

# Lineare Strukturgleichungsmodelle

Christian Rietz, Georg Rudinger und Johannes Andres

*Lineare Strukturgleichungsmodelle* basieren auf der Faktorenanalyse nach dem Modell gemeinsamer Faktoren (vgl. den Beitrag von Schönemann & Borg, in diesem Band). Jöreskog (1963) stellte diese Form der Faktorenanalyse als statistisch testbares Modell (*Maximum-Likelihood-Faktorenanalyse*) vor, das aus Arbeiten von Lawley (1950, 1958), Anderson und Rubin (1956) und Howe (1955) hervorging, und erweiterte es zur *konfirmatorischen Faktorenanalyse* (Jöreskog, 1966). Weitere Verallgemeinerungen des faktorenanalytischen Modells wurden von Bock und Bargmann (1966) vorgenommen. Der Schritt von der konfirmatorischen Faktorenanalyse zu linearen Strukturgleichungsmodellen wurde ebenfalls von Jöreskog (1970) bzw. von Goldberger (1972) geleistet.

Lineare Strukturgleichungsmodelle können aber auch in der Tradition der *Pfadanalyse* (vgl. Wright, 1934) gesehen werden. Ein geschichtlicher Überblick über die Entwicklung linearer Strukturgleichungsmodelle findet sich bei Bentler (1986) und Mulaik (1986).

## 1 Ziele linearer Strukturgleichungsmodelle

Es werden Vorstellungen über Zusammenhänge zwischen beobachtbaren Variablen und vermuteten latenten Variablen in einem Modell formuliert. Die Ziele linearer Strukturgleichungsmodelle bestehen darin, das Modell zu überprüfen und Aussagen über Parameter zu treffen. Technisch bedeutet dies, eine empirische Kovarianzmatrix mit Hilfe geeigneter Parameterschätzungen „möglichst gut“ modellverträglich zu rekonstruieren.

### 1.1 Pfaddiagramme und Strukturgleichungen

Die Funktionsweise linearer Strukturgleichungsmodelle wird zunächst an folgendem Beispiel dargestellt: Für vier Untertests ( $y_1$  bis  $y_4$ ) eines fiktiven Intelligenztests soll untersucht werden, in welcher Beziehung diese vier Untertests zu einem ihnen allen zugrundeliegenden Konstrukt *Intelligenz* stehen. Da ein klassisches Reliabilitätsmodell zugrunde liegt (vgl. Stumpf, in diesem Band), wird von unkorrelierten Fehlern ausgegangen. In *Pfaddiagrammen* – wie in dem in Abbildung 1 dargestellten – bezeichnen üblicherweise Kreise die latenten  $\eta$ -Variablen (z.B. Konstrukte wie Intelligenz) und Quadrate die beobachtbaren  $y$ -Variablen (z.B. Untertests). Pfeile drücken strukturelle Annahmen über den Zusammenhang zwischen den Variablen aus. Die  $\lambda_{ij}$  sind Beeinflussungskoeffizienten zwischen den  $\eta$ -Variablen ( $\eta_j$ ) und beobachtbaren  $y$ -Variablen ( $y_i$ ). Die Pfeile von den  $\varepsilon$ -Variablen auf die beobachtbaren

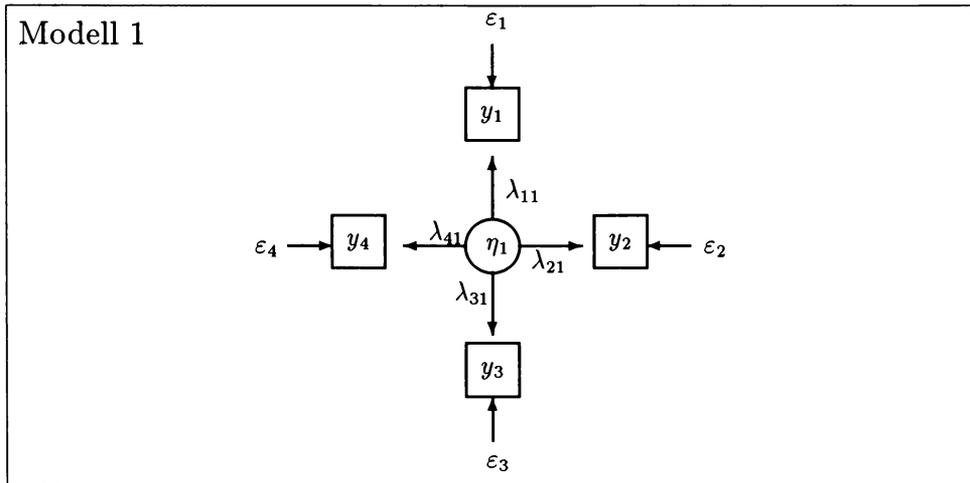


ABBILDUNG 1. Kongenerisches Meßmodell.

$y$ -Variablen drücken den Einfluß von Meßfehlern bzw. Residuen aus. Residualterme bzw. Meßfehler, obwohl latente Variablen, werden ohne Kreise dargestellt. In Analogie zur Faktorenanalyse entsprechen die  $\eta$ -Variablen den Faktoren, die Beeinflussungskoeffizienten  $\lambda_{ij}$  den Faktorenladungen und die  $\varepsilon$ -Variablen den Meßfehlern und spezifischen Faktoren. Pfaddiagramme erhalten ihre präzise Bedeutung erst dadurch, daß man die in ihnen abgebildeten Zusammenhänge als lineare Gleichungen formuliert. Das System der Gleichungen, das sich auf den Zusammenhang zwischen latenten und beobachtbaren Variablen bezieht, wird als *Meßmodell* bezeichnet. So ergeben sich für das in Abbildung 1 dargestellte Modell die Strukturgleichungen  $y_1 = \lambda_{11}\eta_1 + \varepsilon_1$ ,  $y_2 = \lambda_{21}\eta_1 + \varepsilon_2$ ,  $y_3 = \lambda_{31}\eta_1 + \varepsilon_3$  und  $y_4 = \lambda_{41}\eta_1 + \varepsilon_4$ . Die linearen Strukturgleichungen können allgemeiner in Matrixschreibweise über

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

mit  $\mathbf{y}$ ,  $\boldsymbol{\eta}$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}$  als Zufallsvektoren und  $\mathbf{\Lambda}$  als Matrix der Beeinflussungskoeffizienten mit den Elementen  $\lambda_{ij}$  dargestellt werden, wobei  $i$  die beeinflusste und  $j$  die beeinflussende Variable bezeichnet (vgl. den Beitrag über Grundlagen der multivariaten Datenanalyse von Andres, in diesem Band).

