Invariante Deformationsquantisierung und Quantenimpulsabbildungen

Inauguraldissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Universität Mannheim

vorgelegt von

Diplom-Physiker Michael Frank Müller-Bahns
aus Freiburg

Mannheim, 2003

Dekan:	**Professor Dr. Jürgen Potthoff, Universität Mannheim**
Referent:	**Professor Dr. Martin Schlichenmaier, Universität Luxemburg**
Korreferent:	**Professor Dr. Reinhardt Kiehl, Universität Mannheim**

Tag der mündlichen Prüfung: 26. April 2004

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das Zusammenspiel zwischen theoretischer Physik und Mathematik war stets äußerst komplex und vielschichtig. Als Beispiel sei zum einen die klassische Mechanik genannt, welche den Anstoß zu vielen Entwicklungen der Analysis und der Geometrie gegeben hat, und die in ihrer modernen, geometrischen Formulierung ein Paradebeispiel für die in Hilberts sechstem Problem geforderte Axiomatisierung der Grundlagen der Physik darstellt. Ein anderes Beispiel ist die Quantentheorie, deren Entwicklung ohne eine enge Verzahnung von Mathematik und Physik wohl schwer vorstellbar wäre.

Die hier behandelte Theorie der Quantisierung beschäftigt sich mit dem strukturellen Zusammenhang dieser beiden physikalischen Theorien. Dabei geht es nicht darum, eine alternative Methode zur Berechnung quantenmechanischer Ergebnisse zu entwickeln. Man möchte vielmehr durch das Herausarbeiten gemeinsamer geometrischer und algebraischer Strukturen tiefere grundsätzliche Einsichten gewinnen. Bevor ich die spezielle, hier untersuchte mathematische Theorie der Deformationsquantisierung beschreibe, soll die Vorgehensweise heuristisch motiviert werden.

Die in der klassischen Mechanik studierten glatten Funktionen auf symplektischen (allgemeiner Poisson-) Mannigfaltigkeiten (endlicher Dimension $2n$) bilden mit der Poissonklammer eine Poisson-Liealgebra, die Algebra der klassischen Observablen. Ein mechanisches System wird durch eine solche Mannigfaltigkeit M (den sogenannten Phasenraum) und durch eine spezielle Funktion, die Hamiltonfunktion $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$, beschrieben. Die zeitliche Entwicklung einer Observable f ist dann mittels der Poissonklammern als $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_t = \{f_t, H\}$ gegeben, was in Koordinaten gerade den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen entspricht. In der Quantenmechanik sind Observable selbstadjungierte Operatoren auf einem komplexen Hilbertraum. Die Quantenmechanik ordnet dabei ganz bestimmten Observablen der klassischen Mechanik, den Ortskoordinaten und den verallgemeinerten Impulskoordinaten, Operatoren zu, welche nicht alle miteinander kommutieren dürfen. Nennen wir diese Zuordnung Q, die Orts- und Impulskoordinaten q^i und p_i mit $1 \leq i \leq n$, so soll gelten $Q(1) = \mathrm{Id}$, $[Q(q^i), Q(p_j)] = \mathrm{i}\hbar Q(\{q^i, p_j\}) = \mathrm{i}\hbar\delta^i_j$, und $[Q(q^i), Q(q^j)] = 0 = [Q(p_i), Q(p_j)]$, wobei $\hbar$ eine physikalische Konstante der physikalischen Dimension [Energie mal Zeit] bezeichnet, das sogenannte Plancksche Wirkungsquantum. Diese Relationen ziehen die berühmten Heisenbergschen Unschärferelationen nach sich. Weiter fordert man auch, daß ein System, dessen klassische Wirkung S sehr groß im Verhältnis zu $\hbar$ ist, so daß also gilt $n(\hbar) := \frac{\hbar}{\mathsf{S}} \ll 1$, sich tatsächlich wie ein klassisches System verhält (zum Beispiel Billardkugeln). Dies nennt man den klassischen Limes, der oft abkürzend und irreführend $\lim \hbar \to 0$ bezeichnet wird. Man beachte, daß der klassische Limes vor allem ein strukturelles physikalisches Konzept ist, aber keine mathematische Konvergenzaussage beinhaltet. In physikalischen Experimenten ist der Übergang zwischen beiden Beschreibungen keineswegs ganz klar, und in der Theorie gibt es klassische, halbklassische und quantenmechanische Beschreibungen für Phänomene ähnlicher Größenordnungen.

Die zeitliche Entwicklung einer quantenmechanischen Observable $Q(f)$ ist im Heisenberg-Bild mittels eines vorgegebenen Operators, des Hamiltonoperators $Q(H)$, gegeben als $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q(f)_t = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[Q(f)_t, Q(H)]$. Diese Gleichung entspricht formal der oben angegebenen klassischen Bewegungsgleichung.

Man geht in der Physik zur Beschreibung eines quantenmechanischen Systems also zunächst von einem klassischen Modell aus. Dies nennt man das Korrespondenzprinzip. Dirac hat (vermutlich) als erster erkannt, daß das Korrespondenzprinzip besonders einfach über die Analogie der beiden gerade angegebenen Bewegungsgleichungen formuliert werden kann [17, S. 87, Z. 11 ff.]:

> The strong analogy between the quantum Poisson bracket and the classical Poisson bracket... leads us to make the assumption that the quantum Poisson brackets, or at least the simpler ones of them, have the same values as the classical Poisson brackets.

Diese Vermutung führte zur Definition einer vollen Quantisierung (vergl. [1] und [63]): man sucht dabei eine ($\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-) lineare Abbildung Q von der Poisson-Liealgebra der klassischen Observablen auf selbstadjungierte Operatoren auf einem komplexen Hilbertraum, welche zusätzlich die folgenden Eigenschaften erfüllen soll:

i.) Q ist ein Liealgebren-Homomorphismus, $Q(\{f,g\}) = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[Q(f), Q(g)]$.

ii.) $Q(1) = \mathrm{Id}$.

iii.) Weiter wird noch eine gewisse Irreduzibilitätseigenschaft der zu sogenannten kanonischen Koordinaten gehörenden Operatoren gefordert.

Das Groenewold-van Hove Theorem besagt allerdings, daß eine Abbildung Q, welche für alle glatten Funktionen die genannten Eigenschaften besitzt, nicht existieren kann. Man schwächt beim Studium von Quantisierungen daher meist eine oder mehrere dieser drei Bedingungen ab.

In der bisher beschriebenen Form der Quantisierung hat man es immer mit dem Problem zu tun, eine Darstellung für die Heisenberg-Relationen zu finden. Man kann sich allerdings auch fragen, ob man nicht einen Teil des Problems auf rein algebraischem Niveau studieren kann. Dazu gibt es verschiedene Motivationen. Einerseits kann man von der Beobachtung ausgehen, daß man für die oben beschriebene Quantisierung festlegen muß, wie man z.B. die Produkte $Q(q)Q(p \cdot p) \neq Q(p \cdot p)Q(q)$ als Quantisierung des Ausdrucks $qp^2 = p^2q$ auffassen will. Dies erreicht man in der Physik üblicherweise durch Festlegung einer Ordungsvorschrift, das heißt einer Regel, wie polynomiale Ausdrücke in p und q sortiert werden sollen (etwa durch Symmetrisierung), welche in geeigneter Weise Teil der Definition der Zuordnung Q sein soll. Mit dieser neuen Quantisierungsvorschrift Q_o kann man dann zunächst für in q, p polynomiale Funktionen a, b ein assoziatives, nichtkommutatives Produkt als das Urbild unter Q_o des „Operatorprodukts" $Q_o(a)Q_o(b)$ definieren als $a \diamond b := Q_o^{-1}((Q_o(a)Q_o(b))$. Natürlich beinhaltet die Formulierung „in geeigneter Weise" im vorletzten Satz einige technische Voraussetzungen (etwa Bijektivität); hier geht es aber nur um eine Motivation und nicht um eine exakte Definition (siehe etwa [46] für Details).

Ordnungsvorschriften lassen sich aber nur für den Spezialfall sinnvoll definieren, in dem der Phasenraum (M, ω) ein Kotangentenbündel T^*N einer Konfigurationsmannigfaltigkeit N ist. Auf einem konzeptuelleren Niveau kann man sich daher fragen, wie man allgemein aus der kommutativen, punktweisen Multiplikation der klassischen Observablen auf einer beliebigen symplektischen oder Poissonmannifaltigkeit eine nichtkommutative Multiplikation erhalten kann. Man könnte beispielsweise die Menge $\mathcal{C}^\infty(M)$ der klassischen Observablen rein formal mit einer Familie von assoziativen Multiplikationen

$$f \diamond_{n(\hbar)} g = \mu_0(f,g) + (n(\hbar))\mu_1(f,g) + (n(\hbar))^2\mu_2(f,g) + \dots$$

versehen, welche bei vernachlässigbar kleinem Wert von $n(\hbar)$ in die urprüngliche, punktweise Multiplikation $\mu_0(f,g) = fg$ „übergehen" soll. Weiter könnte man noch forden, daß $f \diamond_{n(\hbar)} g - g \diamond_{n(\hbar)} f = n(\hbar)\{f,g\} + \mathcal{O}((n(\hbar))^2)$ ist, weil man so die quantenmechanischen Bewegungsgleichungen als die klassischen Gleichungen „plus Korrekturterme" in höherer Ordnung der Planckschen Konstante interpretieren könnte. Aus physikalischen Gründen ist es zudem sinnvoll, die Lokalität von $\diamond_{n(\hbar)}$ im Sinne von $\mathrm{supp}(\mu_i(f,g)) \subseteq \mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(g)$ für alle i und alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ zu fordern - was etwa erfüllt ist, wenn alle μ_i Differentialoperatoren sind.

Mathematisch entspricht eine solche Vorgehensweise einer lokalen, formalen Deformation der punktweisen Multiplikation in Richtung der Poissonklammer. Sie ist der Ausgangspunkt der Überlegungen zur Deformationsquantisierung, und wird im nächsten Kapitel streng definiert. Man fordert dabei die Existenz eines Lie-Homomorphismus nur noch „in erster Ordnung“ und verzichtet zunächst ganz auf Existenz einer Darstellung. Die mathematische Theorie der Deformationsquantisierung wurde zwischen 1970 und 1980 als systematische Deformationstheorie der Poissonstruktur auf symplektischen Mannigfaltigkeiten im Sinne Gerstenhabers [22] entwickelt. Allgemein werden die Arbeiten von Bayen, Flato, Frønsdal, Lichnerowicz und Sternheimer [3] und Vey [56] sowie, unabhängig davon, Berezins Arbeiten zur Quantisierung, (vergl. [4]), als Ausgangspunkt dieser Theorie angesehen. Die Existenz von solchen „Sternprodukte“ genannten Deformationen auf beliebigen symplektischen Mannigfaltigkeiten ist ein nichttriviales kohomologisches Problem, da es für die Existenz einer solchen assoziativen, differentiellen Deformation eine Obstruktion in der dritten lokalen Hochschild-Kohomologiegruppe von $\mathcal{C}^\infty(M)$ gibt. Tatsächlich war man lange Zeit mit allgemeinen Existenzbeweisen für Sternprodukte beschäftigt, mittlerweile ist aber bewiesen, daß auf beliebigen symplektischen Mannigfaltigkeiten und sogar auf Poissonmannigfaltigkeiten Sternprodukte existieren [16, 19, 51, 15] und [37]. Die später detailliert dargestellte Fedosov-Konstruktion ist ein konstruktiver Existenzbeweis für Sternprodukte auf symplektischen Mannigfaltigkeiten.

Ein wesentlicher Gegenstand der Forschung auf dem Gebiet der Deformationsquantisierung war von Beginn an das Studium invarianter Sternprodukte, also von Automorphismen und Derivationen der deformierten Produkte. In der klassischen Mechanik sind Observable insbesondere Erzeugende gewisser ausgezeichneter Derivationen, der Hamiltonschen Vektorfelder, welche die Poissonklammern und somit die Bewegungsgleichungen respektieren. Die Übertragung dieser Eigenschaft auf die Deformationsquantisierung, das heißt die Angabe einer Quanten-Observable, bezüglich derer eine gegebene Derivation als (im wesentlichen) innere Derivation gegeben ist, ist ein zentrales Anliegen der vorliegenden Arbeit. Darüberhinaus ist man gemäß der allgemeinen Philosophie der Deformationsquantisierung natürlich daran interessiert, weitere Vorgehensweisen und Konzepte der klassischen Mechanik – wie etwa die Hamiltonschen Wirkungen von Liegruppen oder Liealgebren und zugehörige Impulsabbildungen – entsprechend zu „deformieren“ und z.B. integrable Systeme und besonders die Phasenraumreduktion zu untersuchen, welche, ausgehend von einer gewissen Erhaltungsgröße, den Überganz zu einem Phasenraum kleinerer Dimension ermöglicht. Vor allem stellt sich dabei die viel studierte Frage, ob Quantisierung und Reduktion „vertauschen“.

Es waren zwar seit längerem Bedingungen bekannt, die garantieren, daß beispielsweise ein Vektorfeld oder ein Diffeomorphismus auf der betrachteten Mannigfaltigkeit eine Derivation bzw. einen Automorphismus eines Sternprodukts induzieren. Tatsächlich war es aber bis vor kurzem noch völlig unbekannt, ob diese Bedingungen auch notwendig sind.

Ebenfalls unklar war es bislang, ob und wie man allgemein die Phasenraumreduktion der klassischen Mechanik in die Deformationsquantisierung übertragen kann. Dafür werden nämlich in der Regel Bedingungen benötigt, die, wie hier gezeigt wird, nicht immer erfüllt sein können.

In der vorliegenden Arbeit werden zwei wichtige Arten von Sternprodukten untersucht. Die erste ist die der verallgemeinerten Fedosov-Sternprodukte auf beliebigen, symplektischen Mannigfaltigkeiten, und die zweite die der Sternprodukte vom Wick-Typ auf beliebigen Kählermannigfaltigkeiten. Letztere stellen den wichtigen Fall einer Deformationsquantisierung mit zusätzlicher geometrischer Struktur (eben der komplexen Struktur) dar, welche auch in engem Zusammenhang mit Berezins Quantisierung, der holomorphen geometrischen Quantisierung und insbesondere der Berezin-Toeplitz-Quantisierung steht. Es werden die folgenden wesentlichen Ergebnisse erhalten:

(A) Sämtliche Derivationen eines verallgemeinerten Fedosov-Sternprodukts werden explizit konstruiert. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Invarianz eines solchen Sternprodukts angegeben.

(B) Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die Lieableitung bezüglich eines Vektorfelds sogar eine (im wesentlichen) innere Derivation ist.

(C) Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer sogenannten Quantenimpulsabbildung angegeben, welche eine Verallgemeinerung der klassischen Impulsabbildung ist. Ihre Existenz scheitert im allgemeinen an einer kohomologischen Bedingung. Insbesondere gibt es nicht zu jeder klassischen Impulsabbildung auch eine Quantenimpulsabbildung. Damit ist gezeigt, daß man die Frage, ob Reduktion und Deformationsquantisierung vertauschen, in der üblichen Weise im allgemeinen gar nicht sinnvoll stellen kann.

(D) Die analogen Ergebnisse werden für Sternprodukte vom Wick-Typ auf beliebigen Kählermannigfaltigkeiten bewiesen. Darüberhinaus wird eine vollständige Klassifizierung invarianter Sternprodukte vom Wick-Typ erzielt.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert: im ersten Kapitel werden zuerst einige wesentliche Notationen der klassischen Mechanik eingeführt. Dann wird definiert, was ein Sternprodukt auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit ist, und die Obstruktion für die Existenz einer solchen Deformation wird erläutert. Danach wird der Äquivalenzbegriff von Sternprodukten eingeführt und schließlich eine erste Bedingung bewiesen, welche Derivationen bzw. Automorphismen eines gegebenen Sternprodukts notwendig erfüllen müssen.

Kapitel 2 beschäftigt sich detailliert mit der Konstruktion von Sternprodukten auf symplektischen Mannigfaltigkeiten (M, ω) nach Fedosov, da für die anschließenden Untersuchungen Einzelheiten dieser Konstruktion benötigt werden.

In Kapitel 3 werden Derivationen von verallgemeinerten Fedosov-Sternprodukten studiert. Dafür werden ganz wesentlich Techniken benutzt und an den vorliegenden Fall angepaßt, die von Neumaier in [47, 48] im Rahmen von Untersuchungen zu den Deligne-Klassen (vergl. [15] und [27]) der verallgemeinerten Fedosov-Sternprodukte entwickelt worden sind. Insbesondere kann das allgemeine Klassifikationsergebnis von Bertelson et al. [6, Thm. 4.2] für Derivationen eines beliebigen Sternprodukts auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit im Fall von Fedosov-Sternprodukten in besonders einfacher und durchsichtiger Weise bewiesen werden, indem alle Derivationen explizit konstruiert werden (Satz 3.1 und Proposition 3.2). Anschließend wird untersucht, wann ein symplektisches Vektorfeld eine Derivation eines gegebenen verallgemeinerten Fedosov-Sternprodukts ist, und in Proposition 3.10 werden notwendige und hinreichende Bedingungen für diese Eigenschaft angegeben. Danach wird die Frage beantwortet, wann eine solche Derivation eine quasi-innere Derivation ist, das heißt, wann sie (im wesentlichen) durch den Stern-Kommutator gegeben ist. Anschließend wird die Wirkung einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ auf $\mathcal{C}^\infty(M)$ durch symplektische Vektorfelder studiert, und es werden die Begriffe der Quanten-Hamiltonfunktion und der Quantenimpulsabbildung erklärt. Mithilfe der Ergebnisse über die Existenz von Derivationen können dann notwendige und hinreichende Kriterien dafür angegeben werden, wann ein Sternprodukt invariant ist, wann es eine Quanten-Hamiltonfunktion gibt, und wann ein Sternprodukt stark invariant ist. Anschließend werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit von Quantenimpulsabbildungen untersucht. In Satz 3.21 wird insbesondere bewiesen, daß die von Xu in [64] gestellte Frage nach der Existenz einer Quantenimpulsabbildung zu einer gegebenen klassischen Impulsabbildung im allgemeinen mit nein beantwortet werden muß. Mehrere Beispiele und Gegenbeispiele werden diskutiert. Die den Ergebnissen dieses Kapitels zugrundeliegende Arbeit [44] wird in der Zeitschrift Journal of Geometry and Physics erscheinen.

In Kapitel 4 werden einige Konventionen und Schreibweisen für Kählermannigfaltigkeiten (M, ω, I) eingeführt. Anschließend wird definiert, was man unter einem Sternprodukt vom Wick-Typ zu verstehen hat. In Abschnitt 4.2 wird dann die Konstruktion solcher Sternprodukte mittels einer modifizierten Fedosov-Konstruktion nach [10, 49] beschrieben. Man kann alle Sternprodukte vom Wick-Typ auf diese Weise erhalten [49, Thm. 6.7]. Es wird eine weitere Konstruktions- und Klassifikationsmethode für Sternprodukte vom Wick-Typ eingeführt, die von Karabegov [31] entwickelt worden ist. Die wesentliche Aussage dieser Methode besteht darin, daß ein Sternprodukt vom Wick-Typ eine gewisse formale Reihe global definierter geschlossener Zweiformen vom Typ $(1, 1)$ bestimmt und umgekehrt eindeutig durch diese Form festgelegt ist, welche Karabegovs charakterisierende Form genannt wird.

In Kapitel 5 werden etwas allgemeiner als in Kapitel 3 Automorphismen und Derivationen eines gegebenen Sternprodukts vom Wick-Typ untersucht. Zunächst werden hinreichende Bedingungen für die Invarianz mittels der Fedosov-Konstruktion für Sternprodukte vom Wick-Typ hergeleitet. Dann werden mithilfe von Karabegovs Konstruktion auf direkte und elementare Weise notwendige und hinreichende Bedingungen für die Invarianz bewiesen, ebenso dafür, daß eine Derivation quasi-inner ist. Die Ergebnisse über Derivationen von Sternprodukten vom Wick-Typ zusammen mit den Klassifikationsergebnissen aus Kapitel 4 ermöglichen dann sogar eine eindeutige Klassifikation invarianter Sternprodukte vom Wick-Typ in Proposition 5.7. Dieses Ergebnis ist eine wesentliche Verschärfung des Ergebnisses von Bertelson et al. [5, Thm. 4.1]. Es werden wieder Hamiltonsche Wirkungen von Liegruppen bzw. Liealgebren und die Existenz und Eindeutigkeit von Quantenimpulsabbildungen untersucht und wichtige Beispiele erläutert. Die Ergebnisse zur Klassifikation invarianter Sternprodukte vom Wick-Typ [45] sind bei der Zeitschrift Letters in Mathematical Physics zur Veröffentlichung eingereicht.

Konventionen

Funktionen und Schnitte in $\Gamma^\infty(TM)$ und $\Gamma^\infty(T^*M)$ etc. werden immer als komplexwertig angenommen. Für das $\wedge$-Produkt von Differentialformen benutze ich die Konventionen von [1]. In lokalen Ausdrücken werden hoch- und tiefgestellte Indizes benutzt; in diesem Fall gilt Einsteins Summationskonvention.

Dank

Meinen besonderen Dank möchte ich denjenigen aussprechen, die durch ihre Unterstützung zum Fortschritt dieser Arbeit beigetragen haben. Zu Beginn und zum Ende meiner Zeit als Doktorand der Universität Mannheim wurde ich aus Mitteln der DFG-Forschergruppe Arithmetik der Universitäten Mannheim und Heidelberg beschäftigt, der ich hiermit aufrichtig danke. Dazwischen war ich am Lehrstuhl von Herrn Professor Dr. R. Kiehl angestellt, dem ich besonders für das mir entgegengebrachte Vertrauen und die freundliche und anregende Arbeitsatmosphäre danken möchte. Meinem wissenschaftlichen Betreuer, Herrn Professor Dr. M. Schlichenmaier, danke ich ganz herzlich für seinen freundlichen Einsatz, seine Geduld und vielfältige Anregungen. In seiner Zeit als Gast an der Universität Mannheim hat sich Herr Professor A.V. Karabegov viel Zeit dafür genommen, mit mir über mathematische und physikalische Probleme zu diskutieren. Herr Professor D. Husemoller hat mich in meinem Vorhaben bestärkt, die Frage nach einer invarianten Quantisierung im hier dargestellten Rahmen zu studieren. Ganz besonders aber danke ich Herrn Dr. Nikolai Neumaier für die intensive und interessante Zusammenarbeit und viele lange und fruchtbare Diskussionen, innerhalb derer wesentliche Ergebnisse [44, 45] dieser Arbeit entstanden sind.

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Deformationsquantisierung beschrieben. Ich strebe dabei keine systematische Darstellung dieses Gebietes an, sondern werde im wesentlichen die benutzten Begriffe und Notationen definieren und einige ihrer wichtigen Eigenschaften angeben. Dazu müssen zuerst auch einige wenige bereits in der Einleitung benutzte Sprechweisen aus der klassischen Mechanik sauber definiert werden. Für weitere Informationen zur Deformationsquantisierung und einen historischen Überblick verweise ich auf die Originalarbeiten [3, 56] sowie auf die Übersichtsartikel [60, 55, 25, 18]. Für eine ausführliche Darstellung der mathematischen Formulierung der klassischen Mechanik sowie Diskussionen der Quantisierungsproblematik möchte ich auf die Monographien [1], [63] und [23] verweisen. Bis auf wenige Ausnahmen werde ich mich bei den Schreibweisen und Vorzeichenkonventionen in der vorliegenden Arbeit an [1] orientieren.

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit, das heißt eine reell $2n$-dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer nicht-ausgearteten, geschlossenen Zweiform $\omega \in \Gamma^\infty(\Lambda^2(T^*M))$, der symplektischen Form. In einer beliebigen Karte (U, ϕ) mit Koordinaten $(x^1, \ldots, x^{2n})$ ist ω von der Form $\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij}\, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$ mit $\omega_{ij} = \omega(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})$. Die betrachtete Karte heißt [1, Prop. 3.3.23] eine symplektische (auch kanonische oder Darboux-) Karte genau dann, wenn $(\omega_{ij})|_U$ gerade durch die Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, wobei Id_n die $n \times n$ Einheitsmatrix sei. Die glatten, komplexwertigen Funktionen auf M besitzen mittels der punktweisen Addition und Multiplikation wie üblich die Struktur einer assoziativen $\mathbb{C}$-Algebra $(\mathcal{C}^\infty(M), +, \cdot)$. (In der Physik geht man von reellwertigen Funktionen aus, wenn man Funktionswerte $f(m)$ mit $m \in M$ direkt als physikalische Meßgrößen auffassen möchte; im Hinblick auf die Quantisierung ist es aber angemessen, von vornherein komplexwertige Funktionen zu betrachten). Mittels der symplektischen Form ω, des inneren Produkts $i : \Gamma^\infty(TM) \times \Gamma^\infty(\bigwedge^k(T^*M)) \to \Gamma^\infty(\bigwedge^{k-1}(T^*M))$, sowie der äußeren Ableitung d definiert man für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ein gewisses Vektorfeld $X_f \in \Gamma^\infty(TM)$ als Lösung der Gleichung:

$$\mathrm{d}f = i_{X_f}\omega. \tag{1.1}$$

Das Vektorfeld X_f wird Hamiltonsches Vektorfeld zur Funktion f genannt. Gleichung (1.1) besagt, daß f entlang einer Integralkurve von X_f konstant ist. Insbesondere gilt für Hamiltonsche Vektorfelder $\mathcal{L}_{X_f}\omega = \mathrm{d}(i_{X_f}\omega) = 0$, wobei $\mathcal{L}$ die Lieableitung bezeichne. Vektorfelder X, für die $\mathcal{L}_X\omega = 0$ gilt, heißen symplektische Vektorfelder; also sind insbesondere Hamiltonsche Vektorfelder symplektisch, und nach dem Poincaré-Lemma sind symplektische Vektorfelder lokal Hamiltonsch. Weiter ist die Lie-Klammer zweier symplektischer Vektorfelder immer Hamiltonsch (Sternbergs Lemma, vergl. [63, Prop. 1.5.3]). Die Mengen der symplektischen und der Hamiltonschen Vektorfelder werden mit $\Gamma^\infty_{\mathrm{Ham}}(TM) \subset \Gamma^\infty_{\mathrm{symp}}(TM)$ bezeichnet. Weiter definiert man für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ die Poissonklammer

$$\{f, g\} := -i_{X_f} i_{X_g}\omega = \omega(X_f, X_g) = -\mathcal{L}_{X_f} g = \mathcal{L}_{X_g} f. \tag{1.2}$$

Die Poissonklammer (1.2) ist definitionsgemäß antisymmetrisch, und sie genügt der Jacobi-Identität:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \qquad \forall\, f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M). \tag{1.3}$$

Daher gilt $[X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}}$, das heißt, die Abbildung $\mathcal{C}^\infty(M) \ni f \mapsto X_f \in \Gamma^\infty_{\mathrm{Ham}}(TM)$ ist ein Anti-Homomorphismus von Liealgebren. Man beachte, daß bisweilen (etwa in [63]) eine andere Vorzeichenkonvention für die Poissonklammer gewählt wird, mit der die genannte Abbildung ein Homomorphismus ist. Damit ist dann $(\mathcal{C}^\infty(M), +, \{\cdot,\cdot\}, \cdot)$ eine Poisson-Liealgebra, das heißt für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ist die Abbildung $f \mapsto \{f, \cdot\}$ eine Derivation auf $(\mathcal{C}^\infty(M), \cdot)$:

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g \qquad \text{für alle } f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M). \tag{1.4}$$

Die Poisson-Liealgebra $(\mathcal{C}^\infty(M), +, \{\cdot,\cdot\}, \cdot)$ dient physikalisch als Modell für die Observablen, also die meßbaren physikalischen Größen. Es sei hier nur angemerkt, daß in konkreten physikalischen Fällen die Menge der tatsächlichen Observablen eine Unteralgebra von $(\mathcal{C}^\infty(M), +, \{\cdot,\cdot\}, \cdot)$ ist, und daß die Bestimmung derartiger „guter“ Observabler insbesondere in der Quantisierung physikalisch ein nichttriviales Problem darstellt.

In der Physik werden die Bewegungsgleichungen eines Systems der klassischen Mechanik durch eine Funktion $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$, die Hamiltonfunktion, festgelegt und mittels der

Poissonklammern folgendermaßen ausgedrückt [1, Cor. 3.3.15]: ist f_t die Entwicklung von f entlang des Flusses von X_H, dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_t = \{f_t, H\}. \tag{1.5}$$

Die klassischen Observablen beschreiben also einerseits physikalische Größen eines gegebenen Systems. Andererseits erzeugen klassische Observable über die Zuordnung $f \mapsto -\mathcal{L}_{X_f}$ Derivationen der Observablenalgebra, welche symplektisch sind. Das bedeutet insbesondere, daß der Fluß entlang der Integralkurve eines Hamiltonschen Vektorfelds X_f die Poissonklammern und somit die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen erhält.

Ein weiterer, wichtiger Begriff der klassischen Mechanik ist der einer Hamiltonschen Wirkung einer Liegruppe $\mathcal{G}$ durch symplektische Diffeomorphismen oder einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ durch symplektische Vektorfelder [1, Chap. 4]. Dieser Begriff ermöglicht die Beschreibung physikalischer Symmetrien, die Formulierung von Erhaltungssätzen und die Phasenraumreduktion, die es gestattet, ausgehend von zu Symmetrien gehörenden Erhaltungsgrößen (beschrieben durch das Konzept der Impulsabbildung), zu einem Phasenraum kleinerer Dimension überzugehen – ein Spezialfall ist das bekannte Noether-Theorem der Mechanik. Diese Vorgehensweise ist in der Literatur wohlbekannt und zählt zu den Standardmethoden der klassischen Mechanik. Ich werde sie in diesem Kapitel nicht beschreiben, sondern verweise wieder etwa auf [1, 23, 63].

Die Frage, wie sich diese Konzepte bezüglich der Quantisierung verhalten, ist beispielsweise in der Geometrischen Quantisierung [63] intensiv studiert worden (insbesondere die Guillemin-Sternberg-Hypothese, nach der Quantisierung und Reduktion vertauschen sollen). In speziellen Fällen [8, 52, 21, 57, 9] konnten dazu auch in der Deformationsquantisierung erste Ergebnisse erhalten werden. Allen ist gemeinsam, daß man dabei wesentlich eine Verallgemeinerung des Begriffs der Impulsabbildung benötigt. Solche Quantenimpulsabbildungen wurden unter diesem Namen meines Wissens nach zuerst von Bordemann et al. in [8] benutzt. Sie wurden anschließend von Xu in [64] systematisch untersucht. Dort stellt Xu auch die Frage, ob man zu einer gegebenen klassischen Impulsabbildung für ein invariantes Sternprodukt immer eine Quantenimpulsabbildung finden kann. Die Untersuchungen in Kapitel 2 und Kapitel 5 werden zeigen, daß das tatsächlich nicht so ist.

Ausgehend von den in der Einleitung erläuterten Grundideen der Deformationsquatisierung werde ich im folgenden Abschnitt die mathematische Formulierung dieser Ideen erklären.

1.1 Deformationsquantisierung

Es sei im folgenden immer (M, ω) eine reell $2n$-dimensionale symplektische Mannigfaltigkeit. Wieder betrachte man die glatten Funktionen $\mathcal{C}^\infty(M)$ mit ihrer Poisson-Lie-Struktur und den Vektorraum $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten in $\mathcal{C}^\infty(M)$. Wir können $\mathcal{C}^\infty(M)$ wie üblich mit dem Bild unter $\mathcal{C}^\infty(M) \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], f \mapsto f\nu^0$ identifizieren. Weiter läßt sich auch die Lie-Poisson-Struktur von $\mathcal{C}^\infty(M)$ auf die formalen Potenzreihen übertragen. Ebenso gibt es natürliche Fortsetzungen der äußeren Ableitung und der Lieableitung auf $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$. Ich werde in dieser Arbeit Elemente von $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ bisweilen einfach formale Funktionen nennen, ebenso Elemente von $\mathbb{C}[[\nu]]$ formale Konstanten.

Definition 1.1 (vergl. [3]) *Eine innere Verknüpfung $\star$ auf $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ heißt eine (lokale) Deformationsquantisierung oder ein (lokales) Sternprodukt auf (M, ω), wenn gilt:*

i.) Die Verknüpfung $\star$ ist assoziativ und mit der Addition verträglich (damit ist also $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star)$ ein Ring.)

ii.) Die Verknüpfung $\star$ ist $\mathbb{C}[[\nu]]$-linear und formale Konstanten sind zentrale Elemente bezüglich $\star$. Insbesondere kann dann für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$

$$f \star g = \sum_{r=0}^{\infty} \nu^r C_r(f, g)$$

geschrieben werden, wobei alle C_r bilineare Abbildungen sind.

iii.) Für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ist $C_0(f, g) = fg \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

iv.) Die Verknüpfung $\star$ ist eine nichtkommutative Deformation des punktweisen Produkts auf $\mathcal{C}^\infty(M)$ in Richtung der Poissonklammer, das heißt, für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ist

$$\left(\frac{1}{\nu}(f \star g - g \star f)\right) \mod \nu = C_1(f, g) - C_1(g, f) = \{f, g\}.$$

v.) Die Verknüpfung $\star$ ist lokal, das heißt, für alle $r \in \mathbb{N}$ und alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ist $\mathrm{supp}(C_r(f, g)) \subseteq \mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(g)$. *Diese Bedingung ist erfüllt, falls alle C_r Bidifferentialoperatoren sind, was im folgenden immer gelten soll (ein derartiges Sternprodukt heißt differentielles Sternprodukt, und alle hier studierten Sternprodukte sind differentiell.)*

Es ist hervorzuheben, daß die Existenz eines Sternprodukts durchaus kein triviales Problem ist. Ein Sternprodukt $f \star g = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^r C_r(f,g)$ ist eine assoziative Algebren-Deformation im Sinne Gerstenhabers [22], wobei für differentielle Sternprodukte alle C_r differentielle, also lokale Hochschild 2-Koketten sind (für die Definition des Hochschild-Komplexes siehe z.B. [40]). In [22, Chap. I, §2 und §5] zeigt Gerstenhaber ganz allgemein, wie sich eine kohomologische Obstruktion für die Existenz einer assoziativen Algebren-Deformation ergibt. Ich möchte dies hier kurz erklären. Im vorliegenden speziellen Fall bedeutet die Assoziativität des Sternprodukts

$$\sum_{\substack{r+s=t\\ r,s\geq 0}} C_r(C_s(f,g)h) - C_r(f, C_s(g,h)) = 0 \quad \forall\, f,g,h\, \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]. \tag{1.6}$$

Für $t=0$ ist dies gerade die Assoziativität der punktweisen Multiplikation $C_0(f,g) = fg$. Für $t=1$ besagt Gleichung 1.6

$$C_1(f,g)h - fC_1(g,h) - C_1(f,gh) + C_1(fg,h) = -(\delta_{\mathrm{H}} C_1)(f,g,h) = 0,$$

wobei δ_{H} der übliche Hochschild-Korandoperator ist. Also ist C_1 ein differentieller Hochschild-2-Kozykel. Indem man die C_0 enthaltenden Terme in Gleichung (1.6) als 3-Koränder $(\delta_{\mathrm{H}} C_t)(f,g,h)$ identifiziert und die verbleibende Summe abkürzt als

$$D_{t-1}(f,g,h) := \left(\sum_{\substack{r+s=t\\ r,s>0}} C_r(C_s(f,g)h) - C_r(f, C_s(g,h)) \right)$$

kann man Gleichung (1.6) für alle $t \in \mathbb{N}$ schreiben als

$$D_{t-1}(f,g,h) - (\delta_{\mathrm{H}} C_t)(f,g,h) = 0 \quad \forall\, f,g,h\, \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]. \tag{1.7}$$

Möchte man die assoziative Deformation von $t=1$ auf $t=2$ fortsetzen, so bedeutet das gerade $C_1(C_1(f,g),h) - C_1(f, C_1(g,h)) - (\delta_{\mathrm{H}} C_2)(f,g,h) = 0$. Weil C_1 ein 2-Kozykel und somit das Produkt bis zur Ordnung 1 assoziativ ist, gilt weiter

$$(\delta_{\mathrm{H}} D_1)(f,g,h,k) = 0$$

für alle $f,g,h,k \in \mathcal{C}^\infty(M)$, also ist $D_1(f,g,h) = C_1(C_1(f,g),h) - C_1(f, C_1(g,h))$ ein 3-Kozykel, welcher wiederum der Korand der gesuchten Kokette C_2 sein muß, damit die Bedingung der Assoziativität erfüllt ist, d.h. $[D_1] = [0] \in H^3_{\mathrm{H}}(\mathcal{C}^\infty(M), \mathcal{C}^\infty(M))$. In [22, §5, Prop. 3] zeigt Gerstenhaber, daß allgemein für die Existenz einer assoziativen Deformation in n-ter Ordnung die 3-Kokette D_{n-1} in Gleichung (1.7) ein Kozykel sein muß, welcher der

Korand der gesuchten n-ten Kokette C_n ist. Somit ist $H^3_{\mathrm{H}}(\mathcal{C}^\infty(M), \mathcal{C}^\infty(M)) = \{0\}$ eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Sternprodukts. Diese Bedingung ist aber alles andere als trivial, da nach einer lokalen Form des Hochschild-Kostant-Rosenberg-Theorems $H^3_{\mathrm{H}}(\mathcal{C}^\infty(M), \mathcal{C}^\infty(M)) \cong \Gamma^\infty(\Lambda^3(T^*M))$ gilt [24]. Tatsächlich ist diese Bedingung auch nicht notwendig. In Kapitel 2 wird mit der Fedosov-Konstruktion sogar ein allgemeiner und konstruktiver Existenzbeweis für beliebige symplektische Mannigfaltigkeiten angegeben

Als nächstes möchte ich zwei grundlegende Beispiele für Sternprodukte auf Vektorräumen erwähnen. Diese Beispiele sind wesentlich älter als die Deformationsquantisierung; sie lassen sich durch den Wigner-Weyl Formalismus oder etwa durch Wahl von Ordnungsvorschriften für nichtkommutierende Operatoren motivieren, vergleiche etwa [55], [53] und [46]. Um die zu betrachtenden Formeln einfach zu gestalten, werde ich öfters die Notation benutzen, die punktweise Multiplikation von Funktionen mittels der Strukturabbildung $\mu(f \otimes g) = fg$ zu beschreiben.

Definition/Lemma 1.2 *Man betrachte $M = T^*\mathbb{R}^n$ mit der kanonischen symplektischen Struktur $(\omega_{ij}) = J$ und der Koeffizientenmatrix $(\Lambda^{ij}) = J^{-1}$ des zugehörigen kanonischen Poissontensors. Dann ist für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ die Verknüpfung*

$$f \circ g := \mu\left(\exp\left(\frac{\nu}{2}\Lambda^{ij}\, \partial_{x^i} \otimes \partial_{x^j}\right)(f \otimes g)\right) \tag{1.8}$$

ein Sternprodukt auf $M = T^*\mathbb{R}^n$, das sogenannte Weyl-(Moyal)-Sternprodukt [3].

Definition/Lemma 1.3 *Man betrachte $M = T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$ als (triviale) Kählermannigfaltigkeit mit der kanonischen Kählerform $\omega = \frac{\mathrm{i}}{2}\delta_{ij}\mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z}^j$. Dann ist für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$ die Verknüpfung*

$$f \circ_{\mathrm{W}} g := \mu\left(\exp\left(\frac{2\nu}{\mathrm{i}}\delta^{ij}\, \partial_{z^i} \otimes \partial_{\overline{z}^j}\right)(f \otimes g)\right) \tag{1.9}$$

ein Sternprodukt auf $M = \mathbb{C}^n$, das sogenannte Wick-Sternprodukt, siehe [53] und [10].

Definition 1.4 *Seien $\star$ und $\star'$ zwei Sternprodukte auf (M, ω). Dann heißen $\star$ und $\star'$ äquivalent, falls es eine formale Potenzreihe $\mathcal{S} = \sum_{r=0}^\infty \nu^r S_r$ von $\mathbb{C}$-linearen Abbildungen $S_r : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ gibt mit $S_0 = \mathrm{Id}$, so daß für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ gilt:*

$$\mathcal{S}(f \star g) = \mathcal{S}(f) \star' \mathcal{S}(g).$$

Für differentielle Sternprodukte sind die Abbildungen S_r sogar Differentialoperatoren [27]. Die Äquivalenz von Sternprodukten stellt wie ihre Existenz ein kohomologisches Problem dar. Es läßt sich insbesondere zeigen, daß auf symplektischen Mannigfaltigkeiten mit verschwindender zweiter de Rham-Kohomologie alle Sternprodukte paarweise äquivalent sind

[27, Prop. 3.1]. Insbesondere gilt diese Aussage also auf Vektorräumen. Die Sternprodukte aus Definition 1.2 und Definition 1.3 sind äquivalent mit der Äquivalenzabbildung $\mathcal{S} = \exp(-\mathrm{i}\nu\delta^{kl}\partial_{z^k}\partial_{\overline{z}^l})$ (beachte die Summationskonvention), siehe [10].

Die Existenz von Sternprodukten auf beliebigen symplektischen Mannigfaltigkeiten galt lange als ungesichert, siehe etwa [55] und [25] für einen Überblick. Mit ganz unterschiedlichen Methoden konnte von verschiedenen Autoren der Beweis erbracht werden, daß tatsächlich auf jeder symplektischen Mannigfaltigkeit ein Sternprodukt existiert [16, 19, 51, 15]. Mittlerweile wurde von Kontsevich auch die Existenz auf beliebigen Poissonmannigfaltigkeiten bewiesen [37].

