UNIVERSITÄT MANNHEIM

MANNHEIMER MANUSKRIPTE ZU RISIKOTHEORIE,
PORTFOLIO MANAGEMENT UND VERSICHERUNGSWIRTSCHAFT

Nr. 189

Conditional Value at Risk-minimale Future Hedges

Peter Albrecht

Oktober 2012

Conditional Value at Risk-minimale Future Hedges

Zusammenfassung: Im vorliegenden Beitrag wird eine Alternative zum traditionellen varianzminimalen Hedge und zu neueren in der Literatur entwickelten Future Hedging-Strategien vorgeschlagen. Konkret bestimmen wir eine optimale Hedge Ratio, welche den Conditional Value at Risk der abzusichernden Position minimiert. Zunächst charakterisieren wir die allgemeine Lösung dieses Optimierungsproblems durch die zugehörige Bedingung 1. Ordnung und weisen auf der Grundlage von Konvexitätsüberlegungen die Existenz eines globalen Optimums nach. Bei Annahme einer elliptischen Verteilung für die gemeinsame Renditeverteilung der betrachteten Instrumente explizieren wir darüber hinaus einen geschlossenen Ausdruck für die Conditional Value at Risk-optimale Hedge Ratio. Diese Resultate verallgemeinern somit systematisch die aktuell in der Literatur entwickelten Lösungen für Value at Risk-minimale Future Hedges.

Schlüsselwörter: Future Hedge · Hedge Ratio · Conditional Value at Risk · Quantilableitung · Elliptische Verteilungen

JEL-Classification: G11, G 32.

1 Einführung

Future Hedges stellen eines der wichtigsten Instrumente zur Steuerung von Risiken im Investment Management dar. Die Grundidee des Hedgings mit Future-Kontrakten besteht darin, ein getätigtes Investment in den Kassa-Markt (Spot-Markt) so mit einem Investment in den Future-Markt zu kombinieren, dass die kombinierte Position (Hedge-Position) ein „geringeres" Risiko bzw. allgemein ein „günstigeres" Rendite/Risiko-Profil im Vergleich zur Spot-Position aufweist. Die in der Literatur entwickelten Ansätze zum optimalen Einsatz von Future-Kontrakten sind umfassend und vielfältig. Chen et al. (2003) unterscheiden in ihrem Review-Aufsatz diesbezüglich zwei zentrale Fragestellungen. Dabei handelt es sich einerseits um die modelltheoretische Bestimmung der optimalen Hedge Ratio und andererseits um die Entwicklung ökonometrischer Verfahren zu deren Identifikation. Im vorliegenden Beitrag konzentrieren wir uns auf das erste Problemfeld, d.h. die modelltheoretische Bestimmung der optimalen Hedge Ratio.

In diesem Zusammenhang stellt sich zunächst die Frage nach der verwendeten Risikokonzeption bzw. dem Trade-off zwischen Risiko und Rendite. Dies erfordert die Formulierung einer Zielfunktion, welche die Rendite/Risikoeinstellung operationalisiert. Beim traditionellen von Johnson (1960) entwickelten varianzminimalen Hedge dient die Varianz des Hedge-Portfolios als zu minimierende Zielfunktion. Hierzu sind in der Literatur eine Reihe von Alternativen entwickelt worden, wie sie insbesondere von Lien/Tse (2002) und der bereits genannten Arbeit von Chen et al. (2003) dokumentiert werden. Diese beruhen sowohl auf alternativen Risikomaßen (beispielsweise der Semivarianz oder Lower Partial Moments) als auch auf Kombinationen von Risiko- und Wertmaßen. Letztere bezeichnen wir, der Terminologie von Hung et al. (2006) folgend, im Weiteren als Mean-Risk-Ansätze. Darunter fallen beispielsweise Zielfunktionen, die auf der Sharpe Ratio oder allgemeiner einem Trade-off von Erwartungswert und Varianz basieren.

Im Einklang mit aktuellen Entwicklungen im Risikomanagement sind in den letzten Jahren des Weiteren eine Reihe von Beiträgen veröffentlicht worden, die den Mean Value at Risk[1] (MVaR) als Risikomaß bzw. den Value at Risk (VaR) im Rahmen eines Mean-Risk-Ansatzes als Basis für die Bestimmung einer optimalen Hedge Ratio verwenden. In chronologischer Folge sind dies die Beiträge Duarte (1998), Harris/Shen (2006), Hung et al. (2006), Lee/Hung (2007), Cao et al. (2010), Chang (2010) und zuletzt Albrecht (2011). Die vorstehenden Beiträge berühren dabei sowohl das Problemfeld der modelltheoretischen Bestimmung der optimalen Hedge Ratio als auch das Problemfeld ihrer statistisch-ökonometrischen Identifizierung. Eine explizite formelmäßige Bestimmung der optimalen Hedge Ratio gelingt Hung et al. (2006) unter Annahme einer bivariaten Normalverteilung für die Renditen von Kassa-Position und Future-Position. Albrecht (2011) erweitert dieses analytische Resultat unter Zugrundelegung von elliptischen Verteilungen und leitet zudem ein strukturelles Ergebnis ab, dass nur die Existenz einer bivariaten Dichtefunktion erfordert. Vor diesem Hintergrund kann das erste der vorstehend genannten beiden fundamentalen Problemfelder, die Bestimmung einer modelltheoretisch optimalen Hedge Ratio, für den VaR-minimalen Hedge-Ansatz als weitgehend geklärt angesehen werden. Wie Harris/Shen (2006) und Cao et al. (2010) aufzeigen, sind dabei VaR-basierte Ansätze nicht nur im Kontext von Mean-Risk-Ansätzen von Interesse, sondern stellen auch im Falle einer reinen Risikominimierung (d.h. bei Verwendung des MVaR) eine Alternative zum varianzminimalen Hedge dar, denn im Falle von asymmetrischen Renditeverteilungen führt eine Minimierung der Varianz nicht notwendigerweise zur Minimierung des MVaR.

Die Verwendung des VaR als Risikomaß unterliegt gleichwohl einer Reihe von Kritikpunkten, die in der Literatur ausführlich erörtert worden sind[2]. Im Zentrum dieser Kritik steht zum einen die Tatsache, dass sich der VaR nur an der Wahrscheinlichkeit der Unter- bzw. Überschreitung (in Abhängigkeit davon, ob Renditen oder Verluste die Basisgrößen für die VaR-Bestimmung sind) bestimmter kritischer Werte orientiert und keine Informationen darüber verarbeitet, in welchem Umfang die kritischen Werte unter- bzw. überschritten werden. Zum anderen mangelt es dem VaR im allgemeinen Fall an der Eigenschaft der Subadditivität, d.h. intuitiv führt ein Zusammenlegen von Risikopositionen nicht notwendigerweise zu einem Diversifikationseffekt, d.h. zu einer (relativen) Risikoreduktion. Insofern erfüllt der VaR nicht die Eigenschaft der Kohärenz eines Risikomaßes im Sinne des vielbeachteten und weithin akzeptierten Axiomensystems von Artzner et al. (1999). Als Alternative wird vor diesem Hintergrund in der Literatur regelmäßig der Conditional Value at Risk (CVaR) als (im Dichtefall) kohärentes Risikomaß vorgeschlagen, das zugleich auch Informationen über die Unter- bzw. Überschreitung bestimmter kritischer Werte berücksichtigt.