## 1.2 Von den Strukturgleichungen zur Kovarianzmatrix

Die Modellprüfung und Parameterschätzung in linearen Strukturgleichungsmodellen geschieht auf Basis von Kovarianzmatrizen. Wie gelangt man nun von den Strukturgleichungen zur Kovarianzmatrix? Eine Populationskovarianzmatrix  $\boldsymbol{\Sigma}$  ist als

$$\boldsymbol{\Sigma} = E[(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})'] \quad (2)$$

definiert (mit  $E$  als Erwartungswert). Substituiert man in (2)  $\mathbf{y}$  durch die Gleichung (1), so ergibt sich, da bei linearen Strukturgleichungsmodellen im allgemeinen  $E(\mathbf{y}) = E(\boldsymbol{\mu}) = E(\boldsymbol{\eta}) = E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$  und  $E(\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\varepsilon}') = \mathbf{0}$  angenommen wird,

$$\begin{aligned}
\Sigma &= E[\mathbf{y}\mathbf{y}'] \\
&= E[(\Lambda\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon})(\Lambda\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon})'] \\
&= E[(\Lambda\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\eta}'\Lambda' + \boldsymbol{\varepsilon}')] \\
&= E(\Lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}'\Lambda') + E(\Lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\varepsilon}') + E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\eta}'\Lambda') + E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') \\
&= \Lambda\Psi\Lambda' + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \Theta_{\varepsilon} \\
&= \Lambda\Psi\Lambda' + \Theta_{\varepsilon},
\end{aligned} \tag{3}$$

wobei  $\Psi$  die Kovarianzmatrix der latenten  $\eta$ -Variablen und  $\Theta_{\varepsilon}$  die Kovarianzmatrix der latenten  $\varepsilon$ -Variablen ist. Die Elemente der Kovarianzmatrizen sind  $\psi_{jj'}$  bzw.  $\vartheta_{\varepsilon_{ii'}}$ . Ist  $i=i'$  bzw.  $j=j'$ , bezeichnen diese Elemente (Residual-)Varianzen, ist  $i \neq i'$  bzw.  $j \neq j'$ , bezeichnen sie Kovarianzen zwischen den latenten Variablen  $\varepsilon_i$  und  $\varepsilon_{i'}$  bzw.  $\eta_j$  und  $\eta_{j'}$ . Einsetzen der Strukturgleichungen in (3) führt zu

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & & & & \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & & & \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} & & \\ \sigma_{14} & \sigma_{24} & \sigma_{34} & \sigma_{44} & \\ & & & & \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_{11}^2 \psi_{11} + \vartheta_{\varepsilon_{11}} & & & & \\ \lambda_{11} \lambda_{21} \psi_{11} & \lambda_{21}^2 \psi_{11} + \vartheta_{\varepsilon_{22}} & & & \\ \lambda_{11} \lambda_{31} \psi_{11} & \lambda_{21} \lambda_{31} \psi_{11} & \lambda_{31}^2 \psi_{11} + \vartheta_{\varepsilon_{33}} & & \\ \lambda_{11} \lambda_{41} \psi_{11} & \lambda_{21} \lambda_{41} \psi_{11} & \lambda_{31} \lambda_{41} \psi_{11} & \lambda_{41}^2 \psi_{11} + \vartheta_{\varepsilon_{44}} & \\ & & & & \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Betrachtet man zum Beispiel die Parametrisierung des Elements  $\sigma_{11} = \lambda_{11}^2 \psi_{11} + \vartheta_{\varepsilon_{11}}$ , so zeigt sich die Funktion der Beeinflussungskoeffizienten  $\lambda_{ij}$  (vgl. Abbildung 1): Sie tragen zur Zerlegung der Varianz der  $y$ -Variablen bei.

### 1.3 Identifizierbarkeit

In (4) zeigt sich, daß zehn verschiedene Gleichungen, z.B.  $\sigma_{11} = \lambda_{11}^2 \psi_{11} + \vartheta_{\varepsilon_{11}}$  oder  $\sigma_{23} = \lambda_{21} \lambda_{31} \psi_{11}$ , mit neun Unbekannten, die wiederum in einem Parametervektor  $\boldsymbol{\vartheta} = [\lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{31}, \lambda_{41}, \psi_{11}, \vartheta_{\varepsilon_{11}}, \vartheta_{\varepsilon_{22}}, \vartheta_{\varepsilon_{33}}, \vartheta_{\varepsilon_{44}}]'$  darstellbar sind, existieren. Daß die unbekannte Populationskovarianzmatrix  $\Sigma$  sich wie in (4) als Funktion der Parameter schreiben läßt, ist die Nullhypothese des Modelltests und wird auch als

$$\Sigma = \Sigma(\boldsymbol{\vartheta}) \tag{5}$$

formuliert. Wie bei vielen Tests von Verteilungsannahmen ist auch hier die interessierende Hypothese die Nullhypothese, deren Beibehaltung einer Modellbestätigung entspricht.

Eine wichtige Frage — zunächst auf theoretischer Ebene — ist, ob sich die Parameter umgekehrt aus der Kenntnis von  $\Sigma$  bestimmen lassen. Nur in einem solchen Fall sind Parameter später sinnvoll schätzbar. Läßt sich ein Parameter oder eine Funktion von Parametern aus  $\Sigma$  rekonstruieren, so werden dieser Parameter oder diese Funktion *identifizierbar* genannt. Sind alle Parameter eines Modelles identifizierbar, so heißt das Modell selbst identifizierbar. In einfachen Fällen ergibt sich die Identifizierbarkeit eines Parameters  $\vartheta_i$  (Element des Vektors  $\boldsymbol{\vartheta}$ ) daraus, daß das

Gleichungssystem (4) nach  $\vartheta_i$  aufgelöst werden kann und sich  $\vartheta_i$  als Funktion der Elemente von  $\Sigma$  schreiben läßt. Eine notwendige Bedingung für die Identifizierbarkeit eines Modells besteht darin, daß die Anzahl der Parameter nicht größer als die Anzahl der nicht redundanten Elemente in  $\Sigma$  ist.

Die Parameter in dem Modell aus Abbildung 1 bzw. gemäß Gleichungssystem (4) sind nicht alle identifizierbar. Dies zeigt sich beispielsweise darin, daß die Parameter der Produkte  $\lambda_{ij}^2 \psi_{11}$  numerisch beliebig gewählt werden könnten, solange alle Produkte numerisch gleich bleiben. Keiner dieser Parameter kann also eindeutig bestimmt werden. Erst durch beispielsweise die Fixierung von  $\psi_{11}$  auf einen numerischen Wert (in der Regel Eins) ist die Identifizierbarkeit der übrigen Modellparameter — bis auf das Vorzeichen — gewährleistet (vgl. Jöreskog & Sörbom, 1988).  $\Sigma(\vartheta)$  aus (4) verändert sich durch die numerische Fixierung von  $\psi_{11}$  auf den Wert Eins zu

$$\Sigma(\vartheta) = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^2 + \vartheta_{\epsilon_{11}} & & & \\ \lambda_{11}\lambda_{21} & \lambda_{21}^2 + \vartheta_{\epsilon_{22}} & & \\ \lambda_{11}\lambda_{31} & \lambda_{21}\lambda_{31} & \lambda_{31}^2 + \vartheta_{\epsilon_{33}} & \\ \lambda_{11}\lambda_{41} & \lambda_{21}\lambda_{41} & \lambda_{31}\lambda_{41} & \lambda_{41}^2 + \vartheta_{\epsilon_{44}} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Es resultieren zehn Gleichungen mit acht Unbekannten. Daß z.B.  $\lambda_{11}^2$  oder  $\vartheta_{\epsilon_{11}}$  identifizierbar sind, zeigt sich an

$$\lambda_{11}^2 = \frac{\sigma_{12}\sigma_{13}}{\sigma_{23}} = \frac{(\lambda_{11}\lambda_{21})(\lambda_{11}\lambda_{31})}{(\lambda_{21}\lambda_{31})} \text{ oder } \vartheta_{\epsilon_{11}} = \sigma_{11} - \lambda_{11}^2.$$

Die anderen sechs Parameter sind auch identifizierbar. Die Überprüfung der Identifizierbarkeit der Parameter über die genannte notwendige Voraussetzung hinaus ist durchaus nicht trivial. Weitere Details sind Andres (1990), Mardia, Kent und Bibby (1994) und Seidel (1988) zu entnehmen. Gängige Computerprogramme überprüfen die Identifizierbarkeit der einzelnen Parameter *nicht* explizit.

