Axiomatische Meßtheorie

Reinhard Niederée und Louis Narens

Ein wesentliches Element der quantitativ-mathematischen Modellierung empirischer Sachverhalte bilden *Skalen*. Diese ordnen „empirischen“ oder allgemeiner „qualitativen“ Objekten (im allgemeinsten Sinne des Wortes „Objekt“) *Maßzahlen* zu, z.B. geeigneten physikalischen Objekten ihre Länge bezüglich einer Maßeinheit. Mit der Frage, unter welchen Voraussetzungen und auf welche Weise ein *sinnvoller* Bezug auf Maßzahlen in den empirischen Wissenschaften möglich ist, beschäftigt sich insbesondere die interdisziplinäre Theorie der Messung.

Von besonderem wissenschaftlichen Interesse sind ohne Zweifel solche Skalen, welche nicht nur mehr oder weniger willkürlich festgelegte numerische Indizes liefern, sondern eine unmittelbare substanzwissenschaftliche Verankerung besitzen, wie z.B. die bereits erwähnten Längenskalen. Von zentraler Bedeutung ist in diesem Zusammenhang das Konzept der *fundamentalen Messung*, welches die Grundlage des sogenannten „Repräsentationsansatzes“ in der Theorie der Messung bildet und im Mittelpunkt der folgenden Betrachtungen stehen wird. Von fundamentaler Messung wird dann gesprochen, wenn die betrachteten Skalen die Eigenschaft haben, daß durch sie gewisse für den betrachteten Gegenstandsbereich wesentliche „qualitative Relationen“ durch geeignet festzulegende numerische Relationen „repräsentiert“ werden: Stehen qualitative Objekte der betrachteten Art in einer dieser Relationen zueinander, so stehen ihre Skalenwerte in der entprechenden numerischen Relation zueinander. Dieses Konzept der „strukturerhaltenden“ Zuordnung von Zahlen zu Objekten wird im folgenden noch näher erläutert werden. Eine wesentliche Aufgabe der *axiomatischen Meßtheorie* ist es nun, Bedingungen „axiomatisch“ zu charakterisieren, welche die zugrundegelegten qualitativen Relationen erfüllen müssen, damit fundamentale Messung in diesem Sinne möglich ist. Wie wir im Laufe des Kapitels sehen werden, wird durch diese „qualitativ-empirische“ Perspektive der Aspekt der *Theoriebildung* selbst in das Zentrum der Aufmerksamkeit gerückt, der gegenüber die ursprüngliche Frage der Zuordnung von Zahlen zu den betrachteten Objekten in einem gewissen Sinne eine sekundäre, untergeordnete Stellung einnimmt.

1 Ein klassisches Beispiel: die extensive Messung

Betrachtet man axiomatisch-meßtheoretische Analysen, so lassen sich darin gewöhnlich vier konzeptuelle Schritte unterscheiden. Wir werden jeden dieser Schritte jeweils kurz allgemein charakterisieren und sodann anhand eines klassischen Konzeptes fundamentaler Messung erläutern. Es ist dies das insbesondere für die Physik sehr bedeutsame Konzept der *extensiven Messung*, dessen axiomatische Analyse durch den Physiker und Physiologen Helmholtz (1887) und den Mathematiker Hölder (1901)

https://doi.org/10.25521/HQM28

am Anfang der modernen axiomatischen Meßtheorie stand. Das abstrakte Konzept der extensiven Messung werden wir wiederum mittels des bereits erwähnten Beispiels der Längenmessung veranschaulichen.

1.1 Qualitative Axiome

Wenden wir uns nun dem ersten der genannten vier Schritte zu, in dem zunächst wesentliche strukturelle Eigenschaften der jeweiligen qualitativen Situation durch „qualitative Axiome" präzise zu erfassen sind. Zahlen spielen hier somit noch keine Rolle. Ob diese „Axiome" für die betrachtete Situation tatsächlich gültig sind, ist, wie bereits Helmholtz (1887) betont, im Prinzip eine empirische – und damit ggf. durch geeignete Experimente zu überprüfende – Frage. Wir werden auf dieses Problem später zurückkommen.

Im Falle der extensiven Messung beziehen wir uns auf eine Menge X von qualitativen Objekten, eine darauf gegebene zweistellige (Ordnungs-) Relation $\succsim$ und eine ebenfalls zweistellige qualitative Verknüpfung $\circ$, welche üblicherweise als *Konkatenation* bezeichnet wird.

Bei unserer Besprechung des Spezialfalls der Längenmessung wollen wir uns zunächst zur besseren Veranschaulichung die idealisierende Vorstellung einer hinlänglich reichhaltigen unendlichen Menge von *starren Stäben* erlauben. Die Relation $\succsim$ sei hier die qualitative „Mindestens-so-lang-wie"-Ordnung, welche sich aus einem unmittelbaren Längenvergleich ergibt; d.h. $x \succsim y$ gilt genau dann, wenn die Stäbe x und y so parallel aneinandergelegt werden können, daß x an beiden Enden y überragt oder zumindest gleich abschließt. Wie üblich ergeben sich hieraus unmittelbar die Relationen $\sim$ und $\succ$, welche im Fall der Länge für „gleichlang wie" bzw. „länger als" stehen; hierzu definiert man: (i) $u \sim v$ gdw. $u \succsim v$ und $v \succsim u$; (ii) $u \succ v$ gdw. $u \succsim v$, aber nicht $u \sim v$ (die Abkürzung „gdw." steht wie üblich für *genau dann, wenn*).

Die Operation $\circ$ schließlich sei hier die Konkatenation zweier Stäbe, so daß $x \circ y$ für einen Stab steht, der sich durch geradliniges Aneinanderlegen von x und y ergibt.[1]

Die jeweilige Menge X gemeinsam mit den betrachteten qualitativen Relationen und Operationen – im Falle der extensiven Messung also das Tupel $\mathcal{X} = \langle X, \succsim, \circ\rangle$ – wird als *qualitative Struktur* bezeichnet. (Häufig findet man auch die Bezeichnungen „empirische Struktur" oder „empirisches Relativ").

Für die meßtheoretische Analyse einer solchen Situation sind nun qualitative Axiome wie die folgenden von Bedeutung:

1. **Schwache Ordnung:** Die Relation $\succsim$ ist eine schwache Ordnung auf X, d.h. sie ist *transitiv* (aus $x \succsim y$ und $y \succsim z$ folgt stets $x \succsim z$) und *konnex* (d.h. es gilt stets $x \succsim y$ oder $y \succsim x$).

2. **Assoziativität:** Für alle x, y, z aus X gilt

$$(x \circ y) \circ z \sim x \circ (y \circ z).$$

[1]Fälle wie $x \circ x$ zeigen bereits, daß diese Formulierung etwas vereinfacht ist; es genügt hier jedoch ein sinngemäßes Verständnis.

3. **Positivität:** Für alle x, y aus X gilt
$$x \circ y \succ x \quad \text{und} \quad x \circ y \succ y.$$

4. **Monotonie:** Für alle x, y, v, w aus X gilt
$$x \succsim y \quad \& \quad v \succsim w \quad \Rightarrow \quad x \circ v \succsim y \circ w.$$

5. **Eingeschränkte Lösbarkeit:** Für jedes x und y aus X mit $x \succ y$ existiert ein z in X, so daß $x \succsim y \circ z$.

6. **Archimedisches Axiom:** Zu allen x, y aus X existiert ein Vielfaches x_i von x so daß $x_i \succsim y$.

Unter einem *Vielfachen* von x versteht man dabei ein Element der zu x gehörigen *Standardfolge* $x_1 = x$, $x_2 = x \circ x$, $x_3 = (x \circ x) \circ x$, usw. Das archimedische Axiom stellt sicher, daß je zwei Objekte in ihrer Größe in dem Sinne vergleichbar sind, daß nicht eines „unendlich viel größer" sein kann als das andere.