Trotz der unbestrittenen erheblichen theoretischen Bedeutung des CVaR ist unseres Wissens nach die Verwendung der CVaR-Konzeption im Rahmen eines Hedgings mit Future-Kontrakten bislang nur ansatzweise erfolgt und zwar in den beiden Beiträgen von Harris/Shen (2006) sowie Cao et al. (2010). In diesen Beiträgen wird allerdings kein Mean-Risk-Ansatz zugrunde gelegt, sondern es wird nur die Strategie einer Risikominimierung verfolgt, d.h. präzise gesprochen wird nicht der CVaR verwendet, sondern dessen zentrierte Variante, der Mean CVaR (MCVaR). In Harris/Shen (2006) wird dabei auf den Ansatz der historischen Simulation zurückgegriffen, d.h. auf einen rein stichprobenorientierten Ansatz. Um die evidenten Mängel dieses Ansatzes zu überwinden, verwenden Cao et al. (2010) die Cornish-Fisher-Entwicklung, um den MVaR bzw. den MCVaR der Hedge-Position zu approximieren. In beiden Fällen gelingt somit keine exakte analytische Lösung des Problems (und es wird zudem nur der Ansatz einer Risikominimierung verfolgt).

Im Zentrum der Analyse des vorliegenden Beitrags steht daher die umfassende Aufarbeitung sowohl des MCVaR-Ansatzes als auch des CVaR-Ansatzes zur Bestimmung einer optimalen Hedge Ratio im Rahmen eines Future Hedges mit dem Ziel, hier möglichst allgemeine und systematische Aussagen zu erhalten. Dabei greifen wir auf die Ergebnisse von Albrecht (2011) zur Bestimmung einer VaR- bzw. MVaR-optimalen Hedge Ratio zurück und zeigen, wie diese systematisch auf den CVaR- bzw. MCVaR-Fall ausgedehnt werden können. Ein besonderer Fokus liegt auf der Gewinnung von expliziten Lösungen, um die Resultate besser mit entsprechenden Literaturergebnissen zum varianzminimalen Hedge, zum Mittelwert-Varianz-Hedge und zum VaR-Fall vergleichen zu können.

Der vorliegende Beitrag erweitert die bislang in der Literatur erzielten Ergebnisse in folgender Hinsicht: Unter Verwendung der Technik der Quantilableitungen sind wir in der Lage, für den CVaR bzw. den MCVaR, die Bedingung 1. Ordnung für die optimale Hedge Ratio strukturell zu explizieren. Voraussetzung ist hierbei nur die Existenz einer (zweidimensionalen) Dichtefunktion für die bivariate Verteilung der Renditen von Future- und Kassaposition. In diesem Fall können wir auf der Basis von Konvexitätsüberlegungen ferner auch das Vorliegen eines globalen Minimums nachweisen. Unter der zusätzlichen Annahme, dass die bivariate Verteilung der Renditen von Future- und Kassaposition der Familie der elliptischen Verteilungen zugehörig ist, gelingt darüber hinaus sogar eine explizite analytische Bestimmung der optimalen Hedge Ratio. Die Ergebnisse erstrecken sich dabei sowohl auf den Fall eines statischen Hedges als auch den Fall eines dynamischen Hedges (d.h. auf der Basis bedingter Renditeverteilungen).

2 Formulierung der Optimierungsprobleme

Wir betrachten die folgende Ausgangssituation : Zum Zeitpunkt s soll die (Spot-)Position aus n Einheiten eines Finanztitels durch eine Short-Position aus x Future-Kontrakten abgesichert werden. Der Absicherungshorizont entspreche dem Ende des Anlagezeitraums t > s. Für die Spot- und Futurekurse[3] in den betrachteten Zeitpunkten wird die Notation V_s, V_t bzw. F_s, F_t verwendet. Mit diesen Konventionen wird die Marktwertänderung der Hedge-Position beschrieben durch

(1) $$\Delta V = n(V_t - V_s) - x(F_t - F_s)\,.$$

Da zum Aufbau der Short-Position des Futures kein Kapitaleinsatz erforderlich ist, entspricht die Rendite der Hedge-Position ihrer relativen Marktwertänderung bezogen auf den Wert der ungesicherten Position zum Zeitpunkt s:

(2) $$\begin{aligned} R_h &= \frac{n(V_t - V_s) - x(F_t - F_s)}{nV_s} = R_S - \frac{x(F_t - F_s)}{nV_s} \\ &= R_S - hR_F\,. \end{aligned}$$

Dabei ist $R_S = (V_t - V_s)/V_s$ als Rendite der Spot-Position und $R_F = (F_t - F_s)/F_s$ als (formale[4]) Rendite der Future-Position definiert. Die Größe

(3) $$h = \frac{xF_s}{nV_s}$$

entspricht der Hedge Ratio auf Renditeebene[5]. Für die weiteren Analysen müssen wir lediglich voraussetzen, dass die gemeinsame Verteilung der Renditen $(R_S, R_F)^T$ eine (zweidimensionale, strikt positive) Dichtefunktion aufweist.

Zur Ableitung einer optimalen Hedge Ratio h und der damit verbundenen Anzahl x an zu verkaufenden Future-Kontrakten werden wie eingangs begründet der Conditional Value at Risk und der Mean Conditional Value at Risk[6] als Zielfunktionen festgelegt. Alle Größen werden auf der Renditeebene betrachtet.

Zur Formalisierung der Zielfunktionen definieren wir zunächst unter Vorgabe eines Signifikanzniveaus $0 < \alpha < 1$ das α-Quantil Q_α einer Renditegröße R. Da alle in dieser Arbeit betrachteten Renditen annahmegemäß eine (strikt positive) Dichtefunktion besitzen, ist das Quantil in einfacher (und eindeutiger) Weise bestimmt durch die Forderung

(4) $$P[R \le Q_\alpha(R)] = \alpha\,.$$

Der Value at Risk ist dann als $(1-\alpha)$-Quantil der korrespondierenden Verlustvariablen $L = -R$ definiert[7] und es gilt

(5) $$\mathrm{VaR}_\alpha(R) = Q_{1-\alpha}(-R) = -Q_\alpha(R)\,.$$

Der Conditional Value at Risk auf Renditeebene ist definiert durch

(6) $$\begin{aligned} \mathrm{CVaR}_\alpha(R) &= E[-R \mid -R > \mathrm{VaR}_\alpha(R)] \\ &= -E[R \mid R < Q_\alpha(R)] \end{aligned}$$

und quantifiziert damit die Höhe des mittleren Verlusts im Falle der Überschreitung des VaR.

Im Falle des Vorliegens einer Dichtefunktion stimmt der CVaR überein[8] mit dem Tail Value at Risk[9]

(7) $$TVaR_\alpha(R) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_u(R)\,du = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha Q_u(R)\,du$$

und ist damit[10] ein kohärentes Risikomaß im Sinne von Artzner et al. (1999).

Den Mean Conditional Value at Risk gewinnt man durch Zentrierung des CVaR, d.h. durch Subtraktion der Größe E(L)=E(-R), mithin also durch Addition der Größe E(R), und wir erhalten

(8) $$MVaR_\alpha(R) = CVaR_\alpha(R) + E(R)\,.$$

Ebenso wie der VaR ist auch der CVaR lageabhängig. Das bedeutet, dass die Werte dieser Risikomaße durch den Erwartungswert der betrachteten Zufallsvariable beeinflusst werden. Für die Normalverteilung gilt beispielsweise [11]

(9) $$CVaR_\alpha(R) = \frac{\varphi(N_{1-\alpha})}{\alpha}\sigma(R) - E(R)\,,$$

wobei $N_{1-\alpha}$ dem $(1-\alpha)$-Quantil der Standardnormalverteilung entspricht und φ die Dichtefunktion dieser Verteilung bezeichnet. Aufgrund der Lageabhängigkeit kann der CVaR (und ebenso der VaR) nicht unmittelbar mit traditionellen Risikomaßen wie Renditestandardabweichung $\sigma(R)$ und Renditevarianz Var(R) verglichen werden. Der MCVaR ist hingegen – per Konstruktion – lageunabhängig.

