1,...,R_n)$ überträgt sich dabei auf die Rendite des Marktportfolios, d.h. es gilt[49]

(44) $$R_M \mid I = i \sim N(\mu_M(i), \sigma_M^2(i)) .$$

Zwecks Vereinfachung der Notation bezeichnen wir im Weiteren die korrespondierende bedingte Verteilungsfunktion mit $\Phi_M(r \mid i)$ und die zugehörige bedingte Dichtefunktion mit $\varphi_M(r \mid i)$.

Für die unbedingte Verteilungsfunktion F_M der Rendite R_M des Marktportfolios gilt dann

(45) $$F_M(r) = \Sigma\, p_i \Phi_M(r \mid i) .$$

Insbesondere bestimmt sich[50] daher das unbedingte α-Quantil $Q_\alpha(R_M)$ auf der Basis der Gleichung

(46) $$\Sigma\, p_i \Phi_M(Q_\alpha(R_M) \mid i) = \alpha ,$$

die numerisch gelöst werden muss.

---

45 Für die Anregung zu diesem Ansatz danke ich Herrn *Markus Huggenberger*.

46 Die Vorgehensweise lässt sich dabei ohne Probleme auf Mischungen von beliebigen elliptischen Verteilungen übertragen.

47 Vgl. etwa *Frühwirth-Schnatter* (2006), S. 5.

48 Ebenda, S. 11.

49 Wir beschränken uns dabei bewusst auf die Grundstruktur der bedingten Verteilung von R_M, um die Darstellung kompakt zu halten.

50 Die linke Seite von (46) besteht in einer Linearkombination (mit positiven Gewichten) streng monoton steigender Funktionen. Insofern ist auch die resultierende Funktion streng monoton steigend und die Lösung von (46) somit eindeutig. Für eine entsprechende Vorgehensweise im Falle von Regime Switching-Prozessen vgl. *Billio/Pelizzon* (2000), S. 537. Finite Mixture-Modelle können als Spezialfälle von Regime Switching-Prozessen angesehen werden.

Als weitere Größe ist der unbedingte Worst Case Average Return $WCAR_\alpha(R_M)$ der Rendite R_M des Marktportfolios zu bestimmen.

Es gilt zunächst

$$E[R_M \mid R_M \le Q_\alpha(R_M)] = \frac{\int_{-\infty}^{Q_\alpha(R_M)} r\, f_M(r)\, dr}{P[R_M \le Q_\alpha(R_M)]} = \frac{1}{\alpha} \Sigma p_i \int_{-\infty}^{Q_\alpha(R_M)} r\, \varphi_M(r \mid i)\, dr \,.$$

Die hierbei auftretenden Integrale sind untere partielle erste Momente und können im Normalverteilungsfall wie folgt bestimmt werden[51],

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{Q_\alpha(R_M)} r\, \varphi_M(r \mid i)\, dr \\ &= \mu_M(i)\, \Phi_M(Q_\alpha^i(R_M) \mid i) - \sigma_M(i)\, \varphi_M(Q_\alpha^i(R_M) \mid i) \,.\end{aligned}$$

Dabei definieren wir

(47) $$Q_\alpha^i(R_M) = \frac{Q_\alpha(R_M) - \mu_M(i)}{\sigma_M(i)} \,.$$

Damit gilt insgesamt im Mischungsfall

(48) $$WCAR_\alpha(R_M) = \frac{1}{\alpha} \Sigma p_i \left[\mu_M(i)\, \Phi_M(Q_\alpha^i(R_M) \mid i) - \sigma_M(i)\, \varphi_M(Q_\alpha^i(R_M) \mid i)\right]$$

Die Größe $Q_\alpha(R_M)$ ist dabei, wie bereits ausgeführt, die Lösung der Gleichung (46).

Die Mischungsstruktur von $(R_1, \ldots, R_n)$ überträgt sich ebenfalls auf die Einzelrenditen. Hier gelte

(49) $$R_j \mid I = i \sim N(\mu_j(i), \sigma_j^2(i)) \,.$$

Schließlich überträgt sich die Mischungsstruktur auch auf das Paar (R_j, R_M). Es gilt dabei zunächst in Analogie zu Beziehung (40)

(50a) $$\begin{aligned}&E[R_j \mid R_M = Q_\alpha(R_M), I = i] \\ &= \mu_j(i) + \beta(R_j, R_M \mid i)[Q_\alpha(R_M) - \mu_M(i)]\end{aligned}$$

[51] Vgl. hierzu etwa *Albrecht/Maurer* (2008), S. 152 f.