Nur die in den jeweils betrachteten Axiomen erfaßten strukturellen Eigenschaften der zugrundeliegenden Struktur $\mathcal{X}$ gehen in die weiteren Schritte einer axiomatisch-meßtheoretischen Analyse ein. Somit werden die nachfolgenden Betrachtungen zur extensiven Messung nicht nur auf den Fall der Längenmessung anwendbar sein, sondern auf beliebige Situationen, die diesen Axiomen genügen.

1.2 Numerische Repräsentation

Hiermit kommen wir zum *zweiten Schritt*, in dem das zu Beginn skizzierte Konzept der strukturerhaltenden Abbildung in einen Zahlbereich in einer für die jeweils betrachtete Situation geeigneten Weise präzise spezifiziert wird. Solche Abbildungen werden dann als *Repräsentationen* bezeichnet. (Häufig geht man auch von einem solchen Repräsentationskonzept aus und sucht sich dann passende Axiome.)

Im Fall der extensiven Messung werden gewöhnlich *additive Repräsentationen* betrachtet; dies sind Abbildungen f von X in die Menge $\mathbb{R}^+$ der positiven reellen Zahlen, für die gilt (jeweils für alle x und y aus X)

(i) $x \succsim y$ gdw. $f(x) \geq f(y)$ und

(ii) $f(x \circ y) = f(x) + f(y)$.

Die üblichen Längenskalen (zu beliebigen Einheiten, wie z.B. m, cm, Fuß) sind Beispiele für additive Repräsentationen in diesem Sinne.

Wie viele der in der Meßtheorie betrachteten spezifischen Pepräsentationskonzepte läßt sich auch dieses als Spezialfall eines abstrakteren mathematischen Konzepts auffassen, welches in diesem Zusammenhang erstmals von Scott und Suppes (1958) diskutiert wurde, nämlich das der *homomorphen Abbildung* einer qualitativen Struktur $\mathcal{X}$ in eine *numerische Struktur* $\mathcal{N}$ (man spricht auch kurz von einem *Homomorphismus*). Im Fall der soeben eingeführten additiven Repräsentationen ist, wie gehabt, $\mathcal{X} = \langle X, \succsim, \circ \rangle$, während $\mathcal{N}$ durch die Struktur $\langle \mathbb{R}^+, \geq, + \rangle$ gegeben ist;

die beiden Bedingungen (i) und (ii) entsprechen dann für diese Situation gerade den Kriterien, welche einen Homomorphismus definieren.[2]

Es ist zu beachten, daß der Terminus „Messung" sich hier zunächst also nicht auf konkrete Meßverfahren bezieht, sondern auf theoretische Maßfunktionen (im Sinne spezieller mathematischer Funktionen). Diese können aber häufig auf die ein oder andere Weise zu solchen Verfahren in Beziehung gesetzt werden. Wir werden auf diesen Punkt später noch einmal kurz zurückkommen.

1.3 Existenz und Eindeutigkeit von Repräsentationen

Ob die im ersten Schritt eingeführten Axiome und das im zweiten Schritt betrachtete Repräsentationskonzept tatsächlich zueinander „passend" gewählt wurden, entscheidet sich im dritten und vierten Schritt. Im *dritten Schritt* ist mathematisch nachzuweisen, daß aus den Axiomen die Existenz mindestens einer Repräsentation folgt; dies ist der sogenannte *Existenzsatz*. Da es häufig mehr als eine solche Repräsentation gibt, interessiert man sich in einem *vierten Schritt* des weiteren noch dafür, in welcher Beziehung je zwei solcher „Skalen" zueinander stehen, d.h. ob und wie sie ineinander transformiert werden können (so, wie z.B. die Kilometerskala in die Meterskala mit Hilfe des Faktors 1000 „umgerechnet" werden kann). Dies ist Gegenstand des sogenannten *Eindeutigkeitssatzes*.

Für den hier diskutierten Spezialfall leistet dies der folgende mathematische *Repräsentationssatz*:

SATZ 1. Sei $\mathcal{X} = \langle X, \succsim, \circ \rangle$ eine Struktur, welche die Axiome 1–6 erfüllt. Dann gilt:

1. *(Existenz)* Es existiert eine additive Repräsentation von $\mathcal{X}$.

2. *(Eindeutigkeit)* Sind f und g zwei additive Repräsentationen von $\mathcal{X}$, so gibt es eine positive reelle Zahl r („Umrechnungsfaktor"), so daß $g = rf$; d.h. es gilt $g(x) = rf(x)$ für alle x aus X. Umgekehrt gilt: Ist f eine additive Repräsentation von $\mathcal{X}$ und s eine beliebige positive reelle Zahl, so ist auch sf eine solche Repräsentation.

Dieser Satz ist eine Variante des *Satzes von Hölder* (Hölder, 1901), der einen der mathematischen Eckpfeiler der Meßtheorie bildet, auf welchem viele weitere Sätze (und deren Beweise) aufbauen.

Während wir anfangs, dem üblichen Sprachgebrauch folgend, einzelne Repräsentationen als „Skalen" bezeichnet haben, wird in der Meßtheorie häufig die Menge aller strukturerhaltenden Abbildungen (der jeweils betrachteten Art) als *Skala* bezeichnet. Der Eindeutigkeitssatz bestimmt dabei das sogenannte *Skalenniveau* der

[2] In der Meßtheorie wird ein Homomorphismus allgemein wie folgt definiert: Sei $\mathcal{X} = \langle X, R_1, \ldots, R_n, g_1, \ldots, g_m \rangle$ eine Struktur, wobei X eine nichtleere Menge ist, R_i $(i = 1, \ldots, n)$ eine k_i-stellige Relation auf X (d.h. $R_i \subseteq X^{k_i}$, wo X^{k_i} das k_i-fache kartesische Produkt von X ist) und g_j $(j = 1, \ldots, m)$ eine l_j-stellige Operation, d.h. eine Abbildung von X^{l_j} nach X. Sei ferner $\mathcal{N} = \langle N, S_1, \ldots, S_n, h_1, \ldots, h_m \rangle$ eine weitere solche Struktur, wobei die Stelligkeiten von S_i und R_i sowie die von g_j und h_j jeweils übereinstimmen. Eine Abbildung f von X nach N wird als Homomorphismus von $\mathcal{X}$ nach $\mathcal{N}$ bezeichnet, falls für $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$ und alle $x_1, x_2, \ldots$ aus X gilt: (i') $R_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$ gdw. $S_i(f(x_1), \ldots, f(x_{k_i}))$ (was zu verstehen ist im Sinne von $(x_1, \ldots, x_{k_i}) \in R_i$ etc.); und (ii') $f(g_j(x_1, \ldots, x_{l_j})) = h_j(f(x_1), \ldots, f(x_{l_j}))$.

jeweiligen Skala (d.h. der betrachteten *Menge* von Repräsentationen; vgl. auch den entsprechenden Beitrag von Niederée und Mausfeld, in diesem Band). Liegen die im obigen Satz genannten Eigenschaften vor, so spricht man z.B. von einer *Verhältnisskala*.

