Äquivariante holomorphe Differentialoperatoren mit vektorwertigen Automorphiefaktoren

Inauguraldissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Universität Mannheim

vorgelegt von

Julia Meister
aus Mannheim

Mannheim, 2021

Dekan:	Dr. Bernd Lübcke, Universität Mannheim
Referent:	Prof. Dr. S. Böcherer, Universität Mannheim
Korreferent:	Prof. Dr. J. Funke, University of Durham

Tag der mündlichen Prüfung: 6. Oktober 2021

Zusammenfassung

Ziel der vorliegenden Arbeit ist der Beweis der Existenz bzw. die explizite Konstruktion äquivarianter und holomorpher Differentialoperatoren auf dem Siegelschen Halbraum $\mathbb{H}_n$ und mit vektorwertigen Ausgangsautomorphiefaktoren.

Ansatz Es werden nicht-holomorphe, äquivariante Differentialoperatoren verwendet, um holomorphe, äquivariante Differentialoperatoren zu konstruieren. Ein einfaches Beispiel (s. [3, S.40/41]), um den verwendeten Ansatz zu beschreiben, erhält man z.B. für den Maas-Shimura- Differentialoperator von Grad 1 (s. Kapitel 3)

$$\delta_l^{(1)}(g) := \left(\frac{l}{2iy} + \frac{\partial}{\partial z}\right)(g).$$

Für Funktionen $f \in \mathcal{H}_k(\mathbb{H}, \mathbb{C})$ und $g \in \mathcal{H}_l(\mathbb{H}, \mathbb{C})$ (s. Kapitel 1, S. 9/10) ist

$$\underbrace{f \cdot \delta_l^{(1)}(g)}_{C^\infty_{k+l}(\mathbb{H},\mathbb{C})} = \frac{l}{k+l}\,\underbrace{\delta_{k+l}^{(1)}(f \cdot g)}_{C^\infty_{k+l}(\mathbb{H},\mathbb{C})} + \frac{1}{k+l}\underbrace{\left(k \cdot f\left(\tfrac{\partial}{\partial z} g\right) - l \cdot \left(\tfrac{\partial}{\partial z} f\right) g\right)}_{\mathcal{H}_{k+l}(\mathbb{H},\mathbb{C})}.$$

Als Differenz (mit passenden Koeffizienten) geschrieben erhält man

$$(k+l) \cdot f \cdot \delta_l^{(1)}(g) - l \cdot \delta_{k+l}^{(1)}(f \cdot g) = \underbrace{\left(k \cdot f\left(\tfrac{\partial}{\partial z} g\right) - l \cdot \left(\tfrac{\partial}{\partial z} f\right) g\right)}_{\substack{holomorpher\ Differentialoperator \\ (Rankin-Cohen-Klammer)}}.$$

Somit ist die Idee der Konstruktion in aller Kürze beschrieben und in dieser Arbeit werden wir höherdimensionale Versionen hiervon behandeln, ausgehend von vektorwertigen Automorphiefaktoren.

Vorgehensweise I Ausgehend von dem nicht-holomorphen, äquivarianten Differentialoperator aus einer gemeinsamen Arbeit von S. Böcherer, T. Satoh & T. Yamazaki [2] werden wir auf zwei Weisen holomorphe und äquivariante Differentialoperatoren direkt und explizit entwickeln. Zu ei-

ner Darstellung $\rho = Sym^\nu \otimes det^k$ wird ein bilinearer, holomorpher Differentialoperator

$$\big[*,*\big] : \mathcal{H}_{Sym^\nu \otimes det^k}(\mathbb{H}_n, V^{(\nu)}) \times \mathcal{H}_{det^l}(\mathbb{H}_n, \mathbb{C}) \to \mathcal{H}_{Sym^{\nu+2} \otimes det^{k+l}}(\mathbb{H}_n, V^{(\nu+2)})$$

konstruiert werden, der für alle Funktionen f aus $\mathcal{H}_{Sym^\nu \otimes det^k}(\mathbb{H}_n, V^{(\nu)})$ und g aus $\mathcal{H}_{det^l}(\mathbb{H}_n, \mathbb{C})$ die Äquivarianzeigenschaft

$$\big[f \mid_{Sym^\nu \otimes det^k} M, g \mid_{det^l} M\big] = \big[f, g\big] \mid_{Sym^{\nu+2} \otimes det^{k+l}} M$$

für $M \in Sp(n, \mathbb{R})$ erfüllt. Des Weiteren wird ein linearer und holomorpher Differentialoperator

$$\mathcal{D} : \mathcal{H}_{Sym^\nu \otimes det^k}(\mathbb{H}_{2n}, V^{(\nu)}) \to \mathcal{H}_{Sym^{\nu+2} \otimes det^k}(\mathbb{H}_{2n}, V^{(\nu+2)})$$

vermöge

$$\mathcal{D} := \big[\, * \,, det(Z_2)^l\big]$$

entwickelt werden, der für alle Funktionen $f \in \mathcal{H}_{Sym^\nu \otimes det^k}(\mathbb{H}_{2n}, V^{(\nu)})$ die Äquivarianzeigenschaft

$$\mathcal{D}(f \mid_{Sym^\nu \otimes det^k} M^\uparrow) = \mathcal{D}(f) \mid_{Sym^{\nu+2} \otimes det^k} M^\uparrow$$
$$\mathcal{D}(f \mid_{Sym^\nu \otimes det^k} M^\downarrow) = \mathcal{D}(f) \mid_{Sym^{\nu+2} \otimes det^k} M^\downarrow$$

und

$$\mathcal{D}(f \mid_{Sym^\nu \otimes det^k} V) = \mathcal{D}(f) \mid_{Sym^{\nu+2} \otimes det^k} V$$

für alle $M \in Sp(n, \mathbb{R})$ und $V = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \in Sp(2n, \mathbb{R})$ erfüllt. Wir werden außerdem sehen, dass beide Konstruktionen, mit Ausnahme eines Spezialfalles, ungleich Null sind.

Vorgehensweise II Ausgehend von dem nicht-holomorphen, äquivarianten Differentialoperator aus einer Arbeit von G. Shimura [19] werden zunächst wieder auf zwei Weisen holomorphe, äquivariante Differentialoperatoren explizit entwickelt, dieses Mal zu einer Darstellung $\rho = Sym^1 \otimes det^k$.

Auch zu dieser Darstellung wird ein bilinearer und holomorpher Differentialoperator

$$\left[*,*\right] : \mathcal{H}_{Sym^1\otimes det^k}(\mathbb{H}_n, X) \times \mathcal{H}_{det^l}(\mathbb{H}_n, \mathbb{C}) \to \mathcal{H}_{Sym^1\otimes Sym^2\otimes det^{k+l}}(\mathbb{H}_n, S_1(T,X))$$

explizit konstruiert werden, der äquivariant bezüglich der symplektischen Gruppe $Sp(n,\mathbb{R})$ ist sowie einen linearen, holomorphen Differentialoperator

$$\mathcal{D} : \mathcal{H}_{Sym^1\otimes det^k}(\mathbb{H}_{2n}, X) \to \mathcal{H}_{Sym^1\otimes Sym^2\otimes det^k}(\mathbb{H}_{2n}, S_1(T,X))$$

vermöge

$$\mathcal{D} := \left[*, det(Z_2)^l\right]$$

der äquivariant bezüglich der Untergruppe $Sp(n,\mathbb{R}) \times Sp(n,\mathbb{R}) \subset Sp(2n,\mathbb{R})$ ist.

An diesem Ansatz anknüpfend, führt uns dieser schließlich (mittels Darstellungstheorie) zu einem - über die expliziten Konstruktionen hinausgehenden - Resultat, mit Hilfe dessen wir letztendlich zu jeder beliebigen irreduziblen Darstellung ρ einen bilinearen, holomorphen Differentialoperator

$$\left[*,*\right] : \mathcal{H}_{\rho}(\mathbb{H}_n, X) \times \mathcal{H}_{det^l}(\mathbb{H}_n, \mathbb{C}) \to \mathcal{H}_{\rho\otimes Sym^2\otimes det^l}(\mathbb{H}_n, S_1(T,X))$$

erhalten werden, der für alle Funktionen $f \in \mathcal{H}_{\rho}(\mathbb{H}_n, X)$ und $g \in \mathcal{H}_{det^l}(\mathbb{H}_n, \mathbb{C})$ eine Äquivarianzeigenschaft für $Sp(n,\mathbb{R})$ erfüllt. Außerdem werden wir zu jeder beliebigen irreduziblen Darstellung ρ einen linearen und holomorphen Differentialoperator

$$\mathcal{D} : \mathcal{H}_{\rho}(\mathbb{H}_{2n}, X) \to \mathcal{H}_{\rho\otimes Sym^2}(\mathbb{H}_{2n}, S_1(T,X))$$

erhalten, der äquivariant bzgl. der Untergruppe $Sp(n,\mathbb{R}) \times Sp(n,\mathbb{R})$ von $Sp(2n,\mathbb{R})$ ist. Auch hier werden wir wieder sehen, dass die Konstruktionen (aus Vorgehensweise II), mit Ausnahme eines Spezialfalles, ungleich Null sind.

Abstract

The purpose of this thesis is to prove the existence of holomorphic & equivariant differential operators acting on the Siegel upper half space $\mathbb{H}_n$, starting from a vector-valued case (i.e. vector-valued factor of automorphy) and construct such operators explicitly.

Approach We get such holomorphic, equivariant differential operators from non-holomorphic, equivariant differential operators of Maas-Shimura type. To describe our approach, we first consider a simpler case (see [3, p. 40/41]) using the degree one Maas-Shimura differential operator (see Chapter 3)

$$\delta_l^{(1)}(g) := \left(\frac{l}{2iy} + \frac{\partial}{\partial z}\right)(g).$$

With $f \in \mathcal{H}_k(\mathbb{H}, \mathbb{C})$ and $g \in \mathcal{H}_l(\mathbb{H}, \mathbb{C})$ (s. Chapter 1, p. 9/10) we can write down

$$\underbrace{f \cdot \delta_l^{(1)}(g)}_{C^\infty_{k+l}(\mathbb{H},\mathbb{C})} = \frac{l}{k+l}\ \underbrace{\delta_{k+l}^{(1)}(f \cdot g)}_{C^\infty_{k+l}(\mathbb{H},\mathbb{C})} + \frac{1}{k+l}\underbrace{\left(k \cdot f\left(\frac{\partial}{\partial z} g\right) - l \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} f\right) g\right)}_{\mathcal{H}_{k+l}(\mathbb{H},\mathbb{C})}.$$

And with suitable coefficients we get

$$(k+l) \cdot f \cdot \delta_l^{(1)}(g) - l \cdot \delta_{k+l}^{(1)}(f \cdot g) = \underbrace{\left(k \cdot f\left(\frac{\partial}{\partial z} g\right) - l \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} f\right) g\right)}_{\substack{holomorphic\, diff.operator \\ (Rankin-Cohen-Bracket)}}.$$

This example summarizes briefly how we build our operators. In this thesis we will consider a higher-dimensional version of this idea with a vector-valued factor of automorphy as starting point.