### 1.4 Parameterschätzung

Gesucht werden sodann Schätzungen  $\hat{\vartheta}$  für die Parameter in  $\vartheta$ , die dazu führen, daß die Abweichungen zwischen der auf Basis dieser Parameterschätzungen berechneten Matrix  $\hat{\Sigma}$  und der empirischen Stichprobenkovarianzmatrix  $S$  „minimal“ werden. Hierzu stehen verschiedene Parameterschätzverfahren zur Verfügung, die hier jedoch nicht im Detail behandelt werden sollen. Die iterativen Verfahren unterscheiden sich vor allem darin, wie robust sie gegen Verletzungen der Annahme multivariater Normalverteilung der Rohdaten sind. Das Vorgehen bei der Parameterschätzung soll exemplarisch an der *Maximum-Likelihood-Methode* (ML) illustriert werden.

Die ML-Schätzung läuft darauf hinaus, den Funktionswert der „Fitfunktion“

$$F_{ML} = \log|\hat{\Sigma}| + \text{tr}(\mathbf{S}\hat{\Sigma}^{-1}) - \log|S| - k \tag{7}$$

zu minimieren ( $\hat{\Sigma}$  ist die aufgrund der Ergebnisse der Parameterschätzungen  $\hat{\vartheta}$  berechnete Kovarianzmatrix,  $k$  die Gesamtzahl der beobachtbaren Variablen). Werden andere Schätzer verwendet (z.B. diverse Formen von *Least-Squares-Schätzern*), so werden andere Fitfunktionen minimiert, die jedoch alle im Kern Abweichungen zwischen  $\hat{\Sigma}$  und  $S$  beinhalten.

Die Parameter des in Abbildung 1 dargestellten Modells sollen nun anhand der folgenden Stichprobenkovarianzmatrix ( $N=120$ ) geschätzt werden:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 25.07 & & & \\ 12.44 & 28.20 & & \\ 11.73 & 9.23 & 22.74 & \\ 15.75 & 11.97 & 12.06 & 21.87 \end{bmatrix}.$$

Es ergeben sich die Parameterschätzungen  $\hat{\Lambda} = [3.97, 3.06, 3.01, 3.97]'$  und weiterhin  $\text{diag}(\hat{\Theta}_\epsilon) = [9.31, 18.84, 13.68, 6.11]$ . Aus diesen Schätzungen ergibt sich

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 25.07 & & & \\ 12.15 & 28.20 & & \\ 11.95 & 9.21 & 22.74 & \\ 15.76 & 12.15 & 11.95 & 21.87 \end{bmatrix}.$$

Die Abweichungen von  $\mathbf{S}_1$  sind einfach zu berechnen. Die Reliabilitäten (*rel*) sind über  $\frac{\lambda_{ij}^2}{\lambda_{ij}^2 + \Theta_{\epsilon_{ii}}}$  als  $\text{rel}_{y_1}=0.63$ ,  $\text{rel}_{y_2}=0.33$ ,  $\text{rel}_{y_3}=0.40$  und  $\text{rel}_{y_4}=0.72$  schätzbar.

### 1.5 Bewertung der Modellgüte

Genauso, wie es inzwischen verschiedene Schätzverfahren gibt, stehen auch viele Indizes zur Beurteilung der Modellanpassung zur Verfügung. Im folgenden soll jedoch nur auf den  $\chi^2$ -Anpassungstest eingegangen werden, der die wohl bekannteste Bewertungsgrundlage linearer Strukturgleichungsmodelle darstellt. Werden ML-Schätzer verwendet, so ist die Verteilung der mit  $(N-1)$  multiplizierten Funktionswerte der Fitfunktion  $F_{ML}$  mit  $d$  Freiheitsgraden im allgemeinen bei Modellgültigkeit (und bei identifizierbaren Modellen) asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt, wobei

$$d = \frac{k(k+1)}{2} - \text{Anzahl der zu schätzenden Parameter in } \vartheta. \quad (8)$$

Bei der Überprüfung des in Abbildung 1 dargestellten Modells auf Basis der Kovarianzmatrix  $\mathbf{S}_1$  ( $N=120$ ) ergab sich ein  $\chi^2$ -Wert von 0.15 bei zwei Freiheitsgraden ( $p=0.93$ ): Dieses Ergebnis legt es nahe, die Nullhypothese nicht abzulehnen und das kongenerische Modell als passend zu bezeichnen.

Der Anpassungstest mit der approximativ  $\chi^2$ -verteilten Prüfgröße ist in der Literatur umstritten (vgl. z.B. Anderson & Gerbing, 1984; Bollen, 1989). Eine sinnvolle Interpretation der Prüfgröße ist nur unter bestimmten Bedingungen möglich:

1. Die beobachteten Daten müssen multivariat normalverteilt sein. Auf Verletzungen dieser Annahme reagiert der  $\chi^2$ -Test sehr sensibel. Bei verschiedenen Verteilungscharakteristika kann es im Hinblick auf die  $H_0$  sowohl zu antikonservativen als auch zu konservativen Entscheidungen kommen (Boomsma, 1982).

2. Die Analyse einer Kovarianzmatrix ist Voraussetzung der inferenzstatistischen Bewertung der Prüfgröße. Dies liegt darin begründet, daß alle  $\chi^2$ -Tests, die in der multivariaten Statistik verwendet werden, nur auf Basis bestimmter Verteilungseigenschaften abgeleitet werden können. Das hat zur Folge, daß Prüfgrößen, die auf

Basis von Korrelationsmatrizen ermittelt werden, nur in sehr wenigen und jeweils eigens zu begründenden Fällen asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt sind.

3. Die Stichprobe muß „hinreichend groß“ sein. Hier lassen sich nur Heuristiken (z.B. „Anzahl der frei zu schätzenden Parameter mit fünf multiplizieren“) ableiten, so daß Bollen (1989, S. 268) bemerkt: „Though I know of no hard and fast rule, a useful suggestion is to have at least several cases per free parameter.“

4. Ein letzter Punkt betrifft den Signifikanztest selbst. Im Regelfall besteht ein Interesse daran, die Nullhypothese nicht zu verwerfen. Dies sollte, wie bei allen *goodness-of-fit* Tests, Auswirkungen auf die Wahl der  $\alpha$ -Niveaus haben: Das Risiko, die  $H_0$  fälschlicherweise nicht zu verwerfen, sollte so gering wie möglich sein, d.h. der  $\beta$ -Fehler sollte klein sein. Um dies zu gewährleisten, ist  $\alpha$  größer zu wählen (z.B.  $\alpha=0.20$ ). Das zieht zahlreiche Überlegungen bezüglich der Teststärke nach sich (vgl. z.B. Satorra & Saris, 1985).

## 1.6 Modellvergleiche

Über alle Elemente der Parametermatrizen  $\Lambda$ ,  $\Psi$  und  $\Theta_\epsilon$  können verschiedene Annahmen getroffen werden. Diese Annahmen bestehen in (1) *numerischen Fixierungen*, wobei es sich im Normalfall darum handelt, einen Parameter nicht zuzulassen, was gleichbedeutend mit einer Festlegung auf den Wert Null ist, (2) *Freisetzungen* von zu schätzenden Parametern oder (3) *Restriktionen* von zu schätzenden Parametern; eine mögliche Restriktion wäre eine Gleichsetzung von Parametern.