Rockafellar et al. (2006) unterscheiden zwischen *Risk Measures* und *Deviation Measures* und leiten Beziehungen zwischen diesen beiden Kategorien hier. In diesem Sinne ist der CVaR (ebenso wie der VaR) ein Risk Measure, der MCVaR und auch die Standardabweichung sind jedoch Deviation Measures. Risk Measures in diesem Sinne können auch als risikoadjustierte Performancemaße verstanden werden (wobei die Risikoadjustierung auf der Basis eines Deviation Measures erfolgt), denn sie formalisieren – wie die Beziehung (9) im Beispielfall verdeutlicht – einen Trade-off zwischen dem Erwartungswert und einem Deviation Measure. Vor diesem Hintergrund wird auch deutlich, warum Hung et al. (2006) und Albrecht (2011) die VaR-minimale Hedge Ratio den Mean-Risk-Ansätzen zuordnen und nicht den risikominimierenden Ansätzen. Entsprechend verstehen wir im vorliegenden Beitrag die CVaR-minimale Hedge Ratio als Mean-Risk-Ansatz und die MCVaR-minimale Hedge Ratio als risikominimierenden Ansatz. Diese beiden Ansätze verfolgen wir im Weiteren parallel, um sowohl Mean-Risk-Ansätze als auch risikominimierende Ansätze abzudecken.

Falls zumindest approximativ $E(R)=0$ gilt, führen beide Ansätze zu identischen Hedge Ratios. Dies wird in der Literatur[12] häufig als reiner Martingalfall[13] apostrophiert.

Hiermit sind die Zielfunktionen zur Bestimmung der optimalen Hedge Ratio h formal festgelegt. Wir definieren zur Verdeutlichung der Abhängigkeit der betrachteten Größen von dem reellwertigen Parameter h die Funktionen

(10a) $$E(h) = E(R_h) = E(R_S) - hE(R_F)$$

(10b) $$\mathrm{CVaR}(h) = \mathrm{CVaR}(R_h)$$

(10c) $$\mathrm{MCVaR}(h) = \mathrm{CVaR}(h) + E(h)\,.$$

Dabei wird zur Vereinfachung der Notation das gewählte Signifikanzniveau α vernachlässigt. Unter Verwendung dieser Funktionen können wir schließlich die zu lösenden Optimierungsprobleme formalisieren:

(11a) $$\mathrm{CVaR}(h) \to \min! \quad (h \in \mathbb{R}),$$

(11b) $$\mathrm{MCVaR}(h) \to \min! \quad (h \in \mathbb{R}).$$

Aussagen über die Existenz der Lösungen dieser Optimierungsprobleme werden wir im weiteren Verlauf der Arbeit treffen.

Aus Gründen der Notationsvereinfachung analysieren wir in den folgenden Ausführungen nur die vorstehend dargestellte statische Variante des Hedge-Ansatzes. Die Analysen lassen sich aber in vollständig unproblematischer Weise auf den Fall eines dynamischen Hedges auf der Basis bedingter Verteilungen übertragen[14]. In diesem allgemeineren Fall betrachten wir o.B.d.A. Folgen von Einperiodenrenditen $\{(R_S(t), R_F(t)); t \in \mathbb{N}_0\}$. Anstelle des Conditional Value at Risk $\mathrm{CVaR}_\alpha(R_h) = \mathrm{CVaR}_\alpha(R_S - hR_F)$ auf der Basis der unbedingten Verteilungen von R_S und R_F betrachten wir dann allgemeiner den Conditional Value at Risk $\mathrm{CVaR}_{t-1}(R_{h(t)}) = \mathrm{CVaR}_{t-1}[R_S(t) - h_t R_F(t)]$ auf Basis der bedingten Verteilungen $(R_S(t), R_F(t)) \,|\, (R_S(t-1), R_F(t-1)), (R_S(t-2), R_F(t-2)), \ldots$ bzw. allgemeiner den CVaR der bedingten Verteilungen $(R_S(t), R_F(t)) \,|\, \mathcal{F}_{t-1}$ bei Vorgabe einer Filtration $\{\mathcal{F}_t\}$, welche die Entwicklung der zur Verfügung stehenden Information quantifiziert.

3 Lösung der Minimierungsprobleme

3.1 Strukturelle Lösung

Zur Lösung der Minimierungsprobleme (11a) und (11b) untersuchen wir zunächst die Bedingungen 1. Ordnung. Hierfür sind die Funktionen E(h) und CVaR(h) nach h zu differenzieren.

Für die Erwartungswertfunktion ergibt sich direkt

(12) $$\frac{dE(h)}{dh} = -E(R_F)\,.$$

Die Differentiation des Conditional Value at Risk als Funktion von h erfordert hingegen den Rückgriff auf Ergebnisse aus dem Kontext der Differenzierung von Quantilen.

Hierzu liegen grundsätzliche Ergebnisse von Gourieroux et al. (2000), Martin/Wilde (2002), McNeil et al. (2005, S. 258 f.) sowie Rau-Bredow (2004) vor. Die Existenz einer Dichte voraussetzend, lassen sich diese Ergebnisse unter Anwendung geeigneter Modifikationen auf den hier vorliegenden Fall übertragen. Daraus resultieren

$$\text{(13a)} \qquad \frac{dCVaR(h)}{dh} = E[R_F \mid -R_h > VaR_\alpha(R_h)] = E[R_F \mid R_h \le Q_\alpha(R_h)]$$

und

$$\text{(13b)} \qquad \frac{dMCVaR(h)}{dh} = E[R_F - E(R_F) \mid R_h \le Q_\alpha(R_h)].$$

Die Bedingungen 1. Ordnung lauten somit

$$\text{(14a)} \qquad E[R_F \mid R_h \le Q_\alpha(R_h)] = 0$$

und

$$\text{(14b)} \qquad E[R_F - E(R_F) \mid R_h \le Q_\alpha(R_h)] = 0.$$

Diese Charakterisierungen der optimalen Hedge Ratios sind das erste strukturelle Resultat der vorliegenden Arbeit. Zur Ableitung dieses Zusammenhangs wurde lediglich die Existenz einer gemeinsamen Dichtefunktion von $(R_S, R_F)^T$ angenommen, was die große Allgemeinheit dieses Resultats verdeutlicht. Eine explizite Bestimmung der auf Basis der Gleichungen (14a) und (14b) zu ermittelnden Hedge Ratio setzt das Vorliegen analytischer Ausdrücke für die bedingten Erwartungswerte voraus. Eine umfangreiche Verteilungsklasse, die diese Bedingung erfüllt und für die sogar die explizite Berechnung des optimalen Parameterwertes von h gelingt, ist die Familie der elliptischen Verteilungen, welche wir im folgenden Abschnitt diskutieren.