1.4 Wichtige Spezialfälle und Verallgemeinerungen

Wenden wir uns nun wieder dem obigen Repräsentationssatz zu. Es fällt auf, daß im allgemeinen mehrere Objekte unter einer Repräsentation f auf die gleiche reelle Zahl abgebildet werden können; im Fall der Länge sind dies jeweils alle gleich langen Objekte (im Sinne von $\sim$). „Identifiziert" man derartige Objekte[3], so erhält man die Menge der zugehörigen *Größen*; Relationen und Operationen übertragen sich darauf in natürlicher Weise. Erfüllte die ursprüngliche qualitative Struktur das Axiom der schwachen Ordnung, wie es im Fall der extensiven Messung vorausgesetzt ist, so ergibt sich nun eine sog. *lineare Ordnung* (d.h. es gilt Axiom 1 erweitert um die Bedingung: aus $x \succsim y$ und $y \succsim x$ folgt $x = y$). Die resultierende *Größenstruktur* ist in der gleichen Weise repräsentierbar, nur daß nun einer reellen Zahl jeweils höchstens eine Größe entspricht (man kann hier also z.B. von *der* Länge 1m, 2m etc. als jeweils einer Größe sprechen). In einem theoretischen Zusammenhang ist es häufig zweckmäßiger, sich auf solche Größenstrukturen zu beziehen (dies gilt nicht nur für den Fall der extensiven Messung). Unter den Größenstrukturen sind nun in vielen Zusammenhängen (insbesondere in der Physik, aber auch aus meßtheoretischer Perspektive; vgl. Narens, 1985) wiederum diejenigen theoretisch besonders bedeutsam, in denen alle „möglichen Größen" vorkommen in dem Sinne, daß *jeder* reellen Zahl (unter beliebigen additiven Repräsentationen f) genau eine Größe entspricht. Man spricht dann von einem *Kontinuum* (in der extensiven Messung sind solche Strukturen qualitativ dadurch charakterisiert, daß sie das Axiom der *Dedekind-Vollständigkeit* erfüllen;[4] vgl. Narens, 1985). Additive Repräsentationen sind in diesem Fall nicht mehr nur Homomorphismen, sondern *Isomorphismen*.[5] Strukturen, zwischen denen ein Isomorphismus besteht, werden als *isomorph* bezeichnet.

Der zuvor vorgestellte Repräsentationssatz (Satz 1) erfaßt natürlich nicht nur diesen wichtigen Spezialfall isomorpher Repräsentation. Er besagt, daß bereits die dort vorausgesetzten Axiome gemeinsam *hinreichend* für die Existenz additiver Repräsentationen sind (und zwar für Repräsentation auf Verhältnisskalenniveau). Nur einige von diesen – im wesentlichen die Ordnungsaxiome, das Assoziativitätsaxiom und das Monotonieaxiom – sind aber tatsächlich auch *notwendige* Bedingungen hierfür, so daß weitere Verallgemeinerungen (mit schwächeren und oft in einem gewissen Sinne realistischeren Voraussetzungen) möglich sind. Insbesondere läßt sich die implizite Annahme, daß für „beliebig große" x und y die Konkatenation $x \circ y$ stets definiert sei, was die Existenz „beliebig großer" Objekte impliziert, entscheidend abschwächen (für eine detaillierte Darstellung vgl. z.B. Krantz, Luce, Suppes & Tversky, 1971,

[3]Mathematisch geschieht dies gewöhnlich durch den Übergang zu Äquivalenzklassen (siehe Suppes, 1951; vgl. Pfanzagl, 1971, Abschnitt 1.5).

[4]Da im Kontext der Axiome 1–5 das archimedische Axiom hieraus folgt, braucht es dann nicht mehr separat aufgeführt werden.

[5]Ein Homomorphismus f im Sinne von Fußnote 2 wird als Isomorphismus bezeichnet, falls zu jedem r aus N genau ein x aus X existiert mit $f(x) = r$ (Bijektivität).

Kap. 3). In all diesen Fällen spricht man von *extensiver Messung.*

Abschließend sei noch bemerkt, daß das Konzept der extensiven Messung keineswegs nur für physikalische Variablen von Bedeutung ist. Es ist z.B. eng verwandt mit Konzepten additiver Repräsentation im Bereich der „objektiven" bzw. „subjektiven" *Wahrscheinlichkeit* und dem *maßtheoretischen* Begriff des *(endlich additiven) Wahrscheinlichkeitsmaßes.* Eine Darstellung axiomatisch-meßtheoretischer Zugangsweisen zu diesem Thema findet sich u.a. in Krantz et al. (1971, Kap. 5) und Narens (1985, Abschnitt 2.8e).

2 Additiv-verbundene Messung

Bis weit in dieses Jahrhundert hinein herrschte die Auffassung vor, daß fundamentale Messung stets extensiver Natur zu sein habe und somit zumindest auf Verhältnisskalenniveau. Geordnete Gegenstandsbereiche mit „natürlichen" und gut manipulierbaren monotonen Konkatenationsoperationen sind in der Psychologie nun aber weit seltener anzutreffen als etwa in der Physik. Tatsächlich erlaubt der zuvor skizzierte allgemeine axiomatisch-repräsentationstheoretische Ansatz neben der Analyse des klassischen Konzepts der extensiven Messung die Diskussion einer Vielzahl möglicher Formen fundamentaler Messung. Ein prominentes Beispiel hierfür ist die – insbesondere für die Physik, Psychologie und Ökonomie relevante – additiv-verbundene Messung (*additive conjoint measurement*), welche auf Debreu (1960) und Luce und Tukey (1964) zurückgeht. Sie ist überall dort potentiell anwendbar, wo zwei Faktoren zusammenwirken in dem Sinne, daß eine schwache Ordnung $\succsim$ auf Paaren von Objekten bzw. Größen – den „Faktoren" – gegeben ist (dies ist der sog. zweifaktorielle Fall; in ganz analoger Weise läßt sich der mehrfaktorielle Fall behandeln). Als Beispiel für eine solche Situation aus dem Bereich der Psychophysik könnte man Paare (i, j) (im folgenden kurz: ij) von Sinustönen einer festgelegten Frequenz, aber unterschiedlicher physikalischer Intensität betrachten, welche gleichzeitig binaural dargeboten werden (i im linken, j im rechten Ohr); hier ist somit die physikalische Intensität die relevante Größe für beide Faktoren. Eine schwache Ordnung wird dann z.B. gegeben durch die induzierte subjektive Lautstärke, indem wir festsetzen, daß $ij \succsim i'j'$, wenn der wahrgenommene Ton bei Vorgabe des Reizes ij als mindestens ebenso laut empfunden wird wie bei Vorgabe von $i'j'$ (vgl. Levelt, Riemersma & Bunt, 1972). Als einfaches Beispiel aus dem Bereich der euklidischen Geometrie betrachte man zu Paaren von Strecken i und j variabler Länge die schwache Ordnung, die sich aus dem Flächenvergleich der von diesen Strecken aufgespannten Rechtecke ergibt. Anders als in diesen beiden Beispielen können die Objekte bzw. Größen im allgemeinen Fall für beide Faktoren auch von verschiedener Art sein.

Allgemein lassen sich solche Situationen durch qualitative Strukturen der Art $\mathcal{C} = \langle A \times P, \succsim \rangle$ charakterisieren, wo $\succsim$ eine schwache Ordnung auf dem kartesischen Produkt $A \times P$ darstellt; da hier zwei Objektbereiche, A und P, eine Rolle spielen, spricht man auch von einer mehrsortigen Struktur. Repräsentationen für solche mehrsortigen Strukturen bestehen aus einem Paar von Abbildungen (f, g), wobei f und g jeweils den Bereich A bzw. P in die Menge der reellen Zahlen abbilden. In der Theorie der additiv-verbundenen Messung interessiert man sich nun für die axiomatische Charakterisierung von Strukturen dieser Art, welche eine *additive*

Repräsentation besitzen; hierunter versteht man eine Repräsentation (f, g) mit der Eigenschaft, daß für alle Paare ap und bq aus $A \times P$ gilt:

$$ap \succsim bq \quad \text{gdw.} \quad f(a) + g(p) \geq f(b) + g(q).$$

Auch dieses Konzept läßt sich unter das Konzept des Homomorphismus subsumieren, sofern letzteres geeignet auf mehrsortige Strukturen verallgemeinert wird. Dieses Konzept ist eng mit dem der extensiven Messung verknüpft. Unter anderem läßt sich dies bereits daran erkennen, daß jeder extensiven Struktur $\langle A, \succsim^*, \circ\rangle$ vermittels der Definition $c_1 d_1 \succsim c_2 d_2$ gdw. $c_1 \circ d_1 \succsim^* c_2 \circ d_2$ eine von ihr induzierte additiv-verbundene Struktur $\langle A \times A, \succsim\rangle$ zur Seite gestellt werden kann (ist nämlich f eine additive Repräsentation der ersteren, so ist offensichtlich (f, f) eine der letzeren).