In dem kongenerischen Meßmodell wurden folgende Annahmen getroffen:  $\psi_{11}$  wird — aus Identifikationsgründen — auf den Wert 1.0 fixiert.  $\Theta_\epsilon$  ist eine Diagonalmatrix. Zu schätzen sind die Elemente aus  $\Lambda$  und  $\Theta_\epsilon$ .

Aus testtheoretischen Erwägungen können weitere Restriktionen sinnvoll sein:

1. Das  $\tau$ -äquivalente Modell (vgl. dazu Stumpf, in diesem Band) impliziert gleiche  $\lambda_{ij}$ , d.h.  $\lambda_{11}=\lambda_{21}=\lambda_{31}=\lambda_{41}$ . Für die Parameterschätzung bedeutet dies, daß alle  $\lambda_{ij}$  auf den gleichen numerischen Wert geschätzt werden sollen. Es müssen also nur noch fünf Parameter geschätzt werden; es verbleiben  $d=10-5=5$  Freiheitsgrade.
2. Das strikt parallele Modell impliziert zusätzlich gleiche  $\vartheta_{\epsilon_{ii'}}$ . Dies bedeutet inhaltlich, daß die Annahme identischer Reliabilitäten für die vier Untertests überprüft wird. Es verbleiben  $d=10-2=8$  Freiheitsgrade.

Für das  $\tau$ -äquivalente Strukturgleichungsmodell ergaben sich die Parameterschätzungen  $\hat{\lambda}_{ij}=3.6$ ,  $\hat{\vartheta}_{\epsilon_{11}}=10.09$ ,  $\hat{\vartheta}_{\epsilon_{22}}=18.14$ ,  $\hat{\vartheta}_{\epsilon_{33}}=12.95$  und  $\hat{\vartheta}_{\epsilon_{44}}=7.42$ . Mit einem  $\chi^2$ -Wert von 6.70 bei fünf Freiheitsgraden ( $p=0.24$ ) kann dieses Modell ebenfalls als angepaßt gelten. Bei Überprüfung des strikt parallelen Modells ergaben sich die beiden Parameterschätzungen  $\hat{\lambda}_{ij}=3.49$  und  $\hat{\vartheta}_{\epsilon_{ii'}}=12.27$ . Mit einem  $\chi^2$ -Wert von 21.40 bei acht Freiheitsgraden ( $p=0.01$ ) muß dieses Modell verworfen werden.

Es wurden drei Modelle (drei „Theorien“) überprüft, die durch Restriktionen auseinander hervorgingen. Welches der passenden Modelle ist das bessere? Da die Modelle in einem hierarchischen Verhältnis zueinander stehen (das  $\tau$ -äquivalente Modell ist ein Untermodell des kongenerischen Modells), können sie gegeneinander mit einem sogenannten *Differenzen- $\chi^2$ -Test* getestet werden. Die Differenz zwischen den

beiden  $\chi^2$ -Werten beider Modelle drückt sich in einem  $\chi^2$ -Wert von 6.55 (6.70-0.15) bei drei Freiheitsgraden (5-2) aus. Diese Differenz ist bei  $\alpha=0.05$  nicht signifikant. Statistisch kann die Frage nach dem besseren Modell also nicht beantwortet werden. Ein mögliches Hilfskriterium könnte *parsimony* sein: Man entscheidet sich für das „sparsamere“  $\tau$ -äquivalente Modell mit fünf statt acht zu schätzenden Parametern. Generell kann man bei dem Modellvergleich zwei Strategien unterscheiden: Je nachdem, ob man vom liberalsten zum restriktivsten Modell oder vom restriktivsten zum liberalsten testet, kann die Entscheidung für unterschiedliche Modelle in der Hierarchie ausfallen.

Modelle, die nicht durch Parameterrestriktionen auseinander hervorgehen und somit *qualitativ* unterschiedlich sind, können *keinesfalls* gegeneinander getestet werden.

## 2 Probleme

### 2.1 Nicht passende Modelle

Das strikt parallele Modell mußte verworfen werden. Das bedeutet unseres Erachtens, daß das Modell in keiner Hinsicht interpretiert werden darf. Aussagen über einzelne Parameter sind damit auch nicht zulässig.

Hier ist ein allgemeineres *wissenschaftslogisches* Problem angesprochen. Hinter jedem Strukturgleichungsmodell steht explizit oder implizit eine Theorie. Stellt sich z.B. heraus, daß in einem Pfadmodell 80% der Variation einer abhängigen Variablen erklärt werden, das Modell aber unter Strukturgleichungsperspektive als nicht passend bezeichnet werden muß, so ist es sinnlos, die Varianzaufklärung zu interpretieren, da sie auf dem falschen Modell basieren würde. Natürlich können passende Modelle auch danach bewertet werden, wie deren Varianzaufklärung ist — durch hohe Varianzaufklärung kann jedoch nicht ein nicht passendes Modell kompensiert werden.

Auf diesem Hintergrund erscheinen die oft extensiven inhaltlichen Diskussionen empirisch inadäquater linearer Strukturgleichungsmodelle ausgesprochen fragwürdig. Vor der Interpretation der Ergebnisse von Verfahren, die auf linearen Strukturgleichungssystemen basieren, *muß* die strukturelle Angemessenheit des zugrundeliegenden Modells überprüft werden.

### 2.2 Interpretation von Parametern

Für mit der ML-Methode ermittelte Parameterschätzungen können approximativ Standardfehler bestimmt werden. Über diese Standardfehler lassen sich zum einen Konfidenzintervalle für die Schätzer konstruieren, zum anderen können über eine approximativ standardnormalverteilte Prüfgröße  $\frac{\hat{\vartheta}_i - \vartheta_i}{s_i}$  (mit  $\hat{\vartheta}_i$  als Schätzung,  $\vartheta_i$  als Parameterwert, gegen den getestet werden soll, und  $s_i$  als Standardfehler) Parameter auf ihre Unterschiedlichkeit von  $\vartheta_i$  getestet werden (nach entsprechender Adjustierung von  $\alpha$ ). Hierbei ist zu beachten, daß es sich nur um eine Approximation handelt, deren Güte von Kriterien wie beispielsweise der Stichprobengröße abhängt.



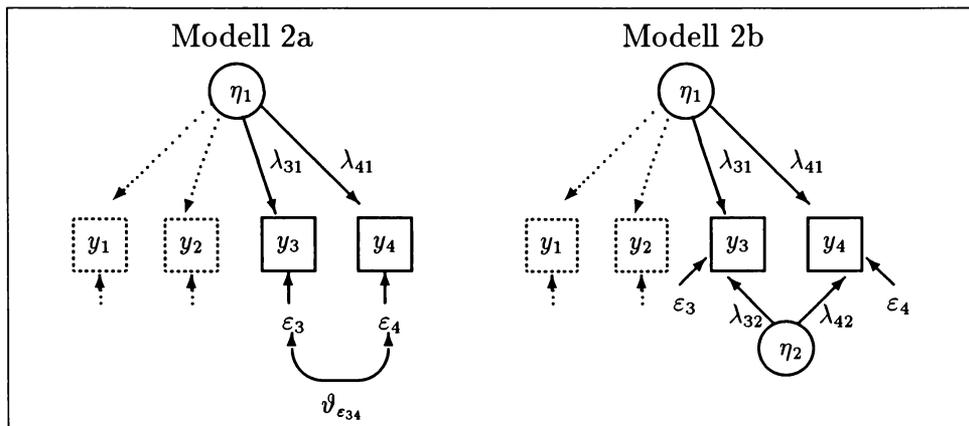


ABBILDUNG 2. Modell mit Kovarianz zwischen Meßfehlern (2a) oder zusätzlicher latenter  $\eta$ -Variablen (2b).