In dieser Arbeit wird wesentlich der konstruktive Existenzbeweis von Fedosov [19], Verallgemeinerungen davon [10, 49], und die Konstruktion von Karabegov [31, 32, 33] für sogenannte Sternprodukte mit Trennung der Variablen auf Kählermannigfaltigkeiten benutzt werden (diese sind eine Verallgemeinerung des Wick-Sternprodukts aus Definition 1.3, sie tauchen auch in den grundlegenden Arbeiten von Berezin zur Quantisierung auf, siehe [4]). Die entsprechenden Konstruktionen werden in Kapitel 2 und Kapitel 4 erläutert. Beide Verfahren sind nicht allein konstruktiv, es stellt sich sogar heraus, daß auf symplektischen Mannigfaltigkeiten jedes Sternprodukt äquivalent zu einem Fedosov-Sternprodukt ist [50, 6, 61, 48], und daß auf Kählermannigfaltigkeiten sogar alle Sternprodukte mit Karabegovs Eigenschaft der Trennung der Variablen mittels einer modifizierten Fedosov-Konstruktion [49] bzw. mittels Karabegovs Konstruktion erhalten werden können. Darüberhinaus gibt es spezielle Sternprodukte, die u.a. wegen ihres Zusammenhangs zu anderen Quantisierungen von besonderem Interesse sind, beispielsweise gehört nach Schlichenmaier [53] zur Berezin-Toeplitz-Quantisierung auf (quantisierbaren) Kählermannigfaltigkeiten (auf die ich hier nicht eingehen werde) ein eindeutiges Sternprodukt, welches ein solches Karabegovsches Sternprodukt ist.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, ermöglicht es die Deformationsquantisierung nun, das Korrespondenzprinzip zwischen klassischer Mechanik und Quantenmechanik als eine Art Minimalforderung zu implementieren: man möchte dazu $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ als Observablenalgebra auffassen, wobei deren Liealgebrenstruktur durch den $\star$-Kommutator $\mathrm{ad}_\star(f)g := [f,g]_\star := f \star g - g \star f$ für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ gegeben ist. Insbesondere ist dann für Funktionen $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ die „deformierte Bewegungsgleichung“ für f entlang des Flusses von X_g

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_t = \frac{1}{\nu}[f_t, g]_\star = \{f_t, g\} + \mathcal{O}(\nu)$$

durch eine formale Reihe gegeben, welche man unter gewissen Umständen als quantenmechanische Korrektur der klassischen Bewegungsgleichungen (1.5) auffassen kann. Es stellen sich nun eine Reihe grundsätzlicher Fragen. In der klassischen Mechanik sind die symplektischen Vektorfelder und die symplektischen Diffeomorphismen besonders ausgezeichnet. Hamiltonsche Vektorfelder „erzeugen", wie wir gesehen haben, in gewissem Sinne die klassische Zeitentwicklung. Wie wirkt aber ein solcher Diffeomorphismus oder ein solches Vektorfeld auf der Observablenalgebra der Deformationsquantisierung? Lassen sich Hamiltonsche Wirkungen von Liegruppen oder Liealgebren auf die Deformationsquantisierung verallgemeinern? In Kapitel 3 und Kapitel 5 werden diese Fragen für Fedosov-Sternprodukte und Sternprodukte vom Wick-Typ studiert werden. In Analogie zum Unterschied zwischen symplektischen Vektorfeldern X mit $\mathcal{L}_X\omega = 0$ und Hamiltonschen Vektorfeldern X_f mit $-\mathcal{L}_{X_f} = \{f, \cdot\}$ wird auch untersucht, wann eine gegebene $\star$-Derivation $\mathcal{L}_X$ von der Form $-\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\star(J)$ mit einer speziellen formalen Funktion J ist; solche Derivationen heißen quasi-innere $\star$-Derivationen. Ebenso wird der Begriff der Impulsabbildung zu dem der Quantenimpulsabbildung erweitert, siehe [8] und [64].

Letztendlich wird sich dann herausstellen, daß für die Übertragbarkeit der Phasenraumreduktion mittels einer Verallgemeinerung der klassischen Impulsabbildung notwendig zusätzliche, nicht-triviale Bedingungen erfüllt sein müssen.

Bevor nun im folgenden Kapitel die verallgemeinerte Fedosov-Konstruktion besprochen wird, möchte ich noch eine wichtige, allgemeine Eigenschaft von Automorphismen und Derivationen eines Sternprodukts $\star$ zeigen. Tatsächlich ist es nämlich eine einfache Folgerung aus Definition 1.1, daß ein Vektorfeld, welches eine $\star$-Derivation ist, notwendig ein symplektisches Vektorfeld sein muß. Ebenso muß ein Diffeomorphismus auf M, welcher einen $\star$-Automorphismus induziert, selbst symplektisch sein.

Lemma 1.5 *Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit, $X \in \Gamma^\infty(TM)$ ein Vektorfeld und sei $\mathcal{L}_X$ eine Derivation eines beliebigen Sternprodukts $\star$ auf M. Dann gilt $\mathcal{L}_X\omega = 0$, das heißt, X ist ein symplektisches Vektorfeld. Sei weiter $\phi : M \to M$ ein Diffeomorphismus und sei $\phi^*(f \star g) = (\phi^* f) \star (\phi^* g)$; dann ist $\phi^*\omega = \omega$.*

Beweis: Man betrachte o.B.d.A. $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Für alle Sternprodukte gilt $\mathrm{ad}_\star(f)g = \nu\{f, g\} + \mathcal{O}(\nu^2)$. Nun ist einerseits

$$\nu\mathcal{L}_X\{f, g\} = \nu\left((\mathcal{L}_X\omega)(X_f, X_g) + \omega(\mathcal{L}_X X_f, X_g) + \omega(X_f, \mathcal{L}_X X_g)\right),$$

andererseits ist aufgrund der Derivationseigenschaft

$$\mathcal{L}_X(\mathrm{ad}_\star(f)g) = \nu(\{X(f), g\} + \{f, X(g)\}) + \mathcal{O}(\nu^2) = \nu(\omega(X_{X(f)}, X_g) + \omega(X_f, X_{X_g})) + \mathcal{O}(\nu^2).$$

Da $\star$ ein Sternprodukt ist, müssen beide Ausdrücke in der ersten Ordnung in ν übereinstimmen:

$$(\mathcal{L}_X\omega)(X_f, X_g) + \omega(\mathcal{L}_X X_f, X_g) + \omega(X_f, \mathcal{L}_X X_g) = \omega(X_{X(f)}, X_g) + \omega(X_f, X_{X(g)}). \quad (1.10)$$

Daraus folgt dann aber $\mathcal{L}_X\omega = 0$, denn es gilt zunächst $\mathrm{d}(X(f)) = \mathcal{L}_X(i_{X_f}\omega)$. Daher ist aber für alle $Y \in \Gamma^\infty(TM)$:

$$\begin{aligned}
\omega(X_{X(f)}, Y) &= (\mathrm{d}X(f))(Y) = \mathcal{L}_X(\omega(X_f, Y)) - (i_{X_f}\omega)(\mathcal{L}_X Y) \\
&= (\mathcal{L}_X\omega)(X_f, Y) + \omega(\mathcal{L}_X X_f, Y). \qquad (1.11)
\end{aligned}$$

Wähle nun speziell $Y = X_g$, dann folgt aus Gleichung (1.10)

$$\omega(X_f, X_{X(g)}) = \omega(X_f, \mathcal{L}_X X_g),$$

und wegen der Identität (1.11) folgt daraus $\mathcal{L}_X\omega = 0$. Für einen Diffeomorphismus folgt die Aussage sofort mit dem analogen Argument aus der Automorphismeneigenschaft und der Feststellung, daß $\phi^*\omega = \omega$ genau dann, wenn $\phi^*\{f, g\} = \{\phi^* f, \phi^* g\}$ gilt. ■

Es stellt daher keine Beschränkung der Allgemeinheit dar, wenn in Kapitel 3 von vornherein symplektische Vektorfelder daraufhin untersucht werden, unter welchen zusätzlichen Bedingungen sie Derivationen eines gegebenen Fedosov-Sternprodukts sind.

Kapitel 2

Die verallgemeinerte Fedosov-Konstruktion

In diesem Kapitel wird die von Fedosov [19, 20] entwickelte Methode zur Konstruktion von Sternprodukten auf symplektischen Mannigfaltigkeiten vorgestellt, und es werden einige später benutzte wichtige Techniken und Verallgemeinerungen erklärt. Zunächst möchte ich in Worten die zugrundeliegende Idee andeuten. Der Ausgangspunkt der Fedosov-Konstruktion ist eine symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω). Für die (Ko-)tangentialräume an M existieren selbstverständlich die in den vorangehenden Beispielen genannten Vektorraum-Sternprodukte (1.8) und (1.9). In der Fedosov-Konstruktion wird ein solches faserweise definiertes Sternprodukt $\circ_{\mathrm{F}}$ (gewöhnlich das Weyl-Sternprodukt (1.8)) auf ein gewisses Bündel $\mathcal{W}\otimes\Lambda$ über M ausgedehnt, welches in symmetrische und antisymmetrische Schnitte in $\Gamma^\infty(T^*M)$ faktorisiert. Die wesentliche Arbeit besteht dann in der Konstruktion einer Bijektion zwischen formalen Funktionen in $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ und einer geeigneten Unteralgebra von $\mathcal{W}\otimes\Lambda$, mit deren Hilfe das Sternprodukt von dieser Unteralgebra auf $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ zurückgezogen werden kann.

In dieser Arbeit wird im wesentlichen die übliche Fedosov-Konstruktion mit der auf Neumaier [48, 49] zurückgehenden Verallgemeinerung einer bestimmten Normierungsbedingung benötigt. Es sei jedoch bereits hier darauf hingewiesen, daß die später untersuchten Sternprodukte vom Wick-Typ auf Kähler-Mannigfaltigkeiten sämtlich mittels einer geeigneten Fedosov-Konstruktion gewonnen werden können, welche daher in einem späteren Kapitel ebenfalls knapp besprochen werden soll.

2.1 Die Fedosov-Algebra

Im folgenden sei nun (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Ferner sollen die folgenden Bezeichnungsweisen für Differentialformen auf M benutzt werden: mit $\Gamma^\infty(\Lambda^k(T^*M))$ seien wie üblich die antisymmetrischen k-Formen bezeichnet und analog mit $\Gamma^\infty(\mathsf{V}^r(T^*M))$ die symmetrischen Differentialformen vom Grad r. Die entsprechenden Produkte werden dann wie üblich mit $\wedge$ beziehungsweise ganz analog mit $\vee$ bezeichnet. Ferner sei für eine Algebra A mit $\mu : A \otimes A \to A$ die durch $\mu(a \otimes b) = ab$ festgelegte Strukturabbildung bezeichnet.
Definiere nun die Fedosov Algebra:

$$\mathcal{W}\otimes\Lambda := \left(\mathsf{X}_{r=0}^\infty \Gamma^\infty\left(\bigvee^r(T^*M) \otimes \bigwedge(T^*M)\right)\right)[[\nu]]. \tag{2.1}$$

Für zwei faktorisierte Schnitte f, g in $\mathcal{W}\otimes\Lambda$ mit $f = T \otimes \alpha$ und $g = U \otimes \beta$ ist deren punktweises Produkt einfach gegeben durch $fg = T \vee U \otimes \alpha \wedge \beta$, und natürlich läßt sich dieses Produkt linear auf allgemeine Schnitte in $\mathcal{W}\otimes\Lambda$ ausdehnen. Somit wird $\mathcal{W}\otimes\Lambda$ eine assoziative Algebra. Für das punktweise Produkt schreiben wir auch $fg = \mu(f \otimes g)$ unter Benutzung der Strukturabbildung $\mu : (\mathcal{W}\otimes\Lambda) \otimes (\mathcal{W}\otimes\Lambda) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda$.

Ferner führen wir Bezeichnungen für die Gradabbildungen $\mathcal{W}\otimes\Lambda \ni f \mapsto nf$, $n \in \mathbb{N}$ und entsprechende Grade ein, nämlich

$$\begin{aligned}
\deg_s(f) = |f|_s f \quad &:= \quad kf \Leftrightarrow f \in \left(\Gamma^\infty\left(\bigvee^k(T^*M) \otimes \bigwedge(T^*M)\right)\right)[[\nu]], \\
\deg_a(f) = |f|_a f \quad &:= \quad lf \Leftrightarrow f \in \mathsf{X}_{r=0}^\infty\left(\Gamma^\infty\left(\bigvee^r(T^*M) \otimes \bigwedge^l(T^*M)\right)\right)[[\nu]], \\
\deg_\nu(f) = |f|_\nu f \quad &:= \quad \nu\frac{\partial}{\partial\nu} f.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Das punktweise Produkt in $\mathcal{W}\otimes\Lambda$ ist dann superkommutativ bezüglich des antisymmetrischen Grades, das heißt mit $f, g \in \mathcal{W}\otimes\Lambda$ vom antisymmetrischen Grad r und s gilt $fg = (-1)^{rs} gf$. Weiter sind die Gradabbildungen alle Derivationen des punktweisen Produkts. Mit $\mathcal{W}$ werde die Unteralgebra der Elemente mit verschwindendem antisymmetrischem Grad $\mathcal{W} \otimes 1$ bezeichnet.

Die symplektische Form ω ermöglicht nun die Definition einer assoziativen Deformation des punktweisen Produktes. Es seien dazu ω_{ij} die Komponenten der symplektischen Form und Λ^{ij} die Komponenten des zugehörigen Poissontensors mit $\omega_{ij}\Lambda^{kj} = \delta_i^k$. Ferner werde mit $i_s(X)$ das innere Produkt eines Vektorfelds $X \in \Gamma^\infty(TM)$ mit dem symmetrischen Anteil von $\mathcal{W}\otimes\Lambda$ bezeichnet. Dann definieren wir das folgende faserweise Produkt

$$a \circ_{\mathrm{F}} b = \mu\left(\exp\left(\frac{\nu}{2}\Lambda^{ij} i_s(\partial_i) \otimes i_s(\partial_j)\right)(a \otimes b)\right). \tag{2.3}$$

Das so definierte Produkt ist die Ausdehnung des bekannten Weyl-(Moyal-)Sternprodukts auf den symmetrischen Anteil von $\mathcal{W}\otimes\Lambda$.

Mit $\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(f)g$ werde für Elemente $f, g \in \mathcal{W}\otimes\Lambda$ der antisymmetrischen Grade r und s der $\deg_a$-gradierte Superkommutator $\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(f)g := [f,g] := f \circ_{\mathrm{F}} g - (-1)^{rs} g \circ_{\mathrm{F}} f$ bezeichnet. Dann ist sofort klar, daß Elemente von $\mathcal{W}\otimes\Lambda$ mit symmetrischem Grad Null zentral bezüglich $\circ_{\mathrm{F}}$ sind. Ist irgendein $f \in \mathcal{W}\otimes\Lambda$ zentral, also $\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(f)g = 0$ für alle $g \in \mathcal{W}\otimes\Lambda$, so kann man insbesondere $g = \alpha \otimes 1$ wählen wobei $\alpha \in \Gamma^\infty(T^*M)$ eine Einsform ist. Dann folgt aus $0 = \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(f)g = \frac{1}{2}\nu(\Lambda^{ij} - \Lambda^{ji})\alpha(\partial_j)\ i_s(\partial_i)f$, daß entweder $f = 0$ oder $\deg_s(f) = 0$ gelten muß, da α als eine beliebige Einsform wählbar ist. Man kann also die zentralen Elemente von $(\mathcal{W}\otimes\Lambda, \circ_{\mathrm{F}})$ genau als diejenigen Elemente von $\mathcal{W}\otimes\Lambda$ kennzeichnen, deren symmetrischer Grad verschwindet:

Lemma 2.1 *Für $f \in \mathcal{W}\otimes\Lambda$ gilt $\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(f)g = 0$ für alle $g \in \mathcal{W}\otimes\Lambda$ genau dann wenn $\deg_s(f) = 0$.*

Nun ist $\deg_a$ auch eine Derivation bezüglich $\circ_{\mathrm{F}}$, nicht aber $\deg_s$ und $\deg_\nu$. Führt man allerdings die zum *totalen Grad* gehörende Gradabbildung $\mathrm{Deg} := 2\deg_\nu + \deg_s$ ein (und wie oben die Schreibweise $|a|_{\mathrm{tot}} = k$ falls $\mathrm{Deg}(a) = ka$), so ist Deg eine Derivation bezüglich $\circ_{\mathrm{F}}$, und $(\mathcal{W}\otimes\Lambda, \circ_{\mathrm{F}}, \mathrm{Deg})$ ist eine formal gradierte Algebra. Die Menge der Elemente von $\mathcal{W}\otimes\Lambda$ mit totalem Grad $l \geq k$ sei mit $\mathcal{W}_k\otimes\Lambda$ bezeichnet. Außerdem sei $\sigma : \mathcal{W}\otimes\Lambda \to \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ die Projektion auf Elemente vom symmetrischen und antisymmetrischen Grad Null. In lokalen Koordinaten definiert man nun ein Differential $\delta : \mathcal{W}^\bullet\otimes\Lambda^\bullet \to \mathcal{W}^{\bullet-1}\otimes\Lambda^{\bullet+1}$ und eine Abbildung $\delta^* : \mathcal{W}^\bullet \otimes \Lambda^\bullet \to \mathcal{W}^{\bullet+1} \otimes \Lambda^{\bullet-1}$. Es sei dazu:

$$\delta := (1 \otimes \mathrm{d}x^i) i_s(\partial_i) \qquad \text{und} \qquad \delta^* := (\mathrm{d}x^i \otimes 1) i_a(\partial_i). \tag{2.4}$$

Auf einem faktorisierten Schnitt $\mathcal{W}\otimes\Lambda \ni f = T \otimes \alpha$ berechnet man sofort

$$\delta^2(T\otimes\alpha) = \Big((1\otimes dx^l) i_s(\partial_k)\Big)\Big(i_s(\partial_l)T \otimes dx^l \wedge \alpha\Big) = (i_s(\partial_k) i_s(\partial_l) T) \otimes dx^k \wedge dx^l \wedge \alpha = 0.$$

Ebenso ist auch $(\delta^*)^2 = 0$. Weiter ist für einen faktorisierten Schnitt:

$$\begin{aligned}
(\delta\delta^* + \delta^*\delta)(T\otimes\alpha) &= \Big(\delta(dx^l \otimes 1) i_a(\partial_l) + \delta^*(1 \otimes \mathrm{d}x^i) i_s(\partial_i)\Big)(T\otimes\alpha) \\
&= \Big((i_s(\partial_k)(dx^l \vee T)) \otimes (dx^k \wedge i_a(\partial_l)\alpha)\Big) \\
&\quad + \Big((dx^l \vee i_s(\partial_k) T) \otimes (i_a(\partial_l)(dx^k \wedge \alpha))\Big) \\
&= T \otimes dx^l \wedge i_a(\partial_l)\alpha + \Big((dx^l \vee i_s(\partial_k)T) \otimes (dx^k \wedge i_a(\partial_l)\alpha)\Big) \\
&\quad + dx^l \vee i_s(\partial_l) T \otimes \alpha - \Big((dx^l \vee i_s(\partial_k)T) \otimes (dx^k \wedge i_a(\partial_l)\alpha)\Big) \\
&= (\deg_a + \deg_s)(T\otimes\alpha),
\end{aligned}$$

Damit kann man für Elemente $f \in \mathcal{W}\otimes\Lambda$ mit $\deg_s(f) = kf$ und $\deg_a(f) = lf$ eine Abbildung δ^{-1} folgendermaßen definieren:

$$\delta^{-1} f := \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad k+l=0 \\ \frac{1}{k+l}\delta^* f & \text{falls} \quad k+l \neq 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

und aufgrund der obigen Rechnung gilt für alle $f \in \mathcal{W}\otimes\Lambda$:

$$\left(\delta\delta^{-1} + \delta^{-1}\delta + \sigma\right)(f) = f. \tag{2.6}$$

Die Formel (2.6), von Fedosov als Hodge-de Rham Zerlegung bezeichnet, bedeutet nichts anderes, als daß die δ-Homologie auf Elementen f mit $\sigma(f) = 0$ verschwindet. Konkret folgt das einfach daraus, daß für δ-geschlossene $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda$ mit $(|a|_a + |a|_s) > 0$ aufgrund von (2.6) gilt: $\delta(\delta^{-1}a) = a$, also a δ-exakt ist. Dies folgt auch mit einem algebraisch-topologischen Argument (etwa [40, Ch. II, § 2./8.] oder [12, Ch. I]), da δ^{-1} eine kontrahierende Homotopie, d.h. eine Kettenäquivalenz zu dem trivialen Komplex $\sigma(\mathcal{W}\otimes\Lambda)$ definiert, und da die Homologiegruppen kettenäquivalenter Komplexe isomorph sind, sieht man deshalb auch so, daß die δ-Homologie auf den Elementen mit positivem $\deg_s + \deg_a$-Grad trivial ist. Die Formel (2.6) wird daher auch als Homotopieformel bezeichnet; wir werden später noch eine weitere derartige Homotopieformel benötigen.

Für den nächsten Schritt wähle man einen torsionsfreien, symplektischen Zusammenhang ∇ auf M. (Ein solcher Zusammenhang existiert immer, jedoch nicht eindeutig, siehe etwa [41, Prop. 4.1 und Prop. 4.2, Rem. 3] und Lemma 2.6.) Ausgehend von diesem torsionsfreien, symplektischen Zusammenhang ∇ auf M definiert man nun eine ebenfalls mit ∇ bezeichnete Abbildung $\nabla : \mathcal{W}\otimes\Lambda^\bullet \to \mathcal{W}\otimes\Lambda^{\bullet+1}$ mittels des induzierten Zusammenhangs auf $\mathcal{W}\otimes\Lambda$. Dies stellt eine leicht unsaubere Notation dar, da auch die induzierten Zusammenhänge auf $\mathcal{W}\otimes\Lambda$, $\mathcal{W}$ und Λ mit diesem Symbol bezeichnet werden, es ist aber die allgemein übliche Schreibweise. Aufgrund der Torsionsfreiheit des symplektischen Zusammenhangs ist der induzierte Zusammenhang auf Λ gleich der äußeren Ableitung d. Man definiert in lokalen Koordinaten

$$\nabla := (1 \otimes \mathrm{d}x^i)\nabla_{\partial_i}, \tag{2.7}$$

was aufgrund der Torsionsfreiheit des symplektischen Zusammenhangs auf einem faktorisierten Schnitt gerade bedeutet:

$$\nabla(T \otimes \alpha) = \nabla_{\partial_i} T \otimes \mathrm{d}x^i \wedge \alpha + T \otimes \mathrm{d}\alpha.$$

Die Abbildung ∇ hat übrigens die folgende, eher triviale Eigenschaft, die der Übersicht halber dennoch hervorgehoben werden soll:

Lemma 2.2 *Für ein Vektorfeld $X \in \Gamma^\infty(TM)$ betrachte man die Lieableitung $\mathcal{L}_X$ und ihre natürliche Fortsetzung auf $\mathcal{W}$, Λ und $\mathcal{W}\otimes\Lambda$. Dann kommutieren $\mathcal{L}_X$ und die in (2.7) definierte Abbildung ∇ genau dann, wenn der ebenfalls mit ∇ bezeichnete symplektische Zusammenhang invariant ist.*

Beweis: Der Beweis ist tatsächlich trivial, denn eine derartige Aussage gilt natürlicherweise für einen induzierten Zusammenhang, und ∇ ist ja gemäß (2.7) mittels des induzierten Zusammenhangs auf $\mathcal{W}\otimes\Lambda$, einem inneren Produkt und der äußeren Ableitung definiert, mit denen $\mathcal{L}_X$ verträglich ist. Konkret gilt

$$[\mathcal{L}_X, \nabla](T \otimes \alpha) = [\mathcal{L}_X, \nabla_{\partial_i}]T \otimes \mathrm{d}x^i \wedge \alpha - \nabla_{[X,\partial_i]}T \otimes \mathrm{d}x^i \wedge \alpha.$$

Dieser Ausdruck verschwindet aber genau dann, wenn der ursprüngliche symplektische Zusammenhang ∇ selbst invariant ist, also $[\mathcal{L}_X, \nabla] = 0$ gilt. ■

Als weitere geometrische Größe wird noch die Krümmung R des Zusammenhangs ∇ benötigt mit $R(X,Y)Z = \left([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}\right) Z$ für $X, Y, Z \in \Gamma^\infty(TM)$ und mit den durch $R(\partial_u, \partial_v)\partial_t = R^r_{tuv}\partial_r$ gegebenen Komponenten R^r_{tuv}. Für Endomorphismen von $\mathcal{W}\otimes\Lambda$ werde außerdem der mit ihrem Homogenitätsgrad bezüglich $\deg_a$ gradierte Kommutator mit $[\,\cdot\,,\cdot\,]$ bezeichnet (also beispielsweise $[\nabla, \delta] = \nabla\delta + \delta\nabla$). Fedosov zeigt damit die folgenden, übrigens leicht nachzurechnenden, Aussagen:

Lemma 2.3 ([20, Lemma 5.1.3]) *Die in (2.7) definierte Abbildung ∇ ist eine Derivation von $\circ_{\mathrm{F}}$, und außerdem ist $[\delta, \nabla] = 0$. Außerdem wird ∇^2 durch die Krümmung des Zusammenhangs ausgedrückt als $\nabla^2 = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(R)$, wobei $R := \frac{1}{4}\omega_{rs}R^s_{tuv}dx^r \vee dx^t \otimes dx^u \wedge dx^v$. Aus den Bianchi-Identitäten folgt $\delta R = 0 = \nabla R$.*

Selbstverständlich hängen diese Ergebnisse nicht von der Wahl des Zusammenhangs ∇ ab. In Abschnitt 2.3 wird dargestellt werden, welche Rolle die Freiheit in der Wahl von ∇ in der Fedosov Konstruktion spielt.

2.2 Die Fedosov-Derivation

Die in diesem Abschnitt dargestellten Aussagen sind eine auf Neumaier [48] zurückgehende Verallgemeinerung der ursprünglichen Fedosovschen Ergebnisse [19, Thm. 3.2 und Thm. 3.3] und [20, Thm. 5.3.3]. Zuerst möchte ich allerdings eine wichtige, von Fedosovs Arbeiten abweichende Beweistechnik angeben, welche in einer einfachen Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes beruht, die zwar wohlbekannt ist, deren Anwendung auf die Fedosov-Konstruktion (zuerst in [58, Anh. B]) aber viele Beweise im Vergleich zu den ursprünglichen Induktionsbeweisen deutlich übersichtlicher macht. In Abschnitt 3.2 über invariante Fedosov-Sternprodukte werden solche Fixpunktargumente wiederholt benutzt.

2.2.1 Exkurs über den Fixpunktsatz für die Fedosov-Algebra

Dieser kurze Abschnitt dient lediglich dazu, einige bekannte Eigenschaften formaler Reihen aus [13] anzugeben. In der vorliegenden Arbeit werden insgesamt nur einige wenige algebraische Eigenschaften formaler Reihen benutzt, in diesem Abschnitt darüberhinaus die Vollständigkeit in der Topologisierung über die durch die Ordnung [13, chap.IV, §2] einer formalen Reihe gegebene nicht-Archimedische Bewertung. Man kann dann ein einfaches Kriterium dafür angeben, wann eine Abbildung $L : \mathcal{W}\otimes\Lambda \to \mathcal{W}\otimes\Lambda$ kontrahierend ist und somit einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.

Mit den Bezeichnungen von [13, chap. IV] sind die formalen Potenzreihen $R[[X]]$ über einem Ring selbst ein Ring (bzw. für eine R-Algebra A ist $A[[X]]$ eine $R[[X]]$-Algebra), dessen Einheiten gerade die Elemente mit invertierbarem konstanten Term sind [13, chap. IV, §6, Proposition 4].

Insbesondere bilden [13, chap. IV, §10] für positive ganze Zahlen n die Elemente von $A[[X]]$ der Ordnung $p \geq n$ Ideale $\mathfrak{a}_n \subset A[[X]]$ mit den Eigenschaften: $\mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{a}_m$ für $n \geq m$ und $\bigcap_{m=0}^{\infty} \mathfrak{a}_m = \{0\}$, und die $\mathfrak{a}_i$ bilden eine Umgebungsbasis für eine Topologie auf $A[[X]]$. Zudem ist $A[[X]]$ als topologischer Raum metrisierbar; man betrachte dazu für $a \in A[[X]]$ die durch die Ordnung $o(a)$ gegebene Bewertung (das heißt, die kleinste ganze Zahl $q \geq 0$, für die der Anteil von a, welcher homogen vom Grad q ist, nicht verschwindet). Dann erhält man, wie üblich eine nicht-Archimedische Norm mit der Bewertung $o(a)$:

$$|a| := \begin{cases} \frac{1}{2^{o(a)}} & \text{falls} \quad a \neq 0 \\ 0 & \text{falls} \quad a = 0 \end{cases},$$

welche in der gewohnten Weise mittels $d(a, b) := |a - b|$ eine Ultrametrik ergibt, und $A[[X]]$ ist ein vollständiger (ultra)metrischer Raum [13, chap. IV, §10].

Nun besitzt die Fedosov-Algebra $(\mathcal{W}\otimes\Lambda, \circ_{\mathrm{F}})$ wie oben dargestellt neben der ursprünglichen formalen Gradierung (bezüglich ν) und der symmetrischen Gradierung auch eine formale Gradierung nach dem totalen Grad $\mathrm{Deg} := 2\deg_\nu + \deg_s$, und jedes Element von $\mathcal{W}\otimes\Lambda$ läßt sich auch als formale Reihe von bezüglich Deg homogenen Elementen schreiben. Insbesondere ist auch $\mathcal{W}\otimes\Lambda$ mittels der gerade angegebenen Metrik bezüglich Deg vollständig.

Damit läßt sich eine einfache Aussage über die Anwendbarkeit des Banachschen Fixpunktsatzes erhalten [58, 48]:

Lemma 2.4 *Für Elemente der Fedosov-Algebra $a = \sum_{k=0}^{\infty} a^{(k)} \in \mathcal{W}\otimes\Lambda$ mit $k = |a^{(k)}|_{\mathrm{tot}}$ sei $o(a)$ die kleinste, positive ganze Zahl k, für die $a^{(k)} \neq 0$. Dann besitzt eine Abbildung $\mathsf{L} : \mathcal{W}\otimes\Lambda \to \mathcal{W}\otimes\Lambda$ einen eindeutigen Fixpunkt, falls für alle $f, g \in \mathcal{W}\otimes\Lambda$ gilt:*

$$o(\mathsf{L}(f) - \mathsf{L}(g)) > o(f - g).$$

Beweis: Der Beweis ist klar, denn Banachs Fixpunktsatz besagt gerade, daß L einen Fixpunkt besitzt, falls L kontrahierend ist, also $d(\mathsf{L}(f), \mathsf{L}(g)) \leq d(f, g) \cdot t$ mit einer Zahl $0 \leq t < 1$. Hier ist $d(\mathsf{L}(f), \mathsf{L}(g)) = 2^{-o(\mathsf{L}(f)-\mathsf{L}(g))}$. Falls also $o(\mathsf{L}(f) - \mathsf{L}(g))$ echt größer ist als $o(f - g)$, so ist L offenbar kontrahierend. ■

2.2.2 Die Fedosov-Derivation $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$

Ich komme jetzt zurück zum Hauptthema dieses Abschnitts, nämlich der Konstruktion einer gradierten Derivation $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ von $\circ_{\mathrm{F}}$, deren Kern geschnitten mit $\ker(\deg_a) = \mathcal{W}$ dann gerade die Unteralgebra von $\mathcal{W}\otimes\Lambda$ sein wird, welche man zu $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ in Bijektion bringen möchte. Man betrachte nun für ein $r \in \mathcal{W}_2\otimes\Lambda^1$ (also ein Element mit minimalem totalen Grad 2 und antisymmetrischem Grad 1) eine $\circ_{\mathrm{F}}$-Superderivation antisymmetrischen Grades $+1$ der Gestalt $\delta + \mathcal{K}$, wobei $\mathcal{K}$ den totalen Grad nicht verringere. Dies wird konkret erfüllt durch die von Fedosov gewählte Derivation der Form

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} := -\delta + \nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r). \tag{2.8}$$

Für diese Derivation zeigt Fedosov, daß sich aus der Forderung $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^2 = 0$ eine Gleichung ergibt, die zusammen mit zwei weiteren Bedingungen dann r und damit $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ eindeutig festlegt. Die Abbildung $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ wird allgemein als Fedosov-Derivation bezeichnet. Wir berechnen zunächst $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^2$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^2 &= \left(-\delta + \nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)\right)\left(-\delta + \nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)\right) \\
&= \delta^2 - \delta\nabla + \delta\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)\right) - \nabla\delta + \nabla^2 - \nabla\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)\right) \\
&\quad + \frac{1}{\nu}\left(\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)\delta - \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)\nabla\right) + \left(-\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)\right)^2 \\
&= -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(R) + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}\left(\delta r - \nabla r + \frac{1}{\nu} r \circ_F r\right) \\
&\overset{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Damit $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^2 = 0$ gilt, muß also $(\delta r - \nabla r + \frac{1}{\nu} r \circ_F r - R)$ im Zentrum von $(\mathcal{W} \otimes \Lambda, \circ_F)$ liegen, und hat daher nach Lemma (2.1) die Gestalt $1 \otimes \Omega$. Aufgrund der Gestalt von r und R und aufgrund der Eigenschaften von $\delta, \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}$, und ∇ ist hier insbesondere $(\delta r - \nabla r + \frac{1}{\nu} r \circ_F r - R) = 1 \otimes \Omega$ mit einer geschlossenen, formalen Zweiform $\Omega \in \nu Z^2_{\mathrm{dR}}(M)[[\nu]]$. Die geschlossene, formale Zweiform Ω ist dabei frei wählbar. Fedosov löst diese Gleichung

$$\delta r = R + \nabla r - \frac{1}{\nu} r \circ_F r + 1 \otimes \Omega \tag{2.9}$$

unter Annahme der sogenannten Normierungsbedingung $\delta^{-1} r = 0$. Wir werden hier stets die Neumaiersche verallgemeinerte Normierungsbedingung [49]

$$\delta^{-1} r = s \quad \text{mit} \quad s \in \mathcal{W}_3 \otimes \Lambda^0 \quad \text{und} \quad \sigma(s) = 0, \tag{2.10}$$

d.h. also $s = \sum_{k=3}^{\infty} s^{(k)}$ mit $\mathrm{Deg}(s^{(k)}) = k s^{(k)}$ benutzen. Mit dieser Wahl von s und mithilfe der Zerlegung (2.6) erhält man $\delta\delta^{-1} r + \delta^{-1}\delta r = r$ und somit:

$$r = \delta s + \delta^{-1}(R + \nabla r + \frac{1}{\nu} r \circ_F r + 1 \otimes \Omega). \tag{2.11}$$

Fedosov zeigt im Fall $s = 0$, daß man r aus (2.11) rekursiv bestimmen kann. Tastsächlich kann man direkt mittels des Fixpunktsatzes (für den Beweis im Fall $s = 0$ siehe den Beweis in [58, Anh. B]) sehen, daß r ein eindeutiger Fixpunkt der Abbildung

$$\mathsf{L} : \mathcal{W}_2 \otimes \Lambda^1 \ni a \mapsto \delta s + \delta^{-1}(R + \nabla a + \frac{1}{\nu} a \circ_{\mathrm{F}} a + 1 \otimes \Omega) \in \mathcal{W}_2 \otimes \Lambda^1$$

ist, welcher die Gleichung $\delta r = R + \nabla r + \frac{1}{\nu} r \circ_F r + 1 \otimes \Omega$ unter der Normierungsbedingung $\delta^{-1} r = s$ löst. Ich werde diesen Beweis hier nicht angeben, da das Ergebnis bekannt ist und zudem die entsprechenden Beweisschritte im Beweis von Satz 3.9 auf Seite 45 explizit durchgeführt werden.

N.B.: Die Fedosov-Derivation $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ zum faserweisen Produkt (2.3) hängt also von der Wahl des Zusammenhangs ∇, von einer geschlossenen formalen Zweiform $\Omega \in \nu Z^2_{\mathrm{dR}}(M)[[\nu]]$ sowie von $s \in \mathcal{W}_3 \otimes \Lambda^0$ mit $\sigma(s) = 0$ ab.

Wir benötigen noch die einfache Feststellung, daß der Kern einer gradierten Derivation D einer gradierten Algebra eine gradierte Unteralgebra ist. Das sieht man einfach daran (im Beispiel der hier vorliegenden $\mathbb{Z}$-Gradierung), daß zum einen für $a \in \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ und speziell $a \in \ker(D)$ gilt, daß $D(A_i) \bigcap_{i\neq j} D(A_j) = \emptyset$ und daher der Kern selbst wieder gradiert ist. Aufgrund der Derivationseigenschaft ist natürlich der Kern eine Unteralgebra. Betrachtet man insbesondere die Derivationen $\deg_a$ und $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$, dann ist somit klar, daß auch der Durchschnitt von $\ker(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}})$ und $\ker(\deg_a) =: \mathcal{W}$ eine gradierte Unteralgebra von $\mathcal{W} \otimes \Lambda$ ist.

Der letzte Schritt in der Fedosov-Konstruktion besteht nun darin, eine bijektive, $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Abbildung zwischen $\ker(\deg_a + \deg_s) \cong \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ und $\ker(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}) \cap \mathcal{W}$ zu bestimmen. Gesucht ist eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Abbildung $\tau_{\mathrm{F}} : \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]] \ni f \mapsto \tau_{\mathrm{F}}(f)$ so daß gilt:

$$\sigma(\tau_{\mathrm{F}}(f)) = f \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(\tau_{\mathrm{F}}(f)) = 0. \tag{2.12}$$

Für entsprechend (2.11) und (2.8) festgelegte r und $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ zeigt Fedosov dazu die folgenden Aussagen (unter Annahme von $s = 0$ in der Definition von r und $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$, der allgemeinere Fall läßt sich aber genauso beweisen):

Satz 2.5 ([19, Thm. 3.3], [20, Thm. 5.2.4])

i.) Für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ gibt es ein eindeutiges Element $\tau_{\mathrm{F}}(f) \in \ker(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}) \cap \mathcal{W}$ mit $\sigma(\tau_{\mathrm{F}}(f)) = f$ und eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Abbildung $\tau_{\mathrm{F}} : \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]] \to \ker(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}) \cap \mathcal{W}$, welche die zu $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ gehörende Fedosov-Taylorreihe genannt wird.

ii.) Ist $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dann gilt $\tau_{\mathrm{F}}(f) = \sum_{k=0}^\infty \tau_{\mathrm{F}}(f)^{(k)}$, mit $\mathrm{Deg}\tau_{\mathrm{F}}(f)^{(k)} = k\tau_{\mathrm{F}}(f)^{(k)}$, und τ_{F} läßt sich mit der folgenden Rekursionsformel bestimmen:

$$\begin{aligned} \tau_{\mathrm{F}}(f)^{(0)} &= f \\ \tau_{\mathrm{F}}(f)^{(k+1)} &= \delta^{-1}\left(\nabla\tau_{\mathrm{F}}(f)^{(k)} - \frac{1}{\nu}\sum_{l=0}^{k-1} \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r^{(l+2)})\tau_{\mathrm{F}}(f)^{(k-l)}\right). \end{aligned} \tag{2.13}$$

iii.) Da $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ eine $\circ_{\mathrm{F}}$ - Superderivation ist, ist $\ker(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}) \cap \mathcal{W}$ eine $\circ_{\mathrm{F}}$-Unteralgebra von $\mathcal{W}\otimes\Lambda$ und man kann ein neues assoziatives Produkt $*_{\mathrm{F}}$ für $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ definieren, indem man $\circ_{\mathrm{F}}$ via τ_{F} zurückzieht:

$$f *_{\mathrm{F}} g := \sigma\left(\tau_{\mathrm{F}}(f) \circ_{\mathrm{F}} \tau_{\mathrm{F}}(g)\right).$$

Tatsächlich ist dann $*_{\mathrm{F}}$ ein Sternprodukt auf (M, ω).

Beweis: Ein Beweis dieser Aussagen (im Fall $s = 0$) befindet sich in Originalarbeiten [19, 20] von Fedosov. Ein anderer Beweis für den Fall $s = 0$, der ausnutzt, daß die Bedingungen (2.12) auf eine Fixpunktgleichung führen, deren Lösung beiden Bedingungen genügt und gerade die gesuchte Fedosov-Taylorreihe τ_{F} ist, befindet sich in [58, Anh. B]. ∎

Das oben definierte Sternprodukt $*_{\mathrm{F}}$ wird das verallgemeinerte Fedosov-Sternprodukt zu den Daten (∇, Ω, s) genannt. Die später noch zu beschreibenden Fedosov-Sternprodukte vom Wick-Typ auf Kählermannigfaltigkeiten, bei denen ein anderes faserweises Produkt als $\circ_{\mathrm{F}}$ gewählt wird, werde ich immer explizit als solche kenntlich machen.

Fedosov zeigt darüberhinaus in [20, Thm. 5.2.5], daß die $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$-Kohomologie auf Elementen mit positivem antisymmetrischem Grad trivial ist (vergl. [48, Prop.1.3.17] für die verallgemeinerte Situation).

Man kann dies wieder mittels einer kontrahierenden Homotopie $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}$ für den Komplex $(\mathcal{W}\otimes\Lambda^{\bullet}, \mathfrak{D}_{\mathrm{F}})$ sehen [43], welche es zudem gestattet, eine andere, später benötigte Formel für die Fedosov-Taylorreihe anzugeben, nämlich $\tau_{\mathrm{F}}(f) = f - \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}(1 \otimes \mathrm{d}f)$. Da diese Formel, wie wir gleich sehen werden, den Gleichungen (2.12) genügt, handelt es sich dabei tatsächlich um die Fedosov-Taylorreihe. Da die entsprechende Homotopieformel auch später in den Beweisen zur Invarianz von Fedosov-Sternprodukten benötigt wird, möchte ich die Konstruktion hier erklären.

Wir suchen eine Abbildung $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}$, so daß für Elemente a von $\mathcal{W}\otimes\Lambda$ mit positivem antisymmetrischen Grad gilt (für diese wollen wir kurz $\mathcal{W}\otimes\Lambda^{+}$ schreiben):

$$(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1} + \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}\mathfrak{D}_{\mathrm{F}})a = a. \tag{2.14}$$

Um $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}$ zu konstruieren benutzt man die δ-Homotopieformel (2.6) für $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^{+}$ sowie die Definition von $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ (2.8), $\delta = -\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} + \nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)$, und erhält:

$$\begin{aligned} a &= \delta\delta^{-1}a + \delta^{-1}\delta a = \left(-\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} + \nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)\right)\delta^{-1}a + \delta^{-1}\left(-\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} + \nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)\right)a \\ &= -\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\delta^{-1}a + \left[\nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r), \delta^{-1}\right]a - \delta^{-1}\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}a, \end{aligned}$$

wobei $[\,.\,,.\,]$ wieder den $\deg_a$-gradierten Kommutator der Abbildungen (also in diesem Fall einen Antikommutator) bezeichnet. Es gilt also

$$\left(-\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\delta^{-1} - \delta^{-1}\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\right)a = \left(\mathrm{Id} - \left[\nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r), \delta^{-1}\right]\right)a. \tag{2.15}$$

Man beachte nun, daß $\left(\mathrm{Id} - \left[\nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r), \delta^{-1}\right]\right)$, bezüglich der Deg-Gradierung als formale Potenzreihe von Endomorphismen aufgefaßt, als nullten Koeffizienten die Identität besitzt und daher invertierbar ist [13, chap.IV, §6 Prop. 5]. Da die vorige Gleichung für alle $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^{+}$ gelten muß, wähle man $a = \left(\mathrm{Id} - \left[\nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r), \delta^{-1}\right]\right)^{-1} b$ für ein beliebiges $b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^{+}$. Man erhält dann aus (2.15) die Gleichung

$$b = -\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\delta^{-1}\left(\mathrm{Id} - \left[\nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r), \delta^{-1}\right]\right)^{-1} b + \delta^{-1}(-\mathfrak{D}_{\mathrm{F}})\left(\mathrm{Id} - \left[\nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r), \delta^{-1}\right]\right)^{-1} b. \tag{2.16}$$

Man muß nun lediglich noch zeigen, daß $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ und der Ausdruck $\left(\mathrm{Id} - \left[\nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r), \delta^{-1}\right]\right)^{-1}$ kommutieren. Dann folgt, daß

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1} := -\delta^{-1}\left(\mathrm{Id} - \left[\nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r), \delta^{-1}\right]\right)^{-1} \tag{2.17}$$

tatsächlich Gleichung (2.14) erfüllt.