mit

$$\text{(50b)} \qquad \beta(R_j, R_M \mid i) = Cov(R_j, R_M \mid I = i) / \sigma_M^2(i) = \rho_{jM}(i)\sigma_j(i)/\sigma_M(i)\,.$$

Unter Anwendung des gleichen Arguments, das zu (41) führt, ergibt sich hieraus

$$\text{(51)} \qquad \begin{aligned} &E[R_j \mid R_M \leq Q_\alpha(R_M), I = i] \\ &\quad = \mu_j(i) + \beta(R_j, R_M \mid i)\,[WCAR_\alpha(R_M) - \mu_M(i)] \\ &\quad = \mu_j(i) - \beta(R_j, R_M \mid i)\,[\mu_M(i) + CVaR_\alpha(R_M)]\;. \end{aligned}$$

Die Größe $CVaR_\alpha(R_M) = -WCAR_\alpha(R_M)$ bestimmt sich dabei auf der Grundlage von (48).

Wir nutzen dann des Weiteren den folgenden Zusammenhang aus:

$$\text{(52a)} \qquad \begin{aligned} &E[R_j \mid R_M \leq Q_\alpha(R_M)] \\ &\quad = \sum_{i=1}^{K} w_i\, E[R_j \mid R_M \leq Q_\alpha(R_M), I = i]\;. \end{aligned}$$

Dabei gilt unter Ausnutzung des Satzes von Bayes

$$\text{(52b)} \qquad \begin{aligned} w_i &= w_i(Q_\alpha(R_M)) \\ &= P(I = i \mid R_M \leq Q_\alpha(R_M)) \\ &= \frac{P(R_M \leq Q_\alpha(R_M) \mid I = i)p_i}{P(R_M \leq Q_\alpha(R_M))} = \frac{\Phi_M(Q_\alpha(R_M) \mid i)\,p_i}{\alpha}\;. \end{aligned}$$

Da $\Sigma\, w_i = 1$, erhalten wir aus (52) in Verbindung mit (51) und (44)

$$\text{(53)} \qquad E(R_j) - E[R_j \mid R_M \leq Q_\alpha(R_M)] = \Sigma w_i\, \beta(R_j, R_M \mid i)[\mu_M(i) + CVaR_\alpha(R_M)]\,.$$

Dies entspricht dem Zähler des Betafaktors (39b), der die CVaR-SF-Gleichgewichtsbeziehung bestimmt. Der Nenner dieses Betafaktors ist gegeben durch $MCVaR_\alpha(R_M) = E(R_M) + CVaR_\alpha(R_M) = \Sigma\, p_i\, \mu_M(i) + CVaR_\alpha(R_M)$.

Insgesamt erhalten wir damit den folgenden Ausdruck für den Betafaktor (39b):

$$\text{(54)} \qquad \begin{aligned} &\beta_{CVaR}(R_j, R_M) \\ &= \frac{\frac{1}{\alpha}\Sigma\, \Phi_M(Q_\alpha(R_M) \mid i)\, p_i\, \beta(R_j, R_M \mid i)[\mu_M(i) + CVaR_\alpha(R_M)]}{\Sigma\, p_i\, \mu_M(i) + CVaR_\alpha(R_M)}\;. \end{aligned}$$

Im Unterschied zum Falle elliptischer Verteilungen ist damit der CVaR-SF-Betafaktor nicht mehr unabhängig vom gewählten Signifikanzniveau α. In die Beziehung (54) gehen in zentraler Weise sowohl das unbedingte α-Quantil $Q_\alpha(R_M)$ als auch der unbedingte Conditional Value at Risk $CVaR_\alpha(R_M)$ der Renditeverteilung des Marktportfolios ein und über diese Größen auch Schiefe und Kurtosis der Renditeverteilung.