Für die nachfolgend erläuterten qualitativen Axiome der *Unabhängigkeit* (*independence*) und der *Doppelkürzbarkeit* (*double cancellation*) rechnet man leicht nach, daß sie in einer Struktur $\mathcal{C} = \langle A \times P, \succsim\rangle$ erfüllt sein müssen, wenn eine additive Repräsentation für diese existiert, d.h. sie stellen *notwendige* qualitative Bedingungen für die Existenz einer solchen Repräsentation dar.

Das *Axiom der Unabhängigkeit* fordert, daß für alle a und b aus A und alle p und q aus P gilt:

(i) wenn $ap \succsim aq$, dann auch $bp \succsim bq$, und

(ii) wenn $ap \succsim bp$, dann auch $aq \succsim bq$.

Dieses Axiom besagt gerade, daß $\succsim$ verträglich ist mit schwachen Ordnungen $\succsim'$ und $\succsim''$ auf den beiden „Komponenten" A und P in dem Sinne, daß für beliebige a und b aus A und alle p, q aus P gilt: $p \succsim'' q$ gdw. $ap \succsim aq$, und $a \succsim' b$ gdw. $ap \succsim bp$. Wenn $\mathcal{C}$ diese Eigenschaft hat, spricht man auch von einer (ordinal) *verbundenen Struktur*. Im oben erwähnten geometrischen Beispiel des Flächenvergleichs von durch zwei Strecken (Grundseite und Höhe) aufgespannten Rechtecken entspräche den Komponentenordnungen gerade ein Längenvergleich von Grundseiten bzw. Höhen. Im psychophysikalischen Beispiel binauraler Lautstärke würde man erwarten, daß die beiden Ordnungen (bei festgelegter Frequenz) gerade der physikalischen Relation „ist von größerer physikalischer Intensität als" entsprechen, doch müßte man dies empirisch überprüfen. Man beachte aber, daß das Unabhängigkeitsaxiom selbst lediglich besagt, daß überhaupt zwei mit $\succsim$ verträgliche Komponentenordnungen existieren (auch diese schwächere Bedingung wäre im letztgenannten Beispiel ggf. empirisch überprüfbar).

Als weiteres notwendiges Axiom wurde oben das *Doppelkürzbarkeitsaxiom* erwähnt. Dieses fordert, daß für alle a, b, c aus A und alle p, q, r aus P gilt:

$$\text{wenn} \quad ar \succsim cq \quad \text{und} \quad cp \succsim br, \quad \text{dann} \quad ap \succsim bq.$$

Es übernimmt in einem gewissen Sinn die Rolle des Monotonieaxioms der extensiven Messung.[6]

[6] Vgl. hierzu das Beispiel einer durch eine extensive Struktur induzierten verbundenen Struktur. Die beiden Prämissen besagen hier gerade, daß $a \circ r \succsim^* c \circ q$ und $c \circ p \succsim^* b \circ r$; mittels mehrfacher Anwendung des Monotonieaxioms (und weiterer Axiome wie Assoziativität und dem von den übrigen Annahmen implizierten Kommutativitätsgesetz) folgt hieraus zunächst $(a \circ r) \circ (c \circ p) \succsim^* (c \circ q) \circ (b \circ r)$ und dann weiter $a \circ p \succsim^* b \circ q$ („Herauskürzen" von c und r), d.h. $ap \succsim bq$.

Um ein System von qualitativen Axiomen zu gewinnen, welches für den Nachweis der Existenz additiver Repräsentationen *hinreichend* ist, betrachtet man weitere Axiome, welche wir hier nicht aufführen wollen (im wesentlichen geeignete Varianten des archimedischen Axioms und des Lösbarkeitsaxioms; siehe hierzu und zum nachfolgenden Satz z.B. Krantz et al., 1971, Kap. 6; Narens, 1985, Abschnitt 3.4). Strukturen $\mathcal{C}$, welche diese Axiome erfüllen, werden als *additiv-verbundene Strukturen* bezeichnet. Diese Bezeichnung rechtfertigt sich aus dem folgenden Repräsentationssatz:

SATZ 2. Es sei $\mathcal{C} = \langle A \times P; \succsim \rangle$ eine additiv-verbundene Struktur. Dann gilt

1. *(Existenz)* $\mathcal{C}$ besitzt eine additive Repräsentation.
2. *(Eindeutigkeit)* (i) Für je zwei additive Repräsentationen (f_1, g_1) und (f_2, g_2) von $\mathcal{C}$ existieren eine positive reelle Zahl r und reelle Zahlen s und t, so daß $f_2 = rf_1 + s$ und $g_2 = rg_1 + t$; (ii) ist (f_1, g_1) eine additive Repräsentation von $\mathcal{C}$, so ist auch $(rf_1 + s, rg_1 + t)$ eine solche (wo r, s, t beliebige reelle Zahlen sind mit $r > 0$).

Die A- bzw. P-Komponenten additiver Repräsentationen (die $f's$ bzw. $g's$) bilden hier somit keine Verhältnisskalen mehr, sondern sogenannte *Intervallskalen*.

2.1 Additive vs. multiplikative Repräsentation

Man beachte, daß man von einer additiven Repräsentation (f, g) einer additiv-verbundenen Struktur unmittelbar zu einer *multiplikativen* Repräsentationen (f^*, g^*) übergehen kann. Hierunter versteht man eine Repräsentation mit der Eigenschaft

$$ap \succsim bq \quad \text{gdw.} \quad f^*(a)g^*(p) \geq f^*(b)g^*(q).$$

Wie man mit Hilfe der Potenzgesetze leicht nachrechnet, ist hierzu lediglich $f^*(a) = e^{f(a)}$ und $g^*(a) = e^{g(a)}$ zu setzen. Umgekehrt kann man von einer multiplikativen Repräsentation durch Logarithmierung stets zu einer additiven übergehen. In diesem Sinne könnte man statt von „additiv-verbundenen“ ebenso von „multiplikativ-verbundenen“ Strukturen sprechen.

Ähnliches ist natürlich auch im Falle der extensiven Messung möglich: Multiplikative Repräsentationen entsprechen dort homomorphen Abbildungen (Homomorphismen) in die numerische Struktur $\langle \mathbb{R}_{>1}, \geq, \times \rangle$, wo $\mathbb{R}_{>1}$ für die Menge der reellen Zahlen > 1 steht und $\times$ für die Multiplikation. Diese ist *isomorph* zu der ursprünglich betrachteten numerischen Struktur (d.h. es existiert ein *Isomorphismus* zwischen beiden Strukturen; ein solcher ist hier gerade die Exponentialfunktion $y = e^x$). Daneben gibt es unendlich viele weitere isomorphe numerische Strukturen, welche als „äquivalente“ (nicht-additive) Repräsentationsstrukturen in Betracht kommen. Welche davon man wählt, ist lediglich eine Frage der Zweckmäßigkeit und damit der Konvention. Keine Frage der Konvention, sondern – zumindest im Prinzip – eine der empirischen Überprüfung ist dagegen die Gültigkeit der entsprechenden qualitativen Axiome (welche hinreichend und/oder notwendig für die *Existenz* derartiger Repräsentationen sind). Entsprechendes gilt für den Fall additiv-verbundener Strukturen wie für meßtheoretische Repräsentationskonzepte ganz allgemein.

2.2 Die distributive Verknüpfung extensiver und additiv-verbundener Strukturen

Ein weiterer in diesem Zusammenhang bedeutsamer Punkt sei am Beispiel des Flächenvergleichs von Rechtecken mit Seiten i und j erläutert. In diesem Fall, in dem in der Tat eine additiv-verbundene Struktur vorliegt, ist beispielsweise eine multiplikative Repräsentation zweckmäßig und uns allen wohlvertraut, kann doch in diesem Fall für f und g einfach ein übliches extensives Längenmaß gewählt werden („Fläche gleich Länge von i mal Länge von j").