Method I Using the non-holomorphic, equivariant differential operator constructed by S. Böcherer, T. Satoh & T. Yamazaki in their paper [2], we construct holomorphic, equivariant differential operators directly and ex-

plicitly in two different ways. Given a representation $\rho = Sym^{\nu} \otimes det^{k}$, we get a bilinear holomorphic differential operator

$$\big[*,*\big] : \mathcal{H}_{Sym^{\nu}\otimes det^{k}}(\mathbb{H}_n, V^{(\nu)}) \times \mathcal{H}_{det^{l}}(\mathbb{H}_n, \mathbb{C}) \to \mathcal{H}_{Sym^{\nu+2}\otimes det^{k+l}}(\mathbb{H}_n, V^{(\nu+2)})$$

satisfying

$$\big[f \mid_{Sym^{\nu}\otimes det^{k}} M, g \mid_{det^{l}} M\big] = \big[f, g\big] \mid_{Sym^{\nu+2}\otimes det^{k+l}} M$$

for all $f \in \mathcal{H}_{Sym^{\nu}\otimes det^{k}}(\mathbb{H}_n, V^{(\nu)})$, $g \in \mathcal{H}_{det^{l}}(\mathbb{H}_n, \mathbb{C})$ and $M \in Sp(n, \mathbb{R})$. Further we get a linear and holomorphic differential operator

$$\mathcal{D} : \mathcal{H}_{Sym^{\nu}\otimes det^{k}}(\mathbb{H}_{2n}, V^{(\nu)}) \to \mathcal{H}_{Sym^{\nu+2}\otimes det^{k}}(\mathbb{H}_{2n}, V^{(\nu+2)})$$

with

$$\mathcal{D} := \big[\, * \,, det(Z_2)^{l}\big]\,,$$

satisfying

$$\mathcal{D}(f \mid_{Sym^{\nu}\otimes det^{k}} M^{\uparrow}) = \mathcal{D}(f) \mid_{Sym^{\nu+2}\otimes det^{k}} M^{\uparrow}$$
$$\mathcal{D}(f \mid_{Sym^{\nu}\otimes det^{k}} M^{\downarrow}) = \mathcal{D}(f) \mid_{Sym^{\nu+2}\otimes det^{k}} M^{\downarrow}$$

and

$$\mathcal{D}(f \mid_{Sym^{\nu}\otimes det^{k}} V) = \mathcal{D}(f) \mid_{Sym^{\nu+2}\otimes det^{k}} V$$

for all $f \in \mathcal{H}_{Sym^{\nu}\otimes det^{k}}(\mathbb{H}_{2n}, V^{(\nu)})$, $M \in Sp(n, \mathbb{R})$ and $V = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \in Sp(2n, \mathbb{R})$. We will see that, except of one special case, both constructions are nonzero.

Method II Using G. Shimura's non-holomorphic differential operator described in [19], again we construct holomorphic, equivariant differential operators directly and explicitly in two different ways, but this time considering a representation $\rho = Sym^{1} \otimes det^{k}$. Given this representation, we get a bilinear holomorphic differential operator

$$\big[*,*\big] : \mathcal{H}_{Sym^{1}\otimes det^{k}}(\mathbb{H}_n, X) \times \mathcal{H}_{det^{l}}(\mathbb{H}_n, \mathbb{C}) \to \mathcal{H}_{Sym^{1}\otimes Sym^{2}\otimes det^{k+l}}(\mathbb{H}_n, S_1(T, X))$$

with some equivariance properties with respect to the symplectic group $Sp(n,\mathbb{R})$ and again a linear and holomorphic differential operator

$$\mathcal{D} : \mathcal{H}_{Sym^1 \otimes det^k}(\mathbb{H}_{2n}, X) \to \mathcal{H}_{Sym^1 \otimes Sym^2 \otimes det^k}(\mathbb{H}_{2n}, S_1(T,X))$$

with

$$\mathcal{D} := \left[*, det(Z_2)^l\right]$$

and with some equivariance properties with respect to the subgroup $Sp(n,\mathbb{R}) \times Sp(n,\mathbb{R}) \subset Sp(2n,\mathbb{R})$.

Following up on this (and by means of representation theory), Method II leads us to a statement, beyond our explicit constructions, which takes us to the final result. Given an arbitrary irreducible representation ρ, we get a bilinear holomorphic differential operator

$$\left[*,*\right] : \mathcal{H}_{\rho}(\mathbb{H}_n, X) \times \mathcal{H}_{det^l}(\mathbb{H}_n, \mathbb{C}) \to \mathcal{H}_{\rho \otimes Sym^2 \otimes det^l}(\mathbb{H}_n, S_1(T,X))$$

with some equivariance properties with respect to the symplectic group $Sp(n,\mathbb{R})$. Furthermore we get a linear and holomorphic differential operator

$$\mathcal{D} : \mathcal{H}_{\rho}(\mathbb{H}_{2n}, X) \to \mathcal{H}_{\rho \otimes Sym^2}(\mathbb{H}_{2n}, S_1(T,X))$$

with some equivariance properties with respect to the subgroup $Sp(n,\mathbb{R}) \times Sp(n,\mathbb{R}) \subset Sp(2n,\mathbb{R})$. Again we will see that, except of one special case, these constructions (of method II) are nonzero.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich beim Erstellen dieser Arbeit unterstützt und auf meinem bisherigen Weg begleitet haben.

Mein Dank gilt in erster Linie Herrn Prof. Dr. Böcherer, nicht nur für die Themenstellung und Betreuung dieser Arbeit, sondern dafür, dass er mich seit annähernd zehn Jahren mit unendlich wirkender Geduld und konstruktiver Hilfe durch alle Studienabschlüsse begleitete und mir schließlich sogar die Anfertigung meiner Dissertation, neben meiner beruflichen Tätigkeit, ermöglichte. Das unermüdliche Durcharbeiten von Literaturquellen in zahlreichen Gesprächen und seine lückenlose Betreuung - egal ob aus der Ferne, Nähe oder während einer Pandemie - haben maßgeblich zur Fertigstellung dieser Arbeit, und meinem akademischen Werdegang im Allgemeinen, beigetragen.

Ich danke auch Herrn Dr. Baum für viele Jahre der Hilfsbereitschaft, Ermutigung, Motivation und fachlichen Betreuung und das vor allem in Zeiten, in denen sogar ein Bachelorabschluss noch in weiter Ferne schien.

Ich bedanke mich daher nochmals ausdrücklich und von ganzem Herzen bei Herrn Prof. Dr. Böcherer und Herrn Dr. Baum für eine Dekade ununterbrochener wissenschaftlicher und persönlicher Unterstützung in einer bemerkenswert wohlwollenden und freundlichen Atmosphäre.

Großer Dank gilt selbstverständlich auch meinen Eltern für ihre stets uneingeschränkte und entlastende Unterstützung, ihren moralischen Beistand, ihr liebevolles Verständnis und vor allem ihre selbstlose Aufopferungsbereitschaft, die mir meinen bisherigen Lebensweg überhaupt erst ermöglichten. Ihnen gebührt mein besonderer und kaum in Worte zu fassender Dank.

Abschließend möchte ich mich bei der Landesgraduiertenförderung Baden-Württemberg bedanken für die großzügige Unterstützung durch ein Stipendium, in der sehr fordernden Endphase dieser Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Gliederung **1**

1 Grundlagen **4**

2 Darstellungstheorie **11**
2.1 Grundlagen 11
2.2 Regel von Pieri: Eine Basis. 21
2.2.1 Basis Pieri-Komponente 21
2.2.2 Basis Anti-Pieri-Komponente 27

3 Differentialoperatoren **34**
3.1 Einführung 34
3.2 Der Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial Y}$ 37
3.3 Differentialoperator - G. Shimura 39
3.4 Differentialoperator - S. Böcherer, T. Satoh und T. Yamazaki . . 46
3.5 Zusammenhang der Differentialoperatoren 48

4 Konstruktion äquivarianter und holomorpher Differentialoperatoren - Vorgehensweise I **53**
4.1 Bilinearer, holomorpher Differentialoperator - Konstruktion . 54
4.2 Linearer, holomorpher Differentialoperator - Konstruktion . . 57
4.2.1 Entwicklung von $\mathbf{L}_\delta$ 60
4.2.2 Entwicklung von $\mathbf{R}_\delta$ 63
4.2.3 Die Differenz $(\mathbf{L}_\delta - \mathbf{R}_\delta)$ 65
4.3 Beispiel: Der Fall n=4. 67

5 Konstruktion äquivarianter und holomorpher Differentialoperatoren - Vorgehensweise II **69**
5.1 Bilinearer, holomorpher Differentialoperator - Konstruktion . 70
5.1.1 Entwicklung von $\mathbf{L}_D$ 71
5.1.2 Nebenrechnungen zur Entwicklung von $\mathbf{L}_D$ 75
5.1.3 Entwicklung von $\mathbf{R}_D$ 81
5.1.4 Die Differenz $(l \cdot \mathbf{L}_D - \mathcal{L} \circ \mathbf{R}_D)$ 82
5.2 Linearer, holomorpher Differentialoperator 91

5.3 Bonus: Differentialoperatoren zu einer beliebigen irreduziblen Darstellung 93
5.4 Beispiel: Der Fall n=2. 99

Symbolverzeichnis **103**

Literaturverzeichnis **104**

Einleitung und Gliederung

Einleitung

Äquivariante holomorphe Differentialoperatoren auf hermiteschen symmetrischen Räumen - in dieser Arbeit betrachten wir nur den Siegelschen Halbraum $\mathbb{H}_n$ - sind ausgesprochen rar ([13], [6] & [1]). Dabei versieht man den Raum der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{H}_n$ mit der Operation

$$(f, M) \mapsto f \mid_k M, \qquad (f \mid_k M)(Z) := det\,(CZ + D)^{-k} f\,(M\langle Z\rangle)\,,$$

für $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{R})$ und $Z \in \mathbb{H}_n$.

Man fragt nach holomorphen Differentialoperatoren mit der Eigenschaft

$$D\,(f \mid_k M) = (Df) \mid_{k'} M$$

mit $M \in Sp(n, \mathbb{R})$. Eines der wenigen Beispiele hierfür ist für den Fall $n = 1$ die gewöhnliche holomorphe Ableitung $\frac{\partial}{\partial z}$ mit $k = 0$ und $k^{'} = 2$.

Eine Reihe von Autoren, wie beispielsweise G. Shimura, T. Ibukiyama und S. Böcherer, haben auf je verschiedene Weise durch Abschwächung der verlangten Eigenschaften versucht, die Situation zu verbessern. G. Shimura durch Abschwächung der Holomorphie, T. Ibukiyama und S. Böcherer durch Verkleinerung der betrachteten (Lie-)Gruppe G. Von besonderem Interesse ist dabei der Fall $n = 2m$,

$$G = Sp(m, \mathbb{R}) \times Sp(m, \mathbb{R}) \hookrightarrow Sp(2m, \mathbb{R}).$$

Hier kann man Äquivarianz verlangen mit gleichzeitiger Restriktion der Funktion f auf die diagonal eingebetteten Halbräume $\mathbb{H}_m \times \mathbb{H}_m \hookrightarrow \mathbb{H}_{2m}$. Dieser Fall wurde von T. Ibukiyama in [15] untersucht. Stärker kann man verlangen, dass die Äquivarianz auch ohne Restriktion vorliegt. Dieser Fall ist in [4], [3] und [5] zu finden. Die Differentialoperatoren ohne Restriktion haben die wichtige Zusatzeigenschaft, dass man sie iterieren kann.

Diese Operatoren sind noch nicht wirklich verstanden, einige strukturelle Ansätze aus dem Forschungsseminar [3] sind noch nicht ausgearbeitet und insbesondere weiß man gar nichts über solche Operatoren mit vektorwertigen Automorphiefaktoren als Ausgangspunkt. Solche Automorphiefaktoren werden durch irreduzible polynomiale Darstellungen ρ der Gruppe $GL(n, \mathbb{C})$ parametrisiert, daher wird die Darstellungstheorie der allgemeinen linearen Gruppe auch eine wichtige Rolle in dieser Arbeit spielen.

Damit ist das Thema der vorliegenden Arbeit grob beschrieben. Es geht um die Existenz solcher holomorpher & äquivarianter Differentialoperatoren mit vektorwertigen Ausgangsautomorphiefaktoren. Zum Startzeitpunkt dieser Arbeit war dabei noch völlig unklar, ob am Ende eine Aussage über die Nichtexistenz steht, eine explizite Konstruktion oder sogar beides, je nach Typ der zugehörigen Darstellungen ρ und $\rho^{'}$.

Um die Herangehensweise an das Thema zu verdeutlichen, sei nachfolgend die Gliederung der Arbeit in aller Kürze skizziert.

Gliederung

In **Kapitel 1 - Grundlagen** werden, orientierend an der Theorie der Siegelschen Modulformen, die Definition der symplektischen Gruppe $Sp(n, \mathbb{R})$ und des Siegelschen Halbraumes $\mathbb{H}_n$ eingeführt sowie einige Resultate der dazugehörigen Theorie genannt.