Um diesen letzten Schritt zu zeigen benutze man nochmals Gleichung (2.15) für $a = (\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} b) \in \mathcal{W} \otimes \Lambda^+$ mit beliebigem $b \in \mathcal{W} \otimes \Lambda^+$. Dann folgt aus $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^2 = 0$, daß gilt

$$-\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} \delta^{-1} \mathfrak{D}_{\mathrm{F}} b = \mathfrak{D}_{\mathrm{F}} b - \left[\nabla - \frac{1}{\nu} \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r), \delta^{-1}\right] \mathfrak{D}_{\mathrm{F}} b.$$

Da allerdings b selbst in $\mathcal{W} \otimes \Lambda^+$ liegt, folgt wegen $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^2 = 0$ durch Anwendung $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ auf Gleichung (2.15) mit b als Argument:

$$-\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} \delta^{-1} \mathfrak{D}_{\mathrm{F}} b = \mathfrak{D}_{\mathrm{F}} b - \mathfrak{D}_{\mathrm{F}} \left[\nabla - \frac{1}{\nu} \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r), \delta^{-1}\right] b,$$

also ist $[\nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r), \delta^{-1}]\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} = \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}[\nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r), \delta^{-1}]$, und folglich kommutieren auch $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ und $\left(\mathrm{Id} - \left[\nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r), \delta^{-1}\right]\right)^{-1}$, womit die Gültigkeit von (2.14) bewiesen ist.

Nun definiere man für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$:

$$\tau_{\mathrm{F}}(f) := f - \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}(1 \otimes \mathrm{d}f). \tag{2.18}$$

Man überprüft leicht, daß die Gleichungen (2.12) erfüllt sind: erstens ist $\sigma(\tau_{\mathrm{F}}(f)) = f$; weiter folgt mithilfe der Homotopieformel (2.14), daß $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(\tau_{\mathrm{F}}(f)) = 1 \otimes \mathrm{d}f - \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}(1 \otimes \mathrm{d}f) = 1 \otimes \mathrm{d}f - 1 \otimes \mathrm{d}f + \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}(1 \otimes \mathrm{d}^2 f) = 0$. Da τ_{F} durch (2.12) eindeutig festgelegt ist, ist (2.18) tatsächlich die Fedosov-Taylorreihe aus Lemma 2.5.

2.3 Die verallgemeinerte Normierungsbedingung nach Neumaier

In der ursprünglichen Fedosov-Konstruktion bestand noch eine gewisse Freiheit in der Wahl der Abbildung ∇ (2.7) sowie eine Willkürlichkeit bei der Festlegung der Normierungsbedingung (2.10) als $\delta^{-1} r = 0$. Verallgemeinerungen der Fedosov-Konstruktion für allgemeine Normierungsbedingungen und für Fedosov-Derivationen, für deren Konstruktion nicht von vornherein ein symplektischer Zusammenhang benutzt wurde, sind von Neumaier [48] studiert worden, und eine Fedosov-Konstruktion für Zusammenhänge mit Torsion haben Karabegov und Schlichenmaier [35] vorgestellt. Ich werde mich hier auf die Verallgemeinerung der Normierungsbedingung beschränken und dafür einige spezielle Ergebnisse aus [48] darstellen. Für ∇ wird dabei immer gemäß Fedosovs ursprünglicher Konstruktion ein symplektischer, torsionsfreier Zusammenhang zur Definition von (2.7) benutzt. Wir werden gleich sehen, daß dann die verbleibende Freiheit bei der Wahl von s in (2.10) in gewissem Rahmen der Freiheit in der Wahl eines anderen torsionsfreien, symplektischen Zusammenhangs in der Definition von (2.7) entspricht. Darüberhinaus entspricht die Freiheit in der Wahl eines anderen Anteils von s der Wahl einer zu Ω kohomologen Zweiform Ω'. Diese Ergebnisse werden später die Untersuchung invarianter Fedosov-Sternprodukte erleichtern. Für eine allgemeinere Diskussion sei wieder auf die Arbeiten [47, 48] verwiesen.

Zunächst sei an die Tatsache erinnert, daß es – wie im Riemannschen Fall – für jede symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) einen torsionsfreien affinen Zusammenhang ∇ gibt, der ω respektiert. Anders als im Fall des Riemannschen Zusammenhangs ist ein symplektischer, torsionsfreier Zusammenhang aber durch diese Bedingungen nicht eindeutig festgelegt. Vielmehr gilt die bekannte Feststellung, daß zwei solche Zusammenhänge sich um ein symmetrisches Tensorfeld vom Rang 3 unterscheiden (siehe etwa [3, 30] und [41]):

Lemma 2.6 *Seien ∇ und ∇' zwei symplektische, torsionsfreie Zusammenhänge auf M. Dann unterscheiden sich beide um ein symmetrisches Tensorfeld vom Grad 3: durch die Definition $S^{\nabla-\nabla'}(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla'_X Y$ mit Vektorfeldern $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ ist ein symmetrisches Tensorfeld $S^{\nabla-\nabla'} \in \Gamma^\infty(\bigvee^2 T^*M \otimes TM)$ gegeben.*
Definiert man nun $\varsigma^{\nabla-\nabla'}(X,Y,Z) := \omega(S^{\nabla-\nabla'}(X,Y),Z)$, so zeigt sich, daß $\varsigma^{\nabla-\nabla'} \in \Gamma^\infty(\bigvee^3 T^*M)$ ein total symmetrisches Tensorfeld ist.
Wählt man umgekehrt irgendein $\varsigma \in \Gamma^\infty(\bigvee^3 T^*M)$ und einen symplektischen, torsionsfreien Zusammenhang ∇ und definiert man $S^\varsigma \in \Gamma^\infty(\bigvee^2 T^*M \otimes TM)$ mittels $\varsigma(X,Y,Z) = \omega(S^\varsigma(X,Y),Z)$, so ist mit der Definition $\nabla^\varsigma_X Y := \nabla_X Y - S^\varsigma(X,Y)$ durch ∇^ς ein weiterer symplektischer, torsionsfreier Zusammenhang gegeben. Tatsächlich kann man durch geeignete Wahl von ς sämtliche symplektischen, torsionsfreien Zusammenhänge erhalten.

Beweis: Siehe etwa [41, Prop. 4.2, Rem. 3] und [56], für die Formulierung [48, Lemma 2.3.1] ■

Mithilfe dieser Beziehungen zwischen torsionsfreien, symplektischen Zusammenhängen kann man nun die Beziehungen zwischen den zugehörigen Abbildungen (2.7) untersuchen. Durch Ausnutzen der Definition von (2.7), der konkreten Gestalt von $\circ_{\mathrm{F}}$, der Eigenschaft $[\delta, \nabla] = 0$ und mit den Feststellungen von Lemma 2.6 erhält man dann:

Lemma 2.7 (Lemma 2.3.2 [48]) *Für zwei torsionsfreie, symplektische Zusammenhänge auf (M, ω) und die zugehörigen äußeren kovarianten Ableitungen (2.7) auf $\mathcal{W}\otimes\Lambda$ gilt mit den Bezeichnungsweisen aus Lemma 2.6: definiert man ein Tensorfeld $T^{\nabla-\nabla'} \in \Gamma^\infty(\bigvee^2 T^*M \otimes T^*M) \subseteq \mathcal{W}\otimes\Lambda^1$ über die Gleichung $T^{\nabla-\nabla'}(Z,Y;X) := \varsigma^{\nabla-\nabla'}(X,Y,Z) = \omega(S^{\nabla-\nabla'}(X,Y),Z)$, so gilt*

$$\nabla - \nabla' = -(\mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^i) i_s(S^{\nabla-\nabla'}(\partial_i, \partial_j)) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(T^{\nabla-\nabla'}). \tag{2.19}$$

Weiter erfüllt $T^{\nabla-\nabla'}$ die Gleichungen

$$\delta T^{\nabla-\nabla'} = 0 \qquad \textit{und} \qquad \begin{aligned} \nabla T^{\nabla-\nabla'} &= R' - R + \tfrac{1}{\nu} T^{\nabla-\nabla'} \circ_{\mathrm{F}} T^{\nabla-\nabla'} \\ \nabla' T^{\nabla-\nabla'} &= R' - R - \tfrac{1}{\nu} T^{\nabla-\nabla'} \circ_{\mathrm{F}} T^{\nabla-\nabla'}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

wobei wie in Lemma 2.3 die zu den Krümmungstensoren der beiden Zusammenhänge gehörenden R und R' gegeben sind als $R = \frac{1}{4}\omega_{it} R^t_{jkl} \mathrm{d}x^i \vee \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^l$ und $R' = \frac{1}{4}\omega_{it} R'^t_{jkl} \mathrm{d}x^i \vee \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^l$.

Beweis: Dem Beweis dieser Aussagen liegt eine konkrete Berechnung in lokalen Koordinaten zugrunde, vergl. [48, Lemma 2.3.2]. ■

Die Bedeutung der vorangehenden Aussagen für die Fedosov-Konstruktion wird nun klar, wenn man sich die zu Ausgangsdaten (∇, Ω, s) und (∇', Ω', s') gehörenden Fedosov-Derivationen $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ und $\mathfrak{D}'_{\mathrm{F}}$ ansieht (vergl. [48, Kap. 1.3]). Aufgrund der Definition (2.8) und mittels Gleichung (2.19) folgt aus $0 = \mathfrak{D}_{\mathrm{F}} - \mathfrak{D}'_{\mathrm{F}} = \nabla - \nabla' - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r - r') = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(T^{\nabla-\nabla'} - r + r')$, daß $T^{\nabla-\nabla'} - r + r'$ im Zentrum von $(\mathcal{W}\otimes\Lambda, \circ_{\mathrm{F}})$ liegt. Wegen Lemma 2.1 und aufgrund der Gestalt von r und r' muß dann $T^{\nabla-\nabla'} - r + r'$ speziell die Form $1 \otimes \vartheta$ mit $\vartheta \in \nu\Gamma^\infty(T^*M)[[\nu]]$ besitzen. Umgekehrt ist auch klar, daß für ein derartiges zentrales $T^{\nabla-\nabla'} - r + r'$ beide Fedosov-Derivationen übereinstimmen. Ist nun $T^{\nabla-\nabla'} - r + r' = 1 \otimes \vartheta$, so folgt durch Anwenden von δ^{-1} und mittels (2.6): $\varsigma^{\nabla-\nabla'} \otimes 1 - s + s' = \vartheta \otimes 1$. Außerdem folgt durch Anwenden von δ, mittels (2.9), (2.19) und der Formel für $\nabla' T$ in (2.20):

$$\begin{aligned} \delta(1 \otimes \vartheta) = 0 &= \nabla'(1 \otimes \vartheta + r - T^{\nabla-\nabla'}) - \frac{1}{\nu}(r - T^{\nabla-\nabla'}) \circ_{\mathrm{F}} (r - T^{\nabla-\nabla'}) \\ &\quad + R' - R + 1 \otimes (\Omega' - \Omega) + \frac{1}{\nu} r \circ_{\mathrm{F}} r - \nabla r \\ &= 1 \otimes \mathrm{d}\vartheta + (\nabla - \nabla')r + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(T^{\nabla-\nabla'})r + 1 \otimes (\Omega' - \Omega) \\ &= 1 \otimes (\Omega' - \Omega + \mathrm{d}\vartheta) - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(T^{\nabla-\nabla'})r + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(T^{\nabla-\nabla'})r \\ \Rightarrow \mathrm{d}\vartheta &= \Omega - \Omega' \end{aligned}$$

Tatsächlich sind die Bedingungen $\Omega - \Omega' = \mathrm{d}\vartheta$ und $\varsigma^{\nabla-\nabla'} \otimes 1 - s + s' = \vartheta \otimes 1$ auch notwendige Bedingungen für die Gültigkeit von $T^{\nabla-\nabla'} - r + r' = 1 \otimes \vartheta$. Um das einzusehen definiere man $B := 1 \otimes \vartheta + r - r' - T^{\nabla-\nabla'}$. Dann berechnet man, wieder unter Benutzung von (2.9), Lemma 2.1, sowie den Formeln (2.19) und (2.20):

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{\mathrm{F}} B + \frac{1}{\nu} B \circ_{\mathrm{F}} B &= -\delta r + \delta r' + 1 \otimes \mathrm{d}\vartheta + \nabla r - \nabla r' - \nabla T^{\nabla-\nabla'} - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)r + \frac{1}{\nu} r \circ_{\mathrm{F}} r \\ &\quad + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(T^{\nabla-\nabla'})r' + \frac{1}{\nu} r' \circ_{\mathrm{F}} r' + \frac{1}{\nu} T^{\nabla-\nabla'} \circ_{\mathrm{F}} T^{\nabla-\nabla'} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\nu} r' \circ_{\mathrm{F}} r' - \frac{1}{\nu} r \circ_{\mathrm{F}} r - \delta r + \delta r' + 1 \otimes \mathrm{d}\vartheta + \nabla r - \nabla r' - R' + R \\
&\quad - \frac{1}{\nu} T^{\nabla - \nabla'} + \frac{1}{\nu} T^{\nabla - \nabla'} + \frac{1}{\nu} \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(T^{\nabla - \nabla'}) r' \\
&= \frac{1}{\nu} r' \circ_{\mathrm{F}} r' - \frac{1}{\nu} r \circ_{\mathrm{F}} r - \nabla r + \frac{1}{\nu} r \circ_{\mathrm{F}} r - R + \nabla' r' - \frac{1}{\nu} r' \circ_{\mathrm{F}} r' + R' \\
&\quad + \nabla r - \nabla r' - R' + R + \nabla r' - \nabla' r' + 1 \otimes (\Omega' - \Omega + \mathrm{d}\vartheta) \\
&= 1 \otimes (\Omega' - \Omega + \mathrm{d}\vartheta) = 0 \quad \text{nach Voraussetzung.}
\end{aligned}
$$

Also ist $\delta B = \nabla B - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)B - \frac{1}{\nu} B \circ_{\mathrm{F}} B$. Weiter ist nach Voraussetzung $\delta^{-1} B = \vartheta \otimes 1 + s - s' - \varsigma^{\nabla - \nabla'} = 0$. Daher ergibt sich mit der δ^{-1}-Homotopieformel (2.6): $\delta^{-1}\delta B = B$, also insgesamt:

$$
B = \delta^{-1}(\nabla B - \frac{1}{\nu}(\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r) B - B \circ_{\mathrm{F}} B)).
$$

Nun ist die Abbildung $\mathsf{N} : \mathcal{W}_2 \otimes \Lambda^1 \ni a \mapsto \delta^{-1}(\nabla a - \frac{1}{\nu}(\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r) a - a \circ_{\mathrm{F}} a)) \in \mathcal{W}_2 \otimes \Lambda^1$ gemäß Lemma 2.4 kontrahierend und hat damit einen eindeutigen Fixpunkt. Da allerdings 0 bereits eine Lösung ist, folgt aufgrund der Eindeutigkeit, daß $B = 0$ gelten muß, und damit ist $T^{\nabla - \nabla'} - r + r' = 1 \otimes \vartheta$. Wir haben somit folgendes bewiesen:

Proposition 2.8 (vergl. [49, Lemma 3.5]) *Seien $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ and $\mathfrak{D}'_{\mathrm{F}}$ Fedosov-Derivationen zu den Daten (∇, Ω, s) und (∇', Ω', s'). Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i.) Die Fedosov-Derivationen $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ und $\mathfrak{D}'_{\mathrm{F}}$ stimmen überein.

ii.) $T^{\nabla - \nabla'} - r + r' = 1 \otimes \vartheta$ mit $\vartheta \in \nu\Gamma^\infty(T^*M)[[\nu]]$.

iii.) $\varsigma^{\nabla - \nabla'} \otimes 1 - s + s' = \vartheta \otimes 1$ und $\Omega - \Omega' = \mathrm{d}\vartheta$, wobei wieder $\vartheta \in \nu\Gamma^\infty(T^*M)[[\nu]]$.

Da Fedosov-Sternprodukte durch die Eigenschaften von $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ festgelegt sind, stimmen im Falle $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} = \mathfrak{D}'_{\mathrm{F}}$ auch die Sternprodukte $*_{\mathrm{F}}$ und $*'_{\mathrm{F}}$ überein. Eine geeignete Veränderung von s (nämlich im Anteil mit symmetrischem Grad eins und im Anteil mit symmetrischem Grad drei und formalem Grad null) ist also gleichbedeutend mit Beibehaltung von s und Veränderung von (∇, Ω). Insbesondere folgt aus Proposition 2.8, daß man stets ausgehen kann von einem s mit minimalem Totalgrad 4 und keinem Anteil vom symmetrischen Grade 1, weil ein Übergang zu $s' = s + \vartheta \otimes 1 - \varsigma \otimes 1$ gleichbedeutend ist zur Wahl eines anderen symplektischen Zusammenhangs ∇' und kohomologem $\Omega' = \Omega - \mathrm{d}\vartheta$:

Korollar 2.9 *Es gibt zu jedem Fedosov-Sternprodukt $*_{\mathrm{F}}$ zu den Daten (∇, Ω, s) mit einem s mit minimalem Totalgrad 3 stets ein Tripel (∇', Ω', s') so daß s' minimalen Totalgrad 4 und zudem keinen Anteil vom symmetrischen Grad 1 hat und so, daß die Sternprodukte $*_{\mathrm{F}}$ und $*'_{\mathrm{F}}$ übereinstimmen.*

Man kann sich daher stets auf eine Normierungsbedingung $\delta^{-1}r = s$ einschränken, bei der s entsprechend Korollar 2.9 festgelegt ist, sofern man Ω und ∇ beliebig variiert.

Eine weitergehende Frage ist es, ob man durch die Freiheit in der Wahl der Eingangsdaten (∇, Ω, s) Sternprodukte innerhalb verschiedener Äquivalenzklassen erhält. Mittels der in [27] entwickelten Beschreibung von Delignes [15] charakterischen Klassen hat Neumaier dazu in [47, Cor. 1] das ursprüngliche Ergebnis von Fedosov [20, Cor. 5.5.4] auf den Fall $s \neq 0$ verallgemeinert und gezeigt, daß zwei Fedosov-Sternprodukte zu Daten (∇, Ω, s) und (∇', Ω', s') genau dann äquivalent sind, wenn $[\Omega] = [\Omega']$. Also hängen die Äquivalenzklassen nicht von der Wahl des Zusammenhangs und der Normierungsbedingung ab. In derselben Arbeit wird auch ein weiterer Beweis für die im Falle gewöhnlicher Fedosov-Sternprodukte bereits in [50, 6, 61] gefundene Aussage gegeben, daß jedes Sternprodukt auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit äquivalent ist zu einem Fedosov-Sternprodukt.

Abschließend möchte ich darauf hinweisen, daß wir bisher noch eine weitere Wahlmöglichkeit in der Fedosov-Konstruktion unberücksichtigt gelassen haben. Es lassen sich auch andere faserweise Produkte anstelle von (2.3) benutzen, und auf den Fall des faserweise definierten Wick-Sternprodukts in Analogie zu (1.9) werde ich im Kapitel über Sternprodukte vom Wick-Typ noch ausführlicher zurückkommen.

Kapitel 3

Invariante Fedosov-Sternprodukte und Quantenimpulsabbildungen

In diesem Kapitel wird die Übertragung von Symmetrien der klassischen Mechanik auf die Deformationsquantisierung im Falle verallgemeinerter Fedosov-Sternprodukte studiert. Für symplektische Mannigfaltigkeiten stellen diese zwar immer noch einen speziellen Fall dar. Im Hinblick auf die Bemerkung am Schluß des letzten Kapitels, daß jedes Sternprodukt auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit zu einem Fedosov-Sternprodukt äquivalent ist, studiert man aber so zumindest Sternprodukte innerhalb jeder möglichen Äquivalenzklasse. Eine noch stärkere Aussage trifft für die später behandelten Sternprodukte vom Wick-Typ auf Kählermannigfaltigkeiten zu, denn diese lassen sich allesamt mittels einer Fedosov-Konstruktion erhalten [49].

Eine erste, zentrale Frage dieses Kapitels ist es, unter welchen Bedingungen ein symplektisches Vektorfeld auf M mittels der Lieableitung $\mathcal{L}_X$ eine Derivation eines Fedosov-Sternprodukts $*_{\mathrm{F}}$ ergibt. Zur Untersuchung dieser Frage werden einige allgemeinere Ergebnisse über Derivationen von Fedosov-Sternprodukten [47] benutzt.

Die hier dargestellten Ergebnisse sind insoweit neu, als zwar für beliebige Sternprodukte die Existenz eines invarianten Zusammenhangs allgemein als hinreichende Bedingung für die Invarianz des Sternprodukts angesehen wurde, Aussagen über notwendige Bedingungen aber, abgesehen von der selten zitierten Arbeit [39], bestenfalls als Vermutungen existierten. Ein Beweis für hinreichende Bedingungen für die Invarianz eines Fedosov-Sternprodukts zu den Daten $(\nabla, 0, 0)$ wurde in der unveröffentlichten Arbeit [7] angegeben. In einem Vortrag von Gutt [26] im April 2002 wurden ohne Beweise einige Aussagen über Invarianz eines Fedosov-Sternprodukts (mit $s = 0$) bezüglich der Wirkung einer kompakten Liegruppe durch Symplektomorphismen auf M vorgestellt. Dort wurde auch eine

Bedingung dafür angegeben, daß die zur infinitesimalen Wirkung gehörende Derivation quasi-inner ist. In unserer Arbeit [44] konnten wir notwendige und hinreichende Bedingungen für Invarianz verallgemeinerter Fedosov-Sternprodukte und für die Eigenschaft einer Derivation, quasi-inner zu sein, konkret mit Fedosov-Methoden herleiten.

Mittlerweile wurden Aussagen dazu – im Fall $s = 0$ und für die Invarianz wieder ohne Beweise – auch in [28] veröffentlicht, wobei zusätzlich die Tatsache benutzt wird, daß Fedosov-Sternprodukte zu den sogenannten natürlichen Sternprodukten zählen. Das sind Sternprodukte, deren definierende Bidifferentialoperatoren in n-ter formaler Ordnung maximal von der Ordnung n in jedem Argument sind. Tatsächlich wurde die in [28] benutzte Aussage, daß ein invariantes, natürliches Sternprodukt stets die Existenz eines invarianten, symplektischen Zusammenhangs nach sich zieht, bereits 1980 von Lichnerowicz [39] bewiesen. Für Fedosov-Sternprodukte ist diese Bedingung alleine im allgemeinen aber nicht hinreichend. Die hier vorgestellten notwendigen und hinreichenden Bedingungen können explizit vollständig im Rahmen der verallgemeinerten Fedosov-Konstruktion hergeleitet werden. Bedingungen für die Existenz einer Quantenimpulsabbildung wurden auch in [38] untersucht; allerdings erweist sich die dort behauptete Existenz einer Quantenimpulsabbildung zu jeder klassischen Impulsabbildung für invariante Fedosov-Sternprodukte als ein Fehlschluß.

Der Beweis der hinreichenden Bedingungen für die Invarianz ist auch im Falle $s \neq 0$ und $\Omega \neq 0$ recht einfach. Für die andere Beweisrichtung werden jedoch einige technische Details benötigt, die es dann auch ermöglichen, die triviale Richtung einfach mitzubeweisen. Es werden daher zunächst einige Eigenschaften von Derivationen von Fedosov-Sternprodukten aus [48] und [44] gesammelt, welche teilweise und im Prinzip zwar bekannt sind [6, 27], hier aber mit besonders einfachen Methoden im Rahmen der verallgemeinerten Fedosov-Konstruktion gewonnen werden, wie sie in [47] zur Berechnung der Deligne-Klassen von Fedosov-Sternprodukten mittels sogenannter lokaler ν-Euler Derivationen entwickelt worden sind. Wie auch schon im vorangehenden Kapitel werde ich daher Beweise ausführlich durchführen, wenn es sich um eine neue, allgemeinere oder an den speziellen Fall angepaßte Beweistechnik handelt, oder der Beweis für das Verständnis der weiteren Untersuchungen wesentlich ist, ansonsten aber nur die Idee erwähnen und auf die Quellen verweisen.

3.1 Beschreibung von $*_F$–Derivationen und die deformierte Cartanformel

Für die folgenden Untersuchungen werden einige allgemeine Tatsachen über Derivationen von Fedosov-Sternprodukten benötigt. Es sei wieder $*_F$ das Fedosov-Sternprodukt zu den Ausgangsdaten (∇, Ω, s). Eine Derivation D des faserweisen Produkts $\circ_{\mathrm{F}}$ heiße quasi-innere oder wesentlich-innere Derivation (vergl. [27]), falls gilt $D = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(f)$ mit $f \in \mathcal{W}\otimes\Lambda$. Für ein beliebiges Sternprodukt $*$ auf (M, ω) ist wohlbekannt [6], daß der Raum der $\mathbb{C}[[\nu]]$–linearen Derivationen von $*$ tatsächlich isomorph ist zum Raum der geschlossenen, formalen Einsformen auf M, und der Quotient modulo quasi-innerer Derivationen ist isomorph zu $H^1_{\mathrm{dR}}(M)[[\nu]]$ ([6, Theorem 4.2]).

Für Fedosov-Sternprodukte werde ich einen besonders einfachen und durchsichtigen Beweis dieses Sachverhalts angeben, welcher wesentlich die Homotopieformel für $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ (2.14) benutzt, und der gleichzeitig auch die technischen Voraussetzungen für die weiteren Untersuchungen bereitstellt. Insbesondere gestattet die hier benutzte Technik, im konkreten Fall eines Fedosov-Sternprodukts alle Derivationen auf einfache Weise explizit anzugeben. Die Darstellung in diesem Abschnitt folgt der gemeinsamen Arbeit [44, Sec. 2], siehe auch [48, Kap.1. §3.5].

Man definiere nun für $h \in \mathcal{W}$ die folgende quasi-innere Derivation

$$\mathrm{D}_h = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(h), \tag{3.1}$$

wobei man annehmen kann, daß $\sigma(h) = 0$ gilt, da das Bild von σ ja stets im Zentrum von $\mathcal{W}\otimes\Lambda$ liegt. Man möchte nun eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Derivation auf $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], *_{\mathrm{F}})$ mittels der Fedosovschen Projektion σ erhalten, indem man $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ abbildet auf $\sigma(\mathrm{D}_h\tau_{\mathrm{F}}(f))$. Dies wird aber im allgemeinen nicht funktionieren, da $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ und D_h nicht immer kommutieren und also D_h eventuell Elemente aus $\ker(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}) \cap \mathcal{W}$ nicht mehr auf Elemente aus $\ker(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}) \cap \mathcal{W}$ abbildet. Aber dann ist die Abbildung auch keine Derivation von $*_{\mathrm{F}}$. Da $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ das faserweise Produkt $\circ_{\mathrm{F}}$ respektiert, schreibt sich die Bedingung, daß $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ und D_h kommutieren als

$$0 = [\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}, \mathrm{D}_h] = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}h).$$

Also muß $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}h$ im Zentrum von $\mathcal{W}\otimes\Lambda$ liegen und somit nach Lemma 2.1 von der Form $1 \otimes A$ sein, wobei A eine formale Einsform, d.h. $A \in \Gamma^\infty(T^*M)[[\nu]]$ ist. Nun ist einerseits $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}h) = \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(1 \otimes A) = 1 \otimes \mathrm{d}A$, andererseits ist $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^2 = 0$, also folgt aus $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}h = 1 \otimes A$ notwendig, daß A geschlossen sein muß. Ist umgekehrt A geschlossen, so ist natürlich $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(1 \otimes A) = 0$. Nun hat aber $1 \otimes A$ positiven antisymmetrischen Grad, also kann man (2.14) anwenden und erhält $1 \otimes A = \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}(1 \otimes A)$. Wählt man also $h := \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}(1 \otimes A)$, so ist $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}h = (1 \otimes A)$ und somit zentral und von der gewünschten Form. Weil $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}$ den symmetrischen Grad um mindestens 1 erhöht, besitzt das so definierte h darüberhinaus keine Anteile vom symmetrischen und antisymmetrischen Grad gleich null, also $\sigma(h) = 0$. Hat man ein solches h, so kann man eine Abbildung $\mathsf{D} : \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]] \to \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ definieren mittels

$$\mathsf{D}f := \sigma(\mathrm{D}_h\tau_{\mathrm{F}}(f)) = \sigma\left(-\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(h)\tau_{\mathrm{F}}(f)\right). \tag{3.2}$$

Da für das gewählte h per Konstruktion $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ und D_h kommutieren, ist dann für jedes $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ auch $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(\mathrm{D}_h\tau_{\mathrm{F}}(f)) = 0$. Nach Satz 2.5 muß dann aber $\mathrm{D}_h\tau_{\mathrm{F}}(f)$ selbst die Fedosov-Taylorreihe $\tau_{\mathrm{F}}(g)$ einer (von A und f abhängigen) formalen Funktion g sein. Dann ist es aber sehr einfach einzusehen, daß D eine Derivation von $*_{\mathrm{F}}$ ist. Denn nach Definition ist $g = \sigma(\mathrm{D}_h\tau_{\mathrm{F}}(f)) = \mathsf{D}f$, also ist $\mathrm{D}_h\tau_{\mathrm{F}}(f) = \tau_{\mathrm{F}}(\mathsf{D}f)$. Daher ist dann $\mathsf{D}(f *_{\mathrm{F}} g) = \sigma(\mathrm{D}_h(\tau_{\mathrm{F}}(f) \circ_{\mathrm{F}} \tau_{\mathrm{F}}(g))) = \sigma((\mathrm{D}_h\tau_{\mathrm{F}}(f)) \circ_{\mathrm{F}} \tau_{\mathrm{F}}(g) + (\tau_{\mathrm{F}}(f)) \circ_{\mathrm{F}} (\mathrm{D}_h\tau_{\mathrm{F}}(g))) = \sigma(\tau_{\mathrm{F}}(\mathsf{D}f) \circ_{\mathrm{F}} \tau_{\mathrm{F}}(g) + \tau_{\mathrm{F}}(f) \circ_{\mathrm{F}} \tau_{\mathrm{F}}(\mathsf{D}g)) = (\mathsf{D}f) *_{\mathrm{F}} g + f *_{\mathrm{F}} (\mathsf{D}g)$ und somit ist D eine Derivation von $*_{\mathrm{F}}$. Darüberhinaus ist D_h per Konstruktion $\mathbb{C}[[\nu]]$–linear, ebenso σ, und auch die Fedosov-Taylorreihe τ_{F} nach Satz 2.5, weshalb auch D eine $\mathbb{C}[[\nu]]$–lineare Derivation ist. Wir können also den folgenden Satz formulieren (vergl. Prop. 1.3.23 [48], und Lemma 2.1 [44]):

Satz 3.1 *Für alle formalen Reihen geschlossener Einsformen $A \in Z^1_{\mathrm{dR}}(M)[[\nu]]$ gibt es genau ein $h_A \in \mathcal{W}$, für welches $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}h_A = 1 \otimes A$ und $\sigma(h_A) = 0$ gilt. Insbesondere ist h_A gegeben als*

$$h_A = \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}(1 \otimes A).$$

Für alle $A \in Z^1_{\mathrm{dR}}(M)[[\nu]]$ ist dann die Abbildung $\mathsf{D}_A : \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]] \to \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$, definiert durch

$$\mathsf{D}_A f := \sigma(\mathrm{D}_{h_A}\tau_{\mathrm{F}}(f)) = \sigma\left(-\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(h_A)\tau_{\mathrm{F}}(f)\right) \quad \forall\, f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]],$$

eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Derivation von $*_{\mathrm{F}}$.

Damit existiert eine Abbildung $Z^1_{\mathrm{dR}}(M)[[\nu]] \to \mathrm{Der}_{\mathbb{C}[[\nu]]}(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], *_{\mathrm{F}})$, welche jeder formalen Reihe geschlossener Einsformen A die $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Derivation D_A von $*_{\mathrm{F}}$ zuordnet.

Beweis: Es ist oben bereits alles bis auf die Eindeutigkeit des Elements h_A bewiesen worden. Es gebe also ein weiteres Element $h'_A \in \mathcal{W}$ mit $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}h'_A = 1 \otimes A$. Dann ist aber $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(h_A - h'_A) = 0$, also muß $h_A - h'_A$ die Fedosov-Taylorreihe irgendeiner formalen Funktion f sein. Da aber $\sigma(\tau_{\mathrm{F}}(f)) = f$ für alle f und andererseits $\sigma(h_A) = 0 = \sigma(h'_A)$, so ist damit klar, daß $0 = \sigma(h_A - h'_A) = \sigma(\tau_{\mathrm{F}}(f)) = f$. Aber dann ist $h_A - h'_A = \tau_{\mathrm{F}}(0) = 0$. ■

Man kann nun zeigen ([48, Satz 1.3.24] bzw. [44, Prop. 2.2]), daß die in Satz 3.1 eingeführte Abbildung $Z^1_{\mathrm{dR}}(M)[[\nu]] \to \mathrm{Der}_{\mathbb{C}[[\nu]]}(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], *_{\mathrm{F}})$ sogar bijektiv ist. Diese Aussage ist eine Anpassung der allgemeinen Aussage [6, Theorem 4.2] an den Fall eines Fedosov-Sternprodukts, in welchem die Derivationen explizit mithilfe von $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}$ (2.17) wie in Satz 3.1 angegeben werden können.

Proposition 3.2 *Mit den Bezeichnungen von Satz 3.1 gilt:*

i.) Die Abbildung $A \mapsto \mathsf{D}_A$ *ist eine Bijektion zwischen dem Raum* $Z^1_{\mathrm{dR}}(M)[[\nu]]$ *der formalen, geschlossenen Einsformen auf* M *und dem Raum* $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}[[\nu]]}(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], *_{\mathrm{F}})$ *der* $\mathbb{C}[[\nu]]$*–linearen Derivationen des Fedosov-Sternprodukts* $*_{\mathrm{F}}$*.*

ii.) Für alle formalen Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ *ist* $\mathsf{D}_{\mathrm{d}f}$ *eine quasi-innere Derivation von* $*_{\mathrm{F}}$*, das heißt* $\mathsf{D}_{\mathrm{d}f} = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{*_{\mathrm{F}}}(f)$*. Die induzierte Abbildung von der ersten de Rham-Kohomologiegruppe auf den Quotientenraum der Derivationen modulo innerer Derivationen (welche wie folgend bezeichnet werden sollen),*

$$
\begin{array}{rcl}
Z^1_{\mathrm{dR}}(M)[[\nu]]/B^1_{\mathrm{dR}}(M)[[\nu]] \cong H^1_{\mathrm{dR}}(M)[[\nu]] & \to & \dfrac{\mathrm{Der}_{\mathbb{C}[[\nu]]}(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], *_{\mathrm{F}})}{\mathrm{Der}^{\mathrm{qi}}_{\mathbb{C}[[\nu]]}(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], *_{\mathrm{F}})} \\
{[A]} & \mapsto & [\mathsf{D}_A]
\end{array}
$$

ist ebenfalls eine Bijektion.

Beweis: Um zu zeigen, daß $A \mapsto \mathsf{D}_A$ injektiv ist, sei $\mathsf{D}_A = \mathsf{D}_{A'}$. Wegen $\mathrm{D}_{h_A}\tau_{\mathrm{F}}(f) = \tau_{\mathrm{F}}(\mathsf{D}_A f)$ und $\mathrm{D}_{h_{A'}}\tau_{\mathrm{F}}(f) = \tau_{\mathrm{F}}(\mathsf{D}_{A'} f)$ gilt dann für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$: $0 = \tau_{\mathrm{F}}(\mathsf{D}_A f) - \tau_{\mathrm{F}}(\mathsf{D}_{A'} f) = \mathrm{D}_{h_A}\tau_{\mathrm{F}}(f) - \mathrm{D}_{h_{A'}}\tau_{\mathrm{F}}(f)$, also $\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(h_A - h_{A'})\tau_{\mathrm{F}}(f) = 0$. Deswegen muß $h_A - h_{A'}$ ein zentrales Element von $\mathcal{W}\otimes\mathsf{\Lambda}$ sein. Nun ist aber $h_A - h_{A'} \in \mathcal{W}$, also muß $h_A - h_{A'} = g_{A,A'} \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ eine formale Funktion sein. Da aber bereits einzeln $\sigma(h_A) = \sigma(h_{A'}) = 0$ gilt, ist daher $g_{A,A'} = 0$. Dann ist aber $h_A = h_{A'}$, also $1 \otimes A = \mathcal{D}h_A = \mathcal{D}h_{A'} = 1 \otimes A'$ und somit ist die Abbildung injektiv.

Um die Surjektivität zu zeigen, wähle man eine beliebige Derivation D und konstruiere per Induktion geschlossene Einsformen A_i mittels derer $\mathsf{D} = \sum_{i=0}^\infty \nu^i \mathsf{D}_{A_i}$ ist. Angenommen solche A_i seien für $0 \le i \le k-1$ gefunden, und die Derivation $\mathsf{D}' = \mathsf{D} - \sum_{i=0}^{k-1} \nu^i \mathsf{D}_{A_i}$ sei damit gegeben als $\mathsf{D}' = \sum_{i=k}^\infty \nu^i \mathsf{D}'_i$. Dann benutze man einen Schritt des allgemeinen Beweises (vergl. [6, Sec. 4]), welcher zeigt, daß D'_k ein symplektisches Vektorfeld X_k ist. Wegen der Cartanformel für die Lieableitung ist also das innere Produkt von X_k mit der symplektischen Form eine geschlossene Einsform, etwa $-i_{X_k}\omega =: A_k$, und daher ist mit Satz 3.1 D_{A_k} eine Derivation. Die Berechnung der expliziten Konstruktion gemäß Satz 3.1 liefert [48, Satz 1.3.24], daß D_{A_k} selbst von der Gestalt $X_k + \mathcal{O}(\nu)$ ist, und daher $\mathsf{D}' - \nu^k \mathsf{D}_{A_k}$ wieder eine Derivation ist, welche erst in der formalen Ordnung $k+1$ beginnt. Damit ist der Induktionsschritt gezeigt, und die Surjektivität ist bewiesen.

Um Punkt *ii.)* zu beweisen, benutze man

$$
\mathsf{D}_{\mathrm{d}f}(g) = \sigma\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(-\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}(1 \otimes \mathrm{d}f))\tau_{\mathrm{F}}(g)\right).
$$

Da aber $\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(f) = 0$ ist, gilt wegen (2.18): $\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(\tau_{\mathrm{F}}(f)) = \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(-\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}(1 \otimes \mathrm{d}f))$, und die obige Gleichung wird zu $\mathsf{D}_{\mathrm{d}f}(g) = \sigma\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(\tau_{\mathrm{F}}(f))\tau_{\mathrm{F}}(g)\right) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{*_{\mathrm{F}}}(f)g$. Damit ist die Aussage bewiesen, denn die induzierte Abbildung hängt nicht von der Wahl eines Repräsentanten ab, da exakte Einsformen auf quasi-innere Derivationen abgebildet werden, und die Eigenschaft, bijektiv zu sein geht dann auch natürlicherweise auf den Quotienten über. ■

Als weiteres Hilfsmittel wird im folgenden häufig eine Formel für die Lieableitung eines Elements von $\mathcal{W}\otimes\Lambda$ bezüglich eines Vektorfelds benötigt, die eine Verallgemeinerung der bekannten Cartanformel auf Formen $\mathcal{L}_X\alpha = \mathrm{d}(i_X(\alpha)) + i_X(\mathrm{d}\alpha)$ darstellt. Diese Formel wurde meines Wissens zuerst in einer unveröffentlichten Arbeit von Bordemann [7, Sec. 4] für Hamiltonsche Vektorfelder bewiesen, in der sogenannte stark–invariante Fedosov-Sternprodukte studiert werden (diese Bezeichnung wird in Abschnitt 3.3 erläutert werden, tatsächlich wird in Satz 3.19 eine notwendige und hinreichende Bedingung für starke Invarianz angegeben, die in dem von Bordemann betrachteten Fall eines Sternprodukts zu $(\nabla, 0, 0)$ immer erfüllt ist). In Lemma 3.1 unserer Arbeit [44] wurde dieses Ergebnis für symplektische (also lokal Hamiltonsche) Vektorfelder benutzt.