In der Tatsache, daß sich in diesem Beipiel ein solch einfacher Zusammenhang zwischen einer additiven Repräsentation der Komponenten (bezüglich der Komponentenordnungen und Konkatenation $\circ$) und einer multiplikativen der betrachteten additiv-verbundenen Struktur herstellen läßt, drückt sich ein entsprechender *qualitativer* Zusammenhang aus, welcher sich seinerseits durch geeignete qualitative Axiome charakterisieren läßt. Eine wesentliche notwendige Bedingung für ein solches Zusammenspiel von additiven und multiplikativen Repräsentationen ist z.B. die folgende qualitative „Distributivitätsbedingung": Wenn $ap \succsim bq$ und $cp \succsim dq$, dann auch $(a \circ c)p \succsim (b \circ d)q$. (Man beachte, daß hier z.B. $(a \circ c)p$ vereinbarungsgemäß für das „Faktorenpaar" $(a \circ c, p)$ steht.) Tatsächlich findet sich gerade in der Physik eine Fülle von Beispielen, in denen ein ähnlich „schönes Zusammenspiel" zwischen additiv-verbundener und extensiver Messung besteht (unter Bezugnahme auf Operationen auf A, P und/oder $A \times P$ und geeignete Distributivitätsbedingungen; vgl. Narens, 1985, Abschnitt 3.5). Auch derartige Situationen, in denen es um den Zusammenhang von qualitativen Strukturen untereinander und einen „entsprechenden" Zusammenhang der mit ihnen verknüpften Skalen geht, sind ein bedeutender Gegenstand meßtheoretischer Analysen. Dies erlaubt insbesondere ein vertieftes qualitativ-strukturelles Verständnis vieler elementarer Gesetze der Physik, des aus ihnen abgeleiteten dimensionalen Gefüges physikalischer Größen („Dimensionen" wie Volumen, Dichte, Stromstärke usw. als Produkte von Potenzen weniger extensiver Basisdimensionen wie Länge, Masse, Zeit) und damit auch der Grundlagen der sog. Dimensionsanalyse (siehe Krantz et al., 1971, Kap. 10; Luce, 1978; Luce, Krantz, Suppes & Tversky, 1990).

2.3 Nicht-additive Strukturen

Nicht unerwähnt bleiben soll an dieser Stelle, daß die vorgestellten Analysen mittlerweile auch auf den Fall von Konkatenations- und verbundenen Strukturen ausgedehnt wurden, welche *nur* nicht-additiv repräsentierbar sind (dies ist streng vom Fall nicht-additiver Repräsentationen für die bisher betrachteten „additiven" Strukturen zu unterscheiden). Hierbei handelt es sich um Strukturen, welche keine additive (und damit auch keine multiplikative) Repräsentation zulassen, da sie die hierfür notwendigen qualitativen Bedingungen der Assoziativität bzw. Doppelkürzbarkeit nicht erfüllen (z.B. Narens, 1985; Luce et al., 1990). Ausgehend von den Untersuchungen von Cohen und Narens (1979) und Narens (1981) werden statt dessen häufig qualitative Annahmen herangezogen, welche sich auf die inneren Symmetrien der zugrundeliegenden qualitativen Strukturen beziehen (d.h. auf deren Automorphismen; vgl. das folgende Kapitel von Niederée & Mausfeld, in diesem Band).

3 Einige allgemeine Schlußbetrachtungen

Die extensive und die additiv-verbundene Messung sowie eng mit diesen verbundene Konzepte – wie z.B. das der *Differenzenmessung* – oder Erweiterungen – wie das des *polynomial conjoint measurement* – sind sicher die bekanntesten Beispiele axiomatisch-meßtheoretischer Repräsentationskonzepte (vgl. Krantz et al., 1971, Kap. 4 bzw. Kap. 7; ein bereits bei Hölder, 1901, behandeltes Beispiel der Differenzenmessung wäre der Abstand zwischen zwei Punkten auf einer Geraden). Doch sie sind bei weitem nicht die einzigen. Einige der zahlreichen weiteren Beispiele wurden bereits im letzten Abschnitt erwähnt. Wichtige Anwendungsbereiche sind z.B. die Entscheidungs- und Nutzentheorie (vgl. z.B. Krantz et al., 1971, Kap. 8) oder die Psychophysik, wie z.B. meßtheoretische Untersuchungen zu Schwellenkonzepten oder zur Farbmetrik belegen (vgl. Suppes, Krantz, Luce & Tversky, 1989). Letzteres ist ein Beispiel für ein *mehrdimensionales* Repräsentationskonzept; eine axiomatisch-meßtheoretische Grundlegung solcher Konzepte findet sich daneben u.a. auch in den Bereichen der *multidimensionalen Skalierung* und der Geometrie (vgl. ebenfalls Suppes et al., 1989).

Dies möge an Belegen für die potentielle Fruchtbarkeit und Reichhaltigkeit des axiomatisch-meßtheoretischen Ansatzes genügen. Abschließend wollen wir noch kurz auf einige grundsätzliche konzeptuelle und wissenschaftstheoretische Fragen eingehen, welche sich in diesem Zusammenhang stellen. Viele der im folgenden angesprochenen subtilen Themen werden in der einschlägigen Literatur kontrovers diskutiert. Nicht selten werden sie auch in übermäßig vereinfachender Weise behandelt. Wir werden uns hier weitgehend auf die andeutungsweise Darstellung eines uns kohärent erscheinenden Standpunktes beschränken müssen.

Häufig wird der axiomatischen Meßtheorie lediglich die Aufgabe zugeschrieben, das empirische Fundament für die Einführung von „Basisskalen" auf der Grundlage geeigneter Konzepte „fundamentaler Messung" zu legen, von denen ausgehend dann weitere Skalen rein numerisch definiert werden können (wie z.B. Dichte als Quotient von Masse und Volumen). Man spricht dann von *abgeleiteter Messung* (Campbell, 1920; Suppes & Zinnes, 1963; implizit findet sich eine solche Unterscheidung bereits bei Helmholtz, 1887). Dies ist sicher eine mögliche Vorgehensweise; dabei darf die Unterscheidung „fundamental" vs. „abgeleitet" aber nicht als eine in einem epistemologischen oder ontologischen Sinne „absolute" Klassifikation mißverstanden werden (die Rollen können z.B. häufig vertauscht werden).

Folgt man dieser Auffassung, welche den potentiellen Wirkungskreis axiomatisch-meßtheoretischer Analysen vergleichsweise eng zieht, so übersieht man jedoch leicht, daß eine qualitativ-axiomatische Analyse oft auch für Skalen sinnvoll und erhellend sein kann, welche als abgeleitete Skalen eingeführt wurden. In der Physik liegen ihrer Einführung beispielsweise in aller Regel Naturgesetze, wie z.B. gewisse Invarianzen, zugrunde – Helmholtz (1887) bezog sich explizit auf diesen Fall, der auch im Beispiel der Dichte vorliegt –, die dann den Ausgangspunkt für eine solche Analyse bilden können. Entsprechendes gilt allgemein für das Zusammenspiel mehrerer Skalen und der sie verbindenen Gesetze. Man denke etwa an das obige Beispiel der distributiven Verknüpfung von additiv-verbundenen und extensiven Strukturen (die Beziehung von Dichte, Masse und Volumen ließe sich z.B. ganz ähnlich qualitativ analysieren).

Ob man nun in einem gegebenen Fall eine solche explizite qualitative Darstellung derartiger Zusammenhänge anstrebt oder nicht, eines sollte sicherlich nicht vergessen werden: Letztlich ist es gerade dieses Zusammenwirken von Skalen und Gesetzen innerhalb eines reichen empirisch-theoretischen Zusammenhangs, welchem wesentlich der Erfolg der quantitativen Methode in reifen Wissenschaften wie der Physik zu verdanken ist. Auch die Längenmessung verdankt ihre Bedeutung nicht allein der Tatsache, daß sie sich als Prototyp fundamentaler Messung auffassen läßt, sondern der Rolle, die sie u.a. in Geometrie, Physik und Technik spielt.