bei der ein kongenerisches Modell nicht paßt ( $\chi^2=6.33, df=2, p=0.042$ ). Eine Erweiterung dieses Modells um eine Kovarianz zwischen den beiden latenten Fehlervariablen  $\varepsilon_3$  und  $\varepsilon_4$ , die als  $\psi_{\varepsilon_{34}}$  bezeichnet wird (Modell 2a, vgl. Abbildung 2), führt hingegen zu einer guten Modellanpassung ( $\chi^2=0.054, df=1, p=0.82$ ) mit den Parameterschätzungen  $\hat{\lambda}_{11}=4.05$ ,  $\hat{\lambda}_{21}=3.07$ ,  $\hat{\lambda}_{31}=2.92$ ,  $\hat{\lambda}_{41}=3.89$ ,  $\hat{\psi}_{\varepsilon_{11}}=8.66$ ,  $\hat{\psi}_{\varepsilon_{22}}=18.77$ ,  $\hat{\psi}_{\varepsilon_{33}}=14.22$ ,  $\hat{\psi}_{\varepsilon_{44}}=6.74$  und  $\hat{\psi}_{\varepsilon_{34}}=5.85$ . Wie ist die Kovarianz zwischen den latenten Fehlervariablen zu interpretieren? Die Kovarianz zeigt an, daß gemeinsame Varianz der Variablen  $y_3$  und  $y_4$  nicht durch den kongenerischen Faktor erfaßt wird. Ein alternatives Modell wäre, statt der Kovarianz einen zweiten Faktor anzunehmen, der nur die Variablen  $y_3$  und  $y_4$  beeinflusst (Modell 2b, vgl. Abbildung 2). In diesem Modell werden aus Identifikationsgründen die Parameter  $\lambda_{32}$  und  $\lambda_{42}$  auf den Wert 1.0 fixiert, die Varianz ( $\psi_{22}$ ) der latenten Variablen  $\eta_2$  ist frei zu schätzen. Auch dieses Modell ist gut angepaßt ( $\chi^2=0.054, df=1, p=0.82$ ). Auf den ersten Blick überrascht, daß zwei „verschiedene“ Modelle zu dem gleichen Ergebnis führen. Das liegt daran, daß die Modelle 2a und 2b äquivalent sind. Zwei Modelle sind dann äquivalent, wenn die beiden Mengen der modellverträglichen Kovarianzmatrizen übereinstimmen. Hieraus folgt, daß die Modelle in termini des Anpassungstests zu gleichen  $\chi^2$ -Werten bei gleichen Freiheitsgraden führen und somit empirisch nicht unterscheidbar sind.

## 2.5 Analyse von Korrelationsmatrizen

Wie erwähnt, ist die inferenzstatistische Absicherung von linearen Strukturgleichungsmodellen an die Analyse von Kovarianzmatrizen gebunden. In der Literatur finden sich jedoch häufig Modelle, die auf der Basis von Korrelationsmatrizen untersucht werden. Dieses Vorgehen ist im allgemeinen falsch.

Es gibt nur sehr wenige Modelle, die bei Analyse von Korrelations- und Kovarianzmatrix zu demselben Ergebnis führen (wieder in Termini der  $\chi^2$ -verteilten Anpassungsgröße). Man könnte auch diese Modelle als äquivalent im Hinblick auf die Ana-

lyse von Kovarianz- oder Korrelationsmatrix bezeichnen. Boomsma (1982) leitete Regeln ab, mit deren Hilfe beurteilt werden kann, ob die Analysen von Korrelations- und Kovarianzmatrix zu demselben Ergebnis führen. Hierbei gelten die Heuristiken, daß eine Äquivalenz vorliegen kann (!), wenn in einem Modell keinerlei Restriktionen formuliert werden und keine Beeinflussungen zwischen latenten Variablen vorliegen.

Analysiert man beispielsweise anstelle der Kovarianzmatrix  $S_1$  die hieraus un schwer abzuleitende Korrelationsmatrix mit dem kongenerischen, dem  $\tau$ -äquivalenten und dem strikt parallelen Modell, so ergeben sich folgende Modellanpassungen:

	Kovarianzmatrix	Korrelationsmatrix
kongenerisch	$\chi^2 = 0.15, df = 2, p = 0.93$	$\chi^2 = 0.15, df = 2, p = 0.93$
$\tau$ -äquivalent	$\chi^2 = 6.70, df = 5, p = 0.24$	$\chi^2 = 9.03, df = 5, p = 0.11$
strikt parallel	$\chi^2 = 21.40, df = 8, p = 0.01$	$\chi^2 = 16.35, df = 8, p = 0.04$

Bei Analyse des kongenerischen (unrestringierten) Modells unterscheiden sich die Ergebnisse für Korrelations- und Kovarianzmatrix nicht ( $\chi^2_{Kovarianz} = \chi^2_{Korrelation}$ ). Dieses spezielle Modell hat die Eigenschaft der Skaleninvarianz. Skaleninvarianz bedeutet, daß die Parameterschätzungen durch Multiplikation mit einer gemeinsamen Konstanten direkt ineinander überführbar sind. Dies führt im Rahmen des kongenerischen Modells zu gleichen Reliabilitätsschätzungen auf der Basis von Kovarianz- und Korrelationsmatrix. Werden Restriktionen eingeführt, so unterscheiden sich die  $\chi^2$ -Werte bei den Analysen beider Datenmatrizen. Da der  $\chi^2$ -Anpassungstest nur im Rahmen der Analyse von Kovarianzmatrizen korrekt ist, würde eine Interpretation von  $\chi^2_{Korrelation}$  in diesen Fällen einer statistischen Grundlage entbehren und einfach falsch sein. Diese Modelle sind nicht skaleninvariant; die Proportionen zwischen den Parametern können sich unterscheiden — und somit z.B. auch die Reliabilitäten.

### 3 Weitere Möglichkeiten linearer Strukturgleichungsmodelle

#### 3.1 Hypothesen über (latente) Mittelwerte

Mit linearen Strukturgleichungsmodellen können *zusätzlich* auch Hypothesen über Mittelwerte getestet werden. Die folgende Darstellung orientiert sich an Jöreskog und Sörbom (1988).

Hierzu werden die Strukturgleichungen um drei Parameter erweitert: Auf Seite der latenten Variablen können latente Mittelwerte  $\alpha_j$  spezifiziert werden und Abweichungen vom latenten Mittelwert  $\zeta_j$ . Auf Seite der beobachtbaren Variablen wird ein Mittelwerteresiduum  $\tau_i$  zugelassen. Das spiegelt sich in den Strukturgleichungen

$$\eta = \zeta + \alpha \quad (9)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \Lambda \eta + \tau + \varepsilon \\ &= \Lambda(\zeta + \alpha) + \tau + \varepsilon \\ &= \Lambda \zeta + \varepsilon + \Lambda \alpha + \tau \end{aligned} \quad (10)$$

wider. Unter der Voraussetzung, daß ein Strukturgleichungsmodell an eine Kovarianzmatrix angepaßt werden kann, können in einem zweiten Schritt Hypothesen über Mittelwerte überprüft werden (sukzessives Testen). Bei Analyse der Kovarianzmatrix

$$S_4 = \begin{bmatrix} 26.01 & & & \\ 11.75 & 24.01 & & \\ 13.65 & 12.37 & 25.50 & \\ 12.69 & 13.19 & 11.80 & 25.81 \end{bmatrix}$$

kann ein strikt paralleles Modell sehr gut angepaßt werden ( $\chi^2=2.38$ ,  $df=8$ ,  $p=0.97$ ). Um zu überprüfen, ob die Nullhypothese gleicher Mittelwerte aller vier Variablen für dieses Modell bei Vorliegen der empirischen Mittelwerte  $\bar{y} = [10, 9.5, 10.5, 10]'$  zutreffend ist, können zwei äquivalente Herangehensweisen gewählt werden: Zum einen kann  $\alpha$  als zu schätzender Parameter freigesetzt werden. Wie aus Gleichung (10) ersichtlich, wird dadurch für jede  $y$ -Variable der gleiche Mittelwert vorhergesagt, wenn die  $\tau_i$  auf den Wert Null fixiert werden. Werden zum anderen die  $\tau_i$  geschätzt und gleichgesetzt, und wird  $\alpha$  auf den Wert Null fixiert, so wird dieselbe Hypothese überprüft.