Proposition 3.3 ([44, Lemma 3.1]) *Es sei $X \in \Gamma^\infty(TM)$ ein symplektisches Vektorfeld, also $\mathcal{L}_X\omega = 0$, und damit sei zu X eine geschlossene Einsform θ_X gegeben als $\theta_X := i_X\omega$. Ferner bezeichne $D := \mathrm{d}x^i \vee \nabla_{\partial_i}$ die symmetrische kovariante Ableitung auf $\mathcal{W}$. Dann kann die Lieableitung auf Elementen der Fedosov-Algebra $\mathcal{W}\otimes\Lambda$ folgendermaßen geschrieben werden:*

$$\mathcal{L}_X = \mathfrak{D}_{\mathrm{F}} i_a(X) + i_a(X)\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}\left(\theta_X \otimes 1 + \frac{1}{2}D\theta_X \otimes 1 - i_a(X)r\right). \qquad (3.3)$$

Beweis: Ein Beweis für Hamiltonsche Vektorfelder befindet sich in [47, Appx. A]. Ich werde den Beweis nur skizzieren, da er im wesentlichen aus einer konkreten Berechnung der folgenden Identitäten besteht: $(\delta i_a(X) + i_a(X)\delta)T \otimes \alpha = i_s(X)(T \otimes \alpha)$ ([7, Lemma 4.1]), $\frac{1}{\nu}(\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)i_a(X) + i_a(X)\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r))(T\otimes\alpha) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(i_a(X)r)(T\otimes\alpha)$ und $(i_a(X)\nabla + \nabla i_a(X))(T\otimes\alpha) + \mathrm{d}x^i \vee i_s(\nabla_{\partial_i}X)T\otimes\alpha = \mathcal{L}_X(T\otimes\alpha)$ ([7, Lemma 4.3]). Danach berechnet man mittels der konkreten Form von $\circ_{\mathrm{F}}$, daß $-\mathrm{d}x^i \vee i_s(\nabla_{\partial_i}X_f) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(\frac{1}{2}D\mathrm{d}f \otimes 1)$ ist, was zusammengenommen die Aussage für Hamiltonsche X, also $\theta_X = \mathrm{d}f$ ergibt. Nun gibt es aber für symplektische Vektorfelder X auf jedem offenen, zusammenziehbaren Kartenbereich U eine lokal definierte glatte Funktion f, ein Hamiltonsches Vektorfeld X_f (d.h. $\mathrm{d}f =: i_{X_f}\omega$) und lokal gilt $X|_U = X_f$. Also ist die Aussage für symplektische Vektorfelder für alle solchen Kartenbereiche bewiesen, was aber, da die Lieableitung eine lokale Abbildung ist, diese bereits eindeutig festlegt. ■

In den nächsten beiden Abschnitten können jetzt mittels der hier bereitgestellten Mittel die wesentlichen Resultate zur Invarianz von Fedosov-Sternprodukten hergeleitet werden.

3.2 Symplektische Vektorfelder und $*_{\mathrm{F}}$–Derivationen

Mit dem Material der vorangegangenen Abschnitte sind jetzt die technischen Voraussetzungen gegeben, um im Fall der Fedosov-Sternprodukte eine wesentliche Fragestellung dieser Arbeit zu behandeln. Ausgangspunkt der Deformationsquantisierung waren ja die glatten Funktionen auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M,ω), versehen mit der Poissonklammer und einer ausgezeichneten Klasse von Derivationen, eben den symplektischen Vektorfeldern (gelegentlich werde ich ein Vektorfeld X und die zugehörige Derivation mit demselben Symbol bezeichnen, insbesondere für Funktionen mit $\mathcal{L}_X f = X(f)$). Ziel ist es nun, Bedingungen anzugeben, die garantieren, daß ein gegebenes Vektorfeld eine Derivation eines Fedosov-Sternprodukts $*_{\mathrm{F}}(\nabla,\Omega,s)$ ist. Dabei ist es relativ leicht, hinreichende Bedingungen für diese Eigenschaft zu finden, und solche Bedingungen sind auch bekannt. Tatsächlich werden sich diese Bedingungen sogar als notwendig erweisen. Die Menge der symplektischen Vektorfelder $\{X \in \Gamma^\infty(TM) \mid \mathcal{L}_X\omega = 0\}$ soll im folgenden mit dem Symbol $\Gamma^\infty_{\mathrm{symp}}(TM)$ bezeichnet werden.

Das folgende Lemma läßt sich besonders einfach mittels der deformierten Cartanformel beweisen:

Lemma 3.4 ([44, Lemma 3.2]) *Für ein symplektisches Vektorfeld $X \in \Gamma^\infty_{\mathrm{symp}}(TM)$ ist die Lieableitung eine Derivation auf $(\mathcal{W}\otimes\Lambda, \circ_{\mathrm{F}})$. Außerdem gilt*

$$[\mathcal{L}_X, \delta] = 0 = [\mathcal{L}_X, \delta^{-1}].$$

Beweis: Ohne weitere Rechnung folgt die erste Aussage bereits aus der deformierten Cartanformel (3.3), da alle darin vorkommenden Summanden $\circ_{\mathrm{F}}$-Derivationen sind. Die zweite Aussage ist aufgrund der Verträglichkeit der Lieableitung mit der äußeren Ableitung sowie der Verträglichkeit der Lieableitung mit inneren Produkten Ergebnis einer direkten Rechnung, man beachte dabei, daß $\mathcal{L}_X$ die Grade nicht ändert. ■

Man kann nun sehr einfach zeigen, daß, falls X symplektisch ist, $\mathcal{L}_X$ und ∇ kommutieren und $\mathcal{L}_X\Omega = 0 = \mathcal{L}_X s$ gilt, dann auch $\mathcal{L}_X$ und $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ kommutieren und in einem weiteren Schritt zeigt man, daß dann $\mathcal{L}_X$ eine $*_{\mathrm{F}}$-Derivation ist. Um zu zeigen, welche Bedingungen für die Derivationseigenschaft notwendig sind, werden allerdings die zuvor gesammelten Eigenschaften von Derivationen von Fedosov-Sternprodukten benötigt. Die folgende Proposition liefert ein erstes Teilergebnis.

Proposition 3.5 *Es sei $*_{\mathrm{F}}$ das Fedosov-Sternprodukt zu (∇, Ω, s) und X sei ein symplektisches Vektorfeld $X \in \Gamma^\infty_{\mathrm{symp}}(TM)$. Ferner sei wieder wie in Proposition 3.3 $\theta_X = i_X\omega$ und $D = \mathrm{d}x^i \vee \nabla_{\partial_i}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i.) *Es gilt $[\mathcal{L}_X, \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}] = 0$.*

ii.) *$\mathcal{L}_X$ ist eine Derivation von $*_{\mathrm{F}}$.*

iii.) *Es existiert eine formale Reihe geschlossener Einsformen $B_X \in Z^1_{\mathrm{dR}}(M)[[\nu]]$ mit der Eigenschaft*
$$\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(\theta_X \otimes 1 + \frac{1}{2} D\theta_X \otimes 1 - i_a(X)r) = 1 \otimes B_X. \tag{3.4}$$

Beweis: *i.)* $\Rightarrow$ *ii.)* : Sei $[\mathcal{L}_X, \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}] = 0$, und wir wollen zeigen, daß dann $\mathcal{L}_X$ eine $*_{\mathrm{F}}$–Derivation ist. Zunächst gilt für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(f *_{\mathrm{F}} g) &= \mathcal{L}_X(\sigma(\tau_{\mathrm{F}}(f) \circ_{\mathrm{F}} \tau_{\mathrm{F}}(g))) \\ &= \sigma(\mathcal{L}_X(\tau_{\mathrm{F}}(f) \circ_{\mathrm{F}} \tau_{\mathrm{F}}(g))) = \sigma((\mathcal{L}_X\tau_{\mathrm{F}}(f)) \circ_{\mathrm{F}} \tau_{\mathrm{F}}(g) + \tau_{\mathrm{F}}(f) \circ_{\mathrm{F}} (\mathcal{L}_X\tau_{\mathrm{F}}(g))), \end{aligned}$$

da σ und $\mathcal{L}_X$ vertauschen, weil $\mathcal{L}_X$ die Grade nicht verändert. Ist nun $\mathcal{L}_X\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} = \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\mathcal{L}_X$, so gilt für $h \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$: $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\mathcal{L}_X\tau_{\mathrm{F}}(h) = \mathcal{L}_X\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\tau_{\mathrm{F}}(h) = 0$ per Definition von τ_{F}. Das heißt, $\mathcal{L}_X\tau_{\mathrm{F}}(h)$ ist Fedosov-Taylorreihe einer Funktion $k_h \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$. Damit erhält man aber $k_h = \sigma(\tau_{\mathrm{F}}(k_h)) = \sigma(\mathcal{L}_X\tau_{\mathrm{F}}(h)) = \mathcal{L}_X h$, also gilt $\mathcal{L}_X\tau_{\mathrm{F}}(h) = \tau_{\mathrm{F}}(\mathcal{L}_X h)$ für alle $h \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$. Damit ist aber

$$\mathcal{L}_X(f *_{\mathrm{F}} g) = \sigma(\tau_{\mathrm{F}}(\mathcal{L}_X f) \circ_{\mathrm{F}} \tau_{\mathrm{F}}(g) + \tau_{\mathrm{F}}(f) \circ_{\mathrm{F}} \tau_{\mathrm{F}}(\mathcal{L}_X g)) = (\mathcal{L}_X f) *_{\mathrm{F}} g + f *_{\mathrm{F}} (\mathcal{L}_X g),$$

also $\mathcal{L}_X$ eine $*_{\mathrm{F}}$–Derivation.

ii.) $\Rightarrow$ *iii.)* : Sei andererseits $\mathcal{L}_X$ eine Derivation, dann existiert nach Proposition 3.2 mit den dort benutzten Bezeichnungen eine eindeutig bestimmte formale Reihe von Einsformen A_X so daß für alle f gilt

$$\mathcal{L}_X f = \mathsf{D}_{A_X} f = \sigma\left(-\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}(1 \otimes A_X))\tau_{\mathrm{F}}(f)\right).$$

Nun ist aber andererseits $\mathcal{L}_X f = \mathcal{L}_X(\sigma(\tau_{\mathrm{F}}(f))) = \sigma(\mathcal{L}_X\tau_{\mathrm{F}}(f))$. Benutzt man dabei für die Lieableitung die deformierte Cartanformel (3.3), so erhält man wegen $i_a(X)\tau_{\mathrm{F}}(f) = 0 = \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\tau_{\mathrm{F}}(f)$:

$$\mathcal{L}_X f = \sigma\left(-\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(\theta_X \otimes 1 + \frac{1}{2}D\theta_X \otimes 1 - i_a(X)r)\tau_{\mathrm{F}}(f)\right) \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]].$$

Da beide Ausdrücke gleich sein müssen folgt für alle f:

$$0 = \sigma\left(\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}\left(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}(1\otimes A_X) - (\theta_X\otimes 1 + \frac{1}{2}D\theta_X\otimes 1 - i_a(X)r)\right)\tau_{\mathrm{F}}(f)\right),$$

das heißt, $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}(1\otimes A_X) - \theta_X\otimes 1 + \frac{1}{2}D\theta_X\otimes 1 - i_a(X)r$ muß im Zentrum von $(\mathcal{W}\otimes\Lambda, \circ_{\mathrm{F}})$ liegen, darf also nach Lemma 2.1 keinen Anteil vom symmetrischen Grad ungleich null besitzen. Daraus folgt, daß $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}(1\otimes A_X) - \theta_X\otimes 1 + \frac{1}{2}D\theta_X\otimes 1 - i_a(X)r = g_X$ mit einer formalen Funktion $g_X\in\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ ist. Wendet man nun auf diese letzte Gleichung $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ an und benutzt die Homotopieformel (2.14) und die Tatsache, daß A_X geschlossen ist, so erhält man:

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}g_X = 1\otimes \mathrm{d}g_X = 1\otimes A_X - \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(\theta_X\otimes 1 + \frac{1}{2}D\theta_X\otimes 1 - i_a(X)r).$$

Man definiere nun die geschlossene formale Einsform $B_X := A_X - \mathrm{d}g_X$ und schreibe damit $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(\theta_X\otimes 1 + \frac{1}{2}D\theta_X\otimes 1 - i_a(X)r) = 1\otimes B_X$, also folgt *iii.)* aus *ii.)*.

iii.) $\Rightarrow$ *i.)* : Wendet man nun zuletzt die deformierte Cartanformel (3.3) auf diese letzte Gleichung an, wobei man beachte, daß $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^2 = 0$ und daß, da $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ eine $\circ_{\mathrm{F}}$–Derivation ist, $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(a) - \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(a)\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} = \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}a)$ gilt, so erhält man nach Lemma 2.1:

$$[\mathcal{L}_X, \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}] = +\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(\theta_X\otimes 1 + \frac{1}{2}D\theta_X\otimes 1 - i_a(X)r)) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(1\otimes B_X) = 0,$$

also ist die Proposition bewiesen. ■

Um die Aussage von Proposition 3.5 genauer zu analysieren und herauszufinden, welche Bedingungen damit an die betrachteten Vektorfelder bezüglich der Eingangsdaten der Fedosov-Konstruktion zu stellen sind, wird im folgenden die Bedingung (3.4) untersucht. Die folgenden drei Lemmas sind eher technisch, sie ermöglichen es aber, notwendige Bedingungen für die $*_{\mathrm{F}}$-Derivationseigenschaft von $\mathcal{L}_X$ detaillierter zu erfassen. Es seien dazu (∇, Ω, s) gemäß Korollar 2.9 so gewählt, daß $s\in\mathcal{W}_4$ keinen Anteil vom symmetrischen Grad eins enthält. Man berechnet dann

Lemma 3.6 *Es seien (∇,Ω,s) die Eingangsdaten für $*_{\mathrm{F}}$, mit $r=\delta^{-1}s, s\in\mathcal{W}_4$ wobei s keinen Anteil vom symmetrischen Grad eins besitze. Es sei wie in Lemma 2.3 $R = \frac{1}{4}\omega_{rs}R^s_{tuv}dx^r\vee dx^t\otimes dx^u\wedge dx^v$, und es sei wieder $D := \mathrm{d}x^i\vee\nabla_{\partial_i}$. Dann gilt für alle symplektischen Vektorfelder $X\in\Gamma^\infty_{\mathrm{symp}}(TM)$:*

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\left(\theta_X\otimes 1 + \frac{1}{2}D\theta_X\otimes 1 - i_a(X)r\right) &= -1\otimes\theta_x + \nabla(\frac{1}{2}D\theta_x\otimes 1) - \mathcal{L}_X r \\ &\quad -i_a(X)R - 1\otimes i_X\Omega. \qquad (3.5)\end{aligned}$$

Beweis: Der Beweis ist eine offenkundige Rechnung unter Benutzung der definierenden Gleichungen von ∇ (2.7, p. 22), $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ (2.8, p. 25) und r (2.9, p. 26): zuerst berechnet man

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(\theta_X \otimes 1) = \left(-\delta + \nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)\right)(\theta_X \otimes 1) = -1 \otimes \theta_X + \nabla_{\partial_i}\theta_X \otimes \mathrm{d}x^i + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(\theta_X \otimes 1)r.$$

Weiter ist mit $\delta(D(\theta_X \otimes 1)) = i_s(\partial_i)(\mathrm{d}x^i \vee \nabla_{\partial_i}\theta_X) \otimes \mathrm{d}x^i = 2\nabla_{\partial_i}\theta_X \otimes \mathrm{d}x^i$:

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\left(\frac{1}{2}D\theta_X \otimes 1\right) = -\nabla_{\partial_i}\theta_X \otimes \mathrm{d}x^i + \nabla\left(\frac{1}{2}D\theta_X \otimes 1\right) + \frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{2}D\theta_X \otimes 1\right)r,$$

und schließlich ist mittels der deformierten Cartanformel (3.3):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(-i_a(X)r) &= -\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} i_a(X)r - i_a(X)\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} r + i_a(X)\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} r \\
&= -\mathcal{L}_X r - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}\left(\theta_X \otimes 1 + \frac{1}{2}D\theta_X \otimes 1 - i_a(X)r\right)r + i_a(X)\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} r.
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich damit und mit der definierenden Gleichung von r (2.9, p. 26) die zu beweisende Aussage:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\left(\theta_X \otimes 1 + \frac{1}{2}D\theta_X \otimes 1 - i_a(X)r\right) \\
&= -1 \otimes \theta_X + \nabla\left(\frac{1}{2}D\theta_X \otimes 1\right) - \mathcal{L}_X r + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(i_a(X)r)r + i_a(X)\left(-\delta r + \nabla r - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)r\right) \\
&= -1 \otimes \theta_X + \nabla\left(\frac{1}{2}D\theta_X \otimes 1\right) - \mathcal{L}_X r + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(i_a(X)r)r + i_a(X)\left(\frac{1}{\nu}r \circ_{\mathrm{F}} r - R - 1 \otimes \Omega\right) \\
&\quad -\frac{1}{\nu}i_a(X)\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)r \\
&= -1 \otimes \theta_X + \nabla\left(\frac{1}{2}D\theta_X \otimes 1\right) - \mathcal{L}_X r - i_a(X)R - 1 \otimes i_X\Omega.
\end{aligned}$$

■

Zur weiteren Analyse der Bedingung (3.4 bzw. 3.5) werden nun noch einige recht technische Details benötigt. Die folgenden zwei Feststellungen sind direkte Übertragungen von Aussagen aus [47]; die Beweise dazu bestehen aus direkten, aber längeren Rechnungen in Koordinaten, für die ich im wesentlichen auf die Originalarbeit verweise.

Lemma 3.7 ([47, Lemma 3]) *Für alle $X \in \Gamma^\infty_{\mathrm{symp}}(TM)$ besitzt $[\nabla, \mathcal{L}_X]$ die Eigenschaften:*

i.) Definiert man in lokalen Koordinaten das Tensorfeld $S_X \in \Gamma^\infty(T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$ durch

$$\begin{aligned}
S_X(\partial_i, \partial_j) &= (\mathcal{L}_X\nabla)_{\partial_i}\partial_j := \mathcal{L}_X\nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_i}\mathcal{L}_X\partial_j - \nabla_{\mathcal{L}_X\partial_i}\partial_j \\
&= R(X, \partial_i)\partial_j + \nabla^{(2)}_{(\partial_i,\partial_j)}X,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

dann gilt mit diesen Bezeichnungen in lokalen Koordinaten:

$$[\nabla, \mathcal{L}_X] = (\mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^i) i_s((\mathcal{L}_X \nabla)_{\partial_i} \partial_j) = (\mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^i) i_s(S_X(\partial_i, \partial_j)). \tag{3.7}$$

ii.) Das Tensorfeld S_X ist symmetrisch, das heißt, $S_X \in \Gamma^\infty(\bigvee^2 T^*M \otimes TM)$.

iii.) Für alle glatten Vektorfelder $U, V, W \in \Gamma^\infty(TM)$ gilt

$$\omega(W, S_X(U,V)) = -\omega(S_X(U,W), V).$$

Beweis: Die Aussagen zeigt man wie in [47, Lemma 3]. Man berechnet die erste Aussage auf einem faktorisierten Schnitt, die Eigenschaften des Tensorfelds S ergeben sich mit den Eigenschaften der Lieableitung und der zweiten kovarianten Ableitung. Für die zweite Aussage benutzt man die erste Bianchi-Identität des Riemann-Tensors: $S(U,V) - S(V,U) = R(X,U)V - \nabla^{(2)}_{U,V} X - R(X,V)U - \nabla^{(2)}_{(V,U)} X = R(X,U)V - R(X,V)U + R(U,V)X = 0$. Während die ersten beiden Aussagen für beliebige glatte Vektorfelder gelten, ist die dritte nur für symplektische richtig. Zum Beweis benutzt man etwa die Formel für die Lieableitung einer Differentialform (vergl. [1, Prop. 2.4.15]) und erhält wegen $\mathcal{L}_X\omega = 0$ die Aussage: $\omega(W, S_X(U,V)) = \omega(W, \mathcal{L}_X \nabla_U V - \nabla_U \mathcal{L}_X V - \nabla_{\mathcal{L}_X U} V) = -(\mathcal{L}_X\omega)(W, \nabla_U V) + \mathcal{L}_X \omega(W, \nabla_U V) - \omega(\mathcal{L}_X W, \nabla_U V) = \ldots = -\omega(S_X(U,W), V)$. ■

Zu dem Tensorfeld S_X gehört nun natürlicherweise mittels des vorangehenden Lemmas ein Tensorfeld $T_X \in \Gamma^\infty(\bigvee^2 T^*M \otimes T^*M)$, welches sich auffassen läßt als Element der Fedosov-Algebra vom symmetrischen Grad 2 und antisymmetrischen Grad 1:

$$T_X(W, U; V) := \omega(W, S_X(V, U)). \tag{3.8}$$

Daß T_X vom symmetrischen Grad zwei ist, sieht man mit Lemma 3.7, *iii.)*:

$$\begin{aligned} T_X(W,U;V) &= \omega(W, S_X(U,V)) = \omega(V, S_X(U,W)) \\ &= \omega(V, S_X(W,U)) = \omega(U, S_X(W,V)) = T_X(U,W;V). \end{aligned}$$

Weiter gilt das folgende Lemma:

Lemma 3.8 ([47, Lemma 4]) *Für das in Gleichung (3.8) definierte Tensorfeld T_X gilt:*

i.) $\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(T_X) = [\nabla, \mathcal{L}_X]$,

ii.) $T_X = i_a(X)R - \nabla\left(\frac{1}{2}D\theta_X \otimes 1\right)$,

iii.) $\delta T_X = 0$ *und* $\nabla T_X = \mathcal{L}_X R$.

Beweis: Diese Aussagen werden wieder analog zum Beweis in [47, Lemma 4] gezeigt. Die ersten beiden Aussagen beweist man mittels direkter Rechnung. Für die dritte Aussage benutzt man *i.)* sowie $[\delta, \nabla] = [\delta, \mathcal{L}_X] = 0$ und die (Super–)Jacobi–Identität: $0 = [[\delta, \nabla], \mathcal{L}_X] = -[\mathcal{L}_X, [\delta, \nabla]] = -([[\mathcal{L}_X, \delta], \nabla] + [\delta, [\mathcal{L}_X, \nabla]]) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(\delta T_X)$, also ist δT_X zentral, aber weil $|\delta T_X|_s = 1$ muß nach Lemma 2.1 $\delta T_X = 0$ gelten. Für die letzte Aussage benutzt man gemäß Lemma 2.3 die Identität $\frac{1}{2}[\nabla, \nabla] = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(R)$ und nochmals die Jacobi–Identität und erhält zunächst wieder, daß $\nabla T_X - \mathcal{L}_X R$ zentral ist, aber nach Lemma 2.1 gleich null sein muß, da der Ausdruck den symmetrischen Grad zwei hat. ■

Mittels Lemma 3.8 läßt sich nun die Bedingung (3.5, p.42) aus Lemma 3.6 schreiben als

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\left(\theta_X \otimes 1 + \frac{1}{2}D\theta_X \otimes 1 - i_a(X)r\right) = -1 \otimes \theta_X - T_X - \mathcal{L}_X r - 1 \otimes i_X\Omega. \tag{3.9}$$

Zur weiteren Untersuchung der Bedingung (3.4) werden noch Gleichungen zur Bestimmung von $\mathcal{L}_X r$ benötigt. Diese werden mit derselben Methode gewonnen wie die ursprünglichen Fedosovschen Rekursionsgleichungen für r, allerdings mit dem Unterschied, daß hier immer mit dem Banachschen Fixpunktsatz (Lemma 2.4) für die Fedosov-Algebra argumentiert wird.

Satz 3.9 *Für ein symplektisches Vektorfeld $X \in \Gamma^\infty_{\mathrm{symp}}(TM)$ und r wie in (2.9) mit $\delta^{-1}r = s$ gelten für $\mathcal{L}_X r$ die Gleichungen*

$$\delta\mathcal{L}_X r = \nabla\mathcal{L}_X r - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}(r)\mathcal{L}_X r - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}(T_X)r + \mathcal{L}_X R + 1 \otimes \mathrm{d}i_X\Omega \quad \textit{und} \quad \delta^{-1}\mathcal{L}_X r = \mathcal{L}_X s. \tag{3.10}$$

Diese Gleichungen legen $\mathcal{L}_X r$ eindeutig fest. Weiter ist $\mathcal{L}_X r$ durch die folgende Gleichung rekursiv bestimmbar:

$$\mathcal{L}_X r = \delta\mathcal{L}_X s + \delta^{-1}\left(\nabla\mathcal{L}_X r - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}(r)\mathcal{L}_X r - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}(T_X)r + \mathcal{L}_X R + 1 \otimes \mathrm{d}i_X\Omega\right). \tag{3.11}$$

Beweis: Dieser Satz ließe sich mit den zuvor erhaltenen Teilergebnissen im Prinzip genauso beweisen wie der Satz von Fedosov zur Bestimmung von r. Ich werde hier aber einen anderen Beweis mittels eines Fixpunktarguments angeben: man zeigt zuerst, daß (3.10) gilt, dann, daß (3.10) $\Rightarrow$ (3.11), dann, daß (3.11) eine eindeutige Lösung besitzt, welche umgekehrt (3.10) erfüllt. Nach Lemma 3.4 ist $[\mathcal{L}_X, \delta^{-1}] = 0$, also folgt aus $\delta^{-1}r = s$ gemäß (2.10)

$$\mathcal{L}_X s = \mathcal{L}_X \delta^{-1} r = \delta^{-1}(\mathcal{L}_X r).$$

Weiter erfüllt r die Gleichung (2.9): $\delta r = \nabla r - \frac{1}{\nu} r \circ_{\mathrm{F}} r + R + 1 \otimes \Omega$. Wendet man auf diese Gleichung die $\circ_{\mathrm{F}}$-Derivation $\mathcal{L}_X$ an, so ergibt sich mit $\mathcal{L}_X 1 \otimes \Omega = 1 \otimes (\mathrm{d} i_X \Omega + i_X \mathrm{d}\Omega) = 1 \otimes \mathrm{d} i_X \Omega$:

$$\mathcal{L}_X \delta r = \delta \mathcal{L}_X r = [\mathcal{L}_X, \nabla] r + \nabla(\mathcal{L}_X r) - \frac{1}{\nu} \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(\mathcal{L}_X r) r + \mathcal{L}_X R + 1 \otimes \mathrm{d}(i_X \Omega).$$

Wegen Lemma 3.8 und weil $\mathcal{L}_X$ die Grade nicht ändert wird dieser Ausdruck zu

$$\delta \mathcal{L}_X r = -\frac{1}{\nu} \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(T_X) r + \nabla(\mathcal{L}_X r) - \frac{1}{\nu} \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r) \mathcal{L}_X r + \mathcal{L}_X R + 1 \otimes \mathrm{d}(i_X \Omega).$$

Ebenfalls, weil die Lieableitung die Grade nicht ändert, kann man auf diesen Ausdruck die Homotopieformel (2.6) anwenden und erhält damit den gesuchten Ausdruck (3.11):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X r &= (\delta \delta^{-1} + \delta^{-1} \delta) \mathcal{L}_X r \\ &= \delta \mathcal{L}_X s + \delta^{-1} \left(\nabla(\mathcal{L}_X r) - \frac{1}{\nu} \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r) \mathcal{L}_X r - \frac{1}{\nu} \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(T_X) r + \mathcal{L}_X R + 1 \otimes \mathrm{d}(i_X \Omega) \right). \end{aligned}$$

Nun ist zu zeigen, daß $\mathcal{L}_X r$ durch den gewonnenen Ausdruck (3.11) eindeutig bestimmt ist. Dies folgt mit dem Fixpunktlemma 2.4, da δ^{-1} den symmetrischen Grad um eins erhöht und für alle $a \in \mathcal{W}_2 \otimes \Lambda^1$ die Abbildung

$$\mathsf{L} : a \mapsto \delta \mathcal{L}_X s + \delta^{-1} \left(\nabla a - \frac{1}{\nu} \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r) a - \frac{1}{\nu} \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(T_X) r + \mathcal{L}_X R + 1 \otimes \mathrm{d}(i_X \Omega) \right) \in \mathcal{W}_2 \otimes \Lambda^1 \tag{3.12}$$

daher kontrahierend ist. Die Abbildung L hat daher zunächst einen eindeutigen Fixpunkt $\mathsf{L}(b) = b$.

Weiter hat man jetzt also zu zeigen, daß der Fixpunkt b den Gleichungen (3.10) genügt. Die zweite dieser Gleichungen ist klarerweise erfüllt, da aus $b = \mathsf{L}(b)$ durch Anwenden von δ^{-1} wegen $(\delta^{-1})^2 = 0$ folgt

$$\delta^{-1} b = \delta^{-1} \delta \mathcal{L}_X s = \mathcal{L}_X s - \delta \delta^{-1} \mathcal{L}_X s = \mathcal{L}_X s - \delta (\delta^{-1})^2 \mathcal{L}_X r = \mathcal{L}_X s.$$

Um zu zeigen, daß der Fixpunkt b auch die erste Gleichung aus (3.10) erfüllt, definiere man

$$B := -\delta b - \frac{1}{\nu} \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(T_X) r + \nabla b - \frac{1}{\nu} \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r) b + \mathcal{L}_X R + 1 \otimes \mathrm{d}(i_X \Omega),$$

und man muß noch zeigen, daß dann $B = 0$ ist. Auch das funktioniert wieder mit einem Fixpunktargument. Dazu nutzt man die Identitäten $0 = \delta^2 = [\mathcal{L}_X, \delta] = \delta R = [\nabla, \delta] = \delta T_X$ sowie $\nabla^2 = -\frac{1}{\nu} \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(R)$ aus und berechnet:

$$\delta B = -\nabla(\delta b) - \frac{1}{\nu} \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(\delta r) b + \frac{1}{\nu} \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)(\delta b) + \frac{1}{\nu} \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(T_X) \delta r$$

$$
\begin{aligned}
&= \nabla\left(B - \nabla b + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)b + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(T_X)r - \mathcal{L}_X R - 1\otimes \mathrm{d}(i_X\Omega)\right) - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(\delta r)b \\
&\quad + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)(\delta b) + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(T_X)\delta r \\
&= \nabla B + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(R)b + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(\nabla r)b + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(\nabla T_X)r - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)(\nabla b) \\
&\quad - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(T_X)(\nabla r) - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(T_X)R - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(\delta r)b + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(T_X)\delta r \\
&\quad + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)\left(\nabla b - B - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)b - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(T_X)r + \mathcal{L}_X R - \underbrace{1\otimes \mathrm{d}(i_X\Omega)}_{\text{zentral!}}\right) \\
&= \nabla B - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}\left(\delta r - \nabla r + \frac{1}{\nu} r \circ_{\mathrm{F}} r - R\right) b + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(T_X)\left(\delta r - \nabla r - R\right) + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(\nabla T_X)r \\
&\quad - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)B + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(T_X)\left(\frac{1}{\nu} r \circ_{\mathrm{F}} r\right) + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)(\mathcal{L}_X R) \\
&= \nabla B - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)B + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)\underbrace{(\mathcal{L}_X R - \nabla T_X)}_{=0} = \nabla B - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)B.
\end{aligned}
$$

Nun benutze man nochmals die δ-Homotopieformel (2.6) und beachte dabei $\sigma(b) = 0 = \sigma(B)$, dann ist wegen der Definition von L in (3.12) $\delta^{-1}B = -\delta^{-1}\delta b + \mathsf{L}(b) - \delta\mathcal{L}_X s = -b + \delta\mathcal{L}_X s + \mathsf{L}(b) - \delta\mathcal{L}_X s = 0$. Damit ergibt aber eine weitere Anwendung von (2.6):

$$
B = \delta\delta^{-1}B + \delta^{-1}\delta B = \delta^{-1}\left(\nabla B - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)B\right).
$$

Da der Homotopieoperator δ^{-1} den Totalgrad erhöht, ist aber B damit wieder eindeutiger Fixpunkt einer kontrahierenden Abbildung $\mathsf{K} : \mathcal{W}_2\otimes\Lambda^1 \ni q \mapsto \delta^{-1}(\nabla q - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)q) \in \mathcal{W}_2\otimes\Lambda^1$. Allerdings hat die Gleichung $q = \mathsf{K}(q)$ bereits die triviale Lösung $q = 0$, also folgt aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung $B = 0$. Damit ist dann schließlich gezeigt, daß $\mathsf{L}(b) = b$ die Gleichung (3.10) erfüllt, also gilt $b = \mathcal{L}_X r$ und $\mathcal{L}_X r$ ist durch Gleichung (3.11) eindeutig bestimmt. ■

In Proposition 3.5 wurde ja gezeigt, daß $\mathcal{L}_X$ genau dann eine $*_{\mathrm{F}}$–Derivation ist, wenn $\mathcal{L}_X$ und $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ superkommutieren, und daß dies äquivalent zu Bedingung (3.4) ist. Eine Seite von Gleichung (3.4) wurde dann in Lemma 3.6 vereinfacht als (3.5) und wurde letztendlich zu Gleichung (3.9). Mit diesen Ergebnissen und mit den Aussagen von Satz 3.9 kann jetzt das Hauptergebnis dieses Abschnitts formuliert werden. Zuvor möchte ich nochmals betonen, daß die technischen Vorbereitungen dieses Abschnitts, wie man im Beweis von Proposition 3.10 sehen wird, wesentlich für den Beweis sind, daß die dort angegebenen Bedingungen notwendig sind. Daß diese Bedingungen hinreichende sind ist hier, wie auch später im Fall der Sternprodukte vom Wick-Typ, eine eher einfach zu beweisende Aussage. Für Sternprodukte vom Wick-Typ werde ich einen solchen direkten und einfachen Beweis (vergl. Lemma 5.2) dafür angeben, daß die analogen Bedingungen hinreichende sind.

Proposition 3.10 *Es sei $*_{\mathrm{F}}$ das Fedosov-Sternprodukt zu den gemäß Korollar 2.9 gewählten Daten (∇, Ω, s), bei denen s in $\mathcal{W}_4$ liegt und keinen Anteil vom symmetrischen Grad eins hat. Für ein symplektisches Vektorfeld $X \in \Gamma^\infty_{\mathrm{symp}}(TM)$ ist $\mathcal{L}_X$ eine Derivation von $*_{\mathrm{F}}$ genau dann, wenn gilt $T_X = 0$, $\mathcal{L}_X\Omega = 0$ und $\mathcal{L}_X s = 0$. Dabei ist $T_X = 0$ genau dann, wenn $[\mathcal{L}_X, \nabla] = 0$.*

Beweis: Ich beweise zuerst die einfachere Aussage Es sei also $T_X = 0$, $\mathcal{L}_X\Omega = 0$ und $\mathcal{L}_X s = 0$. Dann ist $\mathcal{L}_X\Omega = \mathrm{d}(i_X\Omega) = 0$, und mit Lemma 3.8,*iii.)* ist $\nabla T_X = \mathcal{L}_X R = 0$. Damit vereinfacht sich Gleichung (3.11) zu

$$\mathcal{L}_X r = \delta^{-1}(\nabla\mathcal{L}_X r - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)\mathcal{L}_X r).$$

Daraus folgt aber schon $\mathcal{L}_X r = 0$, denn die so vereinfachte Gleichung besitzt 0 als triviale Lösung, welche aber zugleich eindeutiger Fixpunkt der Abbildung

$$\mathsf{J} : \mathcal{W}_2 \otimes \Lambda^1 \ni a \mapsto \delta^{-1}(\nabla a - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(r)a) \in \mathcal{W}_2 \otimes \Lambda^1$$

ist. Wegen $[\nabla, \mathcal{L}_X] = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(T_X)$ und weil $\mathcal{L}_X$ eine $\circ_{\mathrm{F}}$-Derivation ist, gilt dann:

$$[\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}, \mathcal{L}_X] = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(-\mathcal{L}_X r + T_X).$$

Damit ist wegen $T_X = 0 = \mathcal{L}_X r$ die erste Bedingung aus Proposition 3.5 erfüllt und also $\mathcal{L}_X$ eine $*_{\mathrm{F}}$–Derivation.

(Alternativ kann man auch ausrechnen, daß Bedingung (3.4) erfüllt ist: mit der in (3.9) erhaltenen Form von (3.5) aus Lemma 3.6 ist

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\left(\theta_X \otimes 1 + \frac{1}{2}D\theta_X \otimes 1 - i_a(X)r\right) = -1 \otimes i_X(\omega + \Omega) = 1 \otimes B_X,$$

und nach Voraussetzung ist B_X eine formale geschlossene Einsform. Also ist Bedingung (3.4) aus Proposition 3.5 erfüllt und $\mathcal{L}_X$ ist eine $*_{\mathrm{F}}$–Derivation.)

Sei umgekehrt $\mathcal{L}_X$ eine Derivation von $*_{\mathrm{F}}$. Dann gibt es nach Proposition 3.5 eine formale geschlossene Einsform B_X, so daß gilt

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\left(\theta_X \otimes 1 + \frac{1}{2}D\theta_X \otimes 1 - i_a(X)r\right) = 1 \otimes B_X.$$

Andererseits ist laut Gleichung (3.9)

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\left(\theta_X \otimes 1 + \frac{1}{2}D\theta_X \otimes 1 - i_a(X)r\right) = -1 \otimes \theta_X - T_X - \mathcal{L}_X r - 1 \otimes i_X\Omega.$$

Also folgt $\mathcal{L}_X r = T_X - 1 \otimes (\theta_X + B_X + 1 \otimes i_X\Omega)$. Durch Anwenden von δ^{-1} ergibt sich daraus

$$\mathcal{L}_X s = -(\theta_X + B_X + i_X\Omega) \otimes 1 - \delta^{-1}T_X.$$

Im nächsten Schritt geht die Wahl von s entscheidend vereinfachend ein: da s und damit $\mathcal{L}_X s$ keinen Anteil vom symmetrischen Grad eins und zudem minimalen Totalgrad vier hat, während $\delta^{-1}T_X$ den Totalgrad drei hat, folgt also, daß $\mathcal{L}_X s = 0$, wobei rechts beide Terme einzeln verschwinden: $\delta^{-1}T_X = 0$ und $\theta_X + B_X + i_X\Omega = 0$. Da sowohl θ_X als auch B_X als geschlossen vorausgesetzt sind, folgt damit $\mathcal{L}_X\Omega = \mathrm{d}i_X\Omega = 0$. Mit der Homotopieformel (2.6) $T_X = \delta\delta^{-1}T_X + \delta^{-1}\delta T_X$ folgt dann aber auch $T_X = 0$, da nach Lemma 3.8 auch $\delta T_X = 0$ gilt. Schließlich impliziert $T_X = 0$ mit Lemma 3.8 $[\nabla, \mathcal{L}_X] = 0$ und umgekehrt folgt nach Lemma 3.7 aus $[\nabla, \mathcal{L}_X] = 0$ zunächst $S_X = 0$ und damit $T_X = 0$. Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß $[\nabla, \mathcal{L}_X] = 0$ genau dann gilt, wenn die Lieableitung und der ebenfalls mit ∇ bezeichnete symplektische Zusammenhang auf TM kommutieren, also ∇ invariant ist. ■

Zum Schluß dieses Abschnittes kann nun noch die Frage beantwortet werden, unter welchen Umständen die Lieableitung sogar eine quasi-innere Derivation ist, das heißt, wann gilt $\mathcal{L}_X = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{*_{\mathrm{F}}}(f)$ mit einer formalen Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$. Zunächst beachte man, daß $\mathcal{L}_X(u *_{\mathrm{F}} v) = \sigma(\mathcal{L}_X(\tau_{\mathrm{F}}(u) \circ_{\mathrm{F}} \tau_{\mathrm{F}}(v)))$ und daß $\mathrm{ad}_{*_{\mathrm{F}}}(u)v = \sigma(\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(\tau_{\mathrm{F}}(u))\tau_{\mathrm{F}}(v))$. Weiter beachte man, daß $\tau_{\mathrm{F}} : \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]] \to \ker(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}) \cap \mathcal{W}$ formale Funktionen auf flache Schnitte ohne antisymmetrischen Anteil abbildet. Aufgrund der deformierten Cartanformel (3.3) ist daher

$$\mathcal{L}_X(\tau_{\mathrm{F}}(u)) = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(\theta_X \otimes 1 + \frac{1}{2}D\theta_X \otimes 1 - i_a(X)r)\tau_{\mathrm{F}}(u).$$

Also ist $\mathcal{L}_X$ genau dann quasi-innere Derivation, wenn es eine formale Funktion f_X gibt, so daß $\mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(\tau_{\mathrm{F}}(f_X)) = \mathrm{ad}_{\mathrm{F}}(\theta_X \otimes 1 + \frac{1}{2}D\theta_X \otimes 1 - i_a(X)r)$. Nun enthält der Ausdruck $\theta_X \otimes 1 + \frac{1}{2}D\theta_X \otimes 1 - i_a(X)r$ aufgrund der Form von s und damit r selbst keinen Funktionenanteil, (d.h. $\left|(\theta_X \otimes 1 + \frac{1}{2}D\theta_X \otimes 1 - i_a(X)r)\right|_s > 0$). Also gibt es eine solche formale Funktion f_X genau dann, wenn gilt:

$$\tau_{\mathrm{F}}(f_X) = f_X + \theta_X \otimes 1 + \frac{1}{2}D\theta_X \otimes 1 - i_a(X)r, \tag{3.13}$$

weil ja f_X selbst zentral ist und im Argument von ad_{F} weggelassen werden kann. Auf diese letzte Gleichung wendet man nun $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ an und erhält mit Gleichung (3.9) und wegen

$T_X = \mathcal{L}_X r = 0$:

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(\tau_{\mathrm{F}}(f_X)) = 0 = 1 \otimes \mathrm{d}f_X - 1 \otimes \theta_X - 1 \otimes i_X \Omega. \tag{3.14}$$

Damit kann aber bereits formuliert werden:

Satz 3.11 *Es sei wie in Proposition 3.10 $X \in \Gamma^\infty_{\mathrm{symp}}(TM)$ und $\mathcal{L}_X$ sei eine Derivation von $*_{\mathrm{F}}$. Dann ist $\mathcal{L}_X$ sogar quasi-innere Derivation – das heißt es gibt eine formale Funktion $f_X \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ mit $\mathcal{L}_X = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{*_{\mathrm{F}}}(f_X)$ – genau dann, wenn gilt:*

$$\mathrm{d}f_X = i_X(\omega + \Omega). \tag{3.15}$$

Weiter ist dann X Hamiltonsch, $X = X_{f_0}$, wobei $f_X = f_0 + f_+$ mit $f_0 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und $f_+ \in \nu\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$.

Beweis: Gleichung (3.13) gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß $\mathcal{L}_X$ quasi-innere Derivation ist. Aus (3.13) folgte Gleichung (3.14), welche gerade besagt, daß es eine formale Funktion f_X gibt, welche $\mathrm{d}f_X = i_X(\omega+\Omega)$ erfüllt. Gilt umgekehrt diese Gleichung, so ist wieder $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(f_X+\theta_X\otimes 1+\frac{1}{2}D\theta_X\otimes 1-i_a(X)r) = 1\otimes \mathrm{d}f_X - 1\otimes\theta_X - 1\otimes i_X\Omega = 0$, also muß $f_X+\theta_X\otimes 1+\frac{1}{2}D\theta_X\otimes 1-i_a(X)r = \tau_{\mathrm{F}}(g)$ eine Fedosov-Taylorreihe einer formalen Funktion g sein, aber durch Anwenden von σ auf diese Gleichung folgt dann $f_X = g$. Also ist Bedingung 3.15 notwendig und hinreichend dafür daß $\mathcal{L}_X$ quasi–innere Derivation ist. Die Tatsache, daß X Hamiltonsch ist mit $X = X_{f_0}$ folgt einfach aus der nullten Ordung in ν von Gleichung 3.15. ∎

Im nächsten Abschnitt können nun die hier gewonnenen Ergebnisse auf den aus der Physik (vergl. etwa [1, Chap. 4]) gegebenen Fall der Wirkung einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ mittels Lieableitung bezüglich symplektischer Vektorfelder auf der symplektischen Mannigfaltigkeit M angewandt werden.