Betrachtet man die qualitativ-axiomatische Vorgehensweise aus der zuletzt angesprochenen Perspektive, so tritt der Aspekt der substanzwissenschaftlichen Theoriebildung in den Mittelpunkt und das Bemühen, den qualitativ-empirischen Gehalt von quantitativen Konzepten und Modellen/Theorien dort, wo dies auf diese Weise möglich ist, zu erhellen. Dies dient zum einen dem Ziel begrifflich-konzeptueller Klärung. Zum anderen bieten die jeweiligen qualitativen „Axiome" jedoch unter Umständen auch wertvolle Ansatzpunkte für eine gezielte *experimentelle Überprüfung* der betreffenden Theorien. Im Mittelpunkt werden dabei „unmittelbar testbare" universelle Axiome („für alle...") stehen wie z.B. das Monotonieaxiom in der Theorie der extensiven oder das Doppelkürzbarkeitsaxiom in der Theorie der additiv-verbundenen Messung. Andere, wie z.B. das archimedische Axiom, sind *nicht* in einem solchen Sinne unmittelbar testbar (falsifizierbar); sie werden daher gelegentlich als „technische Axiome" bezeichnet (vgl. Adams, Fagot & Robinson, 1970). Dies bedeutet jedoch nicht, wie gelegentlich angenommen, daß solche Axiome damit tatsächlich stets ohne jeden qualitativ-empirischen Gehalt seien (einige knappe Anmerkungen zu diesem subtilen und u.E. bisher nicht ausreichend in der Literatur beleuchteten Punkt finden sich z.B. in Niederée, 1994, S. 576; vgl. auch Adams, 1979, S. 208f. und Luce et al., 1990, Kap. 21).

Begriffe wie „unmittelbar testbar" (oder „falsifizierbar"), „empirischer Gehalt", „empirische Struktur" etc. dürfen in den zuvor angesprochenen Zusammenhängen nicht, wie es häufig geschieht, naiv-empiristisch mißverstanden werden. Dies ist der Grund, weshalb wir hier den (leider gelegentlich seinerseits mißverstandenen) Begriff der „qualitativen Struktur" (etc.) dem der „empirischen Struktur" vorgezogen haben. Zum einen gibt es aus einer theoretischen Perspektive keinen Grund, die Anwendung der hier diskutierten Konzepte auf den Fall beobachtbarer Relationen und Operationen in einem engen empiristischen Sinne zu beschränken. Schwerwiegender ist der Einwand, daß selbst in allgemein akzeptierten Fällen fundamentaler Messung die betrachteten Objekte und Relationen kaum je im strengen Sinne dem in direkter Beobachtung unmittelbar und unanfechtbar Gegebenen entsprechen, welches dann als unumstößliche qualitativ-empirische Datenbasis aufgefaßt werden könnte (nur so wäre ja eine Falsifikation von qualitativen „Axiomen" im *strengen* Sinne möglich).

So ist selbst im Falle der Längenmessung eine streng empiristische Lesart der genannten Art unangemessen. Dies ist z.B. für Objekte makroskopischer oder mikroskopischer Größenordnung unmittelbar evident. Der *theoretische* (was nicht notwendig heißt: „irreale" oder „unanschauliche") Charakter der Operation $\circ$ und der Relation $\succsim$ liegt für solche Objekte auf der Hand. In der Psychologie würde man in einem solchen Fall von einer *latenten Variablen* sprechen. Tatsächlich kann selbst im Falle „irdischer" Größenordnungen die betrachtete qualitative Struktur – soll die

Annahme aufrecht erhalten werden, daß sie die obigen Axiome erfüllt – lediglich als „beobachtungsnah“ bezeichnet werden. In der Tat werden reale Stäbe die Axiome der extensiven Messung nur approximativ im Sinne unmittelbarer Beobachtungsprädikate erfüllen (auch wenn dies für die meisten Zwecke völlig ausreicht): Man denke etwa an die hier implizit gemachte problematische Annahme der absoluten „Unveränderlichkeit“ der betrachteten Stäbe; oder an die Tatsache, daß aus den obigen Axiomen folgt, daß, wenn $a_1 \sim a_2, a_2 \sim a_3, \ldots, a_{n-1} \sim a_n$, stets auch $a_1 \sim a_n$ gelten muß; usw. Die qualitative Struktur $\mathcal{X} = \langle X, \succsim, \circ \rangle$ selbst, auf die wir uns in unserer obigen Darstellung bezogen haben, muß also strenggenommen bereits als eine aus theoretischen Gründen eingeführte „Hintergrundstruktur“ betrachtet werden (welche sich etwa auf „physikalische Strecken“ beliebiger Länge statt auf konkrete Stäbe bezieht). Diese Struktur können wir dann auf die eine oder andere Weise zur „Beobachtungsebene“ in Beziehung setzen. Zu einer solchen Gegenüberstellung paßt auch die Unterscheidung des wissenschaftlichen *common sense* von „wahrer“ Länge (zu einem bestimmten Zeitpunkt – auch hierin steckt bereits ein theoretisches Element) und der jeweiligen gemessenen Länge, von denen letztere mit einem „Meßfehler“ behaftet sein kann. Die diesem *common sense* am nächsten stehende (wenn auch aus „anti-realistischer“ Sicht kontrovers diskutierte) philosophische Position, welche im Gegensatz steht zu traditionellen empiristischen Positionen, ist die des sog. wissenschaftlichen Realismus.

Entsprechendes gilt natürlich für andere Beipiele fundamentaler Messung. Die hier angedeuteten Probleme hängen mit tiefliegenden allgemein-wissenschaftstheoretischen Fragen zusammen, auf die wir hier nicht eingehen können. In der Meßtheorie spricht man in diesem Zusammenhang gewöhnlich von dem *Fehlerproblem.* Über das Konzept des Meßfehlers im traditionellen Sinne hinaus schließt es die Problematik des Testens meßtheoretischer Axiome auf qualitativer Ebene mit ein.

Eine erhebliche Quelle von Schwierigkeiten kann in diesem Zusammenhang etwa eine intrinsische Variabilität der betrachteten Objekte (und damit ihrer Relationen zueinander) sein, wie sie in der Psychologie oft gegeben ist. Ein fruchtbarer theoretischer Weg, hiermit umzugehen, könnte in geeigneten Situationen die *Probabilisierung* meßtheoretischer Konzepte sein (der Bezug auf Beobachtung/Daten erfordert dann eine inferenzstatistische Vorgehensweise). Erste Ansätze hierzu finden sich in der *probabilistischen Meßtheorie* (siehe z.B. Falmagne, 1985; Suppes et al., 1989; Heyer und Niederée, 1992). Doch muß vor jedwedem schematisch verallgemeinernden Lösungsversuch „des“ Fehlerproblems gewarnt werden: Sieht man von rein pragmatischen Intentionen ab, bleibt die entscheidende Ebene die der jeweiligen substanzwissenschaftlichen Theoriebildung (siehe z.B. Heyer und Mausfeld, 1987).

Einen Aspekt, der für die Anwendung der entsprechenden Theorien (aber auch aus theoretischen Gründen selbst) von Interesse ist, haben wir bisher vernachlässigt: die Rolle von *Meßverfahren* und *Maßzahlen* (gewöhnlich reelle Zahlen; Narens, 1974, 1985, betrachtet z.B. auch sog. *nonstandard reals*, welche auch infinitesimale, d.h. „unendlich kleine“ Größen einzubeziehen gestatten). Tatsächlich spielen in einem gewissen theoretischen Sinne „Meßverfahren“ im axiomatisch-repräsentationstheoretischen Ansatz eine wesentliche Rolle, wenn auch häufig nur implizit in Gestalt der den Beweisen der Repräsentations- und Eindeutigkeitssätze zugrundeliegenden Skalenkonstruktionen.