Ziel von **Kapitel 2 - Darstellungstheorie** ist es, die für die vorliegende Arbeit relevanten, Resultate, Konzepte und Begriffe der Darstellungstheorie (der $GL(n, \mathbb{C})$) kurz und übersichtlich zusammenzustellen. Besonderes Interesse gilt hierbei einem Resultat von H. Weyl und der Regel von Pieri, für die - in einem Spezialfall - eine konkrete Basis eingeführt wird.

Kapitel 3 - Differentialoperatoren beschäftigt sich mit allen Differentialoperatoren, die in dieser Arbeit vorkommen. Hauptaugenmerk liegt auf zwei nicht-holomorphen äquivarianten Differentialoperatoren, einem von G. Shimura ([19]) konstruierten und einem Operator aus der gemeinsamen Arbeit von S. Böcherer, T. Satoh & T. Yamazaki ([2]).

Den mathematischen Kern dieser Arbeit - die Existenz und Konstruktion äquivarianter, holomorpher Differentialoperatoren auf dem Siegelschen Halbraum $\mathbb{H}_n$ und mit vektorwertigen Ausgangsautomorphiefaktoren - bilden

> **Kapitel 4: Konstruktion holomorpher und äquivarianter Differentialoperatoren - Vorgehensweise I**
>
> **Kapitel 5: Konstruktion holomorpher und äquivarianter Differentialoperatoren - Vorgehensweise II**

In Kapitel 4 werden holomorphe Differentialoperatoren konstruiert, ausgehend von dem Differentialoperator aus [2] und in Kapitel 5, ausgehend von dem Differentialoperator aus [19].

1 Grundlagen

In diesem Kapitel möchten wir in einem ersten Schritt, orientierend an der Theorie der (Siegelschen) Modulformen, die Definition der symplektischen Gruppe und des Siegelschen Halbraumes einführen sowie einige Resultate der dazugehörigen Theorie nennen. Im zweiten Schritt werden wir uns dann holomorphen Funktionen widmen und einen Operator auf dem Raum, der auf dem Siegelschen Halbaum holomorphen Funktionen, einführen. Da es sich bei diesem Kapitel lediglich um eine Zusammenfassung bekannter Resultate handelt, wird größtenteils auf Beweise verzichtet und stattdessen auf die Lehrbücher [9], [10], [16] und [19] verwiesen.

Die symplektische Gruppe Wir beginnen mit der allgemeinen Definition der symplektischen Gruppe, wie sie auch in [16] zu finden ist.

Definition 1.1.
Sei R ein kommutativer Ring und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Menge

$$Sp(n, R) := \{M \in GL(2n, R) \mid M^t I M = I\} \quad \textit{mit } I := \left(\begin{smallmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{smallmatrix}\right)$$

*die **symplektische Gruppe** vom Grad n über R.*

Mit 0_n wird hier die $n \times n-$ Nullmatrix bezeichnet, mit 1_n die $n \times n-$ Einheitsmatrix. Oft werden wir auch einfach 0 und 1 schreiben, sofern keine Verwechslungsgefahr besteht.

Man kann leicht nachprüfen, dass $Sp(n, R)$ eine Untergruppe von $GL(2n, R)$ ist (s. [16, S.1]). Des Weiteren kann ein Element M der Gruppe $Sp(n, R)$ in Blöcke der Größe $n \times n$ zerlegt werden. Besteht keine Verwechslungsgefahr, wird die Schreibweise

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

gewählt.

Wir interessieren uns im weiteren Verlauf dieser Arbeit nur für den Fall $R = \mathbb{R}$ und daher formulieren wir, völlig analog zu obiger Definition, folgende

Definition 1.2.
*Die **reelle symplektische Gruppe** vom Grad n über $\mathbb{R}$ wird definiert durch*

$$Sp(n, \mathbb{R}) := \{M \in GL(2n, \mathbb{R}) | M^t I M = I\} \text{ mit } I := \left(\begin{smallmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{smallmatrix} \right).$$

Auch sie besteht natürlich aus allen reellen $2n \times 2n$ Matrizen $M \in GL(n, \mathbb{R})$, die I invariant lassen. Darüber hinaus kann die symplektische Gruppe $Sp(n, \mathbb{R})$ in die Gruppe $Sp(2n, \mathbb{R})$ eingebettet werden. Wir betrachten die natürliche Einbettung

$$\iota_n : Sp(n, \mathbb{R}) \times Sp(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow Sp(2n, \mathbb{R})$$

(s. [3, S.24]) und formulieren folgende

Bemerkung 1.3. *(vgl. [4, S.1])*
Für eine Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix} \right)$ aus der reellen symplektischen Gruppe $Sp(n, \mathbb{R})$ seien

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto M^\uparrow := \begin{pmatrix} A & 0 & B & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ C & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Sp(2n, \mathbb{R})$$

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto M^\downarrow := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & B \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & C & 0 & D \end{pmatrix} \in Sp(2n, \mathbb{R}).$$

Die symplektische Gruppe $Sp(n, \mathbb{R})$ kann also auf diese zwei Weisen in die Gruppe $Sp(2n, \mathbb{R})$ eingebettet werden und für $M \in Sp(n, \mathbb{R})$ schreiben wir $M^\uparrow$ bzw. $M^\downarrow$ anstelle von $\iota_n(M, 1_{2n})$.

Es folgen einige grundlegende Eigenschaften der symplektischen Gruppe.

Bemerkung 1.4. *([9, Bem. 1.2])*

1) *Eine Matrix* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ *ist genau dann symplektisch, wenn die folgenden Relationen erfüllt sind:*

$$A^t D - C^t B = 1\,, \quad A^t C = C^t A\,, \quad B^t D = D^t B.$$

Insbesondere ist im Fall $n = 1$ *die symplektische Gruppe* $Sp(1, R)$ *gerade die spezielle lineare Gruppe* $SL(2, R)$*.*

2) *Es gilt* $I^{-1} = -I$*. Daher ist mit* M *auch ihre transponierte Matrix* M^t *symplektisch, d.h. es gilt*

$$AD^t - BC^t = 1\,, \quad AB^t = BA^t, \quad CD^t = DC^t.$$

3) *Die Inverse der symplektischen Matrix* M *ist*

$$M^{-1} = I^{-1} M^t I = \begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{pmatrix}.$$

4) *Spezielle Beispiele symplektischer Matrizen sind*

   a) $\begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S = S^t \in M(n, R)$

   b) $\begin{pmatrix} U^t & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \quad U \in GL(n, R)$

   c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Satz 1.5. *[9, Satz 1.3]*
Sei R ein Euklidischer Ring und $n \in \mathbb{N}$*. Die Gruppe* $Sp(n, R)$ *wird von den obigen speziellen Matrizen* $a)$ *und* $c)$ *erzeugt.*

Folgerung 1.6. *[9, Folgerung 1.3]*
Symplektische Matrizen haben stets Determinante +1.

Der Siegelsche obere Halbraum Im nächsten Schritt wird nun der Siegelsche Halbraum $\mathbb{H}_n$ definiert. Er ist eine Verallgemeinerung der oberen Halbebene und für die vorliegende Arbeit von großer Relevanz, da wir später ausschließlich Funktionen auf $\mathbb{H}_n$ betrachten. Im Anschluss wird eine Operation der symplektischen Gruppe $Sp(n, \mathbb{R})$ auf dem Siegelschen Halbraum $\mathbb{H}_n$ eingeführt.

Definition 1.7.
*Für ein $n \in \mathbb{N}$ ist der **Siegelsche Halbraum** oder die **Siegelsche Halbebene** von Grad n definiert als die Menge*

$$\mathbb{H}_n = \{Z = X + iY \in M(n, \mathbb{C}) \mid Z = Z^t,\ Y > 0\}.$$

Der Siegelsche Halbraum besteht demnach aus allen komplexen symmetrischen $n \times n-$ Matrizen $Z = X + iY$, deren Imaginärteil Y positiv definit ist. Im Fall $n = 1$ ist der Siegelsche Halbraum gerade die **obere Halbebene**

$$\mathbb{H}_1 = \mathbb{H} := \{Z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} Z > 0\}.$$

Im Folgenden wird die Wirkung der reellen symplektischen Gruppe $Sp(n, \mathbb{R})$ auf der Siegelschen Halbebene $\mathbb{H}_n$ betrachtet.

Proposition 1.8. *[16, Prop.1]*
Für $n > 0$ operiert die reelle symplektische Gruppe $Sp(n, \mathbb{R})$ auf der Siegelschen Halbebene $\mathbb{H}_n$ via

$$\begin{aligned} Sp(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{H}_n &\to \mathbb{H}_n \\ (M, Z) &\mapsto M\langle Z\rangle := (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \end{aligned}$$

mit $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$.

Satz 1.9. *[10, Satz 1.2]*
Seien $M \in Sp(n, \mathbb{R})$ eine reelle symplektische Matrix und $Z \in \mathbb{H}_n$ ein Punkt aus der verallgemeinerten oberen Halbebene. Dann gilt:

1) $det(ZC + D) \neq 0$
2) $M\langle Z\rangle \in \mathbb{H}_n$.

Die Gruppe $Sp(n, \mathbb{R})$ operiert vermöge $(M, Z) \mapsto M\langle Z\rangle$ auf $\mathbb{H}_n$, das heißt *es gilt*

$$a)\ 1\langle Z\rangle = Z \quad b)\ M\langle N\langle Z\rangle\rangle = (M\cdot N)\langle Z\rangle.$$

Zwei symplektische Matrizen M, N definieren genau dann dieselbe symplektische Substitution, falls sie sich nur um das Vorzeichen unterscheiden.

Die Wirkung der speziellen Substitutionen a) bis c) aus Bemerkung 1.4. ist gegeben durch

$$a)\ Z \mapsto Z + S \quad b)\ Z \mapsto U^t Z U \quad c)\ Z \mapsto -Z^{-1}.$$

Der Strichoperator Im Folgenden möchten wir eine Operation auf dem Raum, der auf dem Siegelschen Halbraum holomorphen Funktionen, einführen und benötigen hierfür zunächst noch die Definition eines „Automorphiefaktors".

Wie gerade eingeführt, operiert $Sp(n, \mathbb{R})$ vermöge $(M, Z) \mapsto M\langle Z\rangle$ auf $\mathbb{H}_n$ und so formulieren wir folgende

Definition 1.10.
Es sei $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ aus $Sp(n, \mathbb{R})$. Wir definieren die Funktion

$$J : \begin{cases} Sp(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{H}_n \to GL(n, \mathbb{C}) \\ \qquad (M, Z) \quad \mapsto CZ + D \end{cases}$$

die für $M_1, M_2 \in Sp(n, \mathbb{R})$ die folgende Relation, auch Kozykelrelation genannt, erfüllt (s. [19, (3.18)]):

$$J(M_1 \circ M_2, Z) = J(M_1, M_2\langle Z\rangle) \circ J(M_2, Z).$$

Für die nachfolgende Definition betrachten wir nun vektorwertige Automorphiefaktoren.

Definition 1.11.
Sei $\rho : GL(n, \mathbb{C}) \to GL(V_\rho)$ eine polynomiale Darstellung [1] auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum $V_\rho = V$. Für V-wertige Funktionen $f : \mathbb{H}_n \to V$ und ein M aus $Sp(n, \mathbb{R})$ definiert man eine neue Funktion

$$f \mid_\rho M : \mathbb{H}_n \to V$$

durch

$$(f \mid_\rho M)(Z) := \rho(J(M, Z))^{-1} f(M\langle Z \rangle).$$

Die Gruppe $Sp(n, \mathbb{R})$ operiert von rechts auf solchen V-wertigen Funktionen, d.h. es gilt

$$f \mid_\rho (M_1 \circ M_2) = (f \mid_\rho M_1) \mid_\rho M_2$$

*für alle $M_1, M_2 \in Sp(n, \mathbb{R})$ (s. (5.6a) [19]). Der Operator $|_\rho$ wird als **Strichoperator** bezeichnet.*

Für den Fall einer Darstellung $\rho = det^k$ erhält man analog zu obiger Definition die

Definition 1.12.
Für eine komplexwertige Funktion $f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$, ein $M \in Sp(n, \mathbb{R})$ und ein $k \in \mathbb{Z}$ definiert man eine Funktion

$$f \mid_k M : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$$

durch

$$(f \mid_k M)(Z) := det(CZ + D)^{-k} f(M\langle Z \rangle).$$

Wir schreiben in diesem Fall $|_k$ anstelle von $|_\rho$.