N.B.: Daß die Vektorfelder, welche als Derivationen auf $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], *_{\mathrm{F}})$ operieren, tatsächlich eine endlichdimensionale Liealgebra bilden, folgt mit [36, Bd. I, Note 9., S. 307] aus der Tatsache, daß $\mathcal{L}_X\omega = 0 = [\mathcal{L}_X, \nabla]$ notwendig gelten muß, damit X eine $*_{\mathrm{F}}$-Derivation ist.

3.3 Invariante Fedosov-Sternprodukte und Quantenimpulsabbildungen

Es sei jetzt also immer $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale, reelle oder komplexe Liealgebra. Ferner sei ein Lie-Antihomomorphismus von $\mathfrak{g}$ in die Liealgebra $\Gamma^\infty_{\mathrm{symp}}(TM)$ gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} X_\cdot : \mathfrak{g} & \to & \Gamma^\infty_{\mathrm{symp}}(TM) \\ \zeta & \mapsto & X_\zeta \end{array} \quad \text{und} \quad [X_\zeta, X_\eta] = -X_{[\zeta,\eta]}\ \forall \zeta, \eta \in \mathfrak{g}. \tag{3.16}$$

Man beachte, daß ein solcher Lie-Antihomomorphismus insbesondere dann vorliegt, wenn X_ζ sogenanntes infinitesimales Erzeugendes oder Fundamentalvektorfeld der Wirkung einer Liegruppe durch Symplektomorphismen ist (vergl. [1, Prop. 4.1.26], ebenfalls für die Vorzeichenkonvention). Mit (3.16) ist durch

$$\rho(\zeta) f := -\mathcal{L}_{X_\zeta} f = -X_\zeta(f) \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]],\ \zeta \in \mathfrak{g} \tag{3.17}$$

eine Liealgebren-Wirkung von $\mathfrak{g}$ auf $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ gegeben, indem man die natürliche Fortsetzung der Lieableitung auf formale Reihen benutzt.

Definition 3.12 *Ein Sternprodukt $\star$ heißt $\mathfrak{g}$-invariant [2, 64], falls für alle $\zeta \in \mathfrak{g}$ die Abbildung $\rho(\zeta)$ eine $\star$-Derivation ist.*

Damit folgt unmittelbar aus Proposition 3.10:

Proposition 3.13 *Es sei wieder $*_{\mathrm{F}}$ das Fedosov-Sternprodukt mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Proposition 3.10. Dann gilt: $*_{\mathrm{F}}$ ist $\mathfrak{g}$-invariant dann und nur dann, wenn für alle $\zeta \in \mathfrak{g}$ der Zusammenhang ∇, die formale Zweiform Ω und $s \in \mathcal{W}_4$ $\mathfrak{g}$–invariant sind, das heißt, falls $[\mathcal{L}_{X_\zeta}, \nabla] = 0$, $\mathcal{L}_{X_\zeta}\Omega = 0$ und $\mathcal{L}_{X_\zeta} s = 0$.*

Es sei jetzt an eine übliche Schreibweise (vergl. [1, Chap.4], auch [42, 23]) erinnert, die ich mit gewissen Abweichungen übernehme: die Wirkung ρ wird Hamiltonsch genannt, falls es auf M eine glatte Funktion J_0 mit Werten in der dualen Liealgebra $\mathfrak{g}^*$ gibt, so daß das Vektorfeld X_ζ gerade das Hamiltonsche Vektorfeld zu der durch natürliche Paarung erhaltenen Funktion $\langle J_0, \zeta\rangle$ ist, also $X_\zeta = X_{\langle J_0,\zeta\rangle}$ oder äquivalent $i_{X_\zeta}\omega = \mathrm{d}(\langle J_0, \zeta\rangle)$. Weiter ist dann $\rho(\zeta) f = \{\langle J_0, \zeta\rangle, f\}$. In diesem Fall wird J_0 in [1] eine Impulsabbildung genannt. Hier soll (vergl. [63]) davon abweichend die zusätzliche Bedingung gemacht werden, J_0 eine (klassische) Impulsabbildung zu nennen, wenn $\langle J_0, \cdot\rangle$ ein Liealgebren Homomorphismus von $\mathfrak{g}$ auf die Liealgebra $(\mathcal{C}^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$ ist, also $\{\langle J_0, \zeta\rangle, \langle J_0, \eta\rangle\} = \langle J_0, [\zeta, \eta]\rangle$, das heißt, wenn J_0 bezüglich der ko-adjungierten Darstellung von $\mathfrak{g}$ äquivariant ist.

Um auch den Fall behandeln zu können, in dem eine reelle Liealgebra mittels komplexer Vektorfelder operiert, werde ich hier eine noch etwas andere Schreibweise benutzen, welche darauf verzichtet, die Funktion $\langle J_0, \zeta \rangle$ immer als Paarung einer $\mathfrak{g}^*$–wertigen Funktion mit Elementen von $\mathfrak{g}$ anzusehen. Stattdessen wird im folgenden J_0 als 1-Kokette in $C^1(\mathfrak{g}, \mathcal{C}^\infty(M))$ aufgefaßt. Offenbar stimmen beide Schreibweisen in den Fällen der Wirkung einer reellen Liealgebra mittels reellwertiger Vektorfelder oder einer komplexen Liealgebra mittels komplexer Vektorfelder überein.

Außerdem sollen noch einige weitere Bezeichnungen eingeführt werden, welche nützlich sind zur Untersuchung der sogenannten Kozykelbedingungen ([1, 4.2.4 – 4.2.8]) und ihrer Verallgemeinerung für die gleich noch zu definierenden Quantenimpulsabbildungen [64].

Zuerst werden die üblichen Bezeichnungen für die Kohomologie von Lie–Algebren bezüglich einer Darstellung benutzt [14]: für eine Liealgebra $\mathfrak{g}$, einen Vektorraum V und eine Darstellung $\pi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ werden die alternierenden, k-multilinearen Abbildungen von $\mathfrak{g}$ nach V als k-Koketten $C^k(\mathfrak{g}, V)$ bezeichnet. Der Chevalley–Eilenberg Korandoperator bezüglich π, $\delta_\pi : C^\bullet(\mathfrak{g}, V) \to C^{\bullet+1}(\mathfrak{g}, V)$ ist dann für $a \in C^k(\mathfrak{g}, V)$ wie üblich gegeben durch

$$
\begin{aligned}
(\delta_\pi a)(\xi_1, \ldots, \xi_{k+1}) :=& \\
&\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \pi(\xi_i) a(x_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{k+1}) \\
&+ \sum_{\substack{i<j \\ i,j<k+1}} (-1)^{i+j+1} a([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_{k+1}),
\end{aligned}
$$

und es ist $\delta_\pi^2 = 0$, vergleiche [14, Ch. VI]. Die entsprechenden Kozyklen, Koränder und Kohomologiegruppen werden dann wie üblich als $Z^k_\pi(\mathfrak{g}, V) = \ker(\delta_\pi : C^k(\mathfrak{g}, V) \to C^{k+1}(\mathfrak{g}, V))$ und $B^k_\pi(\mathfrak{g}, V) = \mathrm{im}(\delta_\pi : C^{k-1}(\mathfrak{g}, V) \to C^k(\mathfrak{g}, V))$ sowie $H^k_\pi(\mathfrak{g}, V) = Z^k_\pi(\mathfrak{g}, V)/B^k_\pi(\mathfrak{g}, V)$ bezeichnet. Weiter sollen jetzt die folgenden Bezeichnungen vereinbart werden:

Definition 3.14 *Die Liealgebrenwirkung ρ aus (3.17) heißt Hamiltonsch, falls es ein $J_0 \in C^1(\mathfrak{g}, \mathcal{C}^\infty(M))$ gibt, so daß für alle $\zeta \in \mathfrak{g}$ und $X_\cdot$ wie in (3.16) X_ζ Hamiltonsches Vektorfeld zu $J_0(\zeta)$ ist, das heißt, falls $X_{J_0(\zeta)} = X_\zeta$ oder äquivalent $i_{X_\zeta}\omega = \mathrm{d}J_0(\zeta)$. In diesem Fall gilt für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$: $\rho(\zeta)f = \{J_0(\zeta), f\}$, und J_0 wird die zugehörige Hamiltonfunktion genannt.*

Wir waren hier immer von komplexwertigen Funktionen ausgegangen — im aus der Physik naheliegenden Fall, daß $\mathfrak{g}$ die Liealgebra einer reellen Liegruppe ist, welche mittels symplektischer Diffeomorphismen auf M operiert, nehmen wir dann auch die „infinitesimalen Erzeugenden“ X_ζ und die zugehörige Hamiltonfunktion als reellwertig an.

Jetzt werden die oben eingeführten Begriffe für Sternprodukte verallgemeinert, siehe etwa auch die Arbeit von Xu [64], in der Quantenimpulsabbildungen zuerst systematisch studiert wurden. Das Konzept der Quantenimpulsabbildung wurde meines Wissens nach zuerst in [8] benutzt.

Definition 3.15 *Sei $\star$ ein $\mathfrak{g}$–invariantes Sternprodukt auf (M, ω). Die Eins-Kokette $J = J_0 + J_+ \in C^1(\mathfrak{g}, \mathcal{C}^\infty(M))[[\nu]]$ mit $J_0 \in C^1(\mathfrak{g}, \mathcal{C}^\infty(M))$ und $J_+ \in \nu C^1(\mathfrak{g}, \mathcal{C}^\infty(M))[[\nu]]$ heißt Quanten-Hamiltonfunktion, falls für alle $\zeta \in \mathfrak{g}$ die Abbildung $\rho(\zeta)$ eine quasi-innere $\star$-Derivation bezüglich $J(\zeta)$ ist, das heißt, falls*

$$\rho(\zeta) = \frac{1}{\nu} \mathrm{ad}_\star(J(\zeta)) \quad \forall\, \zeta \in \mathfrak{g}. \tag{3.18}$$

Definition 3.16 *Mit den Bezeichnungen von Definition 3.15 wird eine gegebene Quanten-Hamiltonfunktion J eine (Xu-) Quantenimpulsabbildung genannt, falls J ein Liealgebren-Homomorphismus von $\mathfrak{g}$ nach $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \frac{1}{\nu}[\cdot, \cdot]_\star)$ ist, wenn also gilt:*

$$\frac{1}{\nu}(J(\zeta) \star J(\eta) - J(\eta) \star J(\zeta)) = J([\zeta, \eta]) \tag{3.19}$$

für alle $\zeta, \eta \in \mathfrak{g}$.

Da hier nur Xu - Quantenimpulsabbildungen behandelt werden, werde ich nur von Quantenimpulsabbildungen sprechen und mich dabei immer auf die hier angegebene Definition beziehen. Diese Definitionen sind eine natürliche Verallgemeinerung der oben erwähnten klassischen Begriffe der Hamiltonschen Wirkung und der Impulsabbildung auf den Fall der Deformationsquantisierung. Die nullte ν-Ordnung von Gleichung (3.18) besagt ja gerade, daß J_0 eine zu ρ gehörende Hamiltonfunktion ist. Ebenso besagt die nullte formale Ordnung von Gleichung (3.19), daß J_0 eine klassische Impulsabbildung ist.

Für die in dieser Arbeit studierten Fedosov-Sternprodukte $*_{\mathrm{F}}$ läßt sich die Bedingung, daß die nullte formale Ordnung einer Quanten-Hamiltonfunktion gerade eine klassische Hamiltonfunktion sein muß, natürlich auch direkt aus Satz 3.11 ablesen:

Satz 3.17 *Ein $\mathfrak{g}$-invariantes Fedosov-Sternprodukt $*_{\mathrm{F}}$ zu den gemäß Korollar 2.9 gewählten Daten (∇, Ω, s) besitzt eine Quanten-Hamiltonfunktion genau dann, wenn es ein $J \in C^1(\mathfrak{g}, \mathcal{C}^\infty(M))[[\nu]]$ gibt mit*

$$\mathrm{d}J(\zeta) = i_{X_\zeta}(\omega + \Omega) \tag{3.20}$$

für alle $\zeta \in \mathfrak{g}$, das heißt, genau dann wenn für die de Rham-Kohomologieklasse von $i_{X_\zeta}(\omega + \Omega)$ gilt: $[i_{X_\zeta}(\omega + \Omega)] = [0]$. Diese Bedingung bedeutet insbesondere, daß J bis auf formale Konstanten in $C^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$ festgelegt ist. Mittels Satz 3.11 läßt sich (3.20) insbesondere schreiben als $\mathrm{d}J_+(\zeta) = i_{X_{J_0(\zeta)}}\Omega$, weil $X_\zeta = X_{J_0(\zeta)}$ gelten muß.

Nun ist bereits aufgrund von Proposition 3.2 klar, daß die Bedingung $H^1_{\mathrm{dR}}(M) = \{0\}$ ausreicht, zu garantieren, daß Quanten-Hamiltonfunktionen für ein invariantes Sternprodukt $\star$ existieren. In diesem Fall sind ja alle $\star$-Derivationen quasi-innere Derivationen. Im hier untersuchten Fall der Fedosov-Sternprodukte ist allerdings schon die wesentlich schwächere, gerade angegebene Bedingung hinreichend, daß lediglich ganz bestimmte Kohomologieklassen verschwinden müssen.

Von den verschiedenen Konzepten für Invarianz von Sternprodukten [2] wurde bisher nur eines angesprochen. Ein weiterer Begriff ist der der starken Invarianz, der darum besonders wichtig ist, weil es bisher fast nur für stark invariante Sternprodukte funktionierende Konzepte zur Verallgemeinerung der Phasenraumreduktion in der Deformationsquantisierung gibt [8, 21, 57, 9].

Definition 3.18 *Es sei $\star$ ein $\mathfrak{g}$-invariantes Sternprodukt und J_0 eine klassische Impulsabbildung zur Wirkung ρ (3.17). Dann heißt $\star$ stark invariant, falls J_0 eine Quanten-Hamiltonfunktion bezüglich ρ ist.*

Eine Besonderheit der starken Invarianz ist die, daß jede klassische Impulsabbildung auch bereits eine Quantenimpulsabbildung ist, da die Bedingung (3.19) wegen

$$\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\star(J_0(\zeta))J_0(\eta) = \rho(\zeta)J_0(\eta) = \{J_0(\zeta), J_0(\eta)\} = J_0([\zeta,\eta])$$

immer erfüllt ist. Definition (3.18) hängt außerdem auch nicht von der Wahl der klassischen Impulsabbildung ab – diese sind immer bis auf Konstanten eindeutig, und ergeben daher alle eine Quanten-Hamiltonfunktion.

Es ist nun einfach, Bedingungen anzugeben, unter denen ein gegebenes Fedosov-Sternprodukt stark invariant ist:

Satz 3.19 *Es sei $*_{\mathrm{F}}$ ein $\mathfrak{g}$-invariantes Fedosov-Sternprodukt zu den gemäß Korollar 2.9 gewählten Daten (∇, Ω, s). Weiter sei J_0 eine klassische Impulsabbildung bezüglich ρ. Dann ist $*_{\mathrm{F}}$ stark invariant genau dann, wenn für alle $\zeta \in \mathfrak{g}$ gilt:*

$$i_{X_\zeta}\Omega = 0.$$

Nach der obigen Bemerkung ist dann jede klassische Impulsabbildung auch eine Quantenimpulsabbildung.

Beweis: Der Beweis ist eine einfache Folgerung aus Satz 3.17. Denn J_0 ist Quanten-Hamiltonfunktion genau dann, wenn $\mathrm{d}J_0(\zeta) = i_{X_\zeta}(\omega+\Omega) = i_{X_{J_0(\zeta)}}(\omega+\Omega) = \mathrm{d}J_0(\zeta)+i_{X_\zeta}\Omega$, was genau dann der Fall ist, wenn $i_{X_\zeta}\Omega = 0$. ∎

Nun stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen überhaupt Quantenimpulsabbildungen existieren. Aufgrund von Gleichung (3.19) ist zunächst notwendigerweise J_0 eine klassische Impulsabbildung. In [64, §6] hat Xu die Frage gestellt, ob es zu jeder klassichen Impulsabbildung eine Quantenimpulsabbildung gibt; diese Frage kann zum Schluß dieses Abschnitts negativ beantwortet werden.

Es werden jetzt einige Ergebnisse über Quantenimpulsabbildungen für Fedosov-Sternprodukte gesammelt. Angenommen, J ist bereits eine Quanten-Hamiltonfunktion zur Liealgebrenwirkung ρ für ein Fedosov-Sternprodukt $*_{\mathrm{F}}$. Man betrachte nun die 2-Kokette $\lambda \in C^2(\mathfrak{g}, \mathcal{C}^\infty(M))[[\nu]]$, welche für $\zeta, \eta \in \mathfrak{g}$ gegeben sei durch

$$\lambda(\zeta,\eta) := \frac{1}{\nu}(J(\zeta) \star J(\eta) - J(\eta) \star J(\zeta)) - J([\zeta,\eta]). \tag{3.21}$$

Die Eigenschaft, daß J Quanten-Hamiltonfunktion ist, besagt nach Definition (3.15) gerade, daß

$$\begin{aligned}\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{*_{\mathrm{F}}} J([\zeta,\eta]) &= \rho([\zeta,\eta]) = -\mathcal{L}_{X_{[\zeta,\eta]}} = \mathcal{L}_{[X_\zeta, X_\eta]} = [\mathcal{L}_{X_\zeta}, \mathcal{L}_{X_\eta}] \\ &= \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{*_{\mathrm{F}}}\left(\frac{1}{\nu}(J(\zeta) *_{\mathrm{F}} J(\eta) - J(\eta) *_{\mathrm{F}} J(\zeta))\right).\end{aligned}$$

Also gilt für alle $\zeta, \eta \in \mathfrak{g}$ die Gleichung

$$\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{*_{\mathrm{F}}}\left(\frac{1}{\nu}(J(\zeta) *_{\mathrm{F}} J(\eta) - J(\eta) *_{\mathrm{F}} J(\zeta)) - J([\zeta,\eta]\right) = 0,$$

was gleichbedeutend ist damit, daß $\frac{1}{\nu}(J(\zeta) *_{\mathrm{F}} J(\eta) - J(\eta) *_{\mathrm{F}} J(\zeta)) - J([\zeta,\eta]) \in \mathbb{C}[[\nu]]$ eine Konstante ist, da nur die (formalen) Konstanten mit allen Funktionen $*_{\mathrm{F}}$-kommutieren. Wir wissen also, daß λ ein Element von $C^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$ ist. Überdies gestattet es Satz 3.17, diese Kokette explizit anzugeben. Es ist nämlich

$$\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{*_{\mathrm{F}}}(J(\zeta))J(\eta) = -X_\zeta(J(\eta)) = -i_{X_\zeta}\mathrm{d}J(\eta) = -i_{X_\zeta} i_{X_\eta}(\omega + \Omega) = (\omega+\Omega)(X_\zeta, X_\eta),$$

und daher natürlich

$$\lambda(\zeta,\eta) = (\omega+\Omega)(X_\zeta, X_\eta) - J([\zeta,\eta]).$$

Man kann nun weiter zeigen, daß λ sogar ein Kozykel $\lambda \in Z_0^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$ ist (Z_0^2 bezeichne einen Kozykel bezüglich der trivialen Darstellung $\pi(\eta) = 0\ \forall \eta \in \mathfrak{g}$). Dazu betrachte man

$$\begin{aligned}(\delta_0\lambda)(\zeta,\eta,\theta) &= 0 - \lambda([\zeta,\eta],\theta) + \lambda([\zeta,\theta],\eta) - \lambda([\eta,\theta],\zeta) \\ &= -(\omega+\Omega)(X_{[\zeta,\eta]}, X_\theta) + (\omega+\Omega)(X_{[\zeta,\theta]}, X_\eta) - (\omega+\Omega)(X_{[\eta,\theta]}, X_\zeta) \\ &\quad \left.+J([[\zeta,\eta],\theta]) - J([[\zeta,\theta],\eta]) + J([[\eta,\theta],\zeta]) \quad\right\} = 0 \text{ (Jacobi-Identität)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= &\quad (\omega+\Omega)([X_\zeta, X_\eta], X_\theta) - (\omega+\Omega)([X_\zeta, X_\theta], X_\eta) \\
&+(\omega+\Omega)([X_\eta, X_\theta], X_\zeta) \\
= &\ X_\zeta\left((\omega+\Omega)(X_\eta, X_\theta)\right) - X_\eta\left((\omega+\Omega)(X_\zeta, X_\theta)\right) + X_\theta\left((\omega+\Omega)(X_\zeta, X_\eta)\right) \\
= &\quad \left((\omega+\Omega)([X_\zeta, X_\eta], X_\theta) + (\omega+\Omega)([X_\theta, X_\zeta], X_\eta)\right) \\
&-\left((\omega+\Omega)([X_\eta, X_\zeta], X_\theta) + (\omega+\Omega)([X_\theta, X_\eta], X_\zeta)\right) \\
&+\left((\omega+\Omega)([X_\theta, X_\zeta], X_\eta) + (\omega+\Omega)(X_\zeta, [X_\theta, X_\eta])\right) \\
= &\ 2(\delta_0\lambda)(\zeta, \eta, \theta),
\end{aligned}
$$

wobei in den letzten beiden Schritten einfach die Formeln für die äußere– bzw. Lieableitung von Formen benutzt wurden. Es muß also gelten

$$(\delta_0\lambda)(\zeta, \eta, \theta) = 0 \quad \forall\, \zeta, \eta, \theta \in \mathfrak{g},$$

und somit ist $\lambda \in Z_0^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$. Die Äquivalenzklasse $[\lambda] \in H_0^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$ hängt dabei nicht von der Wahl der Quanten-Hamiltonfunktion ab, da die Wahl $J' = J + k$ mit konstantem k ergibt $\lambda' = \lambda + \delta_0 k$, da ja die Konstanten alle $*_{\mathrm{F}}$–kommutieren.

Wir hatten bereits gesehen, daß eine Quanten-Hamiltonfunktion bis auf konstante 1-Koketten festgelegt ist. Angenommen, eine Quantenimpulsabbildung existiert, dann ist diese also von der Form $J' = J + a$ mit $a \in C^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$. Weiter erfüllt J' die Gleichung $\frac{1}{\nu}(J'(\zeta) *_{\mathrm{F}} J'(\eta) - J'(\eta) *_{\mathrm{F}} J'(\zeta)) = J'([\zeta, \eta])$, also gilt

$$0 = \lambda'(\zeta, \eta) = (\omega+\Omega)(X_{\zeta,}, X_\eta) - (J + a)([\zeta, \eta]) = \lambda(\zeta, \eta) + (\delta_0 a)(\zeta, \eta).$$

Ist umgekehrt J Quanten-Hamiltonfunktion mit $\lambda = \delta_0 a$, dann ist $(\omega+\Omega)(X_\zeta, X_\eta) - J([\zeta, \eta]) + a([\zeta, \eta]) = \lambda(\zeta, \eta) - (\delta_0 a)(\zeta, \eta) = 0$, das heißt, $J - a$ ist Quantenimpulsabbildung. Falls also $\delta_0 a = 0$ ist, so sind alle $J - a$ Quantenimpulsabbildungen. Eine Quantenimpulsabbildung ist daher eindeutig, falls aus $\delta_0 a = 0$ folgt $a = 0$, und es ist klar, daß diese Bedingung auch notwendig für die Eindeutigkeit einer Quantenimpulsabbildung ist. Diese Ergebnisse werden in der folgenden Proposition zusammengefaßt.

Proposition 3.20 ([44, Prop. 4.8]) *Es sei $*_{\mathrm{F}}$ ein Fedosov-Sternprodukt, ρ die in (3.17) definierte Liealgebrenwirkung und J eine zugehörige Quanten-Hamiltonfunktion. Definiert man eine 2-Kokette $\lambda \in C^2(\mathfrak{g}, \mathcal{C}^\infty(M))[[\nu]]$ wie in (3.21), so ist λ konstant, d.h. $\lambda \in C^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$. Weiter ist λ sogar ein 2-Kozykel, $\lambda \in Z_0^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$, welcher in diesem Fall explizit angegeben werden kann:*

$$\lambda(\zeta, \eta) = (\omega+\Omega)(X_\zeta, X_\eta) - J([\zeta, \eta]). \tag{3.22}$$

Die Kohomologieklasse $[\lambda] \in H_0^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$ ist dabei unabhängig von der Wahl von J. Es gibt Quantenimpulsabbildungen genau dann, wenn $[\lambda] = [0] \in H_0^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$. Tatsächlich *ist für alle $a \in C^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$ mit $\delta_0 a = \lambda$ die Abbildung $J^a := J - a \in C^1(\mathfrak{g}, \mathcal{C}^\infty(M))[[\nu]]$ eine Quantenimpulsabbildung für $*_{\mathrm{F}}$, die Quantenimpulsabbildung ist also eindeutig bis auf Elemente von $Z_0^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$. Damit ist aber eine Quantenimpulsabbildung eindeutig bestimmt genau dann, wenn $H_0^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = 0$.*

Man beachte, daß hier, anders als im von Xu [64] studierten Fall, der 2-Kozykel λ konkret mithilfe von $(\omega + \Omega)$ und der Abbildung $X_\cdot$ aus (3.16) angegeben werden kann.

Betrachten wir nun abschließend noch den Fall, in dem zuerst nur eine symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω), eine Liealgebrenwirkung (3.17) und eine klassische Impulsabbildung J_0 gegeben ist, und man nachträglich eine Quantenimpulsabbildung J für ein invariantes Fedosov-Sternprodukt sucht. In diesem Fall gilt:

Satz 3.21 ([44, Cor. 4.10]) *Sei $*_{\mathrm{F}}$ ein $\mathfrak{g}$-invariantes Fedosov-Sternprodukt und sei J_0 eine klassische Impulsabbildung zur Liealgebrenwirkung ρ aus (3.17). Für die Existenz einer zugehörigen Quantenimpulsabbildung ist notwendig und hinreichend, daß es eine formale 1-Kokette $J_+ \in \nu C^1(\mathfrak{g}, \mathcal{C}^\infty(M))[[\nu]]$ gibt, welche für alle $\zeta, \eta \in \mathfrak{g}$ die Gleichungen*

$$i_{X_\zeta}\Omega = i_{X_{J_0(\zeta)}}\Omega = \mathrm{d}J_+(\zeta) \quad \textit{und} \quad (\delta_\rho J_+)(\zeta, \eta) = \Omega(X_\zeta, X_\eta) = \Omega(X_{J_0(\zeta)}, X_{J_0(\eta)})$$

erfüllt. Aus Proposition (3.20) folgt zudem sofort, daß dann J_+ bis auf Elemente von $\nu Z_0^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$ bestimmt ist.

Beweis: Die genannten Bedingungen sind äquivalent dazu, daß J erstens eine Quanten-Hamiltonfunktion und zweitens nach Proposition 3.20 sogar eine Quantenimpulsabbildung ist. Nach Satz 3.17 ist die Gültigkeit der ersten Gleichung notwendig und hinreichend für die Existenz einer Quanten-Hamiltonfunktion. Damit diese eine Quantenimpulsabbildung definiert, muß $\lambda(\zeta, \eta) = 0$ für alle ζ, η in $\mathfrak{g}$ gelten, also folgt, weil $X_\zeta = X_{J_0(\zeta)}$ und $X_\eta = X_{J_0(\eta)}$ Hamiltonsch sein müssen insbesondere, daß $J_+([\zeta, \eta]) = \Omega(X_\zeta, X_\eta)$. Andererseits ist

$$\begin{aligned}
(\delta_\rho J_+)(\zeta, \eta) &= \{J_0(\zeta), J_+(\eta)\} - \{J_0(\eta), J_+(\zeta)\} - J_+([\zeta, \eta]) \\
&= \{J_0(\zeta), J_+(\eta)\} - \{J_0(\eta), J_+(\zeta)\} - \Omega(X_\zeta, X_\eta) \\
&= -\mathcal{L}_{X_{J_0(\zeta)}} J_+(\eta) + \mathcal{L}_{X_{J_0(\eta)}} J_+(\zeta) - \Omega(X_\zeta, X_\eta) \\
&= -i_{X_{J_0(\zeta)}} i_{X_{J_0(\eta)}} \Omega + i_{X_{J_0(\eta)}} i_{X_{J_0(\zeta)}} \Omega - \Omega(X_\zeta, X_\eta) \\
&= \Omega(X_\zeta, X_\eta) = \Omega(X_{J_0(\zeta)}, X_{J_0(\eta)}).
\end{aligned}$$

Die Aussage, daß J_+ bis auf Elemente von $\nu Z_0^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$ bestimmt sei, ist klar aufgrund der Aussage von Proposition (3.20), daß eine Quantenimpulsabbildung bis auf Elemente von $Z_0^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$ bestimmt ist. ■

Aufgrund von Satz (3.21) muß insbesondere die von Xu [64] gestellte, wichtige Frage, ob aus der Existenz einer klassischen Impulsabbildung immer die Existenz einer (Xu-) Quantenimpulsabbildung folge, mit nein beantwortet werden, sofern man allgemeine Fedosov-Sternprodukte betrachtet und sich nicht etwa von vornherein auf den Fall $\Omega = 0$ festlegt.

Zum Abschluß dieses Kapitels möchte ich noch auf wichtige Beispiele eingehen, die auch für klassische Impulsabbildungen eine besondere Rolle spielen.

Halbeinfache Liealgebren

Sei $\mathfrak{g}$ eine (wie hier stets vorausgesetzt endlichdimensionale) halbeinfache Liealgebra, dann ist $H_0^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = 0$ und $H_0^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = 0$ nach den Whitehead-Lemmas (vergl. etwa [14]). Weiter ist nach Sternbergs Lemma (vergl. [63, Prop.1.5.3]) die Lie-Klammer zweier symplektischer Vektorfelder Hamiltonsch: aufgrund von $\mathcal{L}_X\omega = 0 = \mathrm{d}(i_X\omega)$ gilt für $X, Y \in \Gamma^\infty_{\mathrm{symp}}(TM)$, daß $i_{[X,Y]}\omega = \mathcal{L}_X(i_Y\omega) - i_Y(\mathcal{L}_X\omega) = \mathrm{d}(\omega(Y, X)) = \mathrm{d}f$. In unserem Fall kann man daher folgendermaßen vorgehen: angenommen, es liegt ein invariantes Fedosov-Sternprodukt vor, also gilt für alle $\zeta \in \mathfrak{g}$ insbesondere $\mathcal{L}_{X_\zeta}(\omega + \Omega) = 0$. Da $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, kann man für ein $N \in \mathbb{N}$ ein Liealgebrenelement η als $\eta = \sum_{k=1}^N [\zeta_k, \theta_k]$ schreiben. Dann ist (mit einer „deformierten“, d.h. auf Vektorfelder X mit $\mathcal{L}_X(\omega+\Omega) = 0 = \mathrm{d}(i_X(\omega+\Omega))$ ausgedehnten Variante von Sternbergs Lemma):

$$\begin{aligned} i_{X_\eta}(\omega + \Omega) &= -\sum_{k=1}^N i_{[X_{\zeta_k}, X_{\theta_k}]}(\omega + \Omega) = -\sum_{k=1}^N \mathcal{L}_{X_{\zeta_k}} i_{X_{\theta_k}}(\omega + \Omega) \\ &= \mathrm{d}\left(\sum_{k=1}^N (\omega + \Omega)(X_{\zeta_k}, X_{\theta_k})\right) = \mathrm{d}J(\eta) \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \end{aligned}$$

wobei man die formale 1-Kokette $J \in C^1(\mathfrak{g}, \mathcal{C}^\infty(M))[[\nu]]$ durch Wahl einer Basis von $\mathfrak{g}$, etwa $\{e_1, \ldots, e_m\}$, erhält. Man schreibe dann $e_i = \sum_{r=1}^{s_i \in \mathbb{N}} [\zeta_{i_r}, \theta_{i_r}]$ und definiere auf dieser Basis $J(e_i) := \sum_{r=1}^{s_i \in \mathbb{N}} (\omega+\Omega)(X_{\zeta_{i_r}}, X_{\theta_{i_r}})$. Da wir J als linear annehmen, ist damit aufgrund der obigen Rechnung ein Element $J \in C^1(\mathfrak{g}, \mathcal{C}^\infty(M))[[\nu]]$ gegeben, welches für alle $\eta \in \mathfrak{g}$ der Gleichung $\mathrm{d}J(\eta) = i_{X_\eta}(\omega + \Omega)$ genügt. Also ist J eine Quanten-Hamiltonfunktion, und wegen $H_0^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = 0 = H_0^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ gibt es auch eine zugehörige, eindeutig bestimmte Quantenimpulsabbildung. Insbesondere gibt es somit - falls es ein invariantes Fedosov-Sternprodukt gibt - für die orthogonalen Liealgebren Quantenimpulsabbildungen. Ein invariantes Sternprodukt gibt es beispielsweise für die Wirkung der kompakten Liegruppe

$SO(3)$, da man in diesem Fall wie üblich durch Mittelung über die Gruppe einen invarianten symplektischen Zusammenhang, eine invariante formale Zweiform Ω und ein invariantes s erhalten kann, so daß das Fedosov-Sternprodukt zu diesen Daten invariant ist. Für die Lorentzgruppe ist dies z.B. nicht der Fall.

Abelsche Liealgebren

Für die Wirkung einer Abelschen Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist nicht klar, ob die Vektorfelder X_η für alle $\eta \in \mathfrak{g}$ Hamiltonsch sind oder nicht. Angenommen, das wäre der Fall, und man hätte sogar eine Quanten-Hamiltonfunktion, so ist noch lange nicht die Existenz einer Quantenimpulsabbildung gesichert. Wenn es dennoch eine Quantenimpulsabbildung J geben sollte, so kann man diese wegen $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ und daher $H_0^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = (\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])^* = \mathfrak{g}^*$ immer um ein beliebiges Element der dualen Liealgebra $\mathfrak{g}^*$ abändern.

Existenz eines invarianten formalen Potentials

Ein Beispiel, in dem zu einem $\mathfrak{g}$-invarianten Fedosov-Sternprodukt zu den Daten (∇, Ω, s) immer Quantenimpulsabbildungen existieren, liegt im Fall eines invarianten, globalen Potentials Θ für $\omega + \Omega$ vor – das heißt, falls (M, ω) exakt symplektisch ist, $\omega = -\mathrm{d}\theta$, falls θ invariant ist, und es eine formale Reihe invarianter Einsformen $\theta_+ \in \nu\Gamma^\infty(T^*M)[[\nu]]$ gibt, welche $-\mathrm{d}\theta_+ = \Omega$ erfüllt. Sei also $\theta + \theta_+ = \Theta \in \Gamma^\infty(T^*M)[[\nu]]$ mit $\omega + \Omega = -\mathrm{d}\Theta$ gegeben und sei $\mathcal{L}_{X_\zeta}\Theta = 0$ für alle $\zeta \in \mathfrak{g}$. Damit ist $\mathrm{d}i_{X_\zeta}\Theta = -i_{X_\zeta}\mathrm{d}\Theta = i_{X_\zeta}(\omega + \Omega)$, also ist $i_{X_\zeta}\Theta$ eine Quanten-Hamiltonfunktion für die Wirkung ρ. Tatsächlich ist $J(\zeta) := i_{X_\zeta}\Theta$ sogar eine Quantenimpulsabbildung, denn es gilt:

$$
\begin{aligned}
(\omega + \Omega)(X_\zeta, X_\eta) &= (\mathrm{d}J(\zeta))(X_\eta) = \mathcal{L}_{X_\eta}J(\zeta) = \mathcal{L}_{X_\eta}i_{X_\zeta}\Theta \\
&= -i_{[X_\zeta, X_\eta]}\Theta + i_{X_\zeta}\mathcal{L}_{X_\eta}\Theta = i_{X_{[\zeta,\eta]}}\Theta = J([\zeta, \eta]),
\end{aligned}
$$

da nach Voraussetzung $\mathcal{L}_{X_\eta}\Theta = 0$ für alle $\eta \in \mathfrak{g}$.

Eine klassische Impulsabbildung, zu der es keine Quantenimpulsabbildung gibt

Sei $(M, \omega) = (T^*\mathbb{R}^n, \omega_0)$ mit der kanonischen symplektischen Form $\omega_0 = \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i$. Man betrachte die Wirkung der Abelschen Liegruppe $\mathcal{G} = (\mathbb{R}^n, +)$ durch Translationen: $\phi_a(q,p) = (q + a, p)$ für alle $(q,p) \in T^*\mathbb{R}^n$ und alle $a \in \mathbb{R}^n$. Die Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathcal{G})$ ist die Liealgebra der konstanten Vektorfelder $\mathfrak{g} = \left\{a^i\partial_{q^i} \;\middle|\; (a^1, \ldots, a^n) = a \in \mathbb{R}^n\right\}$. Die infinitesimalen Erzeugenden der Wirkung ϕ sind in diesem Fall für alle $a \in \mathfrak{g}$ durch $X_a = a$ gegeben, und es ist $[X_a, X_b] = 0 = -X_{[a,b]}$ für alle $a, b \in \mathfrak{g}$. Weiter ist

$$
i_{X_a}\omega = i_{a^i\partial_{q^i}}\mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_j = a^i\mathrm{d}p_i = \mathrm{d}(a^ip_i). \tag{3.23}
$$

Erstens ist deswegen $\mathcal{L}_{X_a}\omega = 0$ für alle $a \in \mathfrak{g}$, wie immer bei Punkttransformationen. Zweitens ist nach Gleichung (3.23) $J_0(a) := a^i p_i$ eine Hamiltonfunktion zur Wirkung von $\mathfrak{g}$. Tatsächlich ist J_0 der klassische Impuls und ist wegen $\{J_0(a), J_0(b)\} = 0 = J_0([a,b])$ für alle $a, b \in \mathfrak{g}$ eine zugehörige klassische Impulsabbildung. Betrachte nun eine antisymmetrische, komplexwertige $n \times n$-Matrix (A_{ij}) und definiere damit die Zweiform $A := \frac{1}{2} A_{ij} \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}q^j \in \Gamma^\infty(\Lambda^2(T^*M))$. Da $A = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2} A_{ij} q^i \mathrm{d}q^j\right)$ gilt, ist A geschlossen und sogar exakt. Betrachte nun das Fedosov-Sternprodukt $*_{\mathrm{F}}$ zu den Daten $(\nabla_0, \Omega, 0)$, mit dem flachen symplektischen Zusammenhang ∇_0 und $\Omega := \nu^k A$ mit beliebigem $k \in \mathbb{N}$. Der Zusammenhang ist gerade die Richtungsableitung und vertauscht mit konstanten Vektorfeldern. Weiter gilt für alle $a \in \mathfrak{g}$ die Gleichung

$$i_{X_a}\Omega = \nu^k A_{ij} a^i \mathrm{d}q^j = \nu^k \mathrm{d}(A_{ij} a^i q^j). \tag{3.24}$$

Daher ist erstens $\mathcal{L}_{X_a}\Omega = 0$ für alle $a \in \mathfrak{g}$ und daher ist das Sternprodukt $*_{\mathrm{F}}$ invariant bezüglich der Wirkung von $\mathfrak{g}$. Weiter ist aber nach Gleichung (3.23) $J(a) := J_0(a) + J_+(a)$ mit $J_+(a) := \nu^k A_{ij} a^i q^j$ eine zugehörige Quanten-Hamiltonfunktion. Aus J läßt sich nach Proposition 3.20 genau dann eine Quantenimpulsabbildung gewinnen, falls es ein $\mathbf{a} \in \nu^k C^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ gibt, so daß für $J_{\mathbf{a}} = J + \mathbf{a}$ gilt $\Omega(X_a, X_b) = J_{\mathbf{a}}([a,b])$ für alle $a, b \in \mathfrak{g}$. Da aber immer $[a,b] = 0$ gilt und daher $J_{\mathbf{a}}([a,b]) = 0$ ist, muß $\Omega(X_a, X_b) = \nu^k A_{ij} a^i b^j = 0$ für alle $a, b \in \mathfrak{g}$ gelten. Daraus folgt $(A_{ij}) = 0$. Hat man also $(A_{ij}) \neq 0$ gewählt, dann gibt es zu der klassischen Impulsabbildung J_0 keine Quantenimpulsabbildung $J_0 + J_+$.

Kapitel 4

Sternprodukte vom Wick-Typ auf Kählermannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel wird mit den Sternprodukten vom Wick-Typ eine weitere, wichtige Klasse von Sternprodukten auf Kählermannigfaltigkeiten eingeführt. Sternprodukte vom Wick-Typ sind durch die Eigenschaft definiert (siehe unten für eine exakte Definition), daß sie in gewissem Sinne die komplexe Struktur respektieren. Es ist sicherlich bereits von eigenständigem Interesse, Sternprodukte zu studieren, welche eine zusätzliche geometrische Struktur respektieren. Darüberhinaus spielt aber das Vorhandensein einer komplexen Struktur auch eine wesentliche Rolle in der holomorphen geometrischen Quantisierung (siehe etwa [63, 23]) und der Berezin-Toeplitz-Quantisierung, die für die Deformationsquantisierung von besonderem Interesse ist, da es nach den Arbeiten von Schlichenmaier [53, Thm. 7.1] zu einer solchen Quantisierung ein eindeutiges induziertes Sternprodukt gibt, siehe auch [54]. In [34] ist es Karabegov und Schlichenmaier gelungen, dieses Sternprodukt als Sternprodukt vom Wick-Typ zu identifizieren. Man beachte, daß beispielsweise eine notwendige Bedingung für Invarianz eines Sternprodukts vom Wick-Typ aufgrund der Ergebnisse aus [34] auch eine notwendige Bedingung für die entsprechende Invarianz der Berezin-Toeplitz-Quantisierung ist, sofern man die Verträglichkeit der Zuordnung eines Sternprodukts zur Berezin-Toeplitz-Quantisierung mit den jeweiligen Derivationen oder Automorphismen beweisen kann. Einige Ergebnisse zu Symmetrien in der Berezin-Toeplitz-Quantisierung findet man beispielsweise in [65]. Es wäre natürlich wünschenswert, auch den umgekehrten Weg gehen zu können, und aus Eigenschaften der Deformationsquantisierung auf Eigenschaften der Berezin-Toeplitz-Quantisierung zu schließen. Dieses Problem ist aber noch nicht gelöst, und ich werde auf die damit verbundenen Probleme der Darstellungstheorie für die Deformationsquantisierung hier auch nicht eingehen (siehe etwa [11, 59]).