Zuvor gehen wir jedoch noch darauf ein, inwieweit die Erfüllung der Bedingung 1. Ordnung auch das Vorliegen eines globalen Optimums nach sich zieht. Wie bereits ausgeführt, ist im Dichtefall der Conditional Value at Risk ein kohärentes Risikomaß und damit insbesondere subadditiv, d.h. $CVaR(R_1 + R_2) \le CVaR(R_1) + CVaR(R_2)$. Des Weiteren ist der Conditional Value at Risk auch positiv homogen, d.h. $CVaR(\lambda R) = \lambda CVaR(R)$ für $\lambda > 0$. Somit ist der CVaR insbesondere auch ein konvexes Risikomaß. Mit dieser Beobachtung kann analog zu den Berechnungen in Anhang C aus Albrecht (2011) die Konvexität der Zielfunktion CVaR(h) nachgewiesen werden. Demnach muss bei jedem stationären Punkt von CVaR(h), d.h. bei jeder Lösung der Gleichung (14a), ein globales Minimum vorliegen. Die Konvexität der Funktion MVaR(h) = VaR(h) + E(h) in h folgt mit der zusätzlichen Feststellung, dass auch E(h) linear in h ist. Dementsprechend ist auch jeder stationäre Punkt von MVaR(h), also jede Lösung von (14b), ein globales Minimum.

Unter der minimalen Voraussetzung, dass $(R_S, R_F)^T$ eine zweidimensionale Dichtefunktion besitzt, wurde somit für die betrachteten Zielfunktionen die Existenz eindeutiger globaler Optima nachgewiesen und deren Lage auf Basis der zugehörigen (optimalen) Hedge Ratios charakterisiert.

3.2 Elliptische Verteilungen

Elliptische Verteilungen[15] lassen sich als eine Verallgemeinerung der Normalverteilung auffassen. Analog zu einem multivariat normalverteilten Zufallsvektor kann ein elliptisch verteilter Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ als affine Transformation eines standardisierten

Zufallsvektors $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^T$ dargestellt werden. Für einen beliebigen n-dimensionalen Vektor $\boldsymbol{\mu}$ und eine positiv-definite, symmetrische (n,n)-Matrix $\boldsymbol{\Sigma}$ gilt

(15)
$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{Y}.$$

Dabei ist der Zufallsvektor **Y** nicht standardnormal-, sondern allgemeiner *sphärisch* verteilt. Sphärische Zufallsvektoren **Y** sind durch die Invarianz ihrer Verteilung unter beliebigen orthogonalen Transformationen definiert. Aus dieser Symmetrieeigenschaft folgt, dass die Höhenlinien der Dichte[16] von sphärischen und elliptischen Verteilungen Ellipsoide im Raum $\mathbb{R}^n$ sind, was die Bezeichnung dieser Verteilungsfamilie erklärt. Dies liegt darin begründet, dass die Dichte eines n-dimensionalen elliptischen Zufallsvektors **X** aus der Verknüpfung der quadratischen Form $Q = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ mit einer skalaren Funktion g_n resultiert. Konkret gilt

(16)
$$f(\mathbf{x}) = |\,\boldsymbol{\Sigma}\,|^{-1/2}\, g_n[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})].$$

Die Funktion g_n wird als Dichtegenerator bezeichnet.[17] Sie bestimmt die betrachtete Unterfamilie der elliptischen Verteilungen.

Wie auf Basis von (16) deutlich wird, können wir die Verteilung eines elliptischen Zufallsvektors **X** durch Vorgabe der Parameter $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ und durch die Wahl eines Dichtegenerators definieren. Dies notieren wir mit $\mathbf{X} \sim E_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g_n)$. Den zugehörigen sphärischen Zufallsvektor **Y** erhalten wir offenbar, falls $\boldsymbol{\mu}$ dem Nullvektor $\mathbf{0}_n$ und $\boldsymbol{\Sigma}$ der (n,n)-Einheitsmatrix $\mathbf{I}_n$ entspricht. Dafür schreiben wir $\mathbf{X} \sim S_n(g_n)$ anstelle von $\mathbf{X} \sim E_n(\mathbf{0}_n, \mathbf{I}_n, g_n)$.

Konstruktionsbedingt kann eine Reihe nützlicher Eigenschaften der Normalverteilung auf die Familie der elliptischen Verteilungen übertragen werden. So determinieren die Parameter $\boldsymbol{\mu}$ und $\boldsymbol{\Sigma}$ auch im Fall allgemeiner elliptischer Verteilungen die Momente. Dabei gilt

(17)
$$E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}, \quad Cov(\mathbf{X}) = c\,\boldsymbol{\Sigma},$$

wobei die Konstante c von der betrachteten Unterfamilie abhängt.[18] Des Weiteren kann wie im Fall der Normalverteilung aus einem beliebigen elliptisch verteilten Zufallsvektor **X** durch Standardisierung der zugehörige sphärisch verteilte Zufallsvektor **Y** zurückgewonnen werden:

(18)
$$\mathbf{X} \sim E_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g_n) \Rightarrow \mathbf{Y} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim S_n(g_n).$$

Darüber hinaus gilt, dass lineare Transformationen von elliptisch verteilten Zufallsvektoren wiederum elliptisch verteilt sind und sogar der gleichen Unterfamilie angehören. Schließlich lässt sich zeigen, dass für gemeinsam elliptisch verteilte Zufallsvektoren (**X**, **Y**) die beste Prognose von **Y** gegeben die Information **X** = **x**, d.h. E(**Y** | **X** = **x**), eine lineare Funktion von **x** ist.

Bevor wir unter Verwendung dieser Eigenschaften die Bedingungen 1. Ordnung aus (14a) und (14b) explizieren, wollen wir eine Reihe wichtiger Verteilungen in den vorgestellten Rahmen einordnen (Fang 1990, Kapitel 3). Neben der Normalverteilung enthält die Familie der elliptischen Verteilungen (in jeweils univariater wie multivariater Form) als Hauptvertreter die t-Verteilung, die logistische Verteilung sowie die symmetrischen stabilen Verteilungen. Allgemeiner sind alle varianzbasierten[19] Mischungen von Normalverteilungen (*Normal Variance Mixtures*) elliptische Verteilungen (McNeil et al. 2005, S.73, 92). Letztere entstehen durch die zufallsabhängige Skalierung der Kovarianzmatrix eines normalverteilten Zufallsvektors. Diese Konstruktion führt zu sehr flexiblen Verteilungsformen und erlaubt insbesondere die Abbildung schwerer Verteilungsenden, was vor dem Hintergrund der sogenannten *Stylized Facts* (Cont 2001) von Finanzmarktzeitreihen erstrebenswert ist.[20]

Zur Illustration der im Folgenden erzielten Ergebnisse greifen wir auf die wohl wichtigsten elliptischen Verteilungen zurück. Dies sind zum einen die multivariate Normal- und zum anderen die multivariate t-Verteilung. Letztere erlaubt erstens die Skalierbarkeit der Schwere der Verteilungsenden und zweitens weist die Copula der multivariaten t-Verteilung eine positive *Tail Dependence* auf, so dass dieses Modell auch eine erhöhte Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Auftretens von Extremereignissen abbilden kann.[21]

Für den im weiteren Verlauf dieser Arbeit behandelten statischen Fall nehmen wir an, dass die unbedingte Verteilung des Zufallsvektors $(R_S, R_F)^T$ bivariat elliptisch ist. Konkret fordern wir $(R_S, R_F)^T \sim E_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g_2)$ für einen nicht näher spezifizierten Dichtegenerator g_2. Im allgemeineren Fall des in Abschnitt 2 formulierten dynamischen Hedge-Ansatzes müsste entsprechend vorausgesetzt werden, dass der Vektor $(R_S(t), R_F(t))^T \mid \mathcal{F}_{t-1}$ einer elliptischen Verteilung folgt, dass also $(R_S(t), R_F(t))^T$ bedingt elliptisch ist.