Bei beiden Vorgehensweisen ergibt sich aufgrund der Äquivalenz der Modelle derselbe  $\chi^2$ -Wert ( $\chi^2=7.01$ ,  $df=11$ ,  $p=0.80$ ): Die Hypothese gleicher Mittelwerte kann somit nicht verworfen werden. Zur Berechnung der Freiheitsgrade: Es stehen zehn Elemente der Kovarianzmatrix und vier Elemente des Mittelwertvektors zur Verfügung. Bei Anpassung der Kovarianzmatrix wurden zwei Parameter geschätzt ( $10-2$ ), bei Anpassung des Mittelwertmodells ein Parameter ( $4-1$ ), sodaß insgesamt elf Freiheitsgrade ( $(10-2)+(4-1)$ ) resultieren.

Problematisch an diesem Ansatz ist nach Meinung der Autoren, daß er nur sukzessives Testen erlaubt. Eine Alternative besteht darin, das Mittelwerte- und das Kovarianzmodell simultan zu schätzen (vgl. McArdle & Epstein, 1987). Verallgemeinerungen des simultanen Modells von McArdle und Epstein finden sich bei Rietz (1988) oder Rudinger, Andres und Rietz (1994).

### 3.2 Vergleich mehrerer Gruppen

Mit linearen Strukturgleichungsmodellen können Unterschiede und Gemeinsamkeiten von Gruppen untersucht werden. Hierbei sind zwei verschiedene Herangehensweisen möglich: eine sukzessive und eine simultane.

Beiden Herangehensweisen ist gemeinsam, daß die Hypothesen für unterschiedliche Invarianzgrade, auch unter Einbezug der Mittelwerte, formuliert werden können: Von der Überprüfung struktureller Hypothesen (gleiche freie Parameter) bis hin zu Hypothesen über numerische Invarianz (gleiche Werte entsprechender Parameter in allen Gruppen).

Bei sukzessivem Vorgehen ist die Richtung, in der der Vergleich durchgeführt wird, entscheidend. Auf dieses Vorgehen soll an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden. Simultane Analysen können mit *multiplen Gruppenanalysen* durchgeführt werden. Hierbei werden mehrere Kovarianzmatrizen gleichzeitig analysiert und zusammenfassend inferenzstatistisch bewertet. Die Parameter werden dann so geschätzt, daß eine quasi gemittelte Fitfunktion minimiert wird.

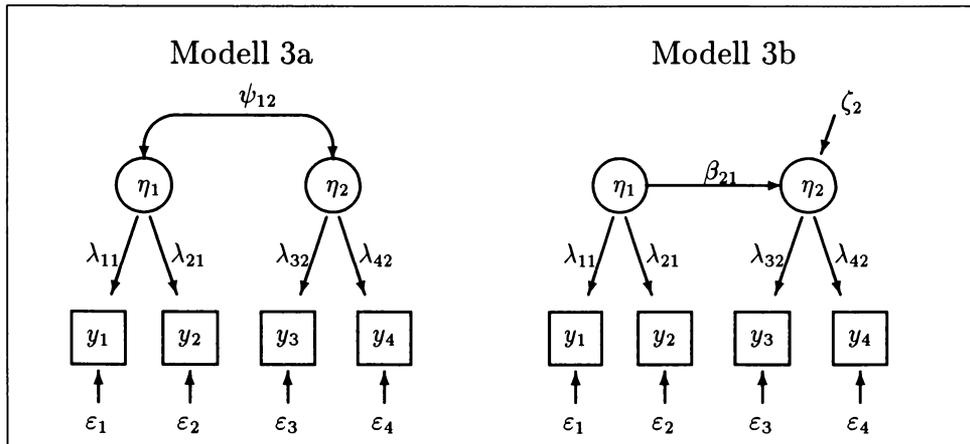


ABBILDUNG 3. Modell mit Kovarianz zwischen latenten Variablen (3a) oder Beeinflussungen zwischen latenten Variablen (3b).

#### 4 Beziehungen zwischen latenten Variablen

Bisher wurden im Rahmen der Beispiele aus Gründen der Einfachheit meistens nur Modelle mit einer latenten Variablen dargestellt. Wird eine Erweiterung auf mehrere latente Variablen vorgenommen, die untereinander nicht in Beziehung stehen, d.h. unkorreliert sind, sind alle bisherigen Ausführungen verallgemeinerbar. Beziehungen zwischen latenten Variablen jedoch, z.B. Kovarianzen zwischen Faktoren oder auch Beeinflussungen zwischen latenten Variablen, machen die eigentliche Komplexität linearer Strukturgleichungsmodelle aus. Zwei dieser Modelle sind in Abbildung 3 dargestellt. Die dem Modell 3a zugrundeliegende Parametermatrix  $\Sigma(\vartheta)$  kann über (3) berechnet werden, wobei im Vergleich zu den bisherigen Modellen auch Parameter in  $\Psi$  spezifiziert werden müssen. In dem Beispiel ist dies die Parametrisierung

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1.0 & \\ \psi_{12} & 1.0 \end{bmatrix},$$

wobei die Fixierung der Elemente  $\psi_{11}$  und  $\psi_{22}$  auf den Wert 1.0 analog dem in Kapitel 1.3 dargestellten Vorgehen aus Gründen der Identifizierbarkeit gewählt wird. Nach (3) ergibt sich die Parametermatrix

$$\Sigma(\vartheta) = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^2 + \vartheta_{\varepsilon_{11}} & & & \\ \lambda_{11}\lambda_{21} & \lambda_{21}^2 + \vartheta_{\varepsilon_{22}} & & \\ \lambda_{11}\lambda_{32}\psi_{12} & \lambda_{21}\lambda_{32}\psi_{12} & \lambda_{32}^2 + \vartheta_{\varepsilon_{33}} & \\ \lambda_{11}\lambda_{42}\psi_{12} & \lambda_{21}\lambda_{42}\psi_{12} & \lambda_{32}\lambda_{42} & \lambda_{42}^2 + \vartheta_{\varepsilon_{44}} \end{bmatrix},$$

in der der Effekt der korrelierten Faktoren deutlich wird: Durch den freien Parameter  $\psi_{12}$  können die Elemente  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{14}$ ,  $\sigma_{23}$  und  $\sigma_{24}$  der Matrix  $\Sigma$  von Null verschieden sein, wobei in diese Elemente jedoch nicht nur  $\psi_{12}$ , sondern auch die  $\lambda_{ij}$  eingehen.