Sternprodukte vom Wick-Typ wurden unabhängig voneinander von Bordemann und Waldmann [10] mittels einer modifizierten Fedosov-Konstruktion und von Karabegov [31, 32, 33] im Rahmen seiner Untersuchungen zu sogenannten Sternprodukten mit Trennung der Variablen studiert. Später gelang es Neumaier [48] zu zeigen, unter welchen Bedingungen ein mit einem faserweisen Wick-Sternprodukt konstruiertes, verallgemeinertes Fedosov-Sternprodukt vom Wick-Typ ist. Darüberhinaus konnte in [48] sogar gezeigt werden, daß alle Sternprodukte vom Wick-Typ mit einer geeigneten modifizierten Fedosov-Konstruktion gewonnen werden können.

Im vorliegenden Kapitel möchte ich zuerst einige Schreibweisen und Konventionen für Kählermannigfaltigkeiten und die exakte Definition von Sternprodukten vom Wick-Typ besprechen. Danach werden die wesentlichen Ergebnisse der Fedosov-Konstruktion von Sternprodukten vom Wick-Typ kurz dargestellt. Im Prinzip ließen sich damit die Ergebnisse aus Kapitel 3 dann auf Sternprodukte vom Wick-Typ übertragen. Dies erfordert aber leider für die Beweisrichtung, daß die in Kapitel 3 gegebenen Bedingungen notwendig sind, zusätzliche technische Arbeit, etwa für die verallgemeinerte Cartanformel. Ich werde daher später in Kapitel 5 nur die Gültigkeit der hinreichenden Bedingungen mit Fedosov-Methoden beweisen, um zu zeigen, daß diese Beweisrichtung tatsächlich beinahe trivial ist. Die vollständigen Beweise werde ich in Kapitel 5 mit einer wesentlich weniger technischen und deutlich einfacheren Methode durchführen, welche auf Karabegovs Beschreibung von Sternprodukten vom Wick-Typ beruht, und die zusätzlich eine vollständige Klassifizierung invarianter Sternprodukte liefern wird. Im vorliegenden Kapitel wird daher im Anschluß an die Beschreibung der Fedosov-Konstruktion für Sternprodukte vom Wick-Typ in einem weiteren Abschnitt die Konstruktion solcher Sternprodukte nach Karabegov besprochen.

4.1 Allgemeine Sternprodukte vom Wick-Typ

Sei im folgenden (M, ω, I) eine reell $2n$-dimensionale Kählermannigfaltigkeit mit der komplexen Struktur I. Zunächst sei an einige Schreibweisen und Konventionen erinnert. Im wesentlichen halte ich mich dabei an die Sprechweisen und Definitionen aus [36, Band II, IX] und [62] und wähle von den vielen äquivalenten Definitionen diejenige, eine Mannigfaltigkeit Kählersch zu nennen, wenn sie Riemannsch ist, eine fast-komplexe Struktur I besitzt, die mit der Riemannschen Metrik g verträglich ist (also Hermitesch ist), wenn zusätzlich die Nijenhuis-Torsion von I, $N(X,Y) = [IX, IY] - [X,Y] - I[X, IY] - I[IX, Y]\ \forall\, X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ verschwindet (also I nach dem Satz von Newlander und Nirenberg (vergl. [36, Thm. 2.5 /Appx. 8]) sogar komplexe Struktur ist), und wenn die für alle Vektorfelder

X, Y als $\omega(X,Y) := g(IX,Y)$ definierte, nicht-ausgeartete Zweiform geschlossen, insgesamt also symplektisch ist. Insbesondere ist der Riemann-Zusammenhang auf M mit I und daher auch mit ω verträglich und ist also ein symplektischer Zusammenhang, der Kählerzusammenhang genannt wird. Weil I sogar komplexe Struktur ist, ist M eine komplexe Mannigfaltigkeit. In den folgenden Abschnitten wird die Definitheit der Kählermetrik g nicht benötigt, also werde ich auch von Kählermannigfaltigkeiten sprechen, wenn (M,g) semi-Riemannsch ist. (Solche Mannigfaltigkeiten werden mitunter auch als pseudo-Kählersch bezeichnet – im Gegensatz zur Sprechweise in [36, S. 149], wo pseudo-Kählermannigfaltigkeiten fast-Hermitesche Mannigfaltigkeiten mit geschlossener Zweiform und verschwindender Nijenhuis-Torsion und somit sogar Kählersch sind.)

Es sei wie üblich mit TM auch das komplexifizierte Tangentialbündel an M bezeichnet und mit I auch die auf TM durch $I(X + \mathrm{i}Y) = IX + \mathrm{i}IY$ linear ausgedehnte komplexe Struktur. Weiter seien $TM^{1,0}$ und $TM^{0,1}$ die Unterbündel des komplexifizierten Tangentialbündels an M zu den Eigenwerten $+\mathrm{i}$ und $-\mathrm{i}$ von I. Analog seien die zugehörigen Zerlegungen des Bündels der komplexen Differentialformen in Formen vom Typ (p,q):

$$\Gamma^\infty(\Lambda^r(T^*M)) = \sum_{p+q=r} \Gamma^\infty(\Lambda^{p,q}(T^*M))$$

bezeichnet und mit

$$\pi^{p,q} : \Gamma^\infty(\Lambda^r(T^*M)) \to \Gamma^\infty(\Lambda^{p,q}(T^*M)), \quad p+q=r$$

die natürlichen Projektionen (vergl. [62]), ebenso für symmetrische Schnitte. Weiter seien $\mathrm{d} = \partial + \overline{\partial}$ die Dolbeault-Differentiale

$$\partial : \Gamma^\infty(\Lambda^{p,q}(T^*M)) \to \Gamma^\infty(\Lambda^{p+1,q}(T^*M)),\ \overline{\partial} : \Gamma^\infty(\Lambda^{p,q}(T^*M)) \to \Gamma^\infty(\Lambda^{p,q+1}(T^*M))$$

mit $\partial = \pi^{p+1,q}\mathrm{d}$, $\overline{\partial} = \pi^{p,q+1}\mathrm{d}$ und $\partial^2 = \overline{\partial}^2 = \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$.

In lokalen holomorphen Koordinaten seien

$$Z_k := \partial_{z^k} = \frac{1}{2}(\partial_{x^k} - \mathrm{i}\partial_{y^k}) \quad \text{und} \quad \overline{Z}_l := \partial_{\overline{z}^l} = \frac{1}{2}(\partial_{x^k} + \mathrm{i}\partial_{y^k})$$

Vektorfelder vom Typ $(1,0)$ und $(0,1)$, die eine lokale Basis für die $+\mathrm{i}$ und $-\mathrm{i}$ Eigenräume $TM^{1,0}$ und $TM^{0,1}$ von I bilden. Ebenso sollen

$$\mathrm{d}z^k := \mathrm{d}x^k + \mathrm{i}\mathrm{d}y^k \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\overline{z}^k := \mathrm{d}x^k - \mathrm{i}\mathrm{d}y^k$$

eine lokale Basis für Formen vom Typ $(1,0)$ und $(0,1)$ bezeichnen. Für Vektorfelder $X \in \Gamma^\infty(TM) = \Gamma^\infty(TM^{1,0}) \oplus \Gamma^\infty(TM^{0,1})$, benutze ich bisweilen die Schreibweise $X = \chi + \underline{\chi}$ mit $\chi \in \Gamma^\infty(TM^{1,0})$ und $\underline{\chi} \in \Gamma^\infty(TM^{0,1})$.

Da g Hermitesch ist, sind g und ω vom Typ $(1,1)$, und man kann in lokalen holomorphen Koordinaten schreiben $\omega = \frac{\mathrm{i}}{2} g_{k\bar{l}} \mathrm{d}z^k \wedge \mathrm{d}\bar{z}^l$ mit einer Hermiteschen, nicht ausgearteten Matrix $g_{k\bar{l}} = 2g(Z_k, \overline{Z}_l)$. Hier wie auch später folge ich der vor allem in der physikalischen Literatur üblichen Konvention, Koeffizienten mit einem gequerten Index (etwa $X = \alpha^{\bar{k}} \overline{Z}_k$) zu benutzen, um anzudeuten, daß es sich um Koeffizienten eines Objekts vom Typ $(0,1)$ handelt. Das ist natürlich ein Mißbrauch der Notation, ist aber immer bloß im genannten Sinne zu verstehen und macht dann eventuelle Rechnungen in Koordinaten übersichtlicher. Ebenso wird Einsteins Summationskonvention benutzt, also $\alpha^{\bar{k}} \overline{Z}_k := \sum_{k=1}^n (\alpha^{\bar{k}} \overline{Z}_k)$.

Man erinnere sich an das Wick-Sternprodukt auf $\mathbb{C}^n$ 1.3 aus Kapitel 1, welches allgemeiner [10] als $f \circ_{\mathrm{W}} g = \mu \left(\exp(\frac{2\nu}{\mathrm{i}} g^{k\bar{j}} Z_k \otimes \overline{Z}_j)(f \otimes g) \right)$ gegeben ist (mit $(g^{k\bar{j}})$ sei die inverse Matrix zu $(g_{k\bar{j}})$ bezeichnet). In diesem Fall besitzen die beschreibenden Bidifferentialoperatoren eine Aufspaltung in holomorphe und antiholomorphe Anteile. Diese Beobachtung führt für Sternprodukte auf allgemeinen Kählermannigfaltigkeiten zu der folgenden Definition:

Definition 4.1 (vergl. [10]) *Sei (M, ω, I) eine Kählermannigfaltigkeit und sei $\star$ ein Sternprodukt auf M. Man betrachte $\star$ als für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gegeben als $f \star g = \sum_{r=0}^\infty \nu^r C_r(f,g)$. Dann heißt $\star$ ein Sternprodukt vom Wick-Typ, wenn gilt*

i.) Die $\star$ beschreibenden Bidifferentialoperatoren C_r für $r \geq 1$ sind in lokalen holomorphen Koordinaten und mit Koeffizientenfunktionen $C_r^{K;\overline{L}}$ von der Gestalt

$$C_r(f,g) = \sum_{K,\overline{L}} C_r^{K;\overline{L}} \frac{\partial^{|K|} f}{\partial z^K} \frac{\partial^{|\overline{L}|} g}{\partial \bar{z}^L}. \tag{4.1}$$

Oder, äquivalent

ii.) Für alle offenen Teilmengen $U \subseteq M$, für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und für alle lokal holomorphen Funktionen $h \in \{f \in \mathcal{C}^\infty(M), f|_U \in \mathcal{O}(U)\}$ und alle lokal antiholomorphen Funktionen $h' \in \{f \in \mathcal{C}^\infty(M), f|_U \in \overline{\mathcal{O}}(U)\}$ stimmen $\star$-Linksmultiplikation mit h' und $\star$-Rechtsmultiplikation mit h mit der punktweisen Multiplikation überein, das heißt $(f \star h)|_U = (fh)|_U$ und $(h' \star g)|_U = (h'g)|_U$.

Allgemeine Sternprodukte vom Wick-Typ sollen im folgenden mit dem Symbol $\star_{\mathrm{W}}$ bezeichnet werden.

4.2 Fedosov Sternprodukte vom Wick-Typ

Tatsächlich haben wir die Abhängigkeit des Fedosov-Sternprodukts $*_{\mathrm{F}}$ von der Wahl des faserweise definierten Sternprodukts $\circ_{\mathrm{F}}$ noch nicht untersucht. Ausgehend vom Spezialfall der Fedosov-Konstruktion $\Omega = 0 = s$ haben Bordemann und Waldmann [10] unter Verwendung von $\circ_{\mathrm{W}}$ als faserweisem Produkt eine Verallgemeinerung der Fedosov-Konstruktion für beliebige Kählermannigfaltigkeiten angegeben und dabei gezeigt [10, Thm. 4.7], daß das so gewonnene Fedosov-Sternprodukt $*_{\mathrm{W}}$ tatsächlich ein Sternprodukt vom Wick-Typ im Sinne von Definition 4.1 ist.

Es stellen sich dann natürlich die Fragen, ob etwa jedes mittels $\circ_{\mathrm{W}}$ gewonnene Fedosov-Sternprodukt vom Wick-Typ ist, und inwiefern sich die Neumaiersche Verallgemeinerung der Fedosov-Konstruktion, so wie sie hier (teilweise) in Kapitel 2 beschrieben wurde, auch auf Sternprodukte vom Wick-Typ überträgt. Diese Fragen wurden in [48, 49] beantwortet, wo zunächst Bedingungen angegeben wurden, die garantieren, daß $*_{\mathrm{W}}$ vom Wick-Typ ist, was durchaus nicht immer der Fall sein muß: es muß dazu Ω vom Typ $(1,1)$ sein, und der rein holomorphe sowie der rein antiholomorphe Anteil von s müssen verschwinden [49, Thm. 4.9]. Tatsächlich stellt sich dann sogar heraus, daß [49, Prop. 4.12] solche Sternprodukte nicht mehr von der Wahl der Normierungsbedingung abhängen, man sich also stets auf $s = 0$ festlegen kann. Darüberhinaus konnte die wichtige Aussage bewiesen werden, daß die Fedosov-Konstruktion für Sternprodukte vom Wick-Typ universell ist, das heißt, für jedes Sternprodukt vom Wick-Typ $\star_{\mathrm{W}}$ auf (M, ω, I) gibt es ein mittels $\circ_{\mathrm{W}}$ konstruiertes Fedosov-Sternprodukt $*_{\mathrm{W}}$, welches mit $\star_{\mathrm{W}}$ übereinstimmt [49, Thm. 6.7].

Im folgenden wird diese Modifikation der Fedosov-Konstruktion kurz erläutert. Da die Beweise komplett analog zu den in Kapitel 2 vorgestellten oder als Referenz angegebenen sind, und da ich im wesentlichen nur die nötige Notation einführen möchte, werde ich dies sehr knapp tun. Insbesondere werde ich von vornherein die Normierungsbedingung $s = 0$ wählen, weil dies ja nach [49, Prop. 4.12] keine Beschränkung der Allgemeinheit darstellt.

Es sei g die Hermitesche Metrik, welche für alle $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ die Gleichung $g(X,Y) = \omega(X, IY)$ erfüllt. Weiter sei ∇ der zugehörige Kählerzusammenhang auf M. Man erinnere sich an die Definition der Fedosov-Algebra (2.1):

$$\mathcal{W}\otimes\Lambda(M) := \left(\mathsf{X}_{s=0}^{\infty}\Gamma^\infty(\textstyle\bigvee^s T^*M \otimes \bigwedge T^*M)\right)[[\nu]].$$

Wieder wird das punktweise Produkt in $\mathcal{W}\otimes\Lambda$ mittels der Strukturabbildung μ für $f, g \in \mathcal{W}\otimes\Lambda$ als $fg = \mu(f\otimes g)$ geschrieben. Da (M, ω, I) Kählersch ist, können wir nun stets lokale holomorphe Koordinaten für M als komplex n-dimensionale Mannigfaltigkeit finden. Die in der Fedosov-Konstruktion wesentlichen Abbildungen waren ja alle lokal definiert, und können in solchen lokalen holomorphen Koordinaten beschrieben werden. Im Unterschied zu Kapitel 2 wird aber als deformiertes, faserweises Produkt auf $\mathcal{W}\otimes\Lambda$ das faserweise Wick-Produkt benutzt, welches definiert ist als:

$$f \circ_{\mathrm{W}} g := \mu \circ \exp\left(\frac{2\nu}{\mathrm{i}} g^{k\bar{l}} i_s(Z_k) \otimes i_s(\overline{Z}_l)\right)(f \otimes g) \quad \forall f, g \in \mathcal{W}\otimes\Lambda. \tag{4.2}$$

Analog zu Kapitel 2 werde mit $\mathrm{ad}_{\mathrm{W}}(f)g$ für Elemente $f, g \in \mathcal{W}\otimes\Lambda$ der antisymmetrischen Grade r und s der $\deg_a$-gradierte Superkommutator

$$\mathrm{ad}_{\mathrm{W}}(f)g := [f, g] := f \circ_{\mathrm{W}} g - (-1)^{rs} g \circ_{\mathrm{W}} f$$

bezeichnet. Da $\circ_{\mathrm{W}}$ und $\circ_{\mathrm{F}}$ faserweise äquivalent sind, gilt Lemma 2.1 über die zentralen Elemente auch bezüglich $(\mathcal{W}\otimes\Lambda, \circ_{\mathrm{W}})$. Wie in der gewöhnlichen Fedosov-Konstruktion sind die Gradabbildungen (2.2) $\deg_s$, $\deg_a$, $\deg_\nu := \nu\partial_\nu$ and $\mathrm{Deg} := \deg_s + 2\deg_\nu$ Derivationen des punktweisen Produkts, aber lediglich Deg ist eine $\circ_{\mathrm{W}}$-Derivation.

Weiter seien die Abbildungen δ, δ^* (und folglich δ^{-1}) und ∇ wie in (2.4) und (2.7) gegeben. Alternativ lassen sich diese Abbildungen auch in komplexen Koordinaten schreiben als

$$\delta = (1 \otimes dz^j) i_s(Z_j) + (1 \otimes d\overline{z}^j) i_s(\overline{Z}_j) \quad \text{und} \quad \delta^* = (dz^j \otimes 1) i_a(Z_j) + (d\overline{z}^j \otimes 1) i_a(\overline{Z}_j)$$

sowie

$$\nabla = (1 \otimes dz^i)\nabla_{Z_i} + (1 \otimes d\overline{z}^\alpha)\nabla_{\overline{Z}_i},$$

wobei man in diesem Fall vom – wieder ebenfalls mit ∇ bezeichneten – eindeutigen Kählerzusammenhang auf (M, ω, I) ausgeht.

Analog zu Lemma 2.3 gelten dann die Gleichungen $[\delta, \nabla] = 0$ und $\nabla^2 = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{W}}(R)$, wobei $R = \frac{\mathrm{i}}{2} g_{k\overline{t}} R^{\overline{t}}_{\overline{l}i\overline{j}} dz^k \vee d\overline{z}^l \otimes d\overline{z}^i \wedge d\overline{z}^j$ mit dem Riemannschen Krümmungstensor $R^{\overline{t}}_{\overline{l}i\overline{j}}$ des Kählerzusammenhangs ∇, und es ist aufgrund der Bianchi-Identitäten $\delta R = 0 = \nabla R$.

Es gelten nun die folgenden Aussagen, welche wieder eine Verallgemeinerung der ursprünglichen Fedosovschen Aussagen [19, Thm. 3.2, 3.3] sind, und die ich hier nur der Übersicht halber zu einer Proposition zusammenfasse. Für den Beweis möchte ich auf [10, 49] und [48] verweisen.

Proposition 4.2 ([49, Thm. 3.1, 3.2]) *Es sei Ω_{W} eine geschlossene, formale Zweiform vom Typ $(1,1)$ auf M, also $\Omega_{\mathrm{W}} \in \nu\Gamma^\infty(\Lambda^2 T^*M), \mathrm{d}\Omega_{\mathrm{W}} = 0, \pi^{1,1}\Omega_{\mathrm{W}} = \Omega_{\mathrm{W}}$. Dann gibt es genau ein $r_{\mathrm{W}} \in \mathcal{W}_2 \otimes \Lambda^1$, welches den Gleichungen*

$$\delta r_{\mathrm{W}} = \nabla r_{\mathrm{W}} - \frac{1}{\nu} r_{\mathrm{W}} \circ_{\mathrm{W}} r_{\mathrm{W}} + R + 1 \otimes \Omega_{\mathrm{W}} \quad \textit{and} \quad \delta^{-1} r_{\mathrm{W}} = 0. \tag{4.3}$$

genügt. Weiter erfüllt r_{W} die Gleichung

$$r_{\mathrm{W}} = \delta^{-1}\left(\nabla r_{\mathrm{W}} - \frac{1}{\nu} r_{\mathrm{W}} \circ_{\mathrm{W}} r_{\mathrm{W}} + R + 1 \otimes \Omega_{\mathrm{W}}\right) \tag{4.4}$$

und kann daraus eindeutig bestimmt werden. Dann ist die zugehörige (Wick-)Fedosov-Derivation

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{W}} := -\delta + \nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{W}}(r_{\mathrm{W}}) \tag{4.5}$$

eine $\circ_{\mathrm{W}}$-Superderivation vom antisymmetrischen Grad 1*, und es ist* ${\mathfrak{D}_{\mathrm{W}}}^2 = 0$*.*

Sind andererseits r_{W} *und* $\mathfrak{D}_{\mathrm{W}}$ *wie in (4.3) und (4.5) gegeben, dann gilt*

i.) Für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ *gibt es genau ein* $\tau_{\mathrm{W}}(f) \in \ker(\mathfrak{D}_{\mathrm{W}}) \cap \mathcal{W}$ *mit* $\sigma(\tau_{\mathrm{W}}(f)) = f$*, so daß* $\tau_{\mathrm{W}} : \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]] \to \ker(\mathfrak{D}_{\mathrm{W}}) \cap \mathcal{W}$ $\mathbb{C}[[\nu]]$*-linear ist. Diese Abbildung wird wiederum die Fedosov-Taylorreihe zu* $\mathfrak{D}_{\mathrm{W}}$ *genannt.*

ii.) Für $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *gilt* $\tau_{\mathrm{W}}(f) = \sum_{k=0}^\infty \tau_{\mathrm{W}}(f)^{(k)}$*, wobei* $\mathrm{Deg}\tau_{\mathrm{W}}(f)^{(k)} = k\tau_{\mathrm{W}}(f)^{(k)}$*. Die Fedosov-Taylorreihe* τ_{W} *kann rekursiv bestimmt werden aus*

$$
\begin{aligned}
\tau_{\mathrm{W}}(f)^{(0)} &= f \\
\tau_{\mathrm{W}}(f)^{(k+1)} &= \delta^{-1}\left(\nabla\tau_{\mathrm{W}}(f)^{(k)} - \frac{1}{\nu}\sum_{l=0}^{k-1}\mathrm{ad}_{\mathrm{W}}(r^{(l+2)})\tau_{\mathrm{W}}(f)^{(k-l)}\right).
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

iii.) Da wie im gewöhnlichen Fall $\mathfrak{D}_{\mathrm{W}}$ *eine* $\circ_{\mathrm{W}}$*-Superderivation vom antisymmetrischen Grad* 1 *ist, ist* $\ker(\mathfrak{D}_{\mathrm{W}}) \cap \mathcal{W}$ *eine* $\circ_{\mathrm{W}}$*-Unteralgebra von* $\mathcal{W}\otimes\Lambda$*, und man kann ein assoziatives Produkt* $*_{\mathrm{W}}$ *für alle* $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ *durch Zurückziehen des Produkts* $\circ_{\mathrm{W}}$ *mittels* τ_{W} *definieren:*

$$
f *_{\mathrm{W}} g = \sigma(\tau_{\mathrm{W}}(f) \circ_{\mathrm{W}} \tau_{\mathrm{W}}(g)).
$$

Unter den genannten Voraussetzungen ist $*_{\mathrm{W}}$ *ein Sternprodukt vom Wick-Typ auf* (M, ω, I)*.*

Man beachte, daß, anders als im Fall gewöhnlicher Fedosov-Sternprodukte, ∇ als Riemannscher Zusammenhang eindeutig festgelegt ist, und daß wir hier aufgrund der Ergebnisse aus [49] von vornherein $\delta^{-1}r_{\mathrm{W}} = s = 0$ gewählt haben. Weiter beachte man, daß, wie man analog wie in Kapitel 2 zeigt, die Fedosov-Taylorreihe für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ auch wie in (2.18) als

$$
\tau_{\mathrm{W}}(f) = f - \mathfrak{D}_{\mathrm{W}}^{-1}(1 \otimes \mathrm{d}f) \tag{4.7}
$$

geschrieben werden kann, wobei analog zu (2.17)

$$
\mathfrak{D}_{\mathrm{W}}^{-1} := -\delta^{-1}\left(\mathrm{Id} - \left[\nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{W}}(r_{\mathrm{W}}), \delta^{-1}\right]\right)^{-1} \tag{4.8}
$$

ein Homotopieoperator für den Komplex $(\mathcal{W}\otimes\Lambda^\bullet, \mathfrak{D}_{\mathrm{W}})$ ist.

Besonders hervorzuheben ist die Universalität der Fedosov-Konstruktion für Sternprodukte vom Wick-Typ:

Satz 4.3 ([49, Thm 6.7]) *Für alle Sternprodukte $\star_{\mathrm{W}}$ vom Wick-Typ auf einer Kählermannigfaltigkeit (M, ω, I) gibt es eine geschlossene, formale Zweiform Ω_{W} vom Typ $(1,1)$ auf M, so daß das gemäß Proposition 4.2 mittels Ω_{W} und mittels des faserweisen Wickprodukts konstruierte Fedosov-Sternprodukt $*_{\mathrm{W}}$ und $\star_{\mathrm{W}}$ übereinstimmen.*

Diese letzte Aussage leitet direkt zur Konstruktion und Klassifikation von Sternprodukten vom Wick-Typ nach Karabegov über. Dort wird gezeigt, daß Sternprodukte vom Wick-Typ und geschlossene, formale Zweiformen vom Typ $(1,1)$ tatsächlich in Bijektion zueinander stehen.

4.3 Karabegovs Konstruktion

In diesem Abschnitt möchte ich die von A.V. Karabegov angegebene Konstruktion und eindeutige Charakterisierung von Sternprodukten vom Wick-Typ auf Kählermannigfaltigkeiten kurz beschreiben; in der ursprünglichen Formulierung spricht Karabegov von Sternprodukten mit Trennung der Variablen, und in der Tat sind die Sternprodukte vom Wick-Typ, welche eine komplexe Polarisierung respektieren, ein Spezialfall von Karabegovs Sternprodukten. Vom Fall der von der Berezin-Quantisierung her motivierten Sternprodukte mit Trennung der Variablen auf Kählermannigfaltigkeiten, auf die sich die hier vorgestellten Ergebnisse aus [31] beziehen, unterscheiden sich aber die Sternprodukte vom Wick-Typ nur durch das Vertauschen der Differentialoperatoren Z_k und $\overline{Z}_l$.

Die wesentliche Aussage der Untersuchungen in [31] ist die erstaunliche Tatsache, daß Sternprodukte vom Wick-Typ auf Kählermannigfaltigkeiten im wesentlichen durch eine Art lokaler kanonischer Vertauschungsrelationen eindeutig bestimmt sind. Ausgangspunkt ist die bereits oben erwähnte Eigenschaft des Wick-Produkts $\circ_{\mathrm{W}}$ auf $\mathbb{C}^n$, daß $\circ_{\mathrm{W}}$-Linksmultiplikation mit antiholomorphen Funktionen und $\circ_{\mathrm{W}}$-Rechtsmultiplikation mit holomorphen Funktionen beide mit der punktweisen Multiplikation übereinstimmen. Da beispielsweise auf zusammenhängenden, kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten alle holomorphen Funktionen konstant sind, bestünde eine derartige Charakterisierung für Sternprodukte vom Wick-Typ auf solchen Mannigfaltigkeiten allerdings aus einer leeren Forderung und wäre also unsinnig. Karabegov geht daher von einer lokalen Version dieser Eigenschaft aus, die im übrigen für die hier (und in [31]) betrachteten differentiellen Sternprodukte gleichbedeutend ist mit der lokalen Aufspaltung der ein Sternprodukt vom Wick-Typ $\star_{\mathrm{W}}$ beschreibenden Bidifferentialoperatoren in holomorphe und antiholomorphe Ableitungen wie in Definition 4.1: Karabegov nennt ein differentielles Sternprodukt $\star$ auf (M, ω, I) ein Sternprodukt mit Trennung der Variablen (bzw. vom Wick-Typ), falls für alle offenen Kartenbereiche $U \subset M$ und lokale Funktionen $a \in \mathcal{O}(U)$, $b \in \overline{\mathcal{O}}(U)$

und $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ gilt: $a \star f = af$ und $f \star b = fb$. Im folgenden werde ich nur noch von Sternprodukten $\star_{\mathrm{W}}$ vom Wick-Typ sprechen und daher immer wie in Definition 4.1 $\mathcal{O}(U)$ und $\overline{\mathcal{O}}(U)$ gegenüber Karabegovs Definition vertauschen. Karabegov benutzt auch eine andere Vorzeichenkonvention für den Poissontensor sowie einen Vorfaktor $-\mathrm{i}$ im Deformationsparameter; ich werde die Aussagen aus [31] daher an die hier gewählten Konventionen anpassen. Man beachte aber, daß das nach Karabegov und Schlichenmaier [34] zur Berezin-Toeplitz-Quantisierung gehörende Sternprodukt vom Wick-Typ ist.

Zuerst zeigt Karabegov, daß es lokal von ihm so genannte formale Impulse gibt, das heißt formale Funktionen u_k, deren $\star_{\mathrm{W}}$-Kommutator mit einer lokalen Funktion der Form z^l gerade δ_k^l ergibt:

Lemma 4.4 ([31, Prop. 1]) *Sei $\star_{\mathrm{W}}$ ein Sternprodukt vom Wick-Typ auf der Kählermannigfaltigkeit (M, ω, I). Dann gibt es für alle kontrahierbaren Kartenbereiche (z, U), $z \in U \subset M$ lokal definierte formale Funktionen $u_k, \overline{v}^l \in \mathcal{C}^\infty(U)[[\nu]]$, $k = 1 \dots n = \dim_{\mathbb{C}} M$ mit*

$$[u_k, z^l]_{\star_{\mathrm{W}}} = -\nu\delta_k^l \quad \text{und} \quad [\overline{v}_l, \overline{z}^k]_{\star_{\mathrm{W}}} = \nu\delta_{\overline{l}}^{\overline{k}}. \tag{4.9}$$

(Man beachte, daß hier die Benutzung „gequerter“ Indizes nur bedeutet, daß es sich um Koeffizienten „gequerter“ Größen handelt.)

Weiter ist es möglich, die $\star_{\mathrm{W}}$-Linksmultiplikation mit den u_k und die $\star_{\mathrm{W}}$-Rechtsmultiplikation mit den $\overline{v}_l$ explizit anzugeben:

Lemma 4.5 ([31, Lemma 2]) *Für die nach Lemma 4.4 lokal existierenden formalen Funktionen $u_k, \overline{v}^l \in \mathcal{C}^\infty(U)[[\nu]]$ gilt*

$$f \star u_k = fu_k + \nu Z_k(f) \qquad \text{und} \qquad \overline{v}_l \star f = \overline{v}_l f + \nu \overline{Z}_l(f) \tag{4.10}$$

für alle lokalen formalen Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(U)[[\nu]]$.

Im folgenden sollen die Symbole u_k und $\overline{v}_l$ immer für Funktionen wie in (4.10) reserviert sein. Man definiere nun in einer der Kartenumgebungen U formale Einsformen

$$\alpha := -u_k \mathrm{d}z^k \ \in \Gamma^\infty(T^*U^{1,0})[[\nu]] \quad \text{und} \quad \beta := \overline{v}_l \mathrm{d}\overline{z}^l \ \in \Gamma^\infty(T^*U^{0,1})[[\nu]]. \tag{4.11}$$

In Karabegovs Schreibweise $L_f g := R_g f := f \star_{\mathrm{W}} g$ ist die Assoziativität von $\star_{\mathrm{W}}$ äquivalent zu $[L_f, R_g] = 0 \ \forall\, f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$. Lokal gilt also für die Einsformen aus (4.11) und für beliebige $f \in \mathcal{C}^\infty(U)[[\nu]]$:

$$0 = [L_{\overline{v}_l}, R_{u_k}] = \nu f(\overline{Z}_k(u_k) - Z_l(\overline{v}_l)),$$

also ist $\overline{Z}_k(u_k) = Z_l(\overline{v}_l)$. Daher ist $\overline{\partial}\alpha = -\overline{Z}_j(u_k)\mathrm{d}\overline{z}^j \wedge \mathrm{d}z^k = Z_j(\overline{v}_l)\mathrm{d}z^j \wedge \mathrm{d}\overline{z}^l = \partial\beta$. Die so lokal gegebene formale, geschlossene Zweiform vom Typ $(1,1)$ sei bezeichnet als:

$$K(\star_{\mathrm{W}}) := \overline{\partial}\alpha = \partial\beta. \tag{4.12}$$

Aus dem Beweis von Lemma 4.4 in [31, Prop. 1] ergibt sich, daß der Anteil $K_0(\star_{\mathrm{W}})$ vom formalen Grad 0 von $K(\star_{\mathrm{W}})$ gerade gleich der Kählerform $\omega|_U$ ist: $K(\star_{\mathrm{W}}) = \omega|_U + \Omega$ mit einer lokal gegebenen formalen, geschlossenen Zweiform Ω vom Typ $(1,1)$ ohne Anteile vom formalen Grad 0. Weiter zeigt Karabegov, daß die Definition von $K(\star_{\mathrm{W}})$ nicht von der Wahl der Funktionen $u_k, \overline{v}_l$ abhängt und daß darüberhinaus die zu verschiedenen Kartenbereichen konstruierten Objekte auf allen Kartendurchschnitten übereinstimmen, $K(\star_{\mathrm{W}})$ also eine global definierte formale, geschlossene Zweiform vom Typ $(1,1)$ ist und global $K(\star_{\mathrm{W}}) = \omega + \Omega$ gilt.

Aufgrund des $\overline{\partial}$-Poincaré Lemmas (etwa in [62, Chap. II, Sec. 3, Lemma 2.15]) gibt es dann in jedem kontrahierbaren Kartenbereich $U \subset M$ ein formales Kählerpotential für $K(\star_{\mathrm{W}})$, das heißt, eine lokale formale Funktion φ mit $K(\star_{\mathrm{W}}) = \partial\overline{\partial}\varphi$. Da nun $K(\star_{\mathrm{W}}) = -\overline{\partial}\partial\varphi = \overline{\partial}\alpha$ ist, folgt, daß $\alpha + \partial\varphi$ lokale, $\overline{\partial}$-geschlossene Form vom Typ $(1,0)$ ist, und daß die zugehörige Koeffizientenfunktion $Z_k(\varphi) - u_k$ lokal holomorph ist. Daher gilt aufgrund der Gleichungen (4.10) und aufgrund der definierenden Eigenschaft für Sternprodukte vom Wick-Typ für alle lokalen formalen Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(U)[[\nu]]$ einerseits $f \star_{\mathrm{W}} (Z_k(\varphi) - u_k) = f(Z_k(\varphi) - u_k)$, andererseits ist $f \star_{\mathrm{W}} (Z_k(\varphi) - u_k) = f \star_{\mathrm{W}} Z_k(\varphi) - fu_k - \nu Z_k(f)$, also ist $f \star_{\mathrm{W}} Z_k(\varphi) = fZ_k(\varphi) + \nu Z_k(f)$. Ebenso zeigt man, daß auch gilt $\overline{Z}_l(\varphi) \star_{\mathrm{W}} f = \overline{Z}_l(\varphi)f + \nu\overline{Z}_l(f)$. Insgesamt zeigt Karabegov:

Lemma 4.6 ([31, Thm. 1]) *Jedes Sternprodukt vom Wick-Typ $\star_{\mathrm{W}}$ auf (M, ω, I) definiert mittels (4.12) eine formale Reihe geschlossener Zweiformen vom Typ $(1,1)$ der Form $K(\star_{\mathrm{W}}) \in \omega + \nu Z^2_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{C})^{1,1}[[\nu]]$, die eine formale Deformation der Kählerform ω ist. Sei in einer Karte U wie oben $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(U)[[\nu]]$ ein lokales Potential für $K(\star_{\mathrm{W}})$. Dann gelten für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(U)[[\nu]]$ die Gleichungen*

$$f \star Z_k(\varphi) = fZ_k(\varphi) + \nu Z_k(f) \qquad \text{und} \qquad \overline{Z}_l(\varphi) \star f = \overline{Z}_l(\varphi)f + \nu\overline{Z}_l(f) \tag{4.13}$$

.

Die Zweiform $K(\star_{\mathrm{W}})$ wird im folgenden Karabegovs charakterisierende Form des Sternprodukts $\star_{\mathrm{W}}$ genannt.

Umgekehrt zeigt Karabegov in [31], daß durch Angabe einer formalen, geschlossenen Zweiform Γ vom Typ $(1,1)$, welche eine Deformation von ω ist, eindeutig ein Sternprodukt $\star_{\mathrm{W}}$ vom Wick-Typ festgelegt ist, dessen charakterisierende Form $K(\star_{\mathrm{W}})$ mit Γ übereinstimmt:

Satz 4.7 ([31, Thm. 2]) *Es gibt eine eindeutige Zuordnung von Sternprodukten* $\star_{\mathrm{W}}$ *vom Wick-Typ auf Kählermannigfaltigkeiten* (M, ω, I) *und formalen Reihen geschlossener Zweiformen auf* M *vom Typ* $(1,1)$*, die mithilfe der charakterisierenden Form* $K(\star_{\mathrm{W}})$ *explizit durch die bijektive Abbildung*

$$\begin{aligned} \{\textit{Sternprodukte vom Wick-Typ auf}\,(M,\omega,I)\} &\longrightarrow \nu Z^2_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{C})^{1,1}[[\nu]] \\ \star_{\mathrm{W}} &\longmapsto K(\star_{\mathrm{W}}) - \omega \end{aligned} \tag{4.14}$$

gegeben ist.

Ein alternativer Beweis dafür, daß bereits eine der Gleichungen (4.13) ein Sternprodukt vom Wick-Typ vollständig festlegt, wurde in [49, Thm. 5.2] angegeben, indem mittels eines Hochschild-kohomologischen Arguments gezeigt wurde, daß die Bidifferentialoperatoren zweier Sternprodukte, welche eine der Gleichungen (4.13) erfüllen, insgesamt übereinstimmen. Insbesondere wird in [49] auch gezeigt, daß die Umkehrabbildung zu (4.14) gerade durch die Fedosov-Konstruktion (4.2) des Sternprodukts $*_{\mathrm{W}}$ mittels des faserweisen Wick-Produkts $\circ_{\mathrm{W}}$ und der geschlossenen Zweiform $\Omega_{\mathrm{W}} = K(\star_{\mathrm{W}}) - \omega$ vom Typ $(1,1)$ gegeben ist. (Tatsächlich wurde in [49] die Universalität der Fedosov-Konstruktion für Sternprodukte vom Wick-Typ erst mithilfe der zuvor etablierten Gültigkeit von [49, Thm. 5.2] und somit der Bijektivität der Abbildung (4.14) gezeigt.)

Im nächsten Kapitel wird Karabegovs eindeutige Charakterisierung der Sternprodukte vom Wick-Typ auf Kählermannigfaltigkeiten dazu benutzt werden, auf direkte und einfache Weise Aussagen über Automorphismen und Derivationen solcher Sternprodukte herzuleiten. Die Beweise dazu werden wesentlich darin bestehen, die Verträglichkeit der Abbildung (4.14) mit pullbacks bezüglich Diffeomorphismen bzw. mit Lieableitungen bezüglich glatter Vektorfelder unter bestimmten Voraussetzungen zu zeigen.

Insbesondere wird es Satz 4.7 erlauben, zusammen mit den Ergebnissen des nächsten Kapitels eine eindeutige Klassifikation invarianter Sternprodukte vom Wick-Typ anzugeben.

Kapitel 5

Invariante Sternprodukte vom Wick-Typ und Quantenimpulsabbildungen

Aufgrund der in Kapitel 4 dargestellten Ergebnisse können alle Sternprodukte vom Wick-Typ auf Kählermannigfaltigkeiten (M, ω, I) sowohl mit Karabegovs Konstruktion als auch mittels der modifizierten Fedosov-Konstruktion beschrieben werden. Hier sollen nun die Untersuchungen, welche in Kapitel 3 für Fedosov-Sternprodukte durchgeführt wurden, auf den Fall der Sternprodukte vom Wick-Typ übertragen werden.

Zuerst werden dazu mittels der Universalität der Fedosov-Konstruktion für Sternprodukte $*_{\mathrm{W}}$ vom Wick-Typ hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß ein gegebener Diffeomorphismus auf M bzw. ein Vektorfeld auf M einen $*_{\mathrm{W}}$-Automorphismus bzw. eine $*_{\mathrm{W}}$-Derivation induziert. Dabei werden Diffeomorphismen und Vektorfelder getrennt behandelt und es wird sich zeigen, daß es in beiden Fällen sehr einfach ist, die Gültigkeit solcher hinreichender Bedingungen zu zeigen.

Notwendige und hinreichende Bedingungen für die verschiedenen Invarianzeigenschaften werden dann auf direkte Weise mithilfe von Karabegovs Konstruktion gezeigt. Dabei sollen zunächst wieder beliebige Diffeomorphismen $\phi : M \to M$ oder Vektorfelder $X \in \Gamma^\infty(TM)$ betrachtet werden. Natürlich sind schon nach Lemma 1.5 alle $\star$-Derivationen und alle $\star$-Automorphismen symplektisch. Allerdings ergibt sich auch diese einfache Aussage hier nocheinmal direkt aus der Karabegov-Konstruktion. Insbesondere wird aus den für die Automorphismen- bzw. Derivationseigenschaft notwendigen Bedingungen wieder wie in Kapitel 3 folgen, daß die betrachteten Diffeomorphismen bzw. Vektorfelder eine endlichdimensionale Liegruppe bzw. Liealgebra bilden.

Die Untersuchungen des folgenden Abschnitts liefern zudem eine vollständige Klassifizierung invarianter Sternprodukte vom Wick-Typ, ein Ergebnis, das eine wesentliche Verschärfung der Klassifikation allgemeiner invarianter Sternprodukte bis auf Äquivalenz aus [5] darstellt.

Zum Studium der Quanten-Hamiltonfunktionen wird dann wieder eine notwendige und hinreichende Bedingung angegeben, welche garantiert, daß eine gegebene Derivation eine quasi-innere Derivation ist. Auch diese Aussage wird vollständig im Rahmen von Karabegovs Konstruktion durchgeführt. Anschließend können dann die von der konkreten Konstruktion des betrachteten Sternprodukts unabhängigen Ergebnisse über Quantenimpulsabbildungen aus Kapitel 3 sehr einfach auf den Fall der Sternprodukte vom Wick-Typ übertragen werden.