Üblicherweise würde in diesem Kontext nun die Definition der Siegelschen Modulform folgen. Da wir uns an der Theorie der Modulformen aber nur orientieren, nicht aber die Modulformen selbst benötigen, verzichten wir auf die Einführung dieser. Stattdessen gehen wir über zu den noch fehlenden Bezeichnungen der Räume, mit denen wir uns beschäftigen.

[1] Mehr zu Darstellungen in Kapitel 2: Darstellungstheorie.

Bezeichnung 1.13.
Man versehe den Raum komplexwertiger holomorpher Funktionen auf der Siegelschen Halbebene $\mathbb{H}_n$ *mit der Operation*

$$(f, M) \mapsto f \mid_k M$$

für $M \in Sp(n, \mathbb{R})$ *(s. Def. 1.12). Diesen Raum bezeichnen wir mit* $\mathcal{H}_{det^k}(\mathbb{H}_n, \mathbb{C})$ *oder kurz* $\mathcal{H}_k(\mathbb{H}_n, \mathbb{C})$*. Betrachten wir* C^∞*-Funktionen, so bezeichnen wir den Raum mit* $C^\infty_{det^k}(\mathbb{H}_n, \mathbb{C})$ *oder kurz* $C^\infty_k(\mathbb{H}_n, \mathbb{C})$*.*

Bezeichnung 1.14.
Analog versehe man der Raum V*-wertiger holomorpher Funktionen auf der Siegelschen Halbebene* $\mathbb{H}_n$ *mit der Operation*

$$(f, M) \mapsto f \mid_\rho M$$

für $M \in Sp(n, \mathbb{R})$ *(s. Def. 1.11). Diesen Raum bezeichnen wir mit* $\mathcal{H}_\rho(\mathbb{H}_n, V)$ *oder* $\mathcal{H}_\rho(\mathbb{H}_n, V_\rho)$*. Für* C^∞*- Funktionen bezeichnen wir den Raum mit* $C^\infty_\rho(\mathbb{H}_n, V)$ *oder* $C^\infty_\rho(\mathbb{H}_n, V_\rho)$*.*

2 Darstellungstheorie

Ziel dieses Kapitels ist es, die für die vorliegende Arbeite relevanten, Resultate, Konzepte und Begriffe der Darstellungstheorie kurz und übersichtlich zusammenzustellen. Das Kapitel unterteilt sich in zwei Abschnitte, wobei in Abschnitt 2.1 das Hauptaugenmerk auf der Darstellungstheorie der allgemeinen linearen Gruppe liegt. Unser besonderes Interesse gilt hierbei einem Resultat von H. Weyl und der Regel von Pieri, für die wir - in einem Spezialfall - in Abschnitt 2.2 eine konkrete Basis einführen.

2.1 Grundlagen

Ziel dieses Abschnittes ist es zunächst einige Definitionen und Begriffe allgemeiner Darstellungstheorie einzuführen und anschließend zur Darstellungstheorie der allgemeinen linearen Gruppe $GL(n, \mathbb{C})$ sowie deren relevanten Aussagen, überzugehen. Da es sich nur um eine Zusammenfassung bekannter Resultate handelt, wird für Beweise auf [12] und [11] verwiesen.

Allgemeines Zunächst beginnen wir mit der allgemeinen Definition einer Darstellung sowie einigen grundlegenden Bezeichnungen.

Definition 2.1.
Sei G eine Gruppe und V ein Vektorraum über einem beliebigen Körper K. Eine ***Darstellung*** *ρ von G auf V ist ein Gruppenhomomorphismus*

$$\rho : G \to GL(V).$$

Für $g \in G$ ist $\rho(g) \in GL(V)$, d.h. $\rho(g) : V \to V$ ist ein Isomorphismus. Für $g, h \in G$ ist $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$.

Der Vektorraum V heißt **Darstellungsraum von ρ** und die Dimension des Vektorraumes V wird auch **Dimension von ρ** bezeichnet. Manchmal schreiben wir anstatt V auch V_ρ wenn aus dem Kontext nicht klar ersichtlich ist, zu welcher Darstellung der Vektorraum gehört. Wie üblich bezeichnet $GL(V)$ bzw. $Aut(V)$ die Gruppe aller Automorphismen von V.

Sei nun V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit $dim(V) = n$, so kann eine Basis von V gewählt werden. Man kann folglich $GL(V)$ identifizieren mit $GL(n, K)$ und übergehen zu einer Darstellung

$$\tilde{\rho} : G \to GL(n, K).$$

Mit $GL(n, K)$ oder $GL_n(K)$ bezeichnen wir die **allgemeine lineare Gruppe** von Grad n über einem Körper K. Sie ist die Gruppe aller invertierbaren $n \times n-$Matrizen mit Koeffizienten aus K.

Beispiel 2.2.
*Ein einfaches Beispiel einer Darstellung ist die **triviale Darstellung**. Sie ist gegeben durch $\rho(g) = id$ für alle $g \in G$.*

Definition 2.3.
*Eine Darstellung heißt **irreduzibel**, wenn V und $\{0\}$ die einzigen invarianten Untervektorräume von V sind. Andernfalls heißt die Darstellung **reduzibel**.*

Definition 2.4.
*Eine Darstellung heißt **vollständig reduzibel**, wenn sie sich als direkte Summe irreduzibler Darstellungen schreiben lässt.*

Darstellungstheorie der allgemeinen linearen Gruppe Im weiteren Verlauf dieser Arbeit betrachten wir Darstellungen der Gruppe $G = GL(n, \mathbb{C})$

$$\rho : GL(n, \mathbb{C}) \to GL(V).$$

Bevor wir auf den nachfolgenden Seiten einige Resultate der zugehörigen Theorie wiedergeben, möchten wir zuvor noch einen kurzen Einschub zu den Erzeugenden der allgemeinen linearen Gruppe, betrachten.

Einschub: Erzeugung der allgemeinen linearen Gruppe Wir berufen uns auf [17, Prop. 9.1] für den Beweis und behaupten, dass die Gruppe $GL(n,K)$ von den zwei Matrizen

(a) $E_n + (t-1)\,E_{i,i}$ für $t \in K, t \neq 0$ und $1 \leq i \leq n$
(b) $E_n + t\,E_{i,j}$ für $t \in K$ und $1 \leq i \neq j \leq n$

erzeugt wird. Hierbei bezeichnet E_n die $n \times n-$Einheitsmatrix und $E_{i,j}$ die $n \times n-$Matrix, die aus Nullelementen besteht mit der Ausnahme, dass in der i-ten Zeile und j-ten Spalte ein Einselement steht. (Manchmal wählen wir für t auch die Schreibweise $t_{i,j}$, um zu verdeutlichen, an welcher Position sich das t in der Matrix befindet). Es gilt also

$$(a)\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&& \\ && \ddots &&&&&& \\ &&& 1 &&&&& \\ &&&& t_{i,i} &&&& \\ &&&&& 1 &&& \\ &&&&&& \ddots && \\ &&&&&&& 1 & \\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix} \qquad (b)\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&& \\ && \ddots &&&&&& \\ &&& 1 &&&&& \\ &&&& 1 & t_{i,j} &&& \\ &&&&& 1 &&& \\ &&&&&& \ddots && \\ &&&&&&& 1 & \\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrizen sind auch unter der Bezeichnung **Elementarmatrizen** bekannt. (a) beschreibt gerade das Multiplizieren einer Zeile mit einem Wert ungleich Null und (b) beschreibt das Addieren des t-fachen Wertes einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Wir werden in dieser Arbeit des öfteren Eigenschaften der Gruppe $GL(n,\mathbb{C})$ nachprüfen müssen und mit dem Wissen der Erzeugenden wird es uns in vielen Angelegenheiten genügen, die Eigenschaften der gesamten Gruppe nur für die Erzeugenden nachzuprüfen.

Zurück zur Darstellungstheorie der allgemeinen linearen Gruppe $GL(n,\mathbb{C})$. Wir beginnen mit folgender

Definition 2.5.
*Eine Darstellung von $GL(n,\mathbb{C})$ auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V heißt **polynomial**, wenn für alle $g \in GL(n,\mathbb{C})$ die Einträge der Matrix $\rho(g)$ Polynome in den Einträgen von g sind.*

Definition 2.6.
Eine Darstellung von $GL(n, \mathbb{C})$ auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V heißt ***rational****, wenn für alle $g \in GL(n, \mathbb{C})$ die Matrixeinträge rationale Funktionen in den Einträgen von g sind.*

Wir möchten zwei Beispiele hierzu betrachten.

Beispiel 2.7. *[21, S.440]*
Es sei $n = 2$ und $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in GL(2, \mathbb{C})$. Wir definieren eine Darstellung $\rho : GL(2, \mathbb{C}) \to GL(3, \mathbb{C})$ durch

$$\rho \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad + bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}$$

Man kann nachrechnen, dass ρ ein Gruppenhomomorphismus ist. Die Einträge der Matrix $\rho(g)$ sind homogene Polynome von Grad 2 in den Einträgen von g und so ist ρ eine polynomiale Darstellung von Dimension 3. Es handelt sich bei diesem Beispiel um die Darstellung Sym^2 von $GL(2, \mathbb{C})$, auf die wir später noch genauer eingehen werden.

Beispiel 2.8. *[21, S.441]*
Es sei n beliebig und $g \in GL(n, \mathbb{C})$. Wir definieren eine Darstellung $\rho : GL(n, \mathbb{C}) \to GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ durch

$$\rho(g) = (det(g))^m$$

mit $m \in \mathbb{Z}$. Für den Fall $m \geq 0$ ist dies eine polynomiale Darstellung von Dimension 1. Für $m < 0$ ist ρ rational, aber nicht polynomial.

Es folgen nun einige wesentliche Resultate aus der Darstellungstheorie der Gruppe $GL(n, \mathbb{C})$, wobei wir hier [12, Kapitel 3 & 8] folgen.

Die allgemeine lineare Gruppe ist reduktiv, d.h. jede rationale Darstellung von $GL(n, \mathbb{C})$ ist direkte Summe irreduzibler Darstellungen. Eine ausführlicher Beweis dieser Aussage ist in [12, § 3.3, Theorem 3.3.11] zu finden.

Eine irreduzible Darstellung $\rho : GL(n, \mathbb{C}) \to GL(V)$ wird eindeutig bestimmt durch ihr Höchstgewicht. Ein Vektor $v_\rho \neq 0$ heißt **Höchstgewichtsvektor** der Darstellung ρ wenn

$$\rho(u)v_\rho = v_\rho$$

für alle u aus der Gruppe U der unipotenten, oberen Dreiecksmatrizen und

$$\rho \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} v_\rho = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\lambda_i} \cdot v_\rho$$

mit $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ und $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Das Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ wird als **Höchstgewicht** der Darstellung ρ bezeichnet.

Jede endlich-dimensionale irreduzible Darstellung besitzt, bis auf Vielfache, nur einen Höchstgewichtsvektor. Detaillierte Informationen hierzu sind in [12, § 3.2] zu finden.

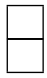
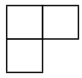
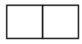
Letztlich wird ein solches Höchstgewicht veranschaulicht durch ein sogenanntes Diagramm, auch Young-Diagramm oder Ferrer-Diagramm genannt. Eine Definition wollen wir uns im Folgenden anschauen.