Im Fall der extensiven Messung beruht die Bestimmung eines Meßwertes z.B. auf der folgenden bekannten Grundidee (wir beziehen uns hier wieder auf die theoretisch zugrunde gelegte extensive Struktur selbst, d.h. das Fehlerproblem ist ausgeklammert): Es wird willkürlich ein Bezugsobjekt e festgesetzt, dem der Wert 1 zugeordnet wird (Einheit). Man betrachtet dann Vielfache der Einheit und des zu messenden Objektes a, oder auch Vielfache von n-ten bzw. m-ten Teilen davon, z.B. von Zehnteln, Hundertsteln etc.; diese lassen sich rein qualitativ unter Rückgriff auf den Begriff der Standardfolge (s.o.) einführen. Der Meßwert von a relativ zur Einheit e ergibt sich dann aus dem Vergleich der resultierenden Objekte hinsichtlich $\sim$ und $\succ$ (siehe Hölder, 1901; vgl. Niederée, 1992a). Ist im Fall der Längenmessung z.B. $a \circ a$ gleich lang (im Sinne von $\sim$) wie $(e \circ e) \circ e$, so ergibt sich, daß der Skalenwert für a gleich 3/2 ist; gilt $\succ$ ($\prec$) statt $\sim$, so ergibt sich, daß er grösser (kleiner) als 3/2 sein muß. Während *rationale* Skalenwerte im Prinzip durch einen einzigen Vergleich der ersten Art bestimmt sind, werden *irrationale* Skalenwerte erst durch unendlich viele Vergleiche der zweiten Art festgelegt (durch endlich viele werden sie nach und nach besser „approximiert"). In mathematischen Beweisen des Satzes von Hölder (Satz 1) wird daher häufig auf Konzepte wie das des Grenzwertes zurückgegriffen.

Solche Skalenkonstruktionen sind, anders als etwa bei den meisten auf dem Wege der Operationalisierung eingeführten numerischen Indizes, stets eng verknüpft mit der jeweiligen qualitativen Theorie (also hier den Axiomen der extensiven Messung). Ein entsprechendes *allgemeines* Konzept des Meßverfahrens und ein darauf gestütztes allgemeines Konzept der Maßzahl findet sich jedoch in den traditionellen meßtheoretischen Darstellungen nicht. Tatsächlich ist ja nicht einmal klar, warum ein allgemeines Konzept der Maßzahl stets mit dem der reellen Zahl zusammenfallen sollte, welches sich historisch aus einem Spezialfall fundamentaler Messung, nämlich dem der *extensiven* Messung (bzw. mit Blick auf negative reelle Zahlen: dem der Differenzenmessung) im Sinne eines zugehörigen theoretischen Bereichs von „Maßzahlen" entwickelt hat. Eine logisch-modelltheoretische Weiterentwicklung des repräsentationstheoretischen Ansatzes, die ein entsprechendes Konzept des „Meßverfahrens" zum Ausgangspunkt nimmt und hieraus ein allgemeines Konzept der „Maßzahl" ableitet, wurde von Niederée (1992a, 1992b) vorgeschlagen.

Der zunächst einmal abstrakt-theoretische (mathematische) Charakter der zuvor angesprochenen Konzepte des „Meßwertes" und des „Meßverfahrens" bzw. der Maßfunktion ist unübersehbar. Er wird bereits deutlich durch den Bezug auf *reelle Zahlen* und *unendliche* Approximationsverfahren (man denke etwa an die Darstellung reeller Zahlen durch unendliche Dezimalbrüche). Wie in der obigen Skizze eines solchen Meßverfahrens für extensive Strukturen deutlich wird, kann ein solches „Meßverfahren" in mehr oder weniger enger Beziehung stehen zur tatsächlichen praktischen Messung im Sinne einer regelgeleiteten praktischen Zuordnung von *Zahlzeichen* zu konkreten empirischen Objekten. Dennoch sind diese beiden konzeptuellen Ebenen sorgfältig zu unterscheiden, wie bereits aus der Tatsache deutlich wird, daß Zahlzeichen – welche sich als konkrete Zeichen („Namen") für abstrakte Zahlen auffassen lassen – in der Regel nur für rationale Zahlen zur Verfügung stehen (Brüche; endliche Dezimalbrüche), in der Praxis sogar nur für einen vergleichsweise kleinen Teil davon, aus grundsätzlichen mathematischen Gründen aber keinesfalls für beliebige reelle Zahlen (man wird sich dann in der Praxis ggf. auf Paare von Zahlzeichen oder dergleichen im Sinne einer unteren und einer oberen Abschätzung beziehen). Eine vielzitierte, operationalistisch gefärbte Explikation des Begriffs der „Messung" der letztgenannten Art, d.h. im Sinne einer regelgeleiteten Zuordnung von Zahlen bzw. Zahlzeichen, findet sich z.B. bei Stevens (1959); wie viele andere unterscheidet er dabei jedoch nicht zwischen Zahlen (*numbers*) und Zahlzeichen (*numerals*) und verstellt damit den Blick auf entscheidende konzeptuelle Unterschiede.

Neben den genannten konzeptuellen Unterscheidungen steht einer unmittelbaren Identifizierung praktischer Messung mit Skalenkonstruktionen der oben beschriebenen Art natürlich auch der mit dem Fehlerproblem verknüpfte Problemkreis entgegen; dies kann selbstredend auch aus praktischer Sicht eine bedeutsame Komplikation darstellen. Hinzu kommt nicht zuletzt die Tatsache, daß praktische Meßverfahren häufig auf die ein oder andere Weise „indirekt" sind, etwa indem sie Meßinstrumente einbeziehen (im Fall der Messung von Längen im mikroskopischen oder makroskopischen Bereich ist dies z.B. unumgänglich). Deren theoretische Rechtfertigung erfordert häufig zusätzliche Annahmen, die, wo dies fruchtbar erscheint, ihrerseits natürlich wieder qualitativ-meßtheoretisch analysiert werden können. Hier spielt mit anderen Worten der oben angesprochene empirisch-theoretische Kontext eine entscheidende Rolle.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß der repräsentationstheoretische Ansatz der axiomatischen Meßtheorie einen wichtigen Beitrag zum Verständnis der qualitativ-theoretischen Grundlagen quantitativer Konzepte leisten kann. Wesentlich hierbei ist die ihm zugrundeliegende *qualitativ-strukturelle Perspektive*, welche in substantieller Weise die Frage nach der empirischen „Bedeutsamkeit" quantitativer Konzepte und Modelle zu erhellen erlaubt.

Hierin, dies sei an dieser Stelle noch hinzugefügt, unterscheidet er sich deutlich von der – vor allem unter Psychologen populären, doch zumeist irregeleiteten – Praxis, den Blick unter Ausklammerung qualitativ-struktureller Betrachtungen im Gefolge von Stevens (z.B. 1946, 1959) auf „das Skalenniveau" einzuengen. Skalenniveaubezogene meßtheoretische Invarianzkriterien werden dann häufig als „Bedeutsamkeitspostulate" mißverstanden. Eine Kritik einer derartigen, scheinbar „meßtheoretischen" Vorgehensweise findet sich im folgenden Kapitel von Niederée und Mausfeld (in diesem Band), wo andererseits jedoch auch aufgezeigt wird, daß sich im Rahmen einer (ggf. probabilistisch zu erweiternden) qualitativ-strukturellen Perspektive durchaus fruchtbare substanzwissenschaftliche Anwendungsmöglichkeiten meßtheoretischer Invarianzkonzepte ergeben können.