Zur weiteren Auswertung von (14a) bzw. (14b) bemerken wir zunächst, dass auch der Vektor $(R_F, R_h)^T$ als lineare Transformation von $(R_S, R_F)^T$ elliptisch verteilt ist und zudem der gleichen Unterfamilie angehört. Darüber hinaus verwenden wir die bereits angeführte Eigenschaft[22], wonach für elliptische Verteilungen die bedingte Erwartung E(**Y** | **X**) linear in **X** ist. Mit

$$\beta(R_F, R_h) := \mathrm{Cov}(R_F, R_h) / \mathrm{Var}(R_h) \tag{19}$$

folgt hieraus zunächst die Beziehung

$$E[R_F \mid R_h = Q_\alpha(R_h)] = E(R_F) + \beta(R_F, R_h)[Q_\alpha(R_h) - E(R_h)]. \tag{20}$$

Zur Auswertung des Ausdrucks (14a) benutzen wir nun eine Variante des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit, wonach gilt

$$E[X \mid Y \le y_0] = \int_{-\infty}^{y_0} E[X \mid Y = y] dF_Y(y \mid Y \le y_0). \tag{21}$$

In Termen bedingter Erwartungswerte ergibt sich damit $E[X \mid Y \le y_0] = E[E[X \mid Y] \mid Y \le y_0]$. Hieraus resultiert im vorliegenden Fall

$$E[R_F \mid R_h \le Q_\alpha(R_h)] = E[E[R_F \mid R_h] \mid R_h \le Q_\alpha(R_h)]. \tag{22}$$

Mit (20) folgt weiter

$$\begin{aligned} &E[R_F \mid R_h \le Q_\alpha(R_h)] \\ &= E(R_F) + \beta(R_F, R_h)\{E[R_h \mid R_h \le Q_\alpha(R_h)] - E(R_h)\} \\ &= E(R_F) - \beta(R_F, R_h)\, \mathrm{MCVaR}_\alpha(R_h)\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Die Bedingung 1. Ordnung lautet somit

(24a) $$E(R_F) - \beta(R_F, R_h)\,MCVaR_\alpha(R_h) = 0.$$

Analog lautet auf der Grundlage der Beziehung (14b) die Bedingung 1. Ordnung für die Minimierung von MCVaR(h)

(24b) $$\beta(R_F, R_h)\,MCVaR_\alpha(R_h) = 0\ .$$

Der Vergleich dieser Gleichungen zeigt, dass wir die Lösung von (24b) auf Basis von (24a) erhalten, wenn wir in (24a) $E(R_F) = 0$ unterstellen. Insofern betrachten wir im Weiteren ausschließlich die Minimierung des CVaR.

Abschließend benötigen wir noch eine im Fall elliptischer Verteilungen geeignete Repräsentation des Mean Conditional Value at Risk $MCVaR(R_h)$. Dazu bemerken wir, dass auch $R_h = R_S - hR_F$ als lineare Transformation von $(R_S, R_F)^T \sim E_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g_2)$ elliptisch verteilt ist. Es gilt also

(25) $$R_h \sim E_1(\mu, \sigma^2, g_1).$$

Wie in Anhang A nachgewiesen, lässt sich nun der MCVaR zum Signifikanzniveau α für eine univariate elliptische Verteilung mit Dichtegenerator g_1 darstellen als

(26) $$MCVaR_\alpha(R) = \frac{1}{\sqrt{c}}\lambda_{1-\alpha}(g_1)\sigma(R).$$

Die Größe $\lambda_{1-\alpha}(g_1)$ ist dabei für jede elliptische Verteilung in Abhängigkeit vom Dichtegenerator g_1 auf der Basis der Beziehung (A.8) separat zu bestimmen. Im Falle der Normalverteilung entspricht die Beziehung (26) der zentrierten Variante der Beziehung (9). Tabelle 1 enthält beispielhaft die Größen $\lambda_{1-\alpha}(g_1)$ für ausgewählte Konfidenzniveaus $1-\alpha$ für die sphärischen Varianten der Normalverteilung sowie der t-Verteilung mit n (n = 3,4,5) Freiheitsgraden. Die theoretischen Grundlagen für die Berechnung dieser Größen werden in Anhang A dargestellt.

	Normal	t(5)	t(4)	t(3)
$1-\alpha = 0.90$	1.755	2.302	2.499	2.911
$1-\alpha = 0.95$	2.063	2.890	3.203	3.874
$1-\alpha = 0.99$	2.665	4.452	5.221	7.003

Tab. 1: Ausgewählte λ-Faktoren

Anhand dieser Darstellung wird deutlich, dass kleinere Freiheitsgrade zu schweren Verteilungsenden führen und somit höhere CVaR-Werte hervorrufen.

Auf der Basis von (26) sind wir nun in der Lage, die Beziehung (24a) weiter zu vereinfachen.[23] Daraus resultieren

$$(27)\quad \begin{aligned} 0 &= E(R_F) - \frac{1}{\sqrt{c}} \lambda_{1-\alpha}(g_1)\, \beta(R_F, R_h)\, \sigma(R_h) \\ &= E(R_F) - \lambda_{1-\alpha}(g_1)\, \frac{\mathrm{Cov}(R_F, R_S) - h\,\mathrm{Var}(R_F)}{\sqrt{c}\sqrt{\mathrm{Var}(R_S - h\,R_F)}} \end{aligned}$$

und

$$(28)\quad \begin{aligned} \frac{\sqrt{c}\,\mu_F}{\lambda_{1-\alpha}(g_1)} &= \frac{\mathrm{Cov}(R_F, R_S) - h\,\mathrm{Var}(R_F)}{\sqrt{\mathrm{Var}(R_S) - 2h\,\mathrm{Cov}(R_S, R_F) + h^2\,\mathrm{Var}(R_F)}} \\ &= \frac{\rho\,\sigma_S\sigma_F - h\,\sigma_F^2}{\sqrt{\sigma_S^2 - 2h\,\rho\,\sigma_S\sigma_F + h^2\sigma_F^2}}\,, \end{aligned}$$

wobei ρ der Korrelation von R_S und R_F entspricht und $\mu_F = E(R_F)$, $\sigma_S^2 = \mathrm{Var}(R_S)$, $\sigma_F^2 = \mathrm{Var}(R_F)$.

Gleichung (28) kann explizit nach der gesuchten Hedge-Ratio h aufgelöst werden.[24] Dies liefert das zweite zentrale Resultat der vorliegenden Arbeit. Dabei handelt es sich um eine geschlossene Form der Conditional Value at Risk-minimalen Hedge Ratio

$$(29)\quad h^* = \rho\left(\frac{\sigma_S}{\sigma_F}\right) - \mu_F\left(\frac{\sigma_S}{\sigma_F}\right)\sqrt{\frac{1-\rho^2}{\lambda_{1-\alpha}^2(g_1)\,\sigma_F^2 / c - \mu_F^2}}\,.$$

Damit gelingt es, die in Albrecht (2011) enthaltenen Ergebnisse für die Value at Risk-minimale Hedge Ratio im Fall elliptischer Verteilungen vollständig zu verallgemeinern. Der Vergleich mit der in Albrecht (2011, S. 11) dargestellten entsprechenden expliziten Lösung im Fall der Minimierung des Value at Risk der Hedge-Position verdeutlicht die bemerkenswerte Symmetrie der Beziehungen. Es ist formal nur die dortige Größe $Z_{1-\alpha}(g_1)$, das (1–α)-Quantil der sphärischen Verteilung mit Dichtegenerator g_1, durch die Größe $\lambda_{1-\alpha}(g_1)$ zu ersetzen, die ebenfalls für die zugehörige sphärische Verteilung zu bestimmen ist. Insofern können auch die in Albrecht (2011) durchgeführten weiteren Analysen direkt übertragen werden. Insbesondere kann damit geklärt werden, dass die in (29) eingehende Wurzel wohldefiniert ist.