Definition 2.9.
*Ein **Diagramm** oder **Young-Diagramm** zu einem Tupel $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ besteht aus p linksbündig angeordneten Zeilen mit Kästchen, bei der die i-te Zeile aus λ_i Kästchen besteht. Hierbei ist p der größte Index i, so dass $\lambda_i > 0$. Die Kästchen sind dabei so angeordnet, dass deren Anzahl in jeder neuen Zeile nicht zunimmt, d.h. es gilt $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$. Ein Young-Diagramm mit p Zeilen ist ein **Diagramm der Länge p**.*

Mittels dieser Young-Diagramme lassen sich die irreduziblen polynomialen Darstellungen von $GL(n, \mathbb{C})$ parametrisieren und eine solche irreduzible Darstellung von $GL(n, \mathbb{C})$, korrespondierend zu dem Tupel $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ bezeichnen wir mit ρ_n^λ.

Wir wollen uns hierzu nachfolgend Beispiele anschauen.

Beispiel 2.10.
Beispiele für den Fall $n = 2$ sind

(a)  $\lambda = (1, 1)$ *(b)*  $\lambda = (2, 1)$ *(c)*  $\lambda = (2, 0)$.

Tensorprodukte Wir wissen aus der allgemeinen Darstellungstheorie, dass wir für zwei gegebene Vektorräume V_1 und V_2 und Darstellungen $\pi_i : G \to GL(V_i)$ für $i = 1, 2$ eine Darstellung

$$\pi_1 \otimes \pi_2 : \begin{cases} G \to GL(V_1 \otimes V_2) \\ g \mapsto (\pi_1 \otimes \pi_2)(g) : (v_1 \otimes v_2) \mapsto \pi_1(g)(v_1) \otimes \pi_2(g)(v_2) \end{cases}$$

definieren können. Dies möchten wir weiterentwickeln. Wir folgen hierbei den Ausführungen von W. Fulton & J. Harris [11, § 6.1].

V sei ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Wir definieren unsere Ausgangsdarstellung durch

$$\pi_{id} : \begin{cases} GL(V) \to GL(V) \\ \psi \mapsto \psi \end{cases}$$

Die Matrixform dazu lautet

$$\tilde{\pi}_{id} : \begin{cases} GL(n, \mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C}) \\ A \mapsto A \end{cases}$$

Für $k \geq 1$ definieren wir die Darstellung

$$\pi_{id}^{\otimes k} : \begin{cases} GL(V) \to GL(V^{\otimes k}) \\ g \mapsto (v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) \mapsto g(v_1) \otimes \cdots \otimes g(v_k) \end{cases}$$

mit $V^{\otimes k} := V \otimes \cdots \otimes V$ (k mal). Sei $dim(V) = n$, so lautet die Matrixform

$$\tilde{\pi}_{id}^{\otimes k} : \begin{cases} GL(n, \mathbb{C}) \to GL(n^k, \mathbb{C}) \\ A \mapsto A^{\otimes k} \end{cases}$$

mit $A^{\otimes k}$ als k-faches Kroneckerprodukt. Dies definiert eine Darstellung von $GL(n, \mathbb{C})$ auf $V^{\otimes k}$. Nun betrachten wir eine Darstellung der symmetrischen Gruppe S_k auf $V^{\otimes k}$:

$$\tau_k : \begin{cases} S_k \to GL(V^{\otimes k}) \\ \sigma \mapsto (v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) \mapsto v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)} \end{cases}$$

mit $\sigma \in S_k$. Diese Operation von S_k auf $V^{\otimes k}$ kommutiert mit der obigen Operation von $GL(V)$. Schließlich führen wir noch zwei, $GL(V)$-invariante, Untervektorräume von $V^{\otimes k}$ ein:

- $Sym^k(V) := \{\omega \in V^{\otimes k} \mid \forall\, \sigma \in S_n : \tau_k(\sigma)(\omega) = \omega\}$
- $Alt^k(V) := \{\omega \in V^{\otimes k} \mid \forall\, \sigma \in S_n : \tau_k(\sigma)(\omega) = sgn(\sigma)\omega\}$.

Wie angekündigt, kommen wir nun noch einmal zurück zu folgendem

Beispiel 2.11.
Wir erinnern uns an das Beispiel 2.7 zu Beginn des Kapitels und werden auf dieses nun genauer eingehen. Sei $n = 2$ und $V = \mathbb{C}^2$ ein zweidimensionaler Vektorraum mit Basis e_1, e_2. Wenn $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in GL(2, K)$, dann

$$\begin{aligned} e_1 &\mapsto ae_1 + ce_2 \\ e_2 &\mapsto be_1 + de_2. \end{aligned}$$

Eine Basis von $Sym^2(\mathbb{C}^2)$ lautet:

$$e_1 \otimes e_1, \quad e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1, \quad e_2 \otimes e_2.$$

Betrachten wir nun, wie $\pi_{id}^{\otimes 2}$ auf $Sym^2\mathbb{C}^2$ aussieht.

$$\begin{aligned} e_1 \otimes e_1 \mapsto &(ae_1 + ce_2) \otimes (ae_1 + ce_2) \\ =&a^2(e_1 \otimes e_1) + ac((e_1 \otimes e_2) + (e_2 \otimes e_1)) + c^2(e_2 \otimes e_2) \\ e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \mapsto &(ae_1 + ce_2) \otimes (be_1 + de_2) + (be_1 + de_2) \otimes (ae_1 + ce_2) \\ =&2ab(e_1 \otimes e_1) + (ad + bc)((e_1 \otimes e_2) + (e_2 \otimes e_1)) + 2cd(e_2 \otimes e_2) \\ e_2 \otimes e_2 \mapsto &(be_1 + de_2) \otimes (be_1 + de_2) \\ =&b^2(e_1 \otimes e_1) + bd((e_1 \otimes e_2) + (e_2 \otimes e_1)) + d^2(e_2 \otimes e_2) \end{aligned}$$

Somit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad+bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}.$$

Dies entspricht einer Darstellung von $GL(2,\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}[x_1,x_2]_2$.

Das Young-Diagramm zu dieser Darstellung Sym^2 haben wir in Beispiel 2.10. (c) bereits, als einzeiliges Diagramm mit zwei Kästchen, kennengelernt. Allgemeiner kann auch Sym^k, mit einem Höchstgewicht $(k,0,\ldots,0)$, durch ein Young-Diagramm bestehend aus einer Zeile und k Kästchen dargestellt werden ([11, S.77]).

Nun kommen wir noch zu einer Aussage von H.Weyl. Vorbereitend benötigen wir folgende

Bemerkung 2.12. *[11, S. 76]*
Sei c_λ der sogenannte Young-Symmetrisierer[2] *zu einem λ. Dann bezeichnen wir das Bild von c_λ auf $V^{\otimes k}$ durch*

$$S_\lambda(V) = \mathrm{Im}(c_\lambda).$$

Dies ist wieder eine Darstellung von $GL(V)$ und wir nennen diese, bzw. die Zuordnung $V \mapsto S_\lambda(V)$, ***Weyl-Modul****.*

Satz 2.13. *Satz von Weyl [11, Theorem 6.3 (2) & (4)]*
Sei m_λ die Dimension der irreduziblen Darstellung V_λ von S_k zu einem λ. Dann ist

$$V^{\otimes k} \cong \bigoplus_\lambda (S_\lambda(V))^{m_\lambda}.$$

Darüber hinaus ist jeder Weyl-Modul $S_\lambda(V)$ eine irreduzible Darstellung von $GL(V)$.

[2] Den Young-Symmetrisierer c_λ zu einer Darstellung der S_k zu einem λ erhält man durch Mutliplikation des (Zeilen) Symmetrisierers mit dem (Spalten) Schief-Symmetrisierer. Mehr Informationen hierzu in [11, S. 46] und [12, S. 409-411].

Ein zweifellos wichtiger Satz aus der Darstellungstheorie, dessen Aussagekraft wir aber im weiteren Verlauf der Arbeit gar nicht vollständig ausnutzen werden. Für uns wird später (in Kapitel 5) nur eine schwächere Aussage relevant sein, nämlich die, dass jede irreduzible Darstellung von GL_n in einem solchen Tensorprodukt vorkommt, möglicherweise mit höherer Multiplizität.

Verzweigungsregeln Nun möchten wir noch etwas über die Zerlegung von Tensorprodukten zweier irreduzibler Darstellungen in irreduzible Darstellungen erfahren. Es gibt einige Ergebnisse in diesem Zusammenhang, aber eines ist für uns von besonderer Bedeutung. Uns interessiert das Tensorprodukt einer beliebigen irreduziblen Darstellung von $GL(n, \mathbb{C})$ mit einer Darstellung, die durch eine einzeiliges Young-Diagramm gegeben ist. Dieser Fall ist in der Literatur als Regel von Pieri bekannt und er ist ein Spezialfall der bekannten Littlewood-Richardson-Regel.

Nachfolgend werden wir die Regel von Pieri mittels Young-Diagramme beschreiben.

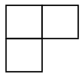
Satz 2.14. *Regel von Pieri [12, Korollar 9.2.4]*
Sei μ ein Diagramm der Länge $\leq n-1$ und ν ein Diagramm der Länge 1. Dann gilt

$$\rho_n^\mu \otimes \rho_n^\nu \cong \bigoplus_\lambda \rho_n^\lambda$$

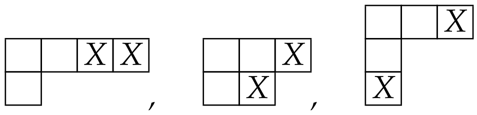
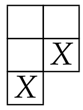
wobei die Summe über alle Diagramme λ der Länge $\leq n$ läuft, so dass $|\lambda| = |\mu| + |\nu|$ und $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{n-1} \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n$ gilt.

In anderen Worten: Ist μ das Diagramm zu einer beliebigen irreduziblen Darstellung und $\nu = (k, 0, ..., 0)$ Tupel zu einem einzeiligen Diagramm (zu einer Darstellung Sym^k), so kommen die irreduziblen Darstellungen ρ_n^λ im Tensorprodukt $\rho_n^\mu \otimes \rho_n^\nu$ nur mit Multiplizität 1 vor. Die auftretenden Diagramme λ erhält man aus dem Diagramm μ durch Hinzufügen von k Kästchen unter der zusätzlichen Bedingung, dass in jeder Spalte nur höchstens ein Kästchen hinzugefügt werden darf.

Beispiel 2.15. *[12, S.388]*
Es seien die Diagramme

$\mu =$  *und* $\nu =$ 

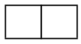
gegeben. Die Diagramme λ, die in der Zerlegung von $\rho_n^\mu \otimes \rho_n^\nu$ für $n \geq 3$ auftreten sind

 *und*  .

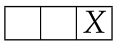
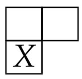
Mit X gekennzeichnete Kästchen sind die zu μ hinzugefügten Kästchen.

Wir interessieren uns für einen Spezialfall der Regel von Pieri, ein Fall in dem beide Diagramme die Länge 1 haben.

Beispiel 2.16.
Es seien die Diagramme

$\mu =$  *und* $\nu =$ 

gegeben. Die Diagramme λ, die in der Zerlegung von $\rho_n^\mu \otimes \rho_n^\nu$ auftreten sind

 *und*  .

Dieses Beispiel beschreibt gerade das Tensorprodukt $Sym^1 \otimes Sym^2$. Nach der Regel von Pieri treten zwei Komponenten bzw. irreduzible Darstellungen mit Multiplizität 1 in diesem Tensorprodukt auf. Bei der ersten auftretende Darstellung - zu dem Tupel $(3, 0, ..., 0)$ - handelt es sich wieder um eine symmetrische Potenz Sym^3. Diese Komponente werden wir mit **Pieri-Komponente** bezeichnen. Die zweite auftretende Darstellung wird mit **Anti-Pieri-Komponente** oder **Pierikomplement** bezeichnet. Für diesen Spezialfall der Regel von Pieri möchten wir im nächsten Abschnitt 2.2 eine Basis einführen.

Diese Basis werden wir später, in Kapitel 5, an entscheidender Stelle benötigen, um den nicht-holomorphen Teil unseres konstruierten Differentialoperators komponentenweise in den Griff zu bekommen (zu eliminieren !) und somit einen holomorphen Differentialoperator zu erhalten.