5.1 Automorphismen und Derivationen von Sternprodukten vom Wick-Typ

Man betrachte ein Fedosov-Sternprodukt $*_{\mathrm{W}}$ vom Wick-Typ auf (M, ω, I). Im Prinzip ließen sich auch die weitergehenden Ergebnisse aus Kapitel 3 mittels der Universalität der Fedosov-Konstruktion für Sternprodukte vom Wick-Typ übertragen. Ich werde dies im folgenden – allerdings unabhängig für Diffeomorphismen und für Vektorfelder – nur für die hinreichenden Bedingungen tun, was auch nocheinmal zeigen wird, daß für diese Beweisrichtung wesentlich weniger technischer Aufwand nötig ist als in Kapitel 3. Dort tauchten einige technische Konstruktionen ja lediglich auf, um auch die notwendigen Bedingungen gleich mitzuerfassen. Im Fall der Sternprodukte vom Wick-Typ erfordert der Beweis, daß die genannten Bedingungen auch notwendige sind, allerdings weitere Modifikationen der technischen Ergebnisse aus Kapitel 3. Ich verzichte hier auf einen Beweis mit Fedosov-Methoden, da sich das gesamte Problem mittels der Karabegovschen Konstruktion wesentlich einfacher lösen läßt.

Lemma 5.1 *Es sei $\star_{\mathrm{W}}$ ein Sternprodukt vom Wick-Typ auf (M, ω, I), welches als ein Fedosov-Sternprodukt $*_{\mathrm{W}}$ zu den Daten $(\nabla, \Omega_{\mathrm{W}})$ mit dem Kählerzusammenhang ∇ und $(K(*_{\mathrm{W}}) - \omega) = \Omega_{\mathrm{W}} \in \nu Z^2_{dR}(M)[[\nu]]$ vom Typ $(1,1)$ aufgefaßt werde. Weiter sei $\phi : M \to M$ ein Diffeomorphismus auf M. Falls dann gilt $\phi^*\omega = \omega$, $\phi^*\Omega_{\mathrm{W}} = \Omega_{\mathrm{W}}$ und $\phi^* I = I$, so ist die induzierte Abbildung ϕ^* ein Automorphismus von $*_{\mathrm{W}}$,*

Beweis: Sei zunächst ϕ Kählersch, also holomorph ($\phi^* I = I$) und symplektisch ($\phi^*\omega = \omega$). Das bedeutet insbesondere [36, Bd. II, Chap. IX], daß ϕ Vektorfelder vom Typ $(1,0)$ (bzw. $(0,1)$) auf Vektorfelder vom Typ $(1,0)$ (bzw. $(0,1)$) abbildet, und daß ϕ eine Isometrie der Kählermetrik g ist, also $\phi^* g = g$ gilt. Damit berechnet man aber sofort, daß ϕ^* ein Automorphismus des faserweisen Wick-Produkts $\circ_{\mathrm{W}}$ ist. Weiter bedeutet $\phi^* g = g$ aber auch, daß der Kählerzusammenhang ∇ invariant ist, also $\phi^*\nabla = \nabla\phi^*$. Daraus folgt sofort, daß auch die induzierte Abbildung ∇ invariant ist. Um dies direkt zu sehen, kann man auch die in komplexen Koordinaten geschriebene Abbildung ∇ betrachten und beachte, daß die äußere Ableitung d mit Diffeomorphismen verträglich ist und ϕ außerdem die Aufspaltung in holomorphe und antiholomorphe Richtungen respektiert. Ebenso ist $\phi^*\delta = \delta\phi^*$ und $\phi^*\delta^{-1} = \delta^{-1}\phi^*$, was man entweder aufgrund der identischen Aussagen im gewöhnlichen Fedosov-Fall sieht, oder wieder direkt aufgrund der Verträglichkeit von d und ϕ^* und der Aufspaltung der involvierten Abbildungen in holomorphe und antiholomorphe Anteile. Wegen $\phi^*\nabla = \nabla\phi^*$ ist $\nabla = \phi^*\nabla\phi^{*-1}$, und daher

$$-\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{W}}(R) = \nabla^2 = \phi^*\nabla^2\phi^{*-1} = -\frac{1}{\nu}\phi^*\mathrm{ad}_{\mathrm{W}}(R)\phi^{*-1} = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{W}}(\phi^* R),$$

da ϕ^* ein Automorphismus des faserweisen Wick-Produkts $\circ_{\mathrm{W}}$ ist. Das bedeutet aber, daß $R - \phi^* R$ zentral in $(\mathcal{W}\otimes\Lambda, \circ_{\mathrm{W}})$ ist, also symmetrischen Grad null hat oder selbst gleich null ist. Da aber ϕ^* die Grade nicht ändert, besitzt $R - \phi^* R$ den symmetrischen Grad zwei, muß also gleich null sein, also ist $R = \phi^* R$. Weiter ist mit den bisherigen Ergebnissen und wegen $\phi^*\Omega_{\mathrm{W}} = \Omega_{\mathrm{W}}$ erstens $\phi^*\delta^{-1} r_{\mathrm{W}} = \delta^{-1}\phi^* r_{\mathrm{W}} = 0$ und zweitens

$$\delta(\phi^* r_{\mathrm{W}}) = \nabla(\phi^* r_{\mathrm{W}}) - \frac{1}{\nu}(\phi^* r_{\mathrm{W}}) \circ_{\mathrm{W}} (\phi^* r_{\mathrm{W}}) + R + 1 \otimes \Omega_{\mathrm{W}}.$$

Da aber r_{W} als die eindeutige Lösung der beiden Gleichungen (4.3) bestimmt ist (Prop. 4.2, siehe auch den Beweis von 3.9), muß auch $\phi^* r_{\mathrm{W}} = r_{\mathrm{W}}$ gelten. Damit erhält man schließlich, daß auch ϕ^* und $\mathfrak{D}_{\mathrm{W}}$ vertauschen:

$$\phi^*(\mathfrak{D}_{\mathrm{W}} a) = \phi^*(-\delta + \nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\mathrm{W}}(r_{\mathrm{W}}))f = \mathfrak{D}_{\mathrm{W}}(\phi^* f) \quad \forall a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda.$$

Deswegen gilt insbesondere für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$, daß $\mathfrak{D}_{\mathrm{W}}(\phi^*\tau_{\mathrm{W}}(f)) = \phi^*(\mathfrak{D}_{\mathrm{W}}\tau_{\mathrm{W}}(f)) = 0$, also gibt es ein $g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ so daß $\phi^*\tau_{\mathrm{W}}(f) = \tau_{\mathrm{W}}(g)$, und die Anwendung von σ liefert $g = \phi^* f$, also $\phi^*\tau_{\mathrm{W}}(f) = \tau_{\mathrm{W}}(\phi^* f)$. Damit ist aber schließlich für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$:

$$\phi^*(f *_{\mathrm{W}} g) = \phi^*\sigma(\tau_{\mathrm{W}}(f) \circ_{\mathrm{W}} \tau_{\mathrm{W}}(g)) = \sigma(\tau_{\mathrm{W}}(\phi^* f) \circ_{\mathrm{W}} \tau_{\mathrm{W}}(\phi^* g)) = (\phi^* f) *_{\mathrm{W}} (\phi^* g),$$

das heißt, ϕ^* ist ein $*_{\mathrm{W}}$-Automorphismus. ■

Sei jetzt X ein glattes Vektorfeld auf M. Wie in Kapitel 3 soll untersucht werden, wann die Lieableitung $\mathcal{L}_X$ eine Derivation eines gegebenen Sternprodukts vom Wick-Typ ist. Die angegebene Bedingung und ihr Beweis sind völlig analog zum Beweis der ersten Äquivalenz in Proposition 3.5. Die einzige hier auftauchende zusätzliche Bedingung, nämlich $\mathcal{L}_X I = 0$, besagt gerade, daß X ein Killingvektorfeld bezüglich der Kählermetrik ist, was dafür sorgt, daß $\mathcal{L}_X$ eine Derivation des faserweisen Wick-Produkts $\circ_{\mathrm{W}}$ ist.

Lemma 5.2 *Sei $\star_{\mathrm{W}}$ ein Sternprodukt vom Wick-Typ auf (M, ω, I), welches wieder als Fedosov-Sternprodukt $*_{\mathrm{W}}$ zu den Daten $(\nabla, \Omega_{\mathrm{W}})$ mit dem Kählerzusammenhang ∇ und $(K(*_{\mathrm{W}}) - \omega) = \Omega_{\mathrm{W}} \in \nu Z^2_{dR}(M)[[\nu]]$ vom Typ $(1,1)$ aufgefaßt werde. Sei $X \in \Gamma^\infty(TM)$. Falls dann gilt $\mathcal{L}_X I = 0$ und $\mathcal{L}_X K(*_{\mathrm{W}}) = 0$, so ist $\mathcal{L}_X$ eine $*_{\mathrm{W}}$-Derivation.*

Beweis: Diese Aussage ist eine leichte Verallgemeinerung der für gewöhnliche Fedosov-Sternprodukte bekannten Aussagen. Aufgrund der Gleichung $\mathcal{L}_X K(*_{\mathrm{W}}) = \mathcal{L}_X(\omega + \Omega_{\mathrm{W}}) = 0$ ist X symplektisch und $\mathcal{L}_X \Omega_{\mathrm{W}} = 0$. Weil auch $\mathcal{L}_X I = 0$ gilt, ist dann $\mathcal{L}_X g = 0$, d.h. X ist ein Killingvektorfeld bezüglich der Kählermetrik g. Ausgehend von der expliziten Form des faserweisen Wick-Produkts $\circ_{\mathrm{W}}$ kann man nun beispielsweise direkt in lokalen Koordinaten berechnen, daß $\mathcal{L}_X$ eine Derivation des faserweisen Wickprodukts $\circ_{\mathrm{W}}$ ist, indem man die Vertauschungseigenschaft der Lieableitung mit inneren Produkten benutzt, siehe beispielsweise auch [7, Lemma 4.2] für die analoge Rechnung im Fall von $\circ_{\mathrm{F}}$.

Wie in Lemma 3.4 kommutiert wieder $\mathcal{L}_X$ mit δ und mit δ^{-1}, weil die Lieableitung mit inneren Produkten und äußeren Ableitungen verträglich ist. Tatsächlich kommutiert $\mathcal{L}_X$ aufgrund der zusätzlichen Bedingung $\mathcal{L}_X I = 0$ sogar mit den holomorphen und antiholomorphen Komponenten von δ und δ^{-1}. Weil X ein Killingvektorfeld ist, gilt außerdem $[\mathcal{L}_X, \nabla] = 0$ und deshalb wieder $\mathcal{L}_X R = 0$.

Wendet man nun $\mathcal{L}_X$ auf Gleichung (4.4) an, so findet man aufgrund von $\mathcal{L}_X \Omega_{\mathrm{W}} = 0$ sofort $\mathcal{L}_X r_{\mathrm{W}} = 0$. Daher gilt dann $\mathcal{L}_X \mathrm{ad}_{\mathrm{W}}(r_{\mathrm{W}}) a = \mathrm{ad}_{\mathrm{W}}(r_{\mathrm{W}}) \mathcal{L}_X a$ für alle $a \in \mathcal{W} \otimes \Lambda$, das heißt, man kann in (4.5) die Lieableitung auch an $\mathrm{ad}_{\mathrm{W}}(r_{\mathrm{W}})$ 'vorbeiziehen' und erhält schließlich $[\mathcal{L}_X, \mathfrak{D}_{\mathrm{W}}] = 0$. Damit zeigt man aber, da die benötigten Schritte unabhängig davon sind, ob man $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ oder $\mathfrak{D}_{\mathrm{W}}$ betrachtet, ganz genauso wie in der ersten Äquivalenz von Proposition 3.5, daß $X(f *_{\mathrm{W}} g) = X(f) *_{\mathrm{W}} g + f *_{\mathrm{W}} X(g)$ für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ gilt. Also ist $\mathcal{L}_X$ eine $*_{\mathrm{W}}$-Derivation. ∎

Kommen wir jetzt zu den zentralen Ergebnissen dieses Kapitels. Mithilfe der in Kapitel 4 bereitgestellten Konstruktion für Sternprodukte $\star_{\mathrm{W}}$ vom Wick-Typ nach Karabegov läßt sich in sehr einfacher Weise zeigen, daß die in Lemma 5.1 und Lemma 5.2 angegebenen Bedingungen sowohl hinreichend als auch notwendig sind.

Sei zunächst wieder ein beliebiger Diffeomorphismus $\phi : M \to M$ gegeben. Dann kann man eine Abbildung auf Sternprodukten definieren durch

$$\psi : f \star g \mapsto \phi^{*-1}(\phi^* f \star \phi^* g) =: f \star' g.$$

Falls ϕ^* ein $\star$-Automorphismus ist, dann ist $\star = \star'$. Die folgende Proposition besagt gerade, daß im Fall von Sternprodukten vom Wick-Typ $\star_{\mathrm{W}}$ die Abbildung (4.14) aus Satz 4.7 mit ϕ^* verträglich ist, das heißt man zeigt, daß unter der Voraussetzung $\phi^* I = I$ auch $\phi^*(K(\star)) = K(\psi^{-1}(\star))$ gilt.

Proposition 5.3 (vergl. [45, Prop. 3.1]) *Sei $\star_{\mathrm{W}}$ ein Sternprodukt vom Wick-Typ auf (M, ω, I) mit Karabegovs charaktersierender Form $K(\star_{\mathrm{W}})$, und sei ϕ ein Diffeomorphismus auf M. Dann ist ϕ^* ein Automorphismus von $\star_{\mathrm{W}}$ genau dann, wenn*

$$\phi^* I = I \quad \textit{und} \quad \phi^* K(\star_{\mathrm{W}}) = K(\star_{\mathrm{W}}). \tag{5.1}$$

Beweis: Sei ϕ^* (und somit auch ϕ^{-1^*}) ein Automorphismus von $\star_{\mathrm{W}}$. Zu einem Kartenbereich (z, U) gibt es dann einen Kartenbereich $(z', \phi(U))$, auf dem nach Lemma 4.5 gilt:

$$\begin{aligned}(f \star_{\mathrm{W}} \phi^{-1^*} u_k)|_{\phi(U)} &= \phi^{-1^*}(\phi^* f \star_{\mathrm{W}} u_k) = \phi^{-1^*}\left(\phi^* f u_k + \nu Z_k(\phi^* f)\right) \\ &= f \phi^{-1^*} u_k + \nu \left(\phi^{-1^*} Z_k\right)(f) \end{aligned} \tag{5.2}$$

für alle lokal definierten Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(\phi(U))$. Man kann insbesondere in lokalen holomorphen Koordinaten $f = \overline{z'}^l$ wählen, und da $\star_{\mathrm{W}}$-Linksmultiplikation mit $\overline{z'}^l$ gleich der punktweisen Multiplikation ist, gilt

$$\overline{z'}^l \star_{\mathrm{W}} \phi^{-1^*} u_k|_{\phi(U)} = \overline{z'}^l \phi^{-1^*} u_k|_{\phi(U)} = \overline{z'}^l \phi^{-1^*} u_k|_{\phi(U)} + \nu \left(\phi^{-1^*} Z_k\right)(\overline{z'}^l).$$

Daher muß $\left(\phi^{-1^*} Z_k\right)(\overline{z'}^l) = 0$ gelten. Das heißt aber, daß auch $\left(\phi^{-1^*} Z_k\right)$ ein lokales Vektorfeld vom Typ $(1,0)$ ist, $I(\phi^{-1^*} Z_k) = \mathrm{i}\phi^{-1^*} Z_k = \phi^{-1^*}\mathrm{i} Z_k = \phi^{-1^*} I Z_k$, also bildet ϕ^{-1^*} Vektorfelder des Typs $(1,0)$ auf Vektorfelder des Typs $(1,0)$ ab. Nach [36, Bd.II, Prop. 2.9] ist deswegen $\phi^* I = I$, also ϕ holomorph, und insbesondere bildet ϕ lokale holomorphe Koordinaten auf lokale holomorphe Koordinaten ab.

Nun ist zu zeigen, daß $\phi^* K(\star_{\mathrm{W}}) = K(\star_{\mathrm{W}})$. Betrachte dazu die Gleichung (5.2) in der Karte $(\phi^* z, \phi^{-1}(U)) =: (w, V)$. Man erhält damit

$$f \star_{\mathrm{W}} \phi^* u_k = f \phi^* u_k + \nu(\phi^* Z_k)(f)$$

für $f \in \mathcal{C}^\infty(\phi^{-1}(U))[[\nu]]$ und wegen $\phi^* I = I$ überdies $\phi^* Z_k = W_k$. Gemäß Kapitel 4, Gleichung (4.12) berechne man nun $K(\star_{\mathrm{W}})$ in der Karte (w, V):

$$\begin{aligned} K(\star_{\mathrm{W}})|_V &= -\overline{\partial}(\phi^* u_k \mathrm{d}w^k) = -\overline{W}_l(\phi^* u_k) \mathrm{d}\overline{w}^l \wedge \mathrm{d}w^k \\ &= -\phi^*(\overline{Z}_l u_k)(\phi^* \mathrm{d}\overline{z}^l) \wedge (\phi^* \mathrm{d}z^k) \\ &= \phi^*\left((-\overline{\partial})(u_k \mathrm{d}z^k)\right) = \phi^*(K(\star)|_U). \end{aligned}$$

Da aber $K(\star_{\mathrm{W}})$ global definiert ist, folgt $\phi^* K(\star_{\mathrm{W}}) = K(\star_{\mathrm{W}})$. Dieses Ergebnis hätte man ebenso unter Verwendung der zweiten Gleichung aus 4.10 erhalten, wie man leicht nachrechnet und wie es auch zu erwarten ist, da bereits eine der beiden Gleichungen $K(\star_{\mathrm{W}})$ festlegt.

Sei nun umgekehrt $\phi^* I = I$ und $\phi^* K(\star_{\mathrm{W}}) = K(\star_{\mathrm{W}})$, und wir wollen zeigen, daß dann für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ gilt $\phi^*(f \star_{\mathrm{W}} g) = \phi^* f \star_{\mathrm{W}} \phi^* g$. Man betrachte dazu das für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ folgendermaßen definierte Sternprodukt.

$$f \star'_{\mathrm{W}} g := \phi^{-1^*} \left(\phi^* f \star_{\mathrm{W}} \phi^* g\right).$$

Aus der Überlegung, daß $f \star_{\mathrm{W}} g = \sum_{r \geq 0} \nu^r C_r(f, g)$ geschrieben werden kann, folgt dann $f \star'_{\mathrm{W}} g = \sum_{r \geq 0} \nu^r \phi^{-1^*} C_r(\phi^* f, \phi^* g)$. Weil aber die C_r gemäß Gleichung (4.1) gegeben sind und nach Voraussetzung ϕ^{-1^*} komplex ist, folgt, daß $\star'_{\mathrm{W}}$ vom Wick-Typ auf $(M, \phi^*\omega, I)$ ist. Wegen $\phi^* K(\star_{\mathrm{W}}) = \phi^*\omega + \phi^*\Omega_{\mathrm{W}} = \omega + \Omega_{\mathrm{W}}$ ist $\star'_{\mathrm{W}}$ ein Sternprodukt vom Wick-Typ auf (M, ω, I).

Wir wollen zeigen, daß ϕ^* ein Automorphismus ist, also $\star'_{\mathrm{W}} = \star_{\mathrm{W}}$ gilt. Sternprodukte vom Wick-Typ auf (M, ω, I) sind durch Karabegovs charakterisierende Form eindeutig festgelegt, daher ist die Aussage bewiesen, falls $K(\star'_{\mathrm{W}}) = K(\star_{\mathrm{W}})$ gilt, da dann $\star'_{\mathrm{W}} = \star_{\mathrm{W}}$. Um das zu zeigen betrachte man die Karte $(z', U') = (\phi^{-1^*} z, \phi(U))$ und schreibe damit $\phi^{-1^*} Z_k = Z'_k$. Man berechnet wieder wie in (5.2):

$$f \star'_{\mathrm{W}} \phi^{-1^*} u_k = f \phi^{-1^*} u_k + \nu Z'_k(f)$$

mit $f \in \mathcal{C}^\infty(\phi(U))$. Damit ist wie oben

$$\begin{aligned} K(*'_{\mathrm{W}})|_{\phi(U)} &= -\overline{Z'}_l \left(\phi^{-1^*} u_k\right) \mathrm{d}\overline{z'}^l \wedge \mathrm{d}z'^k = \phi^{-1^*} \left(-\overline{Z}_l (u_k (\mathrm{d}\overline{z}^l \wedge \mathrm{d}z^k\right) \\ &= \phi^{-1^*} (K(\star_{\mathrm{W}})|_U) = K(\star)|_{\phi(U)} \end{aligned}$$

nach Voraussetzung, und die Proposition ist bewiesen. ■

Natürlich ist die Aussage, daß ϕ symplektisch sein muss, auch bereits nach Lemma 1.5 klar, dort wurde ja gerade ϕ^* auf $f \star_{\mathrm{W}} g - g \star_{\mathrm{W}} f = \nu\{f, g\} + \mathcal{O}(\nu^2)$ betrachtet.

Man beachte, daß der Beweis von Proposition 5.3 völlig elementar ist, und nur die Gleichungen 4.10 benutzt.

Ganz genauso lassen sich notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angeben, daß die Lieableitung eines Vektorfelds $X \in \Gamma^\infty(TM)$ eine $\star_{\mathrm{W}}$-Derivation ist.

Proposition 5.4 (vergl. [45, Prop. 3.2]) *Es sei $\star_{\mathrm{W}}$ ein Sternprodukt vom Wick-Typ auf (M,ω,I) mit Karabegovs charakterisierender Form $K(\star_{\mathrm{W}})$. Ferner sei $X \in \Gamma^\infty(TM)$ ein Vektorfeld. Dann ist $\mathcal{L}_X$ eine $\star_{\mathrm{W}}$-Derivation genau dann, wenn*

$$\mathcal{L}_X I = 0 \quad \textit{und} \quad \mathcal{L}_X K(\star_{\mathrm{W}}) = 0. \tag{5.3}$$

Beweis: Sei $\mathcal{L}_X$ eine $\star_{\mathrm{W}}$-Derivation, und es soll gezeigt werden, daß daraus notwendig folgt $\mathcal{L}_X I = 0 = \mathcal{L}_X K(\star_{\mathrm{W}})$. Man betrachte dazu die nach Lemma 4.5 auf einem kontrahierbaren Kartenbereich U gültige Gleichung $f \star_{\mathrm{W}} u_k = f u_k + \nu Z_k(f)$. Wendet man auf diese Gleichung die Lieableitung an und benutzt die Gleichung nochmals auf der linken Seite, so ergibt sich

$$X(f)u_k + \nu Z_k(X(f)) + f \star_{\mathrm{W}} X(u_k) = X(fu_k) + \nu X(Z_k(f)),$$

also

$$f \star_{\mathrm{W}} X(u_k) = f X(u_k) + \nu [X, Z_k](f). \tag{5.4}$$

Diese Gleichung muß für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(U)[[\nu]]$ gelten, also wähle $f = \overline{z}^l$ in der lokalen holomorphen Karte (z,U). Da $\star_{\mathrm{W}}$-Linksmultiplikation die gewöhnliche, punktweise Multiplikation ist, folgt damit $\nu[X,Z_k](\overline{z}^l) = 0$. In (z,U) schreibt man $X = \chi^m Z_m + \chi^{\overline{l}} \overline{Z}_l$ und berechnet

$$[X, Z_k] = -Z_k(\chi^m) Z_m - Z_k(\chi^{\overline{l}}) \overline{Z}_l. \tag{5.5}$$

Insbesondere folgt damit aus $\nu[X,Z_k](\overline{z}^l) = 0$, daß $-Z_k(\chi^{\overline{l}}) = 0$ sein muß, also ist $\chi^{\overline{l}}$ lokal antiholomorph. Berechnet man die Lieableitung auf der zweiten Gleichung aus (4.10), so ergibt sich

$$X(\overline{v}_l) \star_{\mathrm{W}} f = X(\overline{v}_l) f + \nu [X, \overline{Z}_l](f). \tag{5.6}$$

Völlig analog folgt daraus $\nu[X,\overline{Z}_l](z^n) = 0$, und mit

$$[X, \overline{Z}_l] = -\overline{Z}_l(\chi^m) Z_m - \overline{Z}_l(\chi^{\overline{k}}) \overline{Z}_k \tag{5.7}$$

ist daher $\overline{Z}_l(\chi^m) = 0$, also ist χ^m lokal holomorph.

Man betrachte nun $\mathcal{L}_X(IZ_k) = (\mathcal{L}_X I) Z_k + I(\mathcal{L}_X Z_k)$ und beachte dabei, daß Z_k vom Typ $(1,0)$ ist, das heißt, es gilt in lokalen holomorphen Koordinaten mithilfe von Gleichung (5.5):

$$(\mathcal{L}_X I) Z_k = \mathcal{L}_X(IZ_k) + I([X,Z_k]) = \mathrm{i}\mathcal{L}_X Z_k - I\left(Z_k(\chi^m) Z_m + Z_k(\chi^{\overline{l}}) \overline{Z}_l\right).$$

Da aber $Z_k(\chi^{\overline{l}}) = 0$ gilt, ist $[X, Z_k] = -Z_k(\chi^m) Z_m$, also vom Typ $(1,0)$, und daher ist $(\mathcal{L}_X I) Z_k = 0$. Ebenso folgt mit Gleichung (5.5) und der Tatsache, daß χ^m lokal holomorph ist, die Gleichung $(\mathcal{L}_X I)\overline{Z}_l = 0$. Damit verschwindet aber der Endomorphismus $(\mathcal{L}_X I) \in \Gamma^\infty(\mathrm{End}(TM))$ auf allen lokalen Basisvektorfeldern und damit überall, $\mathcal{L}_X I = 0$.

Um zu zeigen, daß auch $\mathcal{L}_X K(\star_\mathrm{W}) = 0$ ist, betrachte man $K(\star_\mathrm{W}) = \overline{\partial}(-u_k \mathrm{d}z^k)$. Da bereits $\mathcal{L}_X I = 0$ gezeigt ist, ist $\mathcal{L}_X$ auch mit ∂ und $\overline{\partial}$ verträglich, und es ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X K(\star_\mathrm{W}) &= -\overline{\partial}\mathcal{L}_X(u_k \mathrm{d}z^k) = -\overline{\partial}(X(u_k)\mathrm{d}z^k + u_k \mathcal{L}_X \mathrm{d}z^k) \\
&= -\overline{\partial}(X(u_k)\mathrm{d}z^k + u_k \mathrm{d}\chi^k) \\
&= -\left(\overline{Z}_l(X(u_k))\mathrm{d}\overline{z}^l \wedge \mathrm{d}z^k + X(u_k)\overline{\partial}\mathrm{d}z^k + \overline{Z}_l(u_k)\mathrm{d}\overline{z}^l \wedge \mathrm{d}\chi^k + u_k \overline{\partial}\mathrm{d}\chi^k\right) \\
&= -\left(\overline{Z}_l(X(u_k))\mathrm{d}\overline{z}^l \wedge \mathrm{d}z^k + \overline{Z}_l(u_k) Z_k(\chi^m)\mathrm{d}\overline{z}^l \wedge \mathrm{d}z^k\right), \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

wobei $\overline{\partial}\mathrm{d}\chi^k = 0$, da χ^k lokal holomorph ist und daher auch $\mathrm{d}\chi^m = Z_k(\chi^m)\mathrm{d}z^k$ gilt. Man wende nun nocheinmal $\mathcal{L}_X$ auf die Gleichung $\overline{v}_l \star_\mathrm{W} u_k = \overline{v}_l u_k + \nu \overline{Z}_l(u_k)$ an. Damit erhält man

$$X(\overline{v}_l)u_k + X(u_k)\overline{v}_l + \nu Z_k(X(\overline{v}_l)) + \nu \overline{Z}_l(X(u_k)) = X(\overline{v}_l)u_k + X(u_k)\overline{v}_l + \nu X(Z_k(\overline{v}_l)),$$

also gilt $X(Z_k(\overline{v}_l)) = Z_k(X(\overline{v}_l)) + \overline{Z}_l(X(u_k))$, das heißt

$$[X, Z_k](\overline{v}_l) = \overline{Z}_l(X(u_k)).$$

Aufgrund von Gleichung (5.5) ist aber andererseits

$$[X, Z_k](\overline{v}_l) = -Z_k(\chi^m)Z_m(\overline{v}_l) = -Z_k(\chi^m)\overline{Z}_l(u_m),$$

da stets $Z_m(\overline{v}_l) = \overline{Z}_l(u_m)$ ist. Also verschwindet die rechte Seite von (5.8), und es ist schließlich $\mathcal{L}_X K(\star_\mathrm{W}) = 0$.

Sei umgekehrt $\mathcal{L}_X I = 0 = \mathcal{L}_X K(\star_\mathrm{W})$. Wieder schreibe man $X = \chi + \underline{\chi}$ mit $\chi \in \Gamma^\infty(TM^{1,0})$ und $\underline{\chi} \in \Gamma^\infty(TM^{0,1})$, also in lokalen, holomorphen Koordinaten $X = \chi^n Z_n + \chi^{\overline{l}}\overline{Z}_l$. Da $\mathcal{L}_X I = 0$ ist, folgt aus $0 = (\mathcal{L}_X I)Z_k = \mathrm{i}\mathcal{L}_X Z_k - I\mathcal{L}_X Z_k$, daß $\mathcal{L}_X Z_k$ vom Typ $(1,0)$ ist. Aufgrund von Gleichung (5.5) muß daher lokal $Z_k(\chi^{\overline{l}}) = 0$ gelten, also $\chi^{\overline{l}}$ antiholomorph sein. Genauso folgt aus $\mathcal{L}_X(I\overline{Z}_m) - I\mathcal{L}_X\overline{Z}_m = 0$, daß $\mathcal{L}_X\overline{Z}_m$ vom Typ $(0,1)$ ist und daher nach Gleichung (5.7) χ^m holomorph sein muß.

Nun ist $0 = \mathcal{L}_X K(\star_\mathrm{W}) = \mathrm{d}(i_X K(\star_\mathrm{W}))$, und daher gibt es auf einem offenen, kontrahierbaren Kartenbereich U eine formale Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(U)[[\nu]]$ mit

$$i_X K(\star_\mathrm{W}) = i_{\chi+\underline{\chi}} K(\star_\mathrm{W}) = \mathrm{d}f = (\partial + \overline{\partial})f.$$

Weil χ und $\underline{\chi}$ vom Typ $(1,0)$ bzw. $(0,1)$ sind, ist daher insbesondere

$$i_\chi K(\star_\mathrm{W}) = \overline{\partial} f \quad \text{und} \quad i_{\underline{\chi}} K(\star_\mathrm{W}) = \partial f. \qquad (5.9)$$

Nun ist nach (4.12) $K(\star_{\mathrm{W}})|_U = Z_k(\overline{v}_l)\mathrm{d}z^k \wedge \mathrm{d}\overline{z}^l = \overline{Z}_l(u_k)\mathrm{d}z^k \wedge \mathrm{d}\overline{z}^l$. Daher ergibt sich aus der ersten Gleichung von (5.9)

$$\overline{Z}_k(f)\mathrm{d}\overline{z}^k = i_{\chi^n Z_n} K(\star_{\mathrm{W}}) = \chi^n \overline{Z}_l(u_n)\mathrm{d}\overline{z}^l = \overline{Z}_l(u_n\chi^n))\mathrm{d}\overline{z}^l - \underbrace{\overline{Z}_l(\chi^n)u_n \mathrm{d}\overline{z}^l}_{=0},$$

also ist lokal

$$f = u_k\chi^n + h \tag{5.10}$$

mit einer lokal holomorphen formalen Funktion h. Genauso ergibt sich aus der zweiten Gleichung von (5.9) die Gleichung $Z_k(f) = -Z_k(\overline{v}_l\chi^{\overline{l}})$, also ist

$$f = -\overline{v}_l\chi^{\overline{l}} + \overline{h} \tag{5.11}$$

mit $\overline{h} \in \overline{\mathcal{O}}(U)$. Weil nun $\star_{\mathrm{W}}$-Linksmultiplikation mit $\chi^{\overline{l}}$ und $\star_{\mathrm{W}}$-Rechtsmultiplikation mit χ^n beide gleich der punktweisen Multiplikation sind, ist für irgendein $g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ mit diesen Ergebnissen einerseits

$$g\star_{\mathrm{W}} f = g\star_{\mathrm{W}}(u_n\star_{\mathrm{W}}\chi^n + h) = gh + (g\star_{\mathrm{W}}u_n)\star_{\mathrm{W}}\chi^n = gh + (g\star_{\mathrm{W}}u_n)\chi^n = gh + (gu_n + \nu Z_n(g))\chi^n,$$

andererseits ist genauso

$$f \star_{\mathrm{W}} g = (\overline{h} - \overline{v}_l\chi^{\overline{l}}) \star_{\mathrm{W}} g = \overline{h}g - \chi^{\overline{l}}(\overline{v}_l g - \nu\overline{Z}_l(g)).$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\mathrm{ad}_{\star_{\mathrm{W}}}(f)g = f \star_{\mathrm{W}} g - g \star_{\mathrm{W}} f = \overline{h}g - \chi^{\overline{l}}(\overline{v}_l g + \nu\overline{Z}_l(g)) - gh - (gu_k + \nu Z_k(g))\chi^k.$$

Nun gilt aufgrund der Gleichungen (5.10) und (5.11) $0 = \overline{h} - h - \chi^{\overline{l}}\overline{v}_l - \chi^k u_k$, und setzt man dies wieder in $\mathrm{ad}_{\star_{\mathrm{W}}}(f)g$ ein, so erhält man

$$\mathrm{ad}_{\star_{\mathrm{W}}}(f)g = -\nu\left(\chi^{\overline{l}}\overline{Z}_l + \chi^n Z_n\right)(g) = -\nu X(g) = -\nu\mathcal{L}_X g.$$

Damit ist aber gezeigt, daß es für jeden offenen, kontrahierbaren Kartenbereich $U \subset M$ eine lokal definierte formale Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(U)[[\nu]]$ gibt, für die

$$X|_{\mathcal{C}^\infty(U)[[\nu]]} = \mathcal{L}_X|_{\mathcal{C}^\infty(U)[[\nu]]} = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\star_{\mathrm{W}}}(f)|_{\mathcal{C}^\infty(U)[[\nu]]}. \tag{5.12}$$

Damit ist $\mathcal{L}_X$ für alle offenen, kontrahierbaren $U \subset M$ immer lokal sogar eine quasi-innere $\star_{\mathrm{W}}$-Derivation und daher insbesondere eine Derivation. ■

Mit den Ergebnissen aus dem Beweis von Proposition 5.4 kann man nun sofort auf elementare Art und Weise eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angeben, daß die Lieableitung eine quasi-innere $\star_{\mathrm{W}}$-Derivation ist. Auch diese Aussage ließe sich prinzipiell mithilfe der Fedosov-Konstruktion für Sternprodukte $*_{\mathrm{W}}$ vom Wick-Typ erhalten. Dafür benötigte man wie in Abschnitt 3.1 die explizite Konstruktion von $*_{\mathrm{W}}$-Derivationen und ein Analogon der deformierten Cartanformel für Sternprodukte vom Wick-Typ. Man vergleiche auch hier, um wieviel einfacher der auf Karabegovs Konstruktion beruhende Beweis ist.

Satz 5.5 (vergleiche [45, Prop. 3.5]) *Es sei $\star_{\mathrm{W}}$ ein Sternprodukt vom Wick-Typ auf (M, ω, I) und $K(\star_{\mathrm{W}})$ sei die zugehörige Karabegov-Form. Sei $X \in \Gamma^\infty(TM)$ und sei $\mathcal{L}_X$ eine $\star_{\mathrm{W}}$-Derivation. Dann ist $\mathcal{L}_X$ sogar quasi-innere Derivation – das heißt, es gibt eine formale Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ mit $\mathcal{L}_X = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\star_{\mathrm{W}}}(f)$ – genau dann, wenn es eine formale Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ gibt mit*

$$\mathrm{d}f = i_X K(\star_{\mathrm{W}}). \tag{5.13}$$

Ist das der Fall, so ist $\mathcal{L}_X g = X(g) = X_{f_0}(g) = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\star(f)g$ für alle $g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$, wobei wieder $f = f_0 + f_+$ mit $f_0 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ and $f_+ \in \nu\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$.

Beweis: Sei $\mathcal{L}_X$ eine $\star_{\mathrm{W}}$-Derivation. Dann ist nach Proposition 5.4 $\mathcal{L}_X I = 0 = \mathcal{L}_X K(\star_{\mathrm{W}})$. Im Beweis von Proposition 5.4 wurde aber bereits gezeigt, daß aus $\mathcal{L}_X I = 0 = \mathcal{L}_X K(\star_{\mathrm{W}})$ folgt, daß es auf jedem kontrahierbaren offenen Kartenbereich $U \subseteq M$ eine lokal definierte formale Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(U)[[\nu]]$ gibt, welche $\mathrm{d}f = i_X K(\star_{\mathrm{W}})|_U$ erfüllt, und daß daraus folgt, daß $X|_{\mathcal{C}^\infty(U)} = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\star_{\mathrm{W}}}(f)|_{\mathcal{C}^\infty(U)}$. Gibt es also eine global definierte formale Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$, die der Gleichung $\mathrm{d}f = i_X K(\star_{\mathrm{W}})$ genügt, so gilt nach Gleichung (5.12) global $\mathcal{L}_X = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\star_{\mathrm{W}}}(f)$.

Ist umgekehrt $\mathcal{L}_X$ eine quasi-innere Derivation, dann gilt für alle $g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$, mit $X = \chi + \underline{\chi}$, $\chi \in \Gamma^\infty(TM^{1,0})$ und $\underline{\chi} \in \Gamma^\infty(TM^{0,1})$:

$$\nu\left(\chi(g) + \underline{\chi}(g)\right) = g \star_{\mathrm{W}} f - f \star_{\mathrm{W}} g. \tag{5.14}$$

Da $\star_{\mathrm{W}}$ vom Wick-Typ ist, ist $f \star_{\mathrm{W}} g = fg + \mathcal{D}_f(g)$, wobei $\mathcal{D}_f$ lokal der durch $\sum_{r \geq 1} \nu^r C_r(f, \cdot)$ mit C_r wie in (4.1) gegebene Differentialoperator ist. Insbesondere enthält $\mathcal{D}_f$ nur Ableitungen von g in antiholomorphe Richtungen. Ebenso ist $g \star_{\mathrm{W}} f = fg + \mathcal{E}_f(g)$, und $\mathcal{E}_f$ ist ein Differentialoperator, der auf Konstanten verschwindet und der nur Ableitungen in holomorphe Richtungen enthält. Damit ist

$$g \star_{\mathrm{W}} f - f \star_{\mathrm{W}} g = \mathcal{E}_f(g) - \mathcal{D}_f(g).$$

Aufgrund von (5.14) ist dann aber $\mathcal{D}_f(g) = -\nu\underline{\chi}(g)$ und $\mathcal{E}_f(g) = \nu\chi(g)$, das heißt, es ist

$$f \star_{\mathrm{W}} g = fg - \nu\underline{\chi}(g) \quad \text{und} \quad g \star_{\mathrm{W}} f = fg + \nu\chi(g).$$

Mittels der Gleichungen (4.10) ist dann $\underline{\chi}(u_k) = -Z_k(f)$ und $\chi(\overline{v}_l) = \overline{Z}_l(f)$, somit also

$$\partial f = -\chi^{\overline{l}}\overline{Z}_l(u_k)\mathrm{d}z^k \qquad \text{und} \qquad \overline{\partial} f = \chi^n Z_n(\overline{v}_j)\mathrm{d}\overline{z}^j. \tag{5.15}$$

Da aber gemäß (4.12) $K(\star_{\mathrm{W}}) = -\overline{Z}_j(u_k)\mathrm{d}\overline{z}^j \wedge \mathrm{d}z^k = Z_j(\overline{v}_l)\mathrm{d}z^j \wedge \mathrm{d}\overline{z}^l$ ist, folgt mit den Gleichungen (5.15):

$$i_\chi K(\star_{\mathrm{W}}) = \chi^n Z_n(\overline{v}_l)\mathrm{d}\overline{z}^l = \overline{\partial} f \quad \text{und} \quad i_{\underline{\chi}} K(\star_{\mathrm{W}}) = -\chi^{\overline{l}}\overline{Z}^l(u_k)\mathrm{d}z^k = \partial f.$$

Damit ist aber $i_X K(\star_{\mathrm{W}}) = i_{\chi+\underline{\chi}}K(\star_{\mathrm{W}}) = (\partial + \overline{\partial})f = \mathrm{d}f$, und die Exaktheit von $i_X K(\star_{\mathrm{W}})$ ist also eine notwendige Bedingung dafür, daß $\mathcal{L}_X$ eine quasi-innere $\star_{\mathrm{W}}$-Derivation ist.

Da schließlich $\mathrm{d}f = \mathrm{d}f_0 + \mathrm{d}f_+ = i_X(\omega + \Omega_{\mathrm{W}})$ gilt, ist offensichtlich $\mathrm{d}f_0 = i_X\omega$, also $X = X_{f_0}$ ein Hamiltonsches Vektorfeld zur Funktion f_0. ■

5.2 Klassifikation invarianter Sternprodukte vom Wick-Typ und Quantenimpulsabbildungen

Mittels der in Abschnitt 5.1 bewiesenen Aussagen läßt sich jetzt eine Verschärfung des Klassifikationsergebnisses [5, Thm. 4.1] erzielen. Eine wichtige Folgerung aus den Propositionen 5.3 und 5.4 ist insbesondere die Tatsache, daß für einen Diffeomorphismus ϕ, dessen induzierte Abbildung ϕ^* ein $\star_{\mathrm{W}}$-Automorphimus ist notwendig $\phi^*g = g$ gilt, und daß für ein Vektorfeld X, dessen Lieableitung eine $\star_{\mathrm{W}}$-Derivation ist notwendig $\mathcal{L}_X g = 0$ ist. Die isometrischen Diffeomorphismen einer Riemannschen Mannigfaltigkeit besitzen aber [36, Bd. I, Note 9, S. 288ff, Bd. II, Note 13., Thm. 1, S. 333] die Struktur einer endlichdimensionalen Liegruppe, und eine analoge Aussage gilt für die Liealgebra der Killingvektorfelder. Es stellt daher jetzt keine Einschränkung mehr dar, wenn ab sofort stets die Wirkungen endlichdimensionaler, reeller oder komplexer Liegruppen oder Liealgebren betrachtet werden.

Zuerst werden nochmals einige Definitionen zur Invarianz von Sternprodukten bezüglich der Wirkung einer Liegruppe benötigt [2].

Sei $\mathcal{G}$ eine Liegruppe und sei $\Phi : \mathcal{G} \times M \to M$ eine (Links-) Wirkung von $\mathcal{G}$ auf M, wobei für alle $g \in \mathcal{G}$ mit ϕ_g der durch $\phi_g(m) := \Phi(g, m)$ gegebene Diffeomorphismus bezeichnet werde. Dann ist für alle $g \in \mathcal{G}$ durch

$$\mathcal{R} : (g, f) \mapsto \mathcal{R}_g(f) =: \phi^*_{g^{-1}} f \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]] \tag{5.16}$$

eine (Links-) Wirkung von $\mathcal{G}$ auf $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ gegeben, wobei mit ϕ^* auch die natürliche (also komponentenweise) Fortsetzung der induzierten Abbildung ϕ^* auf $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ bezeichnet sei.