Das Modell 3b hingegen ist nicht mehr durch (3) parametrisierbar. Hier muß das Modell nun um Strukturgleichungen erweitert werden, die direkte Beeinflussungen,

also nicht nur Kovarianzen, zwischen latenten Variablen beinhalten. Faßt man die Beeinflussungskoeffizienten  $\beta_{jj'}$  in einer Matrix  $\mathbf{B}$  zusammen, so ergibt sich

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\zeta}, \quad (11)$$

wobei  $\boldsymbol{\eta}$  auf beiden Seiten der Gleichung zu finden ist (aus programmtechnischen Gründen wird formal eine weitere „Residuenvariable“  $\zeta_1 = \eta_1$  eingeführt). Auflösen nach  $\boldsymbol{\eta}$  führt zu

$$\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\boldsymbol{\zeta}, \quad (12)$$

so daß sich für die Vorhersagegleichung der beobachtbaren Variablen

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (13)$$

ergibt. Die „ $\zeta$ “ bezeichnen Regressionsresiduen der abhängigen latenten Variablen. Werden Beeinflussungskoeffizienten zwischen den latenten  $\eta$ -Variablen eingeführt, so führt dies zu wesentlich komplexeren Matrizen  $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\vartheta})$ :

$$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{I} - \mathbf{B}')^{-1}\mathbf{A}' + \boldsymbol{\Theta}_\varepsilon. \quad (14)$$

Für das Modell 3b mit den Parametermatrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_{21} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \lambda_{42} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi_{11} & 0 \\ 0 & \psi_{22} \end{bmatrix} \text{ und } \boldsymbol{\Theta}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \vartheta_{\varepsilon_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vartheta_{\varepsilon_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta_{\varepsilon_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vartheta_{\varepsilon_{44}} \end{bmatrix}$$

(die Fixierungen von  $\lambda_{11}$  und  $\lambda_{32}$  auf den Wert Eins dienen der Identifizierbarkeit des Modells) resultiert

$$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\vartheta}) = \begin{bmatrix} \psi_{11} + \vartheta_{\varepsilon_{11}} & & & \\ \lambda_{21}\psi_{11} & \lambda_{21}^2\psi_{11} + \vartheta_{\varepsilon_{22}} & & \\ \beta_{21}\psi_{11} & \beta_{21}\lambda_{21}\psi_{11} & \beta_{21}^2\psi_{11} + \psi_{22} + \vartheta_{\varepsilon_{33}} & \\ \beta_{21}\lambda_{42}\psi_{11} & \beta_{21}\lambda_{21}\lambda_{42}\psi_{11} & \lambda_{42}(\beta_{21}^2\psi_{11} + \psi_{22}) & \lambda_{42}^2(\beta_{21}^2\psi_{11} + \psi_{22}) + \vartheta_{\varepsilon_{44}} \end{bmatrix}.$$

Zusätzlich zur wachsenden Komplexität gelten für Modelle, bei denen Beziehungen zwischen den latenten Variablen angenommen werden, alle bisherigen Betrachtungen. Gerade bei diesen komplexeren Modellen wird die Interpretation von Einzelparametern schwer oder fast unmöglich. Die Darstellung in den übersichtlichen Pfaddiagrammen hat einen auf den ersten Blick fast nicht mehr erkennbaren Bezug zu  $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\vartheta})$ . Deshalb sollten Modelle so einfach und nachvollziehbar wie möglich formuliert werden.

In Modell 3b wird unterschieden in unabhängige (beeinflussende) und abhängige (beeinflusste) latente Variablen. Hier zeigt sich eine doppelte Funktion der Elemente von  $\boldsymbol{\Psi}$ :  $\psi_{11}$  ist die Varianz der unabhängigen latenten Variablen ( $\eta_1$ ),  $\psi_{22}$  die Residualvarianz der abhängigen latenten Variablen ( $\eta_2$ ). Dieser Unterscheidung wird bei einigen Ansätzen (vgl. Jöreskog & Sörbom, 1988) Rechnung getragen, indem nicht nur in latente und beobachtbare Variablen unterschieden wird, sondern zusätzlich noch in unabhängige und abhängige latente Variablen ( $\xi$  vs.  $\eta$ ) und in unabhängige und abhängige beobachtbare Variablen ( $x$  vs.  $y$ ). Diese Unterscheidung, die sich in zahlreichen Einführungen in lineare Strukturgleichungsmodelle findet, ist jedoch insofern irrelevant, als diese Differenzierung unter dem hier dargestellten vereinfachten Modell (mit  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\boldsymbol{\Psi}$  und  $\boldsymbol{\Theta}_\varepsilon$ ) zu subsumieren ist (vgl. auch das Bentler-Weeks-Modell, Bentler & Weeks, 1980).

## 5 Bilanz

Generell können lineare Strukturgleichungsmodelle in zwei verschiedene Klassen und deren Mischformen unterteilt werden: (1) Zum einen gibt es Modelle, die auf Annahmen über assoziative Strukturen basieren und somit dem Paradigma der konfirmatorischen Faktorenanalyse zuzuordnen sind, (2) zum anderen aber auch Modelle, die Beziehungen zwischen „unabhängigen“ und „abhängigen“ latenten Variablen formulieren.

Letztere Modelle werden in der Literatur auch häufig als „Kausalmodelle“ bezeichnet. Es dürfte jedoch klar sein, daß diese Bezeichnung trügerisch ist, da ein lineares Strukturgleichungsmodell auch dann keinerlei Aussagen über Kausalität erlaubt, wenn es empirisch adäquat ist. Das wird auch daran deutlich, daß es bestimmte (äquivalente) Modelle gibt, bei denen sich die Pfeile ohne Konsequenzen „einfach umdrehen“ lassen (Stelzl, 1986; vgl. auch Stelzl, in diesem Band). Soll eine Interpretation der Beeinflussungen zwischen den latenten Variablen als „kausal“ erfolgen, so gelten hier die gleichen Einschränkungen wie bei der kausalen Interpretation eines Regressionskoeffizienten (vgl. Sobel, 1995). Eine sinnvolle Interpretation der Richtung des Zusammenhangs ist dann möglich, wenn Vorhersagen über die Zeit z.B. im Kontext von Längsschnittstudien (vgl. den Beitrag von Erdfelder, Rietz & Rudinger, in diesem Band) vorgenommen werden.

Die Differenzierung in zwei Arten von Strukturgleichungsmodellen ist nicht nur technisch motiviert, sondern spiegelt die verschiedenen Anwendungsbereiche wider: Modelle, die eher der konfirmatorischen Faktorenanalyse zuzuordnen sind, finden sich vor allem in der Persönlichkeitspsychologie oder Diagnostik, z.B. in Form von *Multi-Trait-Multi-Method-Analysen* (vgl. Stumpf, in diesem Band). Modelle, bei denen unabhängige und abhängige latente Variablen vorliegen, z.B. im Rahmen der Modellierung von Prognosemodellen, Regressions- und Pfadanalysen auf latenter Ebene, finden sich besonders häufig im Bereich der Feld- und Evaluationsforschung (vgl. Bierhoff & Rudinger sowie Wottawa, in diesem Band).