Auch der gegenüber einem reinen Skalenniveau-Ansatz wesentlich reichhaltigere konzeptuelle Rahmen der axiomatischen Meßtheorie beantwortet jedoch noch nicht alle mit dem Thema „Theorie und Messung" verknüpften wissenschaftstheoretischen Grundlagenfragen. Wie wir gesehen haben, erfordert ein umfassendes Verständnis dieses Problemkreises bereits in scheinbar einfachen paradigmatischen Beispielen fundamentaler Messung, wie dem der Längenmessung, die Einbeziehung zusätzlicher Gesichtspunkte. Dies schmälert jedoch bei angemessener Betrachtungsweise weder die Bedeutung dieses Ansatzes als Instrument konzeptueller Klärung noch seinen potentiellen Beitrag zur Theoriebildung in den empirischen Wissenschaften.

4 Weiterführende Literatur

Lesenswerte einführende Artikel, welche einige neuere Entwicklungen mitberücksichtigen, sind u.a. Luce (1992) und Luce und Narens (1987). Einen umfassenden Überblick über die axiomatisch-repräsentationstheoretische Meßtheorie auf hohem Niveau vermitteln die bereits mehrfach erwähnten drei Bände der *Foundations of Measurement* (Krantz et al., 1971; Suppes et al., 1989; Luce et al., 1990), in welchen sich auch ein umfangreiches Literaturverzeichnis findet. Als Standardwerke sind des weiteren Pfanzagl (1971) und Narens (1985) zu nennen. Während diese Werke eher mathematisch-theoretisch ausgerichtet sind, nähert sich Roberts (1979) dem Thema aus einer anwendungsorientierten Perspektive.

Ein Überblick über die relevante Literatur zu den in den Schlußbetrachtungen angesprochenen Grundlagenfragen und zur Kritik verschiedener Aspekte des Repräsentationsansatzes kann hier nicht gegeben werden (zum letzteren Punkt siehe z.B. Adams, 1966, und Savage & Ehrlich, 1992). Innerhalb des axiomatisch-repräsentationstheoretisch orientierten meßtheoretischen Schrifttums werden diese Themen (und damit verknüpfte Probleme des Repräsentationsansatzes) sowie Fragen der prädikatenlogischen Axiomatisierbarkeit, welche hier nicht angesprochen werden konnten, insbesondere in Suppes et al. (1989, Kap. 21), Niederée (1992b, 1994) und Luce und Narens (1994) diskutiert, wo sich auch weitere Literaturangaben zu diesem Themenkreis finden.

Literaturverzeichnis

Adams, E. W. (1966). On the nature and purpose of measurement. *Synthese, 16*, 125–169.

Adams, E. W. (1979). Measurement theory. In D. Asquith & H. E. Kyburg Jr. (Eds.) *Current research in the philosophy of science* (pp. 207–227). East Lansing: Philosophy of Science Association.

Adams, E. W., Fagot, R. F. & Robinson, R. (1970). On the empirical status of axioms of measurement. *Journal of Mathematical Psychology, 7*, 379–409.

Campbell, N. R. (1920). *Physics: The elements.* Cambridge: Cambridge University Press. (Neu aufgelegt unter dem Titel *Foundations of science: The philosophy of theory and experiment.* New York: Dover, 1957.)

Cohen, M. & Narens, L. (1979). Fundamental unit structures: A theory of ratio-scalability. *Journal of Mathematical Psychology, 20*, 193–232.

Debreu, G. (1960). Topological methods in cardinal utility theory. In K. J. Arrow, S. Kerlin & P. Suppes (Eds.) *Mathematical methods in the social sciences* (S. 16–26). Stanford: Stanford University Press.

Falmagne, J.-C. (1985). *Elements of psychophysical theory.* New York: Oxford University Press.

von Helmholtz, H. (1887). *Zählen und Messen erkenntnistheoretisch betrachtet.* In *Philosophische Aufsätze. Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctor-Jubiläum gewidmet* (S. 15–52). Leipzig: Fues.

Heyer, D. & Mausfeld, R. (1987). On errors, probabilistic measurement, and Boolean valued logic. *Methodika, 1*, 113–138.

Heyer, D. & Niederée, R. (1992). Generalizing the concept of binary choice systems: One way of probabilizing deterministic measurement structures. *Mathematical Social Sciences, 23*, 31–44.

Hölder, O. (1901). Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse*, *53*, 1–46.

Krantz, D. H., Luce, R. D., Suppes, P. & Tversky, A. (1971). *Foundations of measurement. Vol. 1.: Additive and polynomial representations.* New York: Academic Press.

Levelt, W. J. M., Riemersma, J. B. & Bunt, A. A. (1972). Binaural additivity in loudness. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, *25*, 1–68.

Luce, R. D. (1978). Dimensionally invariant numerical laws correspond to meaningful qualitative relations. *Philosophy of Science*, *45*, 1–16.

Luce, R. D. (1992). A path taken: Aspects of modern measurement theory. In A. F. Healy, S. M. Kosslyn, & R. M. Shiffrin (Eds.), *From learning theory to connectionist theory: Essays in honor of Willian K. Estes* (Bd. 1, S. 45–64). Hillsdale: Erlbaum.

Luce, R. D., Krantz, D. H., Suppes, P. & Tversky, A. (1990). *Foundations of measurement. Vol. 3.: Representation, axiomatization, and invariance.* San Diego: Academic Press.

Luce, R. D. & Narens, L. (1987). Measurement scales on the continuum. *Science*, *236*, 1527–1532.

Luce, R. D. & Narens, L. (1994). Fifteen problems concerning the representational theory of measurement. In P. Humphreys (Ed.), *Patrick Suppes: Scientific philosopher.* (Bd. 2, S. 15–38). Dordrecht: Kluwer.

Luce, R. D. & Tukey, J. W. (1964). Simultaneous conjoint measurement: A new kind of fundamental measurement. *Journal of Mathematical Psychology*, *1*, 1–27.

Narens, L. (1974). Measurement without Archimedean axioms. *Philosophy of Science*, *41*, 374–393.

Narens, L. (1981). On the scales of measurement. *Journal of Mathematical Psychology*, *24*, 249–275.

Narens, L. (1985). *Abstract measurement theory.* Cambridge: MIT Press.

Niederée, R. (1992a). What do numbers measure? A new approach to fundamental measurement. *Mathematical Social Sciences*, *24*, 237–276.

Niederée, R. (1992b). *Maß und Zahl. Logisch-modelltheoretische Untersuchungen zur Theorie der fundamentalen Messung.* Frankfurt a.M.: Lang.

Niederée, R. (1994). There is more to measurement than just measurement: Measurement theory, symmetry, and substantive theorizing. *Journal of Mathematical Psychology*, *38*, 527–593.

Pfanzagl, J. (1971). *Theory of measurement* (2. rev. Aufl.). Würzburg: Physica.

Roberts, F. S. (1979). *Measurement theory, with applications to utility, decision making, and the social sciences.* Reading: Addison-Wesley.

Savage, C. W. & Ehrlich, P. (Eds.) (1992). *Philosophical and foundational issues in measurement theory.* Hillsdale: Erlbaum.

Scott, D. & Suppes, P. (1958). Foundational aspects of theories of measurement. *Journal of Symbolic Logic*, *23*, 113–128.

Stevens, S. S. (1946). On the theory of scales of measurement. *Science*, *103*, 677–680.

Stevens, S. S. (1959). Mathematics, measurement and utility. In C. W. Churchman & P. Ratoosh (Eds.), *Measurement: Definitions and theories* (S. 18–63). New York: Wiley.

Suppes, P. (1951). A set of independent axioms of extensive measurement. *Portugaliae Mathematica*, *10*, 163–172.

Suppes, P., Krantz, D. H., Luce, R. D. & Tversky, A. (1989). *Foundations of measurement. Vol. 2.: Geometrical, threshold and probabilistic representations.* New York: Academic Press.

Suppes, P. & Zinnes, J. (1963). Basic measurement theory. In R. D. Luce, R. R. Bush & E. Galanter (Eds.), *Handbook of mathematical psychology* (Bd. 1, S. 1–76). New York: Wiley.