2.2 Regel von Pieri: Eine Basis.

Dieser Abschnitt dient dazu eine konkrete Basis für die Zerlegung des Tensorproduktes $Sym^1 \otimes Sym^2$ (Beispiel 2.16.) für $GL(n, \mathbb{C})$ einzuführen. Bis zum Abschluss dieser Arbeit war mir zu diesem Punkt keine Literaturquelle bekannt [3]. Die folgenden Rechnungen wurden selbständig durchgeführt.

2.2.1 Basis Pieri-Komponente

In diesem Unterabschnitt wird die Basis der Pieri-Komponente vorgestellt.

Sei $V \cong \mathbb{C}^n$ mit Basis $\{x_1, \ldots, x_n\}$ und $W := \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n]_2$. Wir möchten die Pieri-Komponente des Tensorproduktes $V \otimes W$ ($\cong Sym^1 \otimes Sym^2$) bestimmen. Basiselemente von $V \otimes W$ werden gegeben durch die

$$x_i \otimes e_{j,k}\, y_j y_k \qquad\qquad j \leq k \; und \; e_{j,k} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 2 & j \neq k \end{cases}$$

Nun seien $z_1, \ldots, z_n$ weitere Variablen. Wir bilden x_i auf z_i ab und y_j auf z_j. Die obigen Basiselemente werden dann zu Monomen dritten Grades, also zu Elementen von $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]_3 \cong Sym^3$.

Satz 2.17.
Für ein gegebenes Monom M aus $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]_3$ wird durch

$$\sum x_i \otimes e_{j,k}\, y_j y_k \qquad\qquad j \leq k \; und \; e_{j,k} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 2 & j \neq k \end{cases}$$

eine Basis der Pieri-Komponente von $V \otimes W$ gegeben. Summiert wird hierbei über alle $x_i \otimes e_{j,k}\, y_j y_k$, die auf das gleiche M abgebildet werden.

Zur Veranschaulichung möchten wir betrachten, wie die Behauptung für den Fall $n = 2$ aussehen würde. Wir haben die Elemente

[3] Im Rahmen seines Besuches in Mannheim, konnte ich mich mit T. Yamauchi zu seiner Basis für den kleinen Fall $n = 2$ bzw. $GL(2, \mathbb{C})$ austauschen. Darüber hinaus war aber auch ihm keine Basis oder Literaturquelle für den allgemeinen Fall $GL(n, \mathbb{C})$ bekannt.

$$\begin{array}{lll} x_1 \otimes y_1^2 \mapsto z_1^3 & x_1 \otimes 2y_1y_2 \mapsto 2z_1^2z_2 & x_1 \otimes y_2^2 \mapsto z_1z_2^2 \\ x_2 \otimes y_1^2 \mapsto z_1^2z_2 & x_2 \otimes 2y_1y_2 \mapsto 2z_1z_2^2 & x_2 \otimes y_2^2 \mapsto z_2^3 \end{array}$$

und wenn die obige Behauptung stimmt, dann sind

$$x_1 \otimes y_1^2 \qquad x_2 \otimes y_2^2 \qquad x_1 \otimes 2y_1y_2 + x_2 \otimes y_1^2 \qquad x_1 \otimes y_2^2 + x_2 \otimes 2y_1y_2$$

Basiselemente der Pieri-Komponente von $Sym^1 \otimes Sym^2$ für $GL_2(K)$.

Für den Beweis von Satz 2.17. müssen wir in einem **ersten Schritt** nachweisen, dass dass der so erzeugte Unterraum von $V \otimes W$ invariant unter $GL_n(K)$ ist. In einem **zweiten Schritt** wird die Lineare Unabhängigkeit nachgewiesen. Beginnen wir aber zunächst mit einer Vorbemerkung zur Dimension der Pieri-Komponente.

Vorbemerkung 2.18.
Es gibt drei verschiedene Typen von Basiselementen, die sich aus der obigen Konstruktion der Basis ergeben.

Typ I	$x_i \otimes y_i^2$	*für* $i \in \{1, \ldots, n\}$
Typ II	$x_i \otimes 2y_iy_j + x_j \otimes y_i^2$	*für* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *und* $i \neq j$
Typ III	$x_i \otimes 2y_jy_k + x_j \otimes 2y_iy_k + x_k \otimes 2y_iy_j$	*für* $1 \leq i < j < k \leq n$

Wir möchten nun prüfen, ob die Gesamtanzahl der Elemente von Typ I,II und III mit der Dimension der Pieri-Komponente übereinstimmt. Die Dimension der Pieri-Komponente entspricht gerade der Dimension eines Vektorraumes homogener Polynome von Grad drei. Aus der Algebra (s. [17]) wissen wir, dass diese Dimension gerade $\binom{3+n-1}{n-1} = \binom{3+n-1}{3} = \frac{(3+n-1)!}{3!(n-1)!}$ *ist. Andererseits betrachten wir die Basiselemente und fragen uns, wie oft die Basiselemente von Typ I, II und III vorkommen.*

- *Es gibt* n *Elemente von Typ I.*
- *Es gibt* $n(n-1)$ *Elemente von Typ II.*
- *Es gibt* $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ *Elemente von Typ III.*

Auf Typ III möchten wir genauer eingehen. In der Beschreibung der Tupel (i, j, k) *für beliebiges* n *fordern wir* $1 \leq i < j < k \leq n$. *Das entspricht dem, drei verschiedene Elemente aus* $\{1, \ldots, n\}$ *zu wählen, also* $\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!}$ *viele. Es gibt* *also $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ Elemente von Typ III. Die Gesamtanzahl der Elemente ist somit die Summe*

$$\begin{aligned} n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} &= \frac{6n + 6(n(n-1)) + n(n-1)(n-2)}{6} \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ &= \frac{(n-1)!n(n+1)(n+2)}{3!(n-1)!} \\ &= \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} \\ &= \frac{(3+n-1)!}{3!(n-1)!} \end{aligned}$$

Dies entspricht der Dimension der Pieri-Komponente.

Nun können wir uns dem Beweis von Satz 2.17. widmen.

Beweis. (Satz 2.17.)
Erster Beweisschritt: Wir zeigen, dass die Elemente einen $GL_n(K)$-invarianten Raum aufspannen. Hierzu wird die Invarianz unter den Erzeugenden von $GL_n(K)$ (s. Kapitel 2) nachgewiesen.

Wir zeigen die Invarianz unter $x_r \to tx_s + x_r$ und $y_r \to ty_s + y_r$ (Elementarmatrix (b)) für Basiselemente von Typ I, II und III:

Typ I: $x_r \otimes y_r^2$

$$\begin{aligned} &=(tx_s + x_r) \otimes (ty_s + y_r)^2 \\ &=tx_s \otimes t^2y_s^2 + tx_s \otimes 2ty_ry_s + tx_s \otimes y_r^2 + x_r \otimes t^2y_s^2 + x_r \otimes 2ty_ry_s + x_r \otimes y_r^2 \\ &=t^3(x_s \otimes y_s^2) + t^2(2x_s \otimes y_ry_s + x_r \otimes y_s^2) + t(x_r \otimes 2y_ry_s + x_s \otimes y_r^2) + (x_r \otimes y_r^2) \end{aligned}$$

Für Elemente von Typ II müssen wir vier verschiedene Fälle unterscheiden, wie wir r und s in ein Tupel (i,j) einsetzen. Diese sind (r,s), (s,r), (r,j) und (i,r) und wir werden sie nachfolgend genau betrachten.

<u>Typ II, Fall 1:</u> $x_r \otimes 2y_r y_s + x_s \otimes y_r^2$

$$
\begin{aligned}
=&((tx_s + x_r) \otimes 2((ty_s + y_r)y_s) + x_s \otimes (ty_s + y_r)^2 \\
=&2tx_s \otimes ty_s^2 + 2tx_s \otimes y_r y_s + 2x_r \otimes ty_s^2 + 2x_r \otimes y_r y_s + x_s \otimes t^2 y_s^2 + x_s \otimes 2ty_r y_s \\
&+ x_s \otimes y_r^2 = 3t^2(x_s \otimes y_s^2) + 2t(2x_s \otimes y_r y_s + x_r \otimes y_s^2) + (2x_r \otimes y_r y_s + x_s \otimes y_r^2)
\end{aligned}
$$

<u>Typ II, Fall 2:</u> $x_s \otimes 2y_s y_r + x_r \otimes y_s^2$

$$
\begin{aligned}
=&x_s \otimes 2y_s(ty_s + y_r) + (tx_s + x_r) \otimes y_s^2 \\
=&x_s \otimes 2ty_s^2 + x_s \otimes 2y_s y_r + tx_s \otimes y_s^2 + x_r \otimes y_s^2 \\
=&3t(x_s \otimes 2y_s^2) + (x_s \otimes 2y_s y_r + x_r \otimes y_s^2)
\end{aligned}
$$

<u>Typ II, Fall 3:</u> $x_r \otimes 2y_r y_j + x_j \otimes y_r^2$

$$
\begin{aligned}
=&((tx_s + x_r) \otimes 2((ty_s + y_r)y_j) + x_j \otimes (ty_s + y_r)^2 \\
=&tx_s \otimes 2ty_s y_j + tx_s \otimes 2y_r y_j + x_r \otimes 2ty_s y_j + x_r \otimes 2y_r y_j + x_j \otimes t^2 y_s^2 \\
&+ x_j \otimes 2ty_r y_s + x_j \otimes y_r^2 \\
=&t^2(x_s \otimes 2y_s y_j + x_j \otimes y_s^2) + (x_r \otimes 2y_r y_j + x_j \otimes y_r^2) \\
&+ t(x_s \otimes 2y_r y_j + x_r \otimes 2y_s y_j + x_j \otimes 2y_r y_s)
\end{aligned}
$$

<u>Typ II, Fall 4:</u> $x_i \otimes 2y_i y_r + x_r \otimes y_i^2$

$$
\begin{aligned}
=&x_i \otimes 2y_i(ty_s + y_r) + (tx_s + x_r) \otimes y_i^2 \\
=&x_i \otimes 2ty_i y_s + x_i \otimes 2y_i y_r + tx_s \otimes y_i^2 + x_r \otimes y_i^2 \\
=&t(x_i \otimes 2y_i y_s + x_s \otimes y_i^2) + (x_i \otimes 2y_i y_r + x_r \otimes y_i^2)
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Gestalt der Elemente von Typ III müssen wir nur zwei Fälle unterscheiden, wie wir r und s in ein Tupel (i,j,k) einsetzen, diese sind (r,s,k) und (r,j,k).

Typ III, Fall 1: $x_r \otimes 2y_sy_k + x_s \otimes 2y_ry_k + x_k \otimes 2y_sy_r$

$=(tx_s + x_r) \otimes 2y_sy_k + x_s \otimes 2(ty_s + y_r)y_k + x_k \otimes 2y_s(ty_s + y_r)$
$=2tx_s \otimes y_sy_k + 2x_r \otimes y_sy_k + 2x_s \otimes ty_sy_k + 2x_s \otimes y_ry_k + 2x_k \otimes ty_s^2 + 2x_k \otimes y_ry_s$
$=2t(2x_s \otimes y_sy_k + x_k \otimes y_s^2) + (2x_r \otimes y_sy_k + 2x_s \otimes y_ry_k + 2x_k \otimes y_ry_s)$

Typ III, Fall 2: $x_r \otimes 2y_jy_k + x_j \otimes 2y_ry_k + x_k \otimes 2y_jy_r$

$=(tx_s + x_r) \otimes 2y_jy_k + x_j \otimes 2(ty_s + y_r)y_k + x_k \otimes 2y_j(ty_s + y_r)$
$=tx_s \otimes 2y_jy_k + x_r \otimes 2y_jy_k + x_j \otimes 2ty_sy_k + x_j \otimes 2y_ry_k + x_k \otimes 2ty_sy_j + x_k \otimes 2y_ry_j$
$=t(x_s \otimes 2y_jy_k + x_j \otimes 2y_sy_k + x_k \otimes 2y_sy_j) + (x_r \otimes 2y_jy_k + x_j \otimes 2y_ry_k + x_k \otimes 2y_ry_j)$

Nun zeigen wir die Invarianz unter $x_r \to tx_r$ und $y_r \to ty_r$ (Elementarmatrix (a)) für Basiselemente von Typ I, II und III:

Typ I: $x_r \otimes y_r^2 = (tx_r) \otimes (ty_r)^2 = t^3(x_r \otimes y_r^2)$

Für Typ II muss man, im Gegensatz zu (b), nur zwei Fälle unterscheiden.