Natürlich können auch „klassische“ pfadanalytische Modelle mit Strukturgleichungsmodellen inferenzstatistisch abgesichert werden, wobei latente und beobachtbare Variablen gleichgesetzt werden und letztere somit als meßfehlerfrei angenommen werden. Welche Auswirkungen diese Modellierung ohne Meßfehler im Vergleich zu Modellen mit Meßfehlern hat, läßt sich bereits im Rahmen des kleinsten möglichen Pfadmodells, der bivariaten Regression nämlich, verdeutlichen. Bei Gleichsetzung der latenten mit den beobachtbaren Variablen resultiert für  $\sigma_{22}$  die Parametrisierung  $\beta_{21}^2 \psi_{11} + \psi_{22}$ , bei Modellierung mit Meßfehlern  $\beta_{21}^2 (\psi_{11} + \vartheta_{\epsilon_{11}}) + \psi_{22} + \vartheta_{\epsilon_{22}}$ , wobei drei Residuen zu berücksichtigen sind: Zum einen das Regressionsresiduum auf Ebene der latenten Variablen, zum anderen die Meßfehler von Prädiktor- und Kriteriumsvariablen. Berücksichtigt man diese Auswirkungen des Meßfehlers, so ist ein fruchtbarer Einsatz linearer Strukturgleichungsmodelle aber auch in experimentellen Paradigmen denkbar und möglich. Weitere Einsatzmöglichkeiten für lineare Strukturgleichungsmodelle sind die Zeitreihenanalyse (vgl. Krauth, in diesem Band) und *behavioral genetics*.

Es ist aber *immer* zu berücksichtigen, daß lineare Strukturgleichungsmodelle nicht so klar und einfach sind, wie die Sprache der Pfaddiagramme suggeriert: Die

Komplexität, die schon an den kleinen Modellen dieses Beitrages deutlich wird, steigt mit zunehmender Anzahl von latenten und beobachtbaren Variablen fast schon exponentiell an.

## 6 Weiterführende Literatur

Aus den zahlreichen Arbeiten zu linearen Strukturgleichungsmodellen können die Autoren nur subjektiv als sehr umfassende Einführung Bollen (1989) empfehlen. Eine ausführliche mathematische Darstellung linearer Strukturgleichungsmodelle findet sich in Andres (1990). Weiterhin können die Manuale zu den Programmen EQS (Bentler, 1993) und LISREL (Jöreskog & Sörbom, 1988) als anwenderbezogene einführende Texte verwendet werden.

Die bekanntesten Programme, mit denen lineare Strukturgleichungsmodelle aufgestellt und geschätzt werden können, sind EQS, ExPATH, LINCOS, LISCOMP, LISREL, MECOSA, SIMPLIS und CALIS (vgl. den ausführlichen Überblick in Waller, 1993, oder in den Tagungsbänden der SOFTSTAT). Eine Empfehlung kann jedoch nicht gegeben werden, da die Entscheidung für das jeweilige Programm vom Anwenderprofil abhängt.

## Literaturverzeichnis

- Anderson, J. & Gerbing, D. W. (1984). The effects of sampling error on convergence, improper solutions and goodness-of-fit indices for maximum likelihood confirmatory factor analysis. *Psychometrika*, 49, 155–173.
- Anderson, T. W. & Rubin, H. (1956). Statistical inference in factor analysis. In J. Neyman (Ed.), *Proceedings of the third Berkeley symposium on mathematical statistics and probability* (pp. 111–150). Berkeley: University of California Press.
- Andres, J. (1990). *Grundlagen linearer Strukturgleichungsmodelle*. Frankfurt: Lang.
- Bentler, P. M. (1986). Structural equation modeling and Psychometrika: A historical perspective on growth and achievements. *Psychometrika*, 51, 35–51.
- Bentler, P. M. (1993). *EQS. Structural equations program manual*. Los Angeles: BMDP Statistical Software.
- Bentler, P. M. & Weeks, D. G. (1980). Linear structural equations with latent variables. *Psychometrika*, 45, 289–308.
- Bock, R. D. & Bargmann, R. D. (1966). Analysis of covariance structures. *Psychometrika*, 31, 507–534.
- Bollen, K. A. (1989). *Structural equations with latent variables*. New York: Wiley.
- Boomsma, A. (1982). The robustness of LISREL against small sample size in factor analysis models. In K. G. Jöreskog & H. Wold (Eds.), *Systems under indirect observation*, Volume I (pp. 149–173). Amsterdam: North-Holland.
- Goldberger, A. S. (1972). Structural equation models in the social sciences. *Econometrica*, 40, 979–1001.
- Howe, W. G. (1955). *Some contributions to factor analysis* (Report No. ORNL-1919). Oak Ridge: Oak Ridge National Laboratory.
- Jöreskog, K. G. (1963). *Statistical estimation in factor analysis*. Stockholm: Almqvist & Wiksell.
- Jöreskog, K. G. (1966). Testing a simple structure hypothesis in factor analysis. *Psychometrika*, 31, 165–178.

- Jöreskog, K. G. (1970). A general method for the analysis of covariance structures. *Biometrika*, 57, 239–251.
- Jöreskog, K. G. & Sörbom, D. (1988). *LISREL 7: A guide to the program and applications*. Chicago: SPSS.
- Lawley, D. N. (1950). The estimation of factor loadings by the method of maximum likelihood. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, A* 60, 176–185.
- Lawley, D. N. (1958). Estimation in factor analysis under various initial assumptions. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 11, 1–12.
- Mardia, K. V., Kent, J. T. & Bibby, J. M. (1994). *Multivariate analysis* (9th ed.). London: Academic Press.
- McArdle, J. J. & Epstein, D. (1987). Latent growth curves within developmental structural equation models. *Child Development*, 58, 119–133.
- Mulaik, S. A. (1986). Factor analysis and Psychometrika: Major developments. *Psychometrika*, 51, 23–33.
- Rietz, C. (1988). Latente Wachstumskurven: Theorie und empirische Studien am Beispiel der Intelligenzentwicklung im Alter (Unveröff. Diplomarbeit). Bonn: Psychologisches Institut der Universität.
- Rietz, C. (1995). *Faktorielle Invarianz*. Bonn: PACE.
- Rudinger, G., Andres, J. & Rietz, C. (1994). Structural equation models for studying intellectual development. In D. Magnusson, L. R. Bergman, G. Rudinger & B. Törestad (Eds.), *Problems and methods in longitudinal research* (pp. 274–307). Cambridge: Cambridge University Press.
- Satorra, A. & Saris, W. E. (1985). Power of the likelihood ratio test in covariance structure analysis. *Psychometrika*, 50, 83–90.
- Seidel, G. (1988). *Abschlußbericht zum Projekt LISRAN, unterstützt durch die DFG* (Unveröff. Manuskript). Frankfurt: Deutsches Institut für internationale pädagogische Forschung.
- Sobel, M. E. (1995). Causal inference in the social and behavioral sciences. In G. Arminger, C. C. Clogg & M. E. Sobel (Eds.), *Handbook of statistical modeling for the social and behavioral sciences* (pp. 1–38). New York: Plenum.
- Stelzl, I. (1986). Changing a causal hypothesis without changing the fit: Some rules for generating equivalent path models. *Multivariate Behavioral Research*, 21, 309–331.
- Waller, N. G. (1993). Seven confirmatory factor analysis programs: EQS, ExPATH, LINC, LISCOMP, LISREL 7, SIMPLIS, and CALIS. *Applied Psychological Measurement*, 17, 73–100.
- Wright, S. (1934). The method of path coefficients. *Annals of Mathematical Statistics*, 5, 161–215.

## Autorenhinweis

Die Autoren danken Thomas Richter, Edgar Schmitz, Monika von Wachter und Catherine Wieknyk für konstruktive Mitarbeit und Kommentare.