Wir betrachten daher abschließend nur noch zwei Spezialfälle. Folgt $(R_S, R_F)^T$ einer bivariaten Normalverteilung, so gilt c = 1 und gemäß (A.9) $\lambda_{1-\alpha}(g_1) = \varphi(N_{1-\alpha})/\alpha$, wobei wieder φ die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung bezeichne und $N_{1-\alpha}$ das (1–α)-Quantil der Standardnormalverteilung. Im Normalverteilungsfall ergibt sich die optimale Hedge Ratio damit zu

$$(30)\quad h_{NV}^* = \rho\left(\frac{\sigma_S}{\sigma_F}\right) - \mu_F\left(\frac{\sigma_S}{\sigma_F}\right)\sqrt{\frac{1-\rho^2}{\varphi^2(N_{1-\alpha})\,\sigma_F^2/\alpha^2 - \mu_F^2}}\,.$$

Dies ist die entsprechende Verallgemeinerung des Resultats von Hung et al. (2006), die die VaR-minimale Hedge Ratio im Normalverteilungsfall bestimmen, auf den Fall des CVaR.

Minimieren wir nun nicht den Conditional Value at Risk, sondern den Mean Conditional Value at Risk, so müssen wir nach unseren Vorüberlegungen in (29) nur $\mu_F = 0$ setzen und erhalten dann

(31) $$h^* = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F}.$$

Ein identisches Ergebnis wie in (31) ergibt sich, wenn zwar grundsätzlich der Conditional Value at Risk minimiert wird, aber der Erwartungswert μ_F der Rendite der Future-Position gleich null ist (reiner Martingalfall). In diesen beiden Spezialfällen erhalten wir somit die gleiche Hedge Ratio wie im Fall einer varianzminimalen Hedging-Strategie. Diese Beobachtung liegt in der Symmetrie elliptischer Verteilungen begründet und lässt sich somit nicht auf den allgemeinen in Abschnitt 3.1 behandelten Fall übertragen.

3.3 Alternative Evaluationsmöglichkeiten

Wie bereits angemerkt, erlaubt es die Familie der elliptischen Verteilungen zwar, beliebig schwere Tails abzubilden, aufgrund der Symmetrie der Verteilungen jedoch keine Schiefeeffekte. Insofern ist es prinzipiell von Interesse, nach Alternativen Ausschau zu halten.

Zunächst sei grundsätzlich angemerkt, dass sich zwar eine explizite analytische Evaluation der in die Bedingungen 1. Ordnung (14a) bzw. (14b) eingehenden bedingten Erwartungswerte schwierig gestaltet, es jedoch dem Grunde nach unproblematisch ist, bedingte Erwartungswerte empirisch zu bestimmen. Dies ist etwa möglich auf der Basis des Nadaraya-Watson-Kerndichteschätzers (in der entsprechend bedingten Variante) im Rahmen einer nichtparametrischen Schätzung. Dies müsste für alternative h-Werte durchgeführt werden, um einen h-Wert zu bestimmen, der approximativ die Gleichungen (14a) bzw. (14b) erfüllt, d.h. es ist nur eine numerische Lösung möglich.

Im Rahmen eines parametrischen Ansatzes bleibt noch die Möglichkeit einer analytischen Approximation der Bedingungen 1. Ordnung (14a) bzw. entsprechend (14b). Außerhalb der Familie der elliptischen Verteilungen sind die Gleichungen (24a) bzw. (24b) nicht mehr exakt, beinhalten aber die Approximation der besten Prognose E(Y|X) von Y auf Basis der Information X durch die entsprechende beste lineare Prognose a + bX von Y auf Basis der Information X. Im Sinne dieser Approximation kann dann mit analytischen Ausdrücken für $MVaR_\alpha(R_h)$ gearbeitet werden, um die Gleichungen (24a) bzw. (24b) weiter zu evaluieren.

Trifft man beispielsweise die Verteilungsannahme $1 + R_h \sim LN(m, v^2)$, d.h. R_h ist verschoben lognormalverteilt, so gilt[25]

(32) $$\begin{aligned} MCVaR_\alpha(R_h) &= \{E(1+R_h) - 1\} - \left\{E(1+R_h)\frac{\Phi(-N_{1-\alpha} - v)}{\alpha} - 1\right\} \\ &= e^{m+\frac{1}{2}v^2}\left[1 - \frac{\Phi(-N_{1-\alpha} - v)}{\alpha}\right]. \end{aligned}$$

Dabei ergeben sich die Parameter m und v als Funktionen von h wie folgt: Definieren wir $\mu = E(R_S) - h\,E(R_F)$ und $\sigma^2 = Var(R_S) - 2h\,Cov(R_S, R_F) + h^2\,Var(R_F)$, so gelten

$$(33) \qquad m = \ln(1+\mu) - v^2/2 \text{ und } v^2 = \ln\left[1 + \left(\frac{\sigma}{1+\mu}\right)^2\right].$$

Die Gleichungen (24a) bzw. (24b) bleiben damit weiterhin analytisch bestimmbar. Sie sind jedoch nun nicht mehr explizit nach h auflösbar, sondern es wird die numerische Lösung einer impliziten Gleichung notwendig.

4 Schlussbemerkungen und Ausblick

Im vorliegenden Beitrag wurde eine Future Hedging-Strategie entwickelt, welche den Conditional Value at Risk des abgesicherten Portfolios minimiert. Im ersten Schritt konnten die Bedingungen 1. Ordnung dieses Optimierungsproblems unter Verwendung von Ergebnissen zu Quantilableitungen hergeleitet werden. Des Weiteren wurde auf Basis der Kohärenzeigenschaften des CVaR gezeigt, dass bei einer durch diese Bedingungen charakterisierten Hedge Ratio tatsächlich ein globales Minimum des CVaR vorliegt. Im zweiten Schritt konnte die zuvor implizit charakterisierte Lösung für die sehr umfangreiche Familie der elliptischen Verteilungen expliziert werden. Die vorliegenden Ergebnisse verallgemeinern somit die zuletzt in der Literatur diskutierten Ergebnisse zur Bestimmung einer VaR minimalen Hedge Ratio.

Mit den vorliegenden Resultaten konnte die erste zu Beginn dieser Arbeit identifizierte Fragestellung, d.h. die Ableitung einer modelltheoretisch optimalen Hedge Ratio für den Fall CVaR-minimaler Hedging-Strategien sehr umfassend beantwortet werden. Im nächsten Schritt wäre somit die zweite eingangs formulierte Problemstellung zu untersuchen, denn eine Implementierung der erarbeiteten Strategie erfordert die ökonometrische Identifikation der bivariaten Renditeverteilung von Kassa- und Future-Titel. Im Fall der Annahme einer spezifischen Unterfamilie der elliptischen Verteilungen (beispielsweise einer multivariaten t-Verteilung) kann man hier etwa direkt an die entsprechende empirische Untersuchung von Hung et al. (2006) für den Normalverteilungsfall bei Betrachtung der VaR-minimalen Hedge Ratio anknüpfen.