6 Schlussbemerkungen

Im vorliegenden Beitrag verallgemeinern wir das traditionelle Safety fist-Prinzip nach *Telser* (1955/56) und *Arzac/Bawa* (1977). Das SF-Prinzip beinhaltet eine Limitierung der tolerierten Shortfallwahrscheinlichkeit bzw. äquivalent hierzu eine Beschränkung des Value at Risk. Die weitverbreitete Kritik am VaR als valides Risikomaß aufgreifend, ersetzen wir beim SF-Ansatz die VaR-Restriktion durch eine Beschränkung des Conditional Value at Risk und analysieren das hieraus resultierende Entscheidungsverhalten von Investoren auf Kapitalmärkten. Das von *Arzac/Bawa* (1977) für das SF-Prinzip gewonnene Separationsresultat lässt sich auch in dem neuen Modellrahmen nachweisen. Analog zur Vorgehensweise bei der Fundierung der Sharpe-Ratio im Falle von Erwartungswert/Varianz-Investoren lässt sich auf der Basis des Separationsresultats ein risikoadjustiertes Performancemaß, die CVaR-Ratio, herleiten, die das Downside-Risiko berücksichtigt. CVaR-Ratio stimmen überein im Falle von elliptischen Renditeverteilungen, weichen aber im Falle von nicht-symmetrischen Verteilungen voneinander ab. Auf der Basis von Ergebnissen im Kontext von Quantilableitungen lässt sich unter schwachen Voraussetzungen eine allgemeine strukturelle Charakterisierung des Kapitalmarktgleichgewichts angeben. Im Falle von elliptischen Renditeverteilungen resultiert hieraus das CAPM. Der nicht-symmetrische Fall wird am Beispiel einer endlichen Mischung von Normalverteilungen illustriert.

Literatur

Albrecht, Peter (1994), Gewinn und Sicherheit als Ziele der Versicherungsunternehmung: Bernoulli-Prinzip vs. Safety first-Prinzip, in: *Schwebler, Robert* (Hrsg.), Dieter Farny und die Versicherungswissenschaft, Karlsruhe, S. 1-18.

Albrecht, Peter/Maurer, Raimond (2008), Investment- und Risikomanagement, 3. Aufl., Stuttgart.

Albrecht, Peter/Maurer, Raimond/Möller, Matthias (1998), Shortfall-Risiko/Excess-Chance-Entscheidungskalküle, in: Zeitschrift für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften 118, S. 249-274.

Acerbi, Carlo/Tasche, Dirk (2002), On the Coherence of Expected Shortfall, in: Journal of Banking and Finance 26, S. 1487-1503.

Alexander, Gordon J./Baptista, Alexandre, M. (2002), Economic implications of using a mean-VaR model for portfolio selection: A comparison with mean-variance analysis, in: Journal of Economic Dynamics & Control 26, S. 1159-1193.

Alexander, Gordon J./Baptista, Alexandre, M. (2004), A Comparison of VaR and CVaR Constraints on Portfolio Selection with the Mean-Variance Model, in: Management Science 50, S. 1261-1273.

Artzner, Phillipe /Delbaen, Freddy /Eber, Jean-Marc/ Heath, David (1999), Coherent measures of risk, in: Mathematical Finance 9, S. 203-228.

Arzac, Enrique R./Bawa Vijay S. (1977), Portfolio Choice and Equilibrium in Capital Markets with Safety-first Investors, in: Journal of Financial Economics, 4, S.277-288.

Basak, Suleyman/Shapiro, Alexander (2001), Value-at-Risk-Based Risk Management: Optimal Policies and Asset Prices, in: Review of Financial Studies 14, S. 371-405.

Berkelaar, Arjan/Cumperayot, Phornchanok/Kouwenberg, Roy (2002), The Effect of VaR Based Risk Management on Asset Prices and the Volatility Smile, in: European Financial Management 8, S. 139-164.

Biglova, Almira/Ortobelli, Sergio/Rachev, Svetlozar T./ Stoyanov, Stoyan (2004), Different approaches to risk estimation in portfolio theory, in: Journal of Portfolio Management, Fall 2004, S. 103-112.

Billio, Monica/Pelizzon, Loriana (2000), Value-at-Risk: a multivariate switching regime approach, in: Journal of Empirical Finance 7, S. 531 – 554.

Campbell, Rachel/Huisman, Ronald/Koedijk, Kees (2001), Optimal portfolio selection in a value-at-risk framework, in: Journal of Banking and Finance 25, S. 1789-1804.

Cass, David/Stiglitz, Joseph (1970), The Structure of Investor Preferences and Asset Returns, and Separability in Portfolio Allocation: A Contribution to the Pure Theory of Mutual Funds, in: Journal of Economic Theory 2, S. 122-160.

Cont, Rama (2001), Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues, in: Quantitative Finance, 1, S. 223-236.

Cuoco, Domenico/He, Hua/Issaenko, Sergei (2008), Optimal Dynamic Trading Strategies with Risk Limits, in: Operations Research 56, S. 358-368.

Dhaene, Jan/Vanduffel, Steven/Goovaerts, Marc/Kaas, Rob/Tang, Qihe/Vyncke, David (2006), Risk Measures and Comonotonicity: A Review, in: Stochastic Models 22, S.573-606

Eling, Martin/Schuhmacher, Frank (2006), Hat die Wahl des Performancemaßes einen Einfluss auf die Beurteilung von Hedgefondsindizes?, in: Kredit und Kapital, 39, S. 419-357.