Typ II, Fall 1: $x_r \otimes 2y_ry_j + x_j \otimes y_r^2$

$=(tx_r) \otimes 2(ty_r)y_j + x_j \otimes (ty_r)^2 = t^2(2x_r \otimes y_ry_j + x_j \otimes y_r^2)$

Typ II, Fall 2: $x_i \otimes 2y_iy_r + x_r \otimes y_i^2$

$=x_i \otimes 2y_i(ty_r) + (tx_r) \otimes y_i^2 = t(2x_i \otimes y_iy_r + x_r \otimes y_i^2)$

Für Typ III benötigen wir, im Gegensatz zu (b), hier sogar nur einen Fall.

Typ III: $x_r \otimes 2y_jy_k + x_j \otimes 2y_ry_k + x_k \otimes 2y_ry_i$

$=(tx_r) \otimes 2y_jy_k + x_j \otimes 2(ty_r)y_k + x_k \otimes 2(ty_r)y_i$
$=t(x_r \otimes 2y_jy_k + x_j \otimes 2y_ry_k + x_k \otimes 2y_ry_j)$

Zweiter Beweisschritt: Wir möchten zeigen, dass die Elemente - als Funktionen betrachtet - linear unabhängig sind. Um unsere Vorgehensweise deutlicher darzustellen, betrachten wir zunächst den Fall $GL(2, \mathbb{C})$:

$$\alpha(x_1 \otimes y_1^2) + \beta(x_2 \otimes y_2^2) + \gamma(x_1 \otimes 2y_1y_2 + x_2 \otimes y_1^2) + \delta(x_2 \otimes 2y_1y_2 + x_1 \otimes y_2^2)$$

Wenn es hier lineare Abhängigkeiten gibt, dann nur innerhalb des gleichen Index i von x_i und so zeigen wir, dass es keine Linearkombinationen mit dem gleichen x_i geben kann. Für den Fall, dass $x_i = 0$ mit $i \neq 1$, ist

$$\alpha(x_1 \otimes y_1^2) + \gamma(x_1 \otimes 2y_1y_2) + \delta(x_1 \otimes y_2^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \gamma = \delta = 0$$

Für den Fall, dass $x_i = 0$ mit $i \neq 2$, ist

$$\beta(x_2 \otimes y_2^2) + \gamma(x_2 \otimes y_1^2) + \delta(x_2 \otimes 2y_1y_2) = 0 \ \Leftrightarrow \beta = \gamma = \delta = 0.$$

Für den allgemeinen Fall $GL(n, \mathbb{C})$ gehen wir analog vor. Für den Fall, dass $x_i = 0$ mit z.B. $i \neq 1$ folgt dann

$$\alpha(x_1 \otimes y_1^2) + \sum_{j=2}^{n} \beta_j(x_1 \otimes 2y_1y_j) + \sum_{j=2}^{n} \gamma_j(x_1 \otimes y_j^2) + \sum_{1<j<k\leq n} \delta_{j,k}(x_1 \otimes 2y_jy_k) = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \beta_2 = \cdots = \beta_n = \gamma_2 = \cdots = \gamma_n = \delta_{2,3} = \cdots = \delta_{j,k} = 0$$

Allgemein betrachten wir den Fall, dass $x_i = 0$ mit $i \neq t$ und es gilt

$$\alpha(x_t \otimes y_t^2) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq t}}^{n} \beta_j(x_t \otimes 2y_ty_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq t}}^{n} \gamma_j(x_t \otimes y_j^2) + \sum_{1\leq t<j<k\leq n} \delta_{j,k}(x_t \otimes 2y_jy_k) = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq t}}^{n} \beta_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq t}}^{n} \gamma_j = \sum_{1\leq t<j<k\leq n} \delta_{j,k} = 0$$

Somit ist auch die lineare Unabhängigkeit bewiesen und der Beweis des Satzes 2.17. abgeschlossen. $\square$

2.2.2 Basis Anti-Pieri-Komponente

In diesem Abschnitt wird die Basis der Anti-Pieri-Komponente eingeführt. Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie in Abschnitt 2.2.1.

Satz 2.19.
Durch die Elemente

Typ II a
$(-\frac{1}{2})(x_i \otimes 2y_iy_j) + (x_j \otimes y_i^2) \qquad i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$
Typ III a
$(-\frac{1}{2})(x_i \otimes 2y_jy_k) + (-\frac{1}{2})(x_j \otimes 2y_iy_k) + (x_k \otimes 2y_iy_j) \quad 1 \leq i < j < k \leq n$
Typ III b
$(-\frac{1}{2})(x_i \otimes 2y_jy_k) + (x_j \otimes 2y_iy_k) + (-\frac{1}{2})(x_k \otimes 2y_iy_j) \quad 1 \leq i < j < k \leq n$

wird eine Basis des Pierikomplements bzw. der Anti-Pieri-Komponente von $V \otimes W$ gegeben.

Für den Beweis des Satzes müssen wir, analog zu Satz 2.17., auch hier wieder in einem **ersten Schritt** nachweisen, dass dass der so erzeugte Unterraum von $V \otimes W$ invariant unter $GL_n(K)$ ist. In einem **zweiten Schritt** wird wieder die Lineare Unabhängigkeit nachgewiesen.

Auch hier beginnen wir zunächst wieder mit einer Vorbemerkung zur Dimension der Anti-Pieri-Komponente, in der geprüft wird, ob die Anzahl der Elemente der Basis (von Typ II a, III a & III b) auch der Dimension der Anti-Pieri-Komponente entspricht.

Vorbemerkung 2.20.
*Wir erinnern uns daran, dass sich das Tensorprodukt $V \otimes W = Sym^1 \otimes Sym^2$ in die Summe zweier Komponenten aufteilt. Die **Dimension der Anti-Pieri- Komponente** ist demnach*

$$\underbrace{dim(W)}_{\substack{=\frac{(2+n-1)!}{2!(n-1)!} \\ =\frac{(n-1)!n(n+1)}{2!(n-1)!} \\ =\frac{n(n+1)}{2}}} \cdot \underbrace{dim(V)}_{\substack{=\frac{n!}{(n-1)!} \\ =n}} - \underbrace{dim(Pieri - Komponente)}_{\substack{=\frac{(3+n-1)!}{3!(n-1)!} \\ =\frac{n(n+1)(n+2)}{6}}}$$

und somit

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)}{2}\cdot n-\frac{n(n+1)(n+2)}{6} &= \frac{3((n\cdot n(n+1))-(n^3+3n^2+2n)}{6}\\ &= \frac{3n^3+3n^2-n^3-3n^2-2n}{6}\\ &= \frac{2n^3-2n}{6}\\ &= \frac{n^3-n}{3}.\end{aligned}$$

Andererseits betrachten wir die Basiselemente und fragen uns, wie oft die Basiselemente von Typ II a, Typ III a und Typ III b vorkommen.

- *Es gibt* $n(n-1)$ *Elemente von Typ II a.*
- *Es gibt* $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ *Elemente von Typ III a und die gleiche Anzahl nochmal für Typ III b.*

Die Anzahl der Elemente zusammengerechnet ergibt somit

$$\begin{aligned}n(n-1)+2\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right) &= \frac{6(n(n-1))}{6}+2\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right)\\ &= \frac{6n^2-6n+2n^3-6n^2+4n}{6}\\ &= \frac{2n^3-2n}{6}\\ &= \frac{n^3-n}{3}\end{aligned}$$

Das entspricht der Dimension der Anti-Pieri-Komponente.

Nun können wir mit dem Beweis des Satzes 2.19. beginnen.

Beweis. (Satz 2.19.)
Erster Beweisschritt: Analog zur Vorgehensweise bei der Basis der Pierikomponente müssen wir zeigen, dass die Elemente einen $GL_n(K)$- invarianten Raum aufspannen. Hierzu wird die Invarianz unter den Erzeugenden von $GL_n(K)$ nachgewiesen.

Wir zeigen die Invarianz unter $x_r \to tx_s + x_r$ und $y_r \to ty_s + y_r$ (Elementarmatrix (b)) für Basiselemente von Typ II a, Typ III a & III b. Für Elemente von Typ II a müssen wir, analog zu Typ II aus 2.2.1, wieder vier verschiedene Fälle unterscheiden, nämlich (r,s), (s,r), (r,j) und (i,r).

<u>Typ II a, Fall 1:</u> $-\frac{1}{2}(x_r \otimes 2y_r y_s) + (x_s \otimes y_r^2)$

$$\begin{aligned}
&= -\tfrac{1}{2}((tx_s + x_r) \otimes 2((ty_s + y_r)y_s) + (x_s \otimes (ty_s + y_r)^2)\\
&=(-\tfrac{1}{2})(2tx_s \otimes ty_s^2) + (-\tfrac{1}{2})(2tx_s \otimes y_r y_s) + (-\tfrac{1}{2})(2x_r \otimes ty_s^2) + (-\tfrac{1}{2})(2x_r \otimes y_r y_s)\\
&\quad + x_s \otimes t^2 y_s^2 + x_s \otimes 2ty_s y_r + x_s \otimes y_r^2\\
&= -t(-\tfrac{1}{2}(x_s \otimes 2y_r y_s) + (x_r \otimes y_s^2)) + (-\tfrac{1}{2}(x_r \otimes 2y_r y_s) + (x_s \otimes y_r^2))
\end{aligned}$$

<u>Typ II a, Fall 2:</u> $-\frac{1}{2}(x_s \otimes 2y_r y_s) + (x_r \otimes y_s^2)$

$$\begin{aligned}
&= -\tfrac{1}{2}(x_s \otimes 2((ty_s + y_r)y_s) + ((tx_s + x_r) \otimes y_s^2)\\
&=(-\tfrac{1}{2})(x_s \otimes 2ty_s^2) + (-\tfrac{1}{2})(x_s \otimes 2y_r y_s) + tx_s \otimes y_s^2 + x_r \otimes y_s^2\\
&=(-\tfrac{1}{2})(x_s \otimes 2y_r y_s) + (x_r \otimes y_s^2)
\end{aligned}$$

<u>Typ II a, Fall 3:</u> $-\frac{1}{2}(x_r \otimes 2y_r y_j) + (x_j \otimes y_r^2)$

$$\begin{aligned}
&= -\tfrac{1}{2}((tx_s + x_r) \otimes 2((ty_s + y_r)y_j) + (x_j \otimes (ty_s + y_r)^2)\\
&=(-\tfrac{1}{2})(t^2(x_s \otimes 2y_s y_j) + (-\tfrac{1}{2})t(x_s \otimes 2y_r y_j) + (-\tfrac{1}{2})t(x_r \otimes 2y_s y_j)+\\
&\quad (-\tfrac{1}{2})(x_r \otimes 2y_r y_j) + t^2(x_j \otimes y_s^2) + t(x_j \otimes 2y_r y_s) + (x_j \otimes y_r^2)\\
&=t^2((-\tfrac{1}{2})(x_s \otimes 2y_s y_j)) + (x_j \otimes y_s^2)) + ((-\tfrac{1}{2})(x_r \otimes 2y_r y_j) + (x_j \otimes y_r^2))+\\
&\quad t((-\tfrac{1}{2})(x_s \otimes 2y_r y_j) + (-\tfrac{1}{2})(x_r \otimes 2y_s y_j) + (x_j \otimes 2y_r y_s))
\end{aligned}$$

<u>Typ II a, Fall 4:</u> $-\frac{1}{2}(x_i \otimes 2y_i y_r) + (x_r \otimes y_i^2)$

$$\begin{aligned}
&=(-\tfrac{1}{2})(x_i \otimes 2y_i(ty_s + y_r)) + ((tx_s + x_r) \otimes y_i^2)\\
&=(-\tfrac{1}{2})(x_i \otimes 2ty_i y_s) + (-\tfrac{1}{2})(x_i \otimes 2y_i y_r) + (tx_s \otimes y_i^2) + (x_r \otimes y_i^2)\\
&=t((-\tfrac{1}{2})(x_i \otimes 2ty_i y_s)) + (x_s \otimes y_i^2)) + (-\tfrac{1}{2}(x_i \otimes 2y_i y_r) + (x_r \otimes y_i^2))
\end{aligned}$$

Aufgrund der Gestalt der Elemente von Typ III a und Typ III b, reicht es aus jeweils zwei Fälle zu unterscheiden, diese sind (r, s, k) und (r, j, k).