Anhang A: CVaR für elliptisch verteilte Renditen

Wir betrachten im Folgenden eine (univariate) elliptisch verteilte Rendite R, d.h. $R \sim E_1(\mu, \sigma^2, g)$. Dabei bezeichne $g \equiv g_1$ den Dichtegenerator der eindimensionalen elliptischen Verteilung. Es gilt dann $E(R) = \mu$ und $Var(R) = c \cdot \sigma^2$ mit mittels $c = -2\psi'(0)$[26]. Wir nehmen nun die folgende Standardisierung vor, die den Übergang auf die sphärische Basisvariante der elliptischen Verteilung beinhaltet[27] [28]

$$(A.1) \qquad R^* = \frac{R-\mu}{\sigma} = \frac{R - E(R)}{\sigma(R)/\sqrt{c}}.$$

Die Verteilung von R^* ist sphärisch und wird durch den zur elliptischen Verteilung von R gehörigen univariaten Dichtegenerator g charakterisiert, d.h. es gilt $R^* \sim E_1(0,1,g)$ bzw. $R^* \sim S_1(g)$. Aufgrund der festgestellten Symmetrieeigenschaft liegen das α- und das $(1-\alpha)$-

Quantil sphärischer Verteilungen gleich weit vom Mittelwert entfernt. Bezeichnen wir diese Quantile mit $Z_\alpha(g)$ bzw. $Z_{1-\alpha}(g)$, so gilt $Z_{1-\alpha}(g) = -Z_\alpha(g)$.

Den Ausgangspunkt einer systematischen Bestimmung des CVaR im Fall elliptischer Verteilungen bildet die Eigenschaft (16), welche im univariaten Fall bedeutet, dass eindimensionale elliptische Verteilungen eine Dichte der Form

(A.2)
$$f(x) = \frac{1}{\sigma} g\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

aufweisen. Definieren wir wiederum $L := -R$ als korrespondierende Verlustvariable, so besitzt auch L die Dichte (A.2), wobei nur $\mu = -E(R)$ zu wählen ist.

Es gilt daher

(A.3)
$$\begin{aligned} \mathrm{CVaR}_\alpha(R) &= E[-R \mid -R > \mathrm{VaR}_\alpha(R)] \\ &= E[L \mid L > Q_{1-\alpha}(L)] \\ &= \frac{1}{P[L > Q_{1-\alpha}(L)]} \int_{Q_{1-\alpha}}^{\infty} x \, \frac{1}{\sigma} g\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx \, . \end{aligned}$$

Offenbar gilt zunächst $P[L > Q_{1-\alpha}(L)] = \alpha$. Zur Bestimmung des Integrals nehmen wir die Substitution $z = (x-\mu)/\sigma$ vor. Bezeichne $Z_{1-\alpha} = Z_{1-\alpha}(g)$ das $(1-\alpha)$-Quantil der zu L gehörigen sphärischen Verteilung, so ergibt sich mit $dx = \sigma\, dz$

(A.4)
$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha} \int_{Q_{1-\alpha}}^{\infty} x \, \frac{1}{\sigma} \, g\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx = \frac{1}{\alpha} \int_{Z_{1-\alpha}}^{\infty} (\mu + \sigma z) g(z^2)\, dz \\ &= \frac{1}{\alpha} \mu \int_{Z_{1-\alpha}}^{\infty} h(z)\, dz + \frac{\sigma}{\alpha} \int_{Z_{1-\alpha}}^{\infty} z\, h(z)\, dz \, . \end{aligned}$$

Dabei entspricht $h(z) = g(z^2)$ auf der Basis von (A.2) der Dichte der zu L gehörigen sphärischen Verteilung. Der erste Ausdruck reduziert sich somit auf die Größe μ. Zur Auswertung des zweiten Integrals nehmen wir noch die Substitution $x = z^2$ vor und erhalten

(A.5)
$$\int_{Z_{1-\alpha}}^{\infty} z\, h(z)\, dz = \int_{Z_{1-\alpha}}^{\infty} z\, g(z^2)\, dz = \frac{1}{2} \int_{Z_{1-\alpha}^2}^{\infty} g(x)\, dx \, .$$

Schließlich definieren wir

(A.6)
$$\lambda_{1-\alpha}(g) = \frac{1}{2\alpha} \int_{Z_{1-\alpha}^2(g)}^{\infty} g(x)\, dx \, .$$

Diese Größe ist für jede Familie von (univariaten) elliptischen Verteilungen auf Basis ihres Dichtegenerators g separat zu bestimmen, gegebenenfalls mit Hilfe numerischer Integration. Die Größe $Z_{1-\alpha}(g)$ bezeichnet dabei das $(1-\alpha)$-Quantil der zugehörigen sphärischen Verteilung.

Mit $E(L) = -E(R) = \mu$ und $\sigma(L) = \sigma(R) = \sqrt{c} \cdot \sigma$ erhalten wir damit insgesamt

$$\begin{aligned} \mathrm{CVaR}_\alpha(R) &= E(L) + \frac{1}{\sqrt{c}} \lambda_{1-\alpha}(g)\, \sigma(L) \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} \lambda_{1-\alpha}(g)\, \sigma(R) - E(R) \end{aligned} \tag{A.7}$$

sowie

$$\mathrm{MCVaR}_\alpha(R) = \frac{1}{\sqrt{c}} \lambda_{1-\alpha}(g)\, \sigma(R)\,. \tag{A.8}$$

Abschließend betrachten wir noch zwei Beispiele, die im Haupttext Anwendung finden. Im Fall der Normalverteilung lautet der Dichtegenerator $g(x) = \exp(-x/2)/\sqrt{2\pi}$ und es gilt $Z_{1-\alpha}(g) = N_{1-\alpha}$. Die Beziehung (A.6) lautet dann

$$\lambda_{1-\alpha}(g) = \frac{1}{2\alpha} \int_{N_{1-\alpha}^2}^{\infty} \exp(-x/2)/\sqrt{2\pi}\, dx = \varphi(N_{1-\alpha})/\alpha\,, \tag{A.9}$$

wobei $\varphi(x)$ die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung bezeichne. Mit c = 1 ergibt sich im Normalverteilungsfall somit insgesamt die zentrierte Variante der Beziehung (9) des Haupttexts.

Die sphärische Variante der t-Verteilung mit n Freiheitsgraden (n > 2) besitzt den Dichtegenerator $g(x) = C(n)\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-(n+1)/2}$, wobei $C(n) = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}$. Im Weiteren bezeichnen $t_n(x) = g(x^2)$ die Dichtefunktion und $t_{1-\alpha}(n)$ das $(1-\alpha)$-Quantil der t(n)-Verteilung. Die Größen $t_{1-\alpha}(n)$ liegen in tabellierter Form vor.

Es gilt nun

$$\int_{b^2}^{\infty} g(x)\, dx = -\frac{nC(n)}{1 - \frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{b^2}{n}\right)^{1 - \frac{n+1}{2}} \tag{A.10}$$

und damit

$$\lambda_{1-\alpha}(g) = \frac{t_n[t_{1-\alpha}(n)]}{\alpha} \left\{ \frac{n + t_{1-\alpha}^2(n)}{n-1} \right\}. \tag{A.11}$$

Im Falle der t-Verteilung gilt $c = n/(n-2)$ und wir erhalten insgesamt für den MCVaR der t-Verteilung

$$\mathrm{MCVaR}_\alpha(R) = \sqrt{\frac{n-2}{n}}\, \frac{t_n[t_{1-\alpha}(n)]}{\alpha} \left\{ \frac{n + t_{1-\alpha}^2(n)}{n-1} \right\} \sigma(R)\,. \tag{A.12}$$

Anmerkungen

1 Zur Konstruktion des MVaR vgl. etwa McNeil et al. (2005, S. 38) oder Albrecht (2011, S. 4 f.).

2 Vgl. exemplarisch hierzu Szegö (2002) sowie Yamai/Yoshiba (2005).

3 Margin-Zahlungen werden im Rahmen der weiteren Analyse wie üblich nicht berücksichtigt.

4 R_F ist lediglich formal als Rendite definiert, da im Zeitpunkt s keine Auszahlung in Höhe von F_s geleistet wird.

5 Zu einer Hedge Ratio auf Basis absoluter Wertänderungen vgl. etwa Chen et al. (2003, S. 436).

6 Wir erweitern hier die entsprechende Nomenklatur von McNeil et al. (2005, S. 38) im Kontext des Value at Risk.

7 Vgl. etwa McNeil et al. (2005, S. 38).

8 Vgl. etwa Dhaene et al. (2006, S. 579).

9 Die Bezeichnungsweise in der Literatur ist uneinheitlich. So bezeichnen etwa Acerbi/Tasche (2002) den CVaR als *Tail Conditional Expectation*. Der hier definierte TVaR entspricht nach Gleichung (3.3) dem *Expected Shortfall*.