Fang, Kai-Tai/Kotz, Samuel/ Ng, Kai-Wang (1990), Symmetric Multivariate and Related Distributions, London, New York.

Farinelli, Simone/Ferreira, Manuel/Rosello, Damiano/Thoeny ,Markus/Tibiletti, Luisa (2008), Beyond Sharpe Ratio: Optimal asset allocation using different performance ratios, in: Journal of Banking and Finance, 32, S. 2057-2063.

Favre, Laurent/ Galeano, Jose-Antonio (2002), Mean-Modified Value-at-Risk Optimization with Hedge Funds, in: Journal of Alternative Investments 5, Fall 2002, S. 21-25.

Frühwirth-Schnatter, Sylvia (2006), Finite Mixture and Markov Switching Models, New York.

Gourieroux, Christian S./Laurent, Jean-Paul/ Scaillet, Olivier (2000), Sensitivity Analysis of Value at Risk, in: Journal of Empirical Finance, 7, S. 225-245.

Hanisch, J. (2006), Risikomessung mit dem Conditional Value at Risk, Hamburg.

Jansen, Dennis W./Koedijk, Kees G./De Vries, Casper G. (2000), Portfolio selection with limited downside risk, in: Journal of Empirical Finance 7, S. 247-269.

Klenke, Achim (2006), Wahrscheinlichkeitstheorie, Berlin u.a.

Leibowitz, Martin L./ Kogelman, Stanley (1991), Asset allocation under shortfall constraints, in: Journal of Portfolio Management, Winter 1991, S. 18-23.

Leippold, Markus/Trojani, Fabio/Vanini, Paolo (2006), Equilibrium Impacts of Value-at-Risk Regulation, in: Journal of Economic Dynamics and Control 30, S. 1277-1313.

Martin, Richard/Wilde, Tom (2002), Unsystematic credit risk, in: RISK, November 2002, S. 123-128.

McNeil, Alexander J./Frey, Rüdiger/Embrechts, Paul (2005), Quantitative Risk Management, Princeton, Oxford.

Owen, Joel/Rabinovitch, Ramon (1983), On the Class of Elliptical Distributions and Their Applications to the Theory of Portfolio Choice, in: Journal of Finance, 38, S. 745-752.

Pagan, Adrian/Ullah, Aman (1999), Nonparametric Econometrics, Cambridge.

Rau-Bredow, Hans (2004), Value at Risk, Expected Shortfall, and Marginal Risk Contribution, in: *Szegö, Giorgio* (Hrsg), Risk Measures for the 21st Century, Chichester, S. 61-68.

Rockafellar R. Tyrrell/Uryasev Stan, *Zabarankin, Michael* (2006), Generalized Deviations in Risk Analysis, in: Finance and Stochastics, 10, S. 51-74.

Roy, A.D. (1952), Safety first and the Holding of Assets, in: Econometrica 20, S. 431-449.

Szegö, Giorgio (2002), Measures of Risk, in: Journal of Banking and Finance 26, S. 1253 – 1272.

Telser, Lester G. (1955/56), Safety First and Hedging, in: Review of Economic Studies 23, S. 1-16.

Vorst, Torn (2001), Optimal Portfolios under a Value at Risk Constraint, in: *Casacuberta, Charles/Miro-Roig, Rosa/Verdera, Joan/Xambo-Descamps, Sebastian* (Hrsg.): European Congress of Mathematics, Barcelona 2000, Volume II, Basel, S. 391-398.

Yamai, Yasuhiro/ Yoshiba, Toshinao (2005), Value-at-risk versus expected shortfall, in: Journal of Banking and Finance 29, S. 997 – 1015.

Summary

The safety first-principle in the version of *Telser* is based on a limitation of the shortfall probability resp. the value at risk. Considering the widespread criticism of the value at risk as a proper risk measure we replace the value at risk-constraint by a constraint with respect to the conditional value at risk. Considering capital market investors behaving according to this decision rule, we first are able to obtain a separation result. Based on this result we develop a risk adjusted performance measure, the CVaR-ratio, which possesses a theoretical basis and is able to take downside risk into consideration. Finally we use results in connection with quantile derivatives so derive a structural characterization of capital market equilibrium . For elliptically distributed return distributions this capital market equilibrium is shown to be identical to the CAPM. Finally we illustrate the case of non-symmetric return distribution considering finite mixtures of the normal distribution.