<u>Typ III a, Fall 1:</u> $(-\frac{1}{2})(x_r \otimes 2y_s y_k) + (-\frac{1}{2})(x_s \otimes 2y_r y_k) + (x_k \otimes 2y_s y_r)$

$$\begin{aligned}
=&(-\tfrac{1}{2})((tx_s + x_r) \otimes 2y_s y_k) + (-\tfrac{1}{2})(x_s \otimes 2(ty_s + y_r)y_k) + (x_k \otimes 2y_s(ty_s + y_r))\\
=&(-\tfrac{1}{2})(tx_s \otimes 2y_s y_k) + (-\tfrac{1}{2})(x_r \otimes 2y_s y_k) + (-\tfrac{1}{2})(x_s \otimes 2ty_s y_k)+\\
&(-\tfrac{1}{2})(x_s \otimes 2y_r y_k) + 2t(x_k \otimes y_s^2) + (x_k \otimes 2y_s y_r)\\
=&2t((-\tfrac{1}{2})(x_s \otimes 2y_s y_k)) + (x_k \otimes y_s^2))+\\
&(-\tfrac{1}{2})(x_r \otimes 2y_s y_k) + (-\tfrac{1}{2})(x_s \otimes 2y_r y_k) + (x_k \otimes 2y_s y_r)
\end{aligned}$$

<u>Typ III b, Fall 1:</u> $(-\frac{1}{2})(x_r \otimes 2y_s y_k) + (x_s \otimes 2y_r y_k) + (-\frac{1}{2})(x_k \otimes 2y_s y_r)$

$$\begin{aligned}
=&(-\tfrac{1}{2})((tx_s + x_r) \otimes 2y_s y_k) + (x_s \otimes 2(ty_s + y_r)y_k) + (-\tfrac{1}{2})(x_k \otimes 2y_s(ty_s + y_r))\\
=&-t((-\tfrac{1}{2})(x_s \otimes 2y_s y_k)) + (x_k \otimes y_s^2))+\\
&(-\tfrac{1}{2})(x_r \otimes 2y_s y_k) + (-\tfrac{1}{2})(x_k \otimes 2y_s y_r) + (x_s \otimes 2y_r y_k)
\end{aligned}$$

<u>Typ III a, Fall 2:</u> $(-\frac{1}{2})(x_r \otimes 2y_j y_k) + (-\frac{1}{2})(x_j \otimes 2y_r y_k) + (x_k \otimes 2y_j y_r)$

$$\begin{aligned}
=&(-\tfrac{1}{2})((tx_s + x_r) \otimes 2y_j y_k) + (-\tfrac{1}{2})(x_j \otimes 2(ty_s + y_r)y_k) + (x_k \otimes 2y_j(ty_s + y_r))\\
=&(-\tfrac{1}{2})(tx_s \otimes 2y_j y_k) + (-\tfrac{1}{2})(x_r \otimes 2y_j y_k) + (-\tfrac{1}{2})(x_j \otimes 2ty_s y_k)+\\
&(-\tfrac{1}{2})(x_j \otimes 2y_r y_k) + (x_k \otimes 2ty_j y_s) + (x_k \otimes 2y_j y_r)\\
=&t((-\tfrac{1}{2})(x_s \otimes 2y_j y_k) + (-\tfrac{1}{2})(x_j \otimes 2y_s y_k) + (x_k \otimes 2y_j y_s))+\\
&(-\tfrac{1}{2})(x_r \otimes 2y_j y_k) + (-\tfrac{1}{2})(x_j \otimes 2y_r y_k) + (x_k \otimes 2y_j y_r)
\end{aligned}$$

<u>Typ III b, Fall 2:</u> $(-\frac{1}{2})(x_r \otimes 2y_j y_k) + (x_j \otimes 2y_r y_k) + (-\frac{1}{2})(x_k \otimes 2y_j y_r)$

$$\begin{aligned}
=&(-\tfrac{1}{2})((tx_s + x_r) \otimes 2y_j y_k) + (x_j \otimes 2(ty_s + y_r)y_k) + (-\tfrac{1}{2})(x_k \otimes 2y_j(ty_s + y_r))\\
=&(-\tfrac{1}{2})(tx_s \otimes 2y_j y_k) + (-\tfrac{1}{2})(x_r \otimes 2y_j y_k) + x_j \otimes 2ty_s y_k+\\
&x_j \otimes 2y_r y_k + (-\tfrac{1}{2})(x_k \otimes 2ty_j y_s) + (-\tfrac{1}{2})(x_k \otimes 2y_j y_r)\\
=&t((-\tfrac{1}{2})(x_s \otimes 2y_j y_k) + (-\tfrac{1}{2})(x_k \otimes 2y_j y_s) + x_j \otimes 2y_s y_k)+\\
&(-\tfrac{1}{2})(x_r \otimes 2y_j y_k) + (-\tfrac{1}{2})(x_k \otimes 2y_j y_r) + x_j \otimes 2y_r y_k
\end{aligned}$$

Nun prüfen wir die Invarianz unter $x_r \to tx_r$ und $y_r \to ty_r$ (Elementarmatrix (a)).

<u>Typ II , Fall 1:</u> $-\frac{1}{2}(x_r \otimes 2y_r y_j) + (x_j \otimes y_r^2)$

$= -\frac{1}{2}(tx_r \otimes 2ty_r y_j) + (x_j \otimes (ty_r)^2) = t^2(-\frac{1}{2}(x_r \otimes 2y_r y_j) + (x_j \otimes y_r^2))$

<u>Typ II , Fall 2:</u> $-\frac{1}{2}(x_i \otimes 2y_i y_r) + (x_r \otimes y_i^2)$

$= -\frac{1}{2}(x_i \otimes 2y_i ty_r) + (tx_r \otimes y_i^2) = t((-\frac{1}{2})(x_i \otimes 2y_i y_r) + (x_r \otimes y_i^2))$

<u>Typ III a , Fall 1:</u> $(-\frac{1}{2})(x_r \otimes 2y_j y_k) + (-\frac{1}{2})(x_j \otimes 2y_r y_k) + (x_k \otimes 2y_j y_r)$

$=(-\frac{1}{2})(tx_r \otimes 2y_j y_k) + (-\frac{1}{2})(x_j \otimes 2ty_r y_k) + (x_k \otimes 2y_j ty_r)$
$=t((-\frac{1}{2})(x_r \otimes 2y_j y_k) + (-\frac{1}{2})(x_j \otimes 2y_r y_k) + (x_k \otimes 2y_j y_r))$

Zweiter Beweisschritt: Nun müssen wir noch die lineare Unabhängigkeit beweisen. Zunächst möchten wir zeigen, dass die Pieri-Komponente und die Anti-Pieri-Komponente zwei unterschiedliche (Unter-) Räume sind. Hierzu vergleichen wir in einem ersten Schritt die Dimensionen der beiden Komponenten. Die Dimension der Pieri-Komponente (s. Vorbemerkung 2.18.) lautet:

$$n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

Die Dimension der Anti-Pieri-Komponente (Vorbemerkung 2.20.) lautet:

$$n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}_{= \frac{n^3-3n^2-4n}{6} + \frac{6n}{6}}$$

$$= n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n^3-3n^2-4n}{6}$$

Die Dimensionen der beiden Räume unterscheiden sich also um den Faktor $\frac{n^3-3n^2-4n}{6}$.

Man kann leicht nachrechnen, dass die Funktion $f(n) = \frac{n^3-3n^2-4n}{6}$ für den Fall $n \in \{1, 2, 3\}$ negative Werte annimmt und folglich die Dimension der Pieri- Komponente größer ist, als die der Anti-Pieri-Komponente.

Für den Fall $n \geq 5$ nimmt die Funktion $f(n) = \frac{n^3-3n^2-4n}{6}$ nur Werte größer null an und somit ist die Anti-Pieri-Komponente in diesem Fall größer als die Pieri-Komponente.

Bleibt noch der Fall $n = 4$ zu betrachten, für den $f(n)$ gleich 0 ist und somit die Dimensionen beider Räume gleich sind. In diesem Fall genügt es uns z.B. das Element $x_1 \otimes y_1^2$ aus der Basis der Pieri-Komponente zu betrachten. Dieses kann nicht durch die Elemente aus der Anti-Pieri-Komponente erzeugt werden. Auch für den Fall $n = 4$ sind die Räume folglich nicht gleich.

Wir wissen bereits, dass wir zwei invariante Räume haben. Der eine ist die Pieri-Komponente, der andere ist ein, von der Pieri-Komponente verschiedener, Raum. Wir wissen auch, dass das Tensorprodukt in zwei Räume zerfällt[4] und der andere somit das Komplement sein muss. $\square$

Hiermit endet nun das Kapitel der Darstellungstheorie und wir fassen die wesentlichen Erkenntnisse nachfolgend in aller Kürze zusammen.

Resumé Was sollte man aus diesem Kapitel mitnehmen? Grundlegend ist die Tatsache, dass eine irreduzible polynomiale Darstellung von $GL(n, \mathbb{C})$ eindeutig bestimmt wird durch ihr Höchstgewicht $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, welches man wiederum durch ein Young-Diagramm veranschaulichen kann. Mittels dieser Diagramme wird in **Abschnitt 2.1** die Regel von Pieri, eine Formel zur Zerlegung von Tensoprodukten zweier Darstellungen in irreduzible Darstellungen, beschrieben. Konkret betrachten wir das Tensorprodukt einer beliebigen irreduziblen Darstellung von $GL(n, \mathbb{C})$ mit einer Dar-

[4] Anmerkung: Die Zerlegung in isotypische Komponenten ist eindeutig.

stellung, die durch ein einzeiliges Young-Diagramm (entsprechend $Sym^k(V)$) gegeben ist.

Für einen Spezialfall dieser Regel, der Zerlegung des Tensorproduktes $Sym^1 \otimes Sym^2$ in zwei Komponenten, wurde in **Abschnitt 2.2.** eine explizite Basis eingeführt. Diese wird uns in Kapitel 5 an relevanter Stelle äußerst nützlich sein, um einen holomorphen Differentialoperator zu erhalten.

Neben der Regel von Pieri ist auch der Satz von Weyl (bzw. die davon abgeleitete schwache Version) ein relevantes Resultat, das man allgemein und insbesondere im Hinblick auf diese Arbeit, aus diesem Kapitel mitnehmen kann.

3 Differentialoperatoren

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit allen Differentialoperatoren, die in dieser Arbeit auf irgendeine Art vorkommen, sei es zur Konstruktion holomorpher Differetialoperatoren, zur Interpretation von Ergebnissen, als Hilfestellung in Zwischenrechnungen oder einfach nur als Beispiel zur Veranschaulichung.

Angefangen mit einem kurzen allgemeinen Überblick in Abschnitt 3.1, wird in Abschnitt 3.2 der Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial Y}$ und zwei hilfreiche Resultate, der dazugehörigen Theorie, eingeführt. Anschließend werden in Abschnitt 3.3 und 3.4 die Differentialoperatoren eingeführt, die wir im Kern dieser Arbeit zur Konstruktion holomorpher äquivarianter Differentialoperatoren verwenden werden. Der Abschluss dieses Kapitels bildet mit Abschnitt 3.5 noch ein interessanter Zusammenhang zwischen den beiden Differentialoperatoren aus 3.3 und 3.4.

3.1 Einführung

Es gibt zahlreiche Möglichkeiten ein Kapitel über Differentialoperatoren zu beginnen und über einen sinnvollen & vernünftigen Einstieg in das Thema lässt sich diskutieren. Ein Punkt in dem - bei Mathematikern aller Fachrichtungen - aber sicher Einigkeit herrscht ist, dass das