10 Vgl. Acerbi/Tasche (2002, Proposition 3.1).

11 Dies gewinnt man durch Übertragung der Lösung in Dhaene et al. (2006, S. 580) auf den Renditefall.

12 Vgl. etwa Chen et al. (2003, S. 434) und Hung et al. (2006, S. 259).

13 Bei der Martingaleigenschaft handelt es sich um eine Anforderung an die bedingten Erwartungswerte eines stochastischen Prozesses. Diese impliziert jedoch die zeitliche Konstanz der unbedingten Erwartung. Für einen "reinen" Martingalprozess (Zero Mean-Martingale) entspricht der konstante unbedingte Erwartungswert gerade Null.

14 Zur Unterscheidung von dynamischen bzw. bedingten Ansätzen des Risikomanagements von statischen bzw. unbedingten Ansätzen vgl. insbesondere McNeil et al. (2005, S. 28 f.).

15 Umfassende Einführungen zur Familie der elliptischen Verteilungen finden sich in Fang et al. (1990, Kapitel 2 und 3) oder McNeil et al. (2005, S. 89 ff.).

16 Vgl. etwa Fang et. al. (1990, Abschnitt 2.2.3) zu Voraussetzungen, welche die Existenz einer Dichte für elliptische Verteilungen sicherstellen. Anknüpfend an die bisherigen Ausführungen, wird diese im Folgenden angenommen.

17 Genaugenommen handelt es um eine Folge von Funktionen, da nicht nur die betrachtete Unterfamilie sondern auch die Dimension des betrachteten Zufallsvektors die Form des Dichtegenerators determiniert. Im Fall der Normalverteilung gilt bspw. $g_n(x) = (2\pi)^{-n/2} \exp(-x/2)$.

18 Diese Konstante berechnet sich unter Verwendung des sogenannten charakteristischen Generators ψ der Verteilung mittels $c = -2\,\psi'(0)$.

19 Im Gegensatz dazu sind allgemeine Normal Mixture Distributions, bei denen auch Normalverteilungen mit unterschiedlichen Erwartungswerten gemischt werden, nicht mehr elliptisch.

20 Es sei darauf hingewiesen, dass elliptische Verteilungen konstruktionsbedingt symmetrisch sind. Somit können die für manche Anlagen (etwa alternative Investments oder Optionspositionen) beobachteten Verteilungsasymmetrien nicht abgebildet werden.

21 Vgl. etwa McNeil et al. (2005, S. 211) zum Begriff der Tail Dependence. Für eine Analyse der Tail Dependence von elliptischen Copulas verweisen wir auf Frahm et al. (2003) sowie Schmidt (2002).

22 Vgl. hierzu etwa Fang et al. (1990, S. 45).

23 Insbesondere erhalten wir mit $E(R_F) = 0$ hieraus auch die Lösung von (24b).

24 Die notwendigen Umformungen von (28) führen auf eine quadratische Gleichung in h. Allerdings ist zu bemerken, dass nur eine Lösung dieser Gleichung, nämlich h^* aus Gleichung (29), tatsächlich die Ausgangsgleichung (28) löst. Die andere Lösung wurde durch zwischenzeitliches Quadrieren erzeugt.

25 Zur Ableitung dieses Resultats kombiniere man die Beziehungen in Albrecht/Maurer (2008, S. 109 f. und S. 135).

[26] ψ entspricht dabei wie in Abschnitt 3.2 bemerkt, dem charakteristischen Generator der untersuchten elliptischen Verteilung.

[27] Vgl. hierzu die Gleichung (18) des Haupttexts.

[28] Im Falle der Normalverteilung entspricht dies dem Übergang zur Standardnormalverteilung.

Literatur

Acerbi C, Tasche D (2001) On the Coherence of Expected Shortfall. J. Banking Finance 26: 1487-1503

Albrecht P (2011) Zur Theorie des Value at Risk-minimalen Hedges, Z. betriebsw. Forsch. 63: 2 – 18

Albrecht P, Maurer R (2008) Investment- und Risikomanagement, 3. Aufl., Schäffer-Poeschl, Stuttgart

Artzner P, Delbaen F, Eber JM, Heath D (1999) Coherent measures of risk. Math. Finance 9: 203-228

Dhaene J, Vanduffel S, Goovaerts M, Kaas R, Tang Q, Vyncke D (2006) Risk Measures and Comonotonicity: A Review. Stoch. Models 22: 573-606

Chen SS, Lee CF, Shrestha K (2003) Futures hedge ratios: A review. Quart. Rev. Econ. Finance 43: 433-465

Cont R (2001) Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues. Quant. Finance 1: 223-236

Fang KT, Kotz S, Ng KW (1990) Symmetric Multivariate and Related Distributions. Chapman and Hall, London, New York

Frahm G, Junger M, Szimayer A (2003) Elliptical Copulas: Applicability and Limitations. Stat.& Prob. Letters 63: 275-286

Gourieroux C, Laurent JP, Scaillet O (2000) Sensitivity Analysis of Value at Risk. J. Emp. Finance 7: 225-245

Hung JC, Chiu CL, Lee MC (2006) Hedging with zero-value at risk hedge ratio. Appl. Financial Econ. 16: 259-269

Johnson LL (1960) The theory of hedging and speculation in commodity futures. Rew. f Econ. Studies 27: 139-151

Lee HT (2009) Optimal futures hedging under jump switching dynamics. J. Emp. Finance 16: 446-456

Martin R, Wilde T (2002) Unsystematic credit risk. RISK, November 2002: 123-128

McNeil AJ, Frey R, Embrechts P (2005) Quantitative Risk Management. Princeton University Press, Princeton und Oxford.

Rau-Bredow H (2004) Value at Risk, Expected Shortfall, and Marginal Risk Contribution, in: Szegö G (Hrsg), Risk Measures for the 21st Century. Wiley, Chichester: 61-68

Rockafellar, RT, Uryasev S, Zabarankin M (2006) Generalized Deviations in Risk Analysis. Finance Stoch. 10: 51-74

Schmidt R (2002) Tail dependence for elliptically contoured distributions. Math. Methods Oper. Res. 55: 301-327

Szegö G (2002) Measures of Risk. J. Bank. Finance 26 : 1253 – 1272

Yamai Y, Yoshiba T (2005) Value-at-risk versus expected shortfall. J Bank. Finance 29: 997 – 1015

Abstract : The present contribution studies the problem of determining the optimal hedge ratio in the case of minimizing the conditional value at risk of the hedge position. At first we are able to characterize the general solution to the problem and prove the existence of a global optimum. Using properties of the family of elliptical distribution we then are able to develop an explicit solution to the problem which generalizes the solutions for the case of a value at risk-minimal futures hedge normal distribution known from the literature.

Keywords: Futures Hedge· Hedge Ratio· Conditional Value at Risk· Quantile Derivative· Elliptical Distributions