Definition 5.6 *Ein Sternprodukt $\star$ heißt $\mathcal{G}$–invariant [2], falls für alle $g \in \mathcal{G}$ die Abbildung $\mathcal{R}_g$ ein $\star$-Automorphismus ist, das heißt, falls für alle $u, v \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ gilt $\mathcal{R}_g(u \star v) = \mathcal{R}_g(u) \star \mathcal{R}_g(v)$.*

Es sei nun wie in Abschnitt 3.3 $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale, reelle oder komplexe Liealgebra, und gemäß Gleichung (3.16) sei wieder ein Liealgebren-Antihomomorphismus von $\mathfrak{g}$ in die Liealgebra $\Gamma^\infty_{\mathrm{symp}}(TM)$ definiert durch $X_\cdot : \zeta \mapsto X_\zeta$ und $[X_\zeta, X_\eta] = -X_{[\zeta,\eta]}$ für alle $\zeta, \eta \in \mathfrak{g}$. Wie in (3.17) sei dann eine Liealgebren-Wirkung $\rho(\zeta)f := -\mathcal{L}_{X_\zeta} f = -X_\zeta(f)$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ und für alle $\zeta \in \mathfrak{g}$ von $\mathfrak{g}$ auf $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ gegeben. Wie in Definition 3.12 heiße ein Sternprodukt $\star$ $\mathfrak{g}$–invariant, falls für alle $\zeta \in \mathfrak{g}$ die Abbildung $\rho(\zeta)$ eine $\star$-Derivation ist. Für den Fall, daß $\mathfrak{g}$ die Liealgebra $\mathrm{Lie}(\mathcal{G})$ einer Liegruppe $\mathcal{G}$ ist, erhält man eine solche Liealgebren-Wirkung ρ wie in (3.17) insbesondere aus $\mathcal{R}$ durch die sogenannten infinitesimalen Erzeugenden $X_\xi(m) := \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \Phi(\exp(t\xi), m)$ für alle $m \in M$. Ist ein Sternprodukt $\mathcal{G}$-invariant, so ist es insbesondere auch $\mathfrak{g}$-invariant für $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathcal{G})$. Für eine zusammenhängende Liegruppe $\mathcal{G}$ folgt (vergl. [1, Chap. 4]) aus $\mathrm{Lie}(\mathcal{G})$-Invarianz auch die $\mathcal{G}$-Invarianz eines gegebenen Sternprodukts.

Analog zu Abschnitt 3.3 können nun mittels der Propositionen 5.3 and 5.4 sofort notwendige und hinreichende Bedingungen für die $\mathcal{G}$-Invarianz und $\mathfrak{g}$-Invarianz eines Sternprodukts vom Wick-Typ hergeleitet werden. Darüberhinaus wird eine vollständige Klassifizierung invarianter Sternprodukte vom Wick-Typ erreicht:

Proposition 5.7 *Sei wieder (M, ω, I) eine Kähler-Mannigfaltigkeit, $\mathcal{R}$ die Aktion einer Liegruppe $\mathcal{G}$ wie in (5.16) und ρ die Aktion einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ wie in (3.17).*

i.) Es gibt $\mathcal{G}$-invariante Sternprodukte $\star_{\mathrm{W}}$ vom Wick-Typ (M, ω, I) genau dann, wenn

$$\phi_g^* I = I \quad \textit{und} \quad \phi_g^* \omega = \omega$$

für alle $g \in \mathcal{G}$. Die Einschränkung der Abbildung $\mathcal{K}$ aus (4.14) in Satz 4.7 auf $\mathcal{G}$–invariante Sternprodukte ${\star_{\mathrm{W}}}^{\mathrm{inv}}$ vom Wick-Typ ist eine Bijektion:

$$\mathcal{K} : \{{\star_{\mathrm{W}}}^{\mathrm{inv}}\} \mapsto \{\Omega_{\mathrm{W}} \in \nu Z^2_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{C})^{1,1}[[\nu]] \,|\, \phi_g^* \Omega_{\mathrm{W}} = \Omega_{\mathrm{W}} \ \forall g \in G\}.$$

ii.) Es gibt $\mathfrak{g}$-invariante Sternprodukte $\star_{\mathrm{W}}$ vom Wick-Typ (M, ω, I) genau dann, wenn

$$\mathcal{L}_{X_\zeta} I = 0 \quad \textit{und} \quad \mathcal{L}_{X_\zeta} \omega = 0$$

für alle $\zeta \in \mathfrak{g}$*. Die Einschränkung der Abbildung* $\mathcal{K}$ *aus (4.14) in Satz 4.7 auf* $\mathfrak{g}$*–invariante Sternprodukte* $\star_{\mathrm{W}}{}^{\mathrm{inv}}$ *vom Wick-Typ ist eine Bijektion:*

$$\mathcal{K} : \{\star_{\mathrm{W}}{}^{\mathrm{inv}}\} \mapsto \{\Omega_{\mathrm{W}} \in \nu Z^2_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{C})^{1,1}[[\nu]] \,|\, \mathcal{L}_{X_\xi}\Omega_{\mathrm{W}} = 0 \ \forall \xi \in \mathfrak{g}\}.$$

Die Menge der invarianten Sternprodukte vom Wick-Typ wird also eindeutig beschrieben durch die Menge der invarianten Elemente von $\nu Z^2_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{C})^{1,1}[[\nu]]$*.*

In [5, Thm. 4.1] wurde für beliebige Sternprodukte auf symplektischen Mannigfaltigkeiten für den Fall der Wirkung einer Untergruppe der affinen, symplektischen Diffeomorphismen eine schwächere Form dieser Klassifizierung angegeben, die, ausgehend von hinreichenden Bedingungen für Invarianz, spezielle Äquivalenzklassen der betrachteten Sternprodukte durch invariante Elemente von $H^2_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{C})[[\nu]]$ parametrisiert.

Bisweilen werden bei Untersuchungen von Invarianz von Sternprodukten bezüglich der Wirkungen von Liegruppen zusätzliche Annahmen gemacht, beispielsweise Kompaktheit von $\mathcal{G}$ (etwa in [28]), welche garantiert, daß die Aktion $\mathcal{R}$ eigentlich ist. Dies ist wiederum eine der Voraussetzungen der Marsden-Weinstein Reduktion der klassischen Mechanik, siehe etwa [1, Chap. 4.3]. Ist etwa die Gruppenwirkung effektiv, so ergibt sich für zusammenhängende, kompakte Kählermannigfaltigkeiten beispielsweise aus Proposition 5.7, daß für ein $\mathcal{G}$-invariantes Sternprodukt vom Wick Typ auf einer solchen Mannigfaltigkeit $\mathcal{G}$ bereits kompakt sein muss [36, Bd. I, Chap. VI, Thm. 3.4]. Somit wäre in diesem Spezialfall die Annahme der Kompaktheit keine Einschränkung mehr; hier werden aber weiterhin außer den für Invarianz notwendigen Bedingungen keine derartigen Annahmen gemacht.

Es ist in diesem Zusammenhang auch bemerkenswert, daß die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für $\mathcal{G}$-Invarianz eines Sternprodukts vom Wick-Typ auf (M, ω, I) auch hinreichende Bedingungen dafür sind, daß, falls ein klassisch reduzierter Phasenraum existiert, dieser eine Kählerstruktur besitzt (siehe etwa [29]). Das heißt, die Invarianz eines Sternprodukts vom Wick-Typ erzwingt die Verträglichkeit der Kählerstruktur mit der klassischen Reduktion.

Für den Rest dieses Kapitels sollen nun nur noch Aktionen einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ untersucht werden. Für den Fall der Aktion (5.16) einer Liegruppe $\mathcal{G}$ werde stets die Aktion ρ von $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathcal{G})$ mittels der infinitesimalen Erzeugenden betrachtet. Wenn also von invarianten Sternprodukten die Rede ist, so ist damit immer $\mathfrak{g}$-Invarianz bzw. $\mathrm{Lie}(\mathcal{G})$-Invarianz gemeint. Weiter beachte man, daß im Fall der Wirkung $\mathcal{R}$ einer Liegruppe $\mathcal{G}$ eine gegebene Hamiltonfunktion eine Impulsabbildung ist, falls sie Ad^*-äquivariant ist, das heißt mit der in Abschnitt 3.3 eingeführten Notation, falls für alle $g \in \mathcal{G}$ und alle $\zeta \in \mathfrak{g}$ gilt

$$\mathcal{R}_g J_0(\zeta) = J_0(\mathrm{Ad}(g)\zeta),$$

da diese Bedingung nach [1, Cor. 4.2.9] hinreichend dafür ist, daß J_0 einen Liealgebren-Homomorphismus von $\mathfrak{g}$ auf die Liealgebra $(\mathcal{C}^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$ definiert, also J_0 nach Abschnitt 3.3 eine klassische Impulsabbildung definiert.

Man erinnere sich nun an die Definitionen und Schreibweisen aus Abschnitt 3.3, insbesondere die Begriffe der Hamiltonschen Wirkung aus Definition 3.14, der Quanten-Hamiltonfunktion und der Quanten-Impulsabbildung aus den Definitionen 3.15 und 3.16. Wie für die klassische Impulsabbildung J_0 ist im Falle der Wirkung $\mathcal{R}$ einer Liegruppe $\mathcal{G}$ eine Ad*-äquivariante Quanten-Hamiltonfunktion J bereits eine Quantenimpulsabbildung, was man wie im klassischen Fall einfach daran sieht, daß

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathcal{R}_{\exp(t\zeta)}(J(\eta)) &= \rho(\zeta)J(\eta) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\star_{\mathrm{W}}}(J(\zeta))J(\eta) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} J\left(\mathrm{Ad}(\exp(t\zeta))\eta\right) = J(\mathrm{ad}(\zeta)\eta) \end{aligned}$$

gilt und somit die Definition 3.16 einer Quantenimpulsabbildung die „infinitesimale" Version der Ad*-Äquivarianz einer gegebenen Quanten-Hamiltonfunktion ist. Mit den Ergebnissen dieses Kapitels ist es jetzt leicht, für Sternprodukte vom Wick-Typ notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit von Quanten-Hamiltonfunktionen und Quantenimpulsabbildungen zu nennen. Wie in Satz 3.17 erhält man direkt:

Satz 5.8 *Ein invariantes Sternprodukt $\star_{\mathrm{W}}$ vom Wick-Typ auf (M,ω,I) mit Karabegovs charakterisierender Form $K(\star_{\mathrm{W}})$ besitzt eine Quanten-Hamiltonfunktion genau dann, wenn es ein $J \in C^1(\mathfrak{g}, \mathcal{C}^\infty(M))[[\nu]]$ gibt, so daß für alle $\zeta \in \mathfrak{g}$ gilt*

$$\mathrm{d}J(\zeta) = i_{X_\zeta} K(\star_{\mathrm{W}}), \tag{5.17}$$

das heißt genau dann, wenn für die deRham-Kohomologieklasse von $i_{X_\zeta}K(\star_{\mathrm{W}})$ gilt:

$$[i_{X_\zeta}K(\star_{\mathrm{W}})] = [0].$$

Diese Bedingung bedeutet insbesondere, daß J bis auf formale Konstanten in $C^1(\mathfrak{g},\mathbb{C})[[\nu]]$ festgelegt ist. Mittels Satz 5.5 läßt sich Gleichung (5.17) aufgrund der Tatsache, daß $X_\zeta = X_{J_0(\zeta)}$ gelten muß, insbesondere schreiben als $\mathrm{d}J_+(\zeta) = i_{X_{J_0(\zeta)}}(K(\star_{\mathrm{W}}) - \omega)$.

Wie schon im Fall der Fedosov-Sternprodukte $*_{\mathrm{F}}$ ist bereits aufgrund von Proposition 3.2 klar, daß die Bedingung $H^1_{\mathrm{dR}}(M)[[\nu]] = \{0\}$ ausreicht, zu garantieren, daß Quanten-Hamiltonfunktionen für ein beliebiges invariantes Sternprodukt $\star$ existieren. Im hier untersuchten Fall der Sternprodukte vom Wick-Typ ist wie in Abschnitt 3.3 schon die wesentlich schwächere Bedingung hinreichend, daß lediglich ganz bestimmte Kohomologieklassen verschwinden müssen.

Man erinnere sich an Definition der starken Invarianz (Definition 3.18). Auch hier erhält man sofort:

Satz 5.9 *Es sei $\star_{\mathrm{W}}$ ein invariantes Sternprodukt vom Wick-Typ auf (M, ω, I) mit Karabegovs charakterisierender Form $K(\star_{\mathrm{W}})$. Weiter sei J_0 eine klassische Impulsabbildung bezüglich ρ oder $\mathcal{R}$. Dann ist $\star_{\mathrm{W}}$ stark invariant genau dann, wenn für alle $\zeta \in \mathfrak{g}$ gilt:*

$$i_{X_\zeta}(K(\star_{\mathrm{W}}) - \omega) = 0.$$

Wie in Satz 3.19 gezeigt wurde ist dann sogar jede klassische Impulsabbildung auch eine Quantenimpulsabbildung.

Beweis: Der Beweis ist völlig analog zum Beweis von Satz 3.19 und eine einfache Folgerung aus Satz 5.8. Denn J_0 ist Quanten-Hamiltonfunktion genau dann, wenn $\mathrm{d}J_0(\zeta) = i_{X_\zeta} K(\star_{\mathrm{W}}) = i_{X_{J_0(\zeta)}} K(\star_{\mathrm{W}}) = \mathrm{d}J_0(\zeta) + i_{X_\zeta}\Omega_{\mathrm{W}}$ für alle $\zeta \in \mathfrak{g}$ gilt, was genau dann der Fall ist, wenn $i_{X_\zeta}(K(\star_{\mathrm{W}}) - \omega) = i_{X_\zeta}\Omega_{\mathrm{W}} = 0$. ■

Ebenfalls direkt und ohne weitere Rechnung lassen sich die weiteren Ergebnisse aus Abschnitt 3.3 übertragen. Sei eine Quanten-Hamiltonfunktion J zur Wirkung $\mathcal{R}$ oder ρ für ein invariantes Sternprodukt $\star_{\mathrm{W}}$ vom Wick-Typ gegeben. Man betrachte die in (3.21) definierte 2-Kokette $\lambda \in C^2(\mathfrak{g}, \mathcal{C}^\infty(M))[[\nu]]$. Dann gilt

Proposition 5.10 ([45, Prop. 4.3]) *Es sei $\star_{\mathrm{W}}$ ein Sternprodukt vom Wick-Typ und J eine zur Wirkung $\mathcal{R}$ oder ρ zugehörige Quanten-Hamiltonfunktion. Definiert man eine 2-Kokette $\lambda \in C^2(\mathfrak{g}, \mathcal{C}^\infty(M))[[\nu]]$ wie in (3.21), so ist λ konstant, d.h. $\lambda \in C^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$. Weiter ist λ sogar ein 2-Kozykel, $\lambda \in Z_0^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$, welcher in diesem Fall explizit angegeben werden kann:*

$$\lambda(\zeta, \eta) = K(\star_{\mathrm{W}})(X_\zeta, X_\eta) - J([\zeta, \eta]). \tag{5.18}$$

Die Kohomologieklasse $[\lambda] \in H_0^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$ ist dabei unabhängig von der Wahl von J. Es gibt Quantenimpulsabbildungen genau dann, wenn $[\lambda] = [0] \in H_0^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$. Tatsächlich ist für alle $a \in C^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$ mit $\delta_0 a = \lambda$ die Abbildung $J^a := J - a \in C^1(\mathfrak{g}, \mathcal{C}^\infty(M))[[\nu]]$ eine Quantenimpulsabbildung für $\star_{\mathrm{W}}$, die Quantenimpulsabbildung ist also eindeutig bis auf Elemente von $Z_0^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$. Damit ist aber eine Quantenimpulsabbildung eindeutig bestimmt genau dann, wenn $H_0^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = 0$.

Wieder beachte man, daß auch hier, anders als im von Xu [64] studierten Fall, der 2-Kozykel λ konkret mithilfe von Karabegovs charakterisierender Form $K(\star_{\mathrm{W}})$ und der Abbildung $X_\cdot$ aus (3.16) angegeben werden kann. Abschließend betrachten wir noch das

Analogon von Satz 3.21. Sei also (M, ω, I) eine Kählermannigfaltigkeit mit einer Hamiltonschen $\mathcal{G}$- oder $\mathfrak{g}$-Wirkung, und sei eine klassische Impulsabbildung gegeben.

Satz 5.11 ([45, Cor. 4.5]) *Sei $\star_{\mathrm{W}}$ ein invariantes Sternprodukt vom Wick-Typ auf (M, ω, I) und sei J_0 eine klassische Impulsabbildung zur Liealgebrenaktion ρ aus (3.17). Für die Existenz einer zugehörigen Quantenimpulsabbildung ist notwendig und hinreichend, daß es eine formale 1-Kokette $J_+ \in \nu C^1(\mathfrak{g}, \mathcal{C}^\infty(M))[[\nu]]$ gibt, welche für alle $\zeta, \eta \in \mathfrak{g}$ die Gleichungen*

$$i_{X_\zeta}(K(\star_{\mathrm{W}}) - \omega) = i_{X_{J_0(\zeta)}}(K(\star_{\mathrm{W}}) - \omega) = \mathrm{d}J_+(\zeta)$$

und

$$(\delta_\rho J_+)(\zeta, \eta) = (K(\star_{\mathrm{W}}) - \omega)(X_\zeta, X_\eta) = (K(\star_{\mathrm{W}}) - \omega)(X_{J_0(\zeta)}, X_{J_0(\eta)})$$

erfüllt. Aus Proposition (5.10) folgt zudem sofort, daß dann J_+ bis auf Elemente von $\nu Z_0^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$ bestimmt ist.

Beweis: Der Beweis ist völlig analog zum Beweis von Satz 3.21. Die genannten Bedingungen sind äquivalent dazu, daß J erstens eine Quanten-Hamiltonfunktion und zweitens nach Proposition 5.10 sogar eine Quantenimpulsabbildung ist. Nach Satz 5.8 ist die Gültigkeit der ersten Gleichung notwendig und hinreichend für die Existenz einer Quanten-Hamiltonfunktion. Damit diese eine Quantenimpulsabbildung definiert, muß $\lambda(\zeta, \eta) = 0$ für alle ζ, η in $\mathfrak{g}$ gelten, also folgt, weil $X_\zeta = X_{J_0(\zeta)}$ und $X_\eta = X_{J_0(\eta)}$ Hamiltonsch sein müssen insbesondere, daß $J_+([\zeta, \eta]) = (K(\star_{\mathrm{W}}) - \omega)(X_\zeta, X_\eta)$. Andererseits ist wie im Beweis von Satz 3.21

$$\begin{aligned}
(\delta_\rho J_+)(\zeta, \eta) &= \{J_0(\zeta), J_+(\eta)\} - \{J_0(\eta), J_+(\zeta)\} - J_+([\zeta, \eta]) \\
&= -\mathcal{L}_{X_{J_0(\zeta)}} J_+(\eta) + \mathcal{L}_{X_{J_0(\eta)}} J_+(\zeta) - (K(\star_{\mathrm{W}}) - \omega)(X_\zeta, X_\eta) \\
&= (K(\star_{\mathrm{W}}) - \omega)(X_\zeta, X_\eta) = (K(\star_{\mathrm{W}}) - \omega)(X_{J_0(\zeta)}, X_{J_0(\eta)}).
\end{aligned}$$

Die Aussage, daß J_+ bis auf Elemente von $\nu Z_0^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$ bestimmt sei, ist wieder klar aufgrund der Aussage von Proposition (5.10), daß eine Quantenimpulsabbildung bis auf Elemente von $Z_0^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C})[[\nu]]$ bestimmt ist. ∎

Wie bereits im Fall der Fedosov-Sternprodukte in Kapitel 3 ist es aufgrund von Satz 5.11 möglich, die von Xu [64] für Fedosov-Sternprodukte gestellte, wichtige Frage zu beantworten, ob aus der Existenz einer klassischen Impulsabbildung immer die Existenz einer (Xu-)Quantenimpulsabbildung folge. Auch für Sternprodukte $\star_{\mathrm{W}}$ vom Wick-Typ ist das im allgemeinen nicht der Fall, da Karabegovs charakterisierende Form $K(\star_{\mathrm{W}})$ allgemein eine nicht-triviale Deformation von ω ist.

Beispiele und Ausblick

Wie bereits in Kapitel 3 möchte ich jetzt noch einige wichtige Beispiele nennen und zudem auf mögliche Gegenstände weiterer Untersuchungen hinweisen.

Halbeinfache Liealgebren

Natürlich gilt auch für Sternprodukte vom Wick-Typ genauso wie in dem am Schluß von Kapitel 3 erklärten Beispiel, daß es im Fall der Wirkung einer halbeinfachen Liealgebra aufgrund der Whitehead-Lemmas und aufgrund des deformierten Sternberg-Lemmas für ein gegebenes invariantes Sternprodukt vom Wick-Typ immer eine eindeutige Quantenimpulsabbildung gibt.

Dieser Fall ist für Sternprodukte vom Wick-Typ deswegen besonders interessant, weil nach [36, Bd. II, Note 13, p. 335] die Liegruppe $\mathcal{G}$ (und damit auch die Liealgebra $\mathrm{Lie}(\mathcal{G})$) der Isometrien einer zusammenhängenden, kompakten, homogenen Riemannschen Mannigfaltigkeit M halbeinfach ist, falls für die Euler-Charakteristik $\chi(M)$ gilt $\chi(M) \neq 0$. Also gibt es für invariante Sternprodukte vom Wick-Typ auf solchen Mannigfaltigkeiten immer eine eindeutige Quantenimpulsabbildung.

Bemerkung: Tatsächlich ist die Bedingung, daß die $\star_{\mathrm{W}}$-Automorphismen und Derivationen notwendig isometrisch sein müssen, eine einschneidende Forderung. Möglicherweise ist es sinnvoll, für Diffeomorphismen ϕ auf M bzw. Vektorfelder $X \in \Gamma^\infty(TM)$ anstelle von ϕ^* und $\mathcal{L}_X$ Deformationen $\psi^* = \phi^* + \mathcal{O}(\nu)$ und $\mathcal{X} = \mathcal{L}_X + \mathcal{O}(\nu)$ zu untersuchen.

Das Sternprodukt $*_{\mathrm{W}}$ nach Bordemann und Waldmann

In der ersten Konstruktion eines Sternprodukts vom Wick-Typ mittels der Fedosov-Konstruktion in [10] sind die Autoren vom Spezialfall $\Omega_{\mathrm{W}} = 0$ ausgegangen. In diesem Fall ist nach Proposition 5.7 und Satz 5.9 ein Sternprodukt vom Wick-Typ stark invariant, falls die symplektische Form ω und die komplexe Struktur I invariant sind (insbesondere ist dann auch der Riemann-Zusammenhang auf M invariant), und falls es dann eine klassische Impulsabbildung gibt, so ist diese auch Quantenimpulsabbildung.

Abelsche Liealgebren

Wie in Kapitel 3 ist für die Aktion einer Abelschen Liealgebra $\mathfrak{g}$ nicht klar, ob die Vektorfelder X_η für alle $\eta \in \mathfrak{g}$ Hamiltonsch sind oder nicht. Selbst wenn es eine Quantenimpulsabbildung gibt, so kann man diese immer um ein beliebiges Element der dualen Liealgebra $\mathfrak{g}^*$ abändern.

Existenz eines invarianten formalen Potentials für die Karabegov-Form

Sei $\star_{\mathrm{W}}$ ein invariantes Sternprodukt vom Wick-Typ auf (M, ω, I). Sei weiter ein globales formales Kählerpotential $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ für $K(\star_{\mathrm{W}})$ gegeben, also $K(\star_{\mathrm{W}}) = \partial\overline{\partial}\varphi$, und sei φ invariant, also $\mathcal{L}_{X_\zeta}(\varphi) = 0$ für alle $\zeta \in \mathfrak{g}$.

Dann ist $J(\zeta) := \frac{1}{2\mathrm{i}}(IX_\zeta)(\varphi)$ eine zugehörige Quantenimpulsabbildung, wie man folgendermaßen sieht:
Zunächst ist $\partial\overline{\partial} = \mathrm{d}\overline{\partial}$ und $i_X\mathrm{d}\overline{\partial} = \mathcal{L}_X\overline{\partial} - \mathrm{d}i_X\overline{\partial}$. Für alle $\zeta \in \mathfrak{g}$ ist aufgrund der Invarianz von $\star_{\mathrm{W}}$ zwingend $\mathcal{L}_{X_\zeta}I = 0$, daher vertauscht $\mathcal{L}_{X_\zeta}$ mit ∂ und $\overline{\partial}$. Schreibt man in Koordinaten $X_\zeta = \chi + \underline{\chi} = \chi^n Z_n + \chi^{\overline{l}}\overline{Z}_l$, so gilt

$$
\begin{aligned}
i_{X_\zeta}K(\star_{\mathrm{W}}) &= i_{X_\zeta}\mathrm{d}\overline{\partial}\varphi = (\mathcal{L}_{X\zeta}\overline{\partial} - \mathrm{d}i_{X\zeta}\overline{\partial})\varphi \\
&= \overline{\partial}\mathcal{L}_{X\zeta}(\varphi) - \mathrm{d}i_{X\zeta}\overline{\partial}\varphi = -\mathrm{d}(\underline{\chi}\varphi) = \mathrm{d}(\chi\varphi),
\end{aligned}
$$

da nach Voraussetzung $(\chi + \underline{\chi})(\varphi) = 0$ ist. Andererseits gilt aber $(IX_\zeta)(\varphi) = 2\mathrm{i}\chi(\varphi)$, also ist $i_{X_\zeta}K(\star_{\mathrm{W}}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{d}\left((IX_\zeta)(\varphi)\right) = \mathrm{d}J(\zeta)$. Also ist J eine zugehörige Quanten-Hamiltonfunktion. Weiter ist

$$
\begin{aligned}
K(\star_{\mathrm{W}})(X_\zeta, X_\eta) &= (\mathrm{d}J(\zeta))(X_\eta) = X_\eta(J(\zeta)) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{d}\varphi)(I\mathcal{L}_{X_\eta}X_\zeta) \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{d}\varphi)(-IX_{[\eta,\zeta]}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(IX_{[\zeta,\eta]})(\varphi) = J([\zeta,\eta]).
\end{aligned}
$$

Also ist $\lambda(\zeta, \eta) = 0$ für alle $\zeta, \eta \in \mathfrak{g}$, und daher ist $J(\zeta) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(IX_\zeta)(\varphi)$ eine Quantenimpulsabbildung.

Das Berezin-Toeplitz Sternprodukt nach Karabegov und Schlichenmaier

Das nach [53, 54] zur Berezin-Toeplitz-Quantisierung auf quantisierbaren Kählermannigfaltigkeiten gehörende eindeutige Sternprodukt $\star_{\mathrm{BT}}$ wurde in [34] von Karabegov und Schlichenmaier als Sternprodukt vom Wick-Typ identifiziert. Seine Karabegov-Form ist in der hier benutzten Notation als

$$
K(\star_{\mathrm{BT}}) = \omega + \Omega_{\mathrm{BT}} = \omega + \frac{2\nu}{\mathrm{i}}\mathsf{Ric}
$$

gegeben (siehe [34]), wobei mit Ric die Ricci-Form bezeichnet werde, welche explizit als $\mathsf{Ric}(\cdot,\cdot) = -\frac{1}{4}\mathsf{tr}(R(\cdot,\cdot)I)$ gegeben ist. Falls nun ω und I invariant sind, so sind der Kählerzusammenhang und seine Krümmung und daher auch Ric invariant, und somit ist das Berezin-Toeplitz-Sternprodukt $\star_{\mathrm{BT}}$ nach Proposition 5.7 invariant. Nun berechnet man mithilfe des invarianten Kählerzusammenhangs, daß $i_{X_\zeta}\mathsf{Ric} = \mathrm{d}\left(\frac{1}{4}\mathsf{tr}(\nabla(IX_\zeta))\right)$ gilt. Definiert man also $j(\zeta) := \frac{1}{4}\mathsf{tr}(\nabla(IX_\zeta))$, so ist $i_{X_\zeta}\mathsf{Ric} = \mathrm{d}j(\zeta)$. Ebenso berechnet man auch, daß $\mathsf{Ric}(X_\zeta, X_\eta) = j([\zeta, \eta])$ gilt. Falls es also eine klassische Impulsabbildung J_0 gibt, so ist damit offenbar

$$J(\zeta) := J_0(\zeta) + J_+(\zeta) \quad \text{mit} \quad J_+(\zeta) := \frac{2\nu}{\mathrm{i}} j(\zeta)$$

für alle $\zeta \in \mathfrak{g}$ eine Quantenimpulsabbildung. Für invariante Berezin-Toeplitz-Sternprodukte gibt es also zu einer gegebenen klassischen Impulsabbildung immer Quantenimpulsabbildungen. Die Untersuchung dieser Quantenimpulsabbildungen könnte möglicherweise einen interessanten Vergleich mit den Untersuchungen zu Automorphismen der Operatoralgebra der Berezin-Toeplitz Quantisierung in [65] liefern.

Mit den Ergebnissen von Kapitel 3 und Kapitel 5 sind nun aber insgesamt die Voraussetzungen geschaffen, um eine Verallgemeinerung der klassischen Phasenraumreduktion im Rahmen der Deformationsquantisierung studieren zu können. Insbesondere wird für den Fall, in dem nicht von vornherein starke Invarianz vorliegt, nicht unbedingt eine Quantenimpulsabbildung existieren, und falls sie existiert, dann wird sie nicht immer eindeutig sein. Für ein System, welches eine klassische, nicht aber eine Quantenimpulsabbildung besitzt, ist es (in dieser Weise) gar nicht möglich „erst zu quantisieren, dann zu reduzieren“. Wenn man eine Erweiterung der Phasenraumreduktion auf die Deformationsquantisierung mithilfe von Quantenimpulsabbildungen erreichen möchte, dann kann man somit die Frage, ob (Deformations-) Quantisierung und Reduktion vertauschen, zumindest auf diese Weise im allgemeinen gar nicht sinnvoll formulieren.

Literaturverzeichnis

[1] Abraham, R., Marsden, J. E.: *Foundations of Mechanics.* 2nd. Ed., Addison-Wesley Publishing Company, Reading Mass. (1985).

[2] Arnal, D., Cortet, J. C., Molin, P., Pinczon, G.: *Covariance and geometrical invariance in $*$ quantization.* J. Math. Phys. **24**, 276–283 (1983).

[3] Bayen, F., Flato, M., Frønsdal, C., Lichnerowicz, A., Sternheimer, D.: *Deformation Theory and Quantization.* Ann. Phys. **111**, Part I: 61–110, Part II: 111–151 (1978).

[4] Berezin, F.A.:, *General Concept of Quantization.* Commun. Math. Phys. **40**, 153–174 (1975).

[5] Bertelson, M., Bieliavsky, P., Gutt, S.: *Parametrizing Equivalence Classes of Invariant Star Products.* Lett. Math. Phys. **46**, 339–345 (1998).

[6] Bertelson, M., Cahen, M., Gutt, S.: *Equivalence of star products.* Class. Quant. Grav. **14**, A93–A107 (1997).

[7] Bordemann, M.: *Strongly invariant star-products and their phase space reduction.* Unveröffentlichte Arbeit (1996).

[8] Bordemann, M., Brischle, M., Emmrich, C., Waldmann, S.: *Phase Space Reduction for Star Products: An Explicit Construction for $\mathbb{C}P^n$.* Lett. Math. Phys. **36**, 357–371 (1996).

[9] Bordemann, M., Herbig, H.-C., Waldmann, S.: *BRST Cohomology and Phase Space Reduction in Deformation Quantization.* Commun. Math. Phys. **210**, 107–144 (2000).

[10] Bordemann, M., Waldmann, S.: *A Fedosov Star Product of Wick Type for Kähler Manifolds.* Lett. Math. Phys. **41**, 243–253 (1997).

[11] Bordemann, M., Waldmann, S.: *Formal GNS Construction and States in Deformation Quantization.* Commun. Math. Phys. **195**, 549–583 (1998).

[12] Bott, R., Tu, L.W.: *Differential Forms in Algebraic Topology.* Graduate Texts in Mathematics 82, Springer (1982).

[13] Bourbaki, N.: *Éléments de Mathématique, I, Livre II Algèbre, Chapitres 4 et 5*, 3ième Édition, Hermann, Paris (1973).

[14] Chevalley, C., Eilenberg, S.: *Cohomology Theory of Lie Groups and Lie Algebras.* Transactions of the AMS, Vol. **63, 1**, 85–124 (1948).

[15] Deligne, P.: *Déformations de l'Algèbre des Fonctions d'une Variété Symplectique: Comparaison entre Fedosov et DeWilde, Lecomte.* Sel. Math., New Series **1 (4)**, 667–697 (1995).

[16] DeWilde, M., Lecomte, P. B. A.: *Existence of Star-Products and of Formal Deformations of the Poisson Lie Algebra of Arbitrary Symplectic Manifolds.* Lett. Math. Phys. **7**, 487–496 (1983).

[17] Dirac, P.A.M.: *The Principles of Quantum Mechanics.* Nachdruck der 4. Auflage (1958), Oxford University Press, Oxford (2001).

[18] Dito, G., Sternheimer, D.: *Deformation quantization: genesis, developments, metamorphoses.* in: Halbout, G. (Ed.): Deformation Quantization. Proceedings of the meeting of theoretical physicists and mathematicians, Strasbourg 2001, IRMA Lectures in Mathematical and Theoretical Physics **1**, 9–54, de Gruyter, Berlin (2002).

[19] Fedosov, B. V.: *A Simple Geometrical Construction of Deformation Quantization.* J. Diff. Geom. **40**, 213–238 (1994).

[20] Fedosov, B. V.: *Deformation Quantization and Index Theory.* Akademie Verlag, Berlin (1996).

[21] Fedosov, B. V.: *Non-Abelian Reduction in Deformation Quantization.* Lett. Math. Phys. **43**, 137–154 (1998).

[22] Gerstenhaber, M.: *On the deformation of rings and algebras.* Ann. of Math. **79**, 59-103 (1964).

[23] Guillemin, V., Sternberg, S.: *Symplectic techniques in physics.* Cambridge University Press (1984).

[24] Gutt, S.: *On Some Second Hochschild Cohomology Spaces for Algebras of Functions on a Manifold.* Lett. Math. Phys. **39**, 157–162 (1997).

[25] Gutt, S.: *Variations on deformation quantization.* in: Dito, G., Sternheimer, D. (eds.): Conférence Moshé Flato 1999, Vol. I. Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 217–254 (2000).

[26] Gutt, S.: *Star products and group actions.* Vortrag auf dem Bayrischzell Workshop, 26.–29. April 2002.

[27] Gutt, S., Rawnsley, J.: *Equivalence of star products on a symplectic manifold; an introduction to Deligne's Čech cohomology classes.* J. Geom. Phys. **29**, 347–392 (1999).

[28] Gutt, S., Rawnsley, J.: *Natural star products on symplectic manifolds and quantum moment maps.* Preprint **arXiv:math.SG/0304498v1**, (2003).

[29] Heinzner, P, Huckleberry, A.: *Kählerian structures on symplectic reductions.* in: Peternell, T. (Ed.): Complex analysis and algebraic geometry. A volume in memory of Michael Schneider. de Gruyter, Berlin, 225–253 (2000).

[30] Hess, H.: *Connections on Symplectic Manifolds and Geometric Quantization.* in: Pérez-Rendon, A., Souriau, J.-M. (Eds.).: Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics - Proc. Conf. Aix-en-Provence and Salamanca, 1979. Springer Lecture Notes in Mathematics **836**, 153–166, Springer, Berlin (1980).

[31] Karabegov, A. V.: *Deformation Quantization with Separation of Variables on a Kähler Manifold.* Commun. Math. Phys. **180**, 745–755 (1996).

[32] Karabegov, A. V.: *Cohomological Classification of Deformation Quantization with Separation of Variables.* Lett. Math. Phys. **43**, 347–357 (1998).

[33] Karabegov, A. V.: *On Fedosov's approach to Deformation Quantization with Separation of Variables.* in: Dito, G., Sternheimer, D. (eds.): Conférence Moshé Flato 1999, Vol. II. Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 167–176 (2000).

[34] Karabegov, A. V., Schlichenmaier, M.: *Identification of Berezin-Toeplitz Deformation Quantization.* J. reine angew. Math. **540**, 49–76 (2001).

[35] Karabegov, A. V., Schlichenmaier, M.: *Almost Kähler deformation quantization.* Lett. Math. Phys. **57**, 135–148 (2001).

[36] Kobayashi, S., Nomizu, K.: *Foundations of Differential Geometry.* Band I/II, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics **15**, Interscience/John Wiley & Sons, New York, London (1963).

[37] Kontsevich, M.: *Deformation Quantization of Poisson Manifolds, I.* Preprint **arXiv:q-alg/9709040**, (1997).

[38] Kravchenko, O.: *Deformation quantization of symplectic fibrations.* Compositio Math. **123**, 131–165 (2000).

[39] Lichnerowicz, A.: *Connexions symplectiques et $*$-produits invariants.* C.R. Acad. Sc. Paris, **t. 291**, 413–417 (1980).

[40] Mac Lane, S.: *Homology.* Grundlehren Band 114, Springer, Berlin/Heidelberg (1967).

[41] Marsden, J.E., Ratiu, T.S., Raugel, G.: *Symplectic connections and the linearisation of Hamiltonian systems.* Proc. Royal Soc. Edinburgh **117A**, 329-380, (1991).

[42] Marsden, J.E., Ratiu, T.S.: *Introduction to Mechanics and Symmetry.* 2nd Ed., Texts in Applied Mathematics 17, Springer, New York (1999).

[43] Müller, M.F. *An Introduction to Deformation Quantization and Fedosov's Proof of Existence.* University of Oxford, Trinity College, September 1999.

[44] Müller, M. F., Neumaier, N.: *Some Remarks on $\mathfrak{g}$-invariant Fedosov Star Products and Quantum Momentum Mappings.* Mannheimer Manuskripte 268, Universität Mannheim (Januar 2003) *und* J. Geom. Phys. **50**, 257-272 (2004).

[45] Müller–Bahns, M. F., Neumaier, N.: *Invariant Star Products of Wick Type: Classification and Quantum Momentum Mappings.* Mannheimer Manuskripte 273, Universität Mannheim, *und* Preprint **arXiv:math.QA/0307324** (Juli 2003), erscheint in Lett. Math. Phys.

[46] Neumaier, N.: *Sternprodukte auf Kotangentenbündeln und Ordnungsvorschriften.* Diplomarbeit, Universität Freiburg (1998).

[47] Neumaier, N.: *Local ν-Euler Derivations and Deligne's Characteristic Class of Fedosov Star Products and Star Products of Special Type.* Commun. Math. Phys. **230**, 271–288 (2002).

[48] Neumaier, N.: *Klassifikationsergebnisse in der Deformationsquantisierung.* Dissertation, Universität Freiburg (2001).

[49] NEUMAIER, N.: *Universality of Fedosov's Construction for Star Products of Wick Type on Pseudo-Kähler Manifolds.* Rep. Math. Phys. **52**, 43-80 (2003).

[50] NEST, R., TSYGAN, B.: *Algebraic Index Theorem.* Commun. Math. Phys. **172**, 223–262 (1995).

[51] OMORI, H., MAEDA, Y., YOSHIOKA, A.: *Weyl Manifolds and Deformation Quantization.* Adv. Math. **85**, 224–255 (1991).

[52] SCHIRMER, J.: *A Star Product for Complex Graßmann Manifolds.* Preprint Freiburg FR-THEP 21, **arXiv:q-alg/9709021 v1.**, (1997).

[53] SCHLICHENMAIER, M.:, *Zwei Anwendungen algebraisch-geometrischer Methoden in der theoretischen Physik: Berezin-Toeplitz-Quantisierung und globale Algebren in der zweidimensionalen konformen Feldtheorie.* Habilitationsschrift, Mathematisches Institut der Universität Mannheim (1996).

[54] SCHLICHENMAIER, M.: *Deformation quantization of compact Kähler manifolds by Berezin-Toeplitz quantization.* in: DITO, G., STERNHEIMER, D. (EDS.): Conférence Moshé Flato 1999, Vol. II. Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 289–306 (2000).

[55] STERNHEIMER, D.: *Deformation quantization: Twenty years after.* in: REMBIELIŃSKI, J. (ED.): Particles, Fields, and Gravitation, AIP Press, New York, 107–145 (1998).

[56] VEY, J.: *Déformations du crochet de Poisson sur une variété symplectique.* Comment. Math. Helv. **50**, 421-454, (1975).

[57] WALDMANN, S.: *A Remark on Non-equivalent Star Products via Reduction for* $\mathbb{C}P^n$. Lett. Math. Phys. **44**, 331–338 (1998).

[58] WALDMANN, S.: *Zur Deformationsquantisierung in der klassischen Mechanik: Observablen, Zustände und Darstellungen.* Dissertation, Universität Freiburg (1999).

[59] WALDMANN, S.: *On the representation theory of deformation quantization.* in: HALBOUT, G. (Ed.): Deformation Quantization, Proceedings of the meeting of theoretical physicists and mathematicians, Strasbourg 2001, IRMA Lectures in Mathematical and Theoretical Physics **1**,107–131 , de Gruyter, Berlin (2002).

[60] WEINSTEIN, A.: *Deformation Quantization.* Séminaire Bourbaki, 46ième année, 1993-1994, **789**, (1993).

[61] Weinstein, A., Xu, P.: *Hochschild cohomology and characteristic classes for star-products.* in: Khovanskij, A. et al. (eds.): Geometry of differential equations. Dedicated to V. I. Arnol'd on the occasion of his 60^{th} birthday. Providence, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, **186 (39)**, 177–194 (1998).

[62] Wells, R.O. Jr.: *Differential Analysis on Complex Manifolds.* 2nd Ed., Graduate Texts in Mathematics 65, Springer, New York (1980).

[63] Woodhouse, N.M.J., *Geometric Quantization.* 2nd. Ed., Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, (1991).

[64] Xu, P.: *Fedosov $*$-Products and Quantum Momentum Maps.* Commun. Math. Phys. **197**, 167–197 (1998).

[65] Zelditch, S.: *Quantum Maps And Automorphisms.* Preprint **arXiv:math.QA/0307125 v2**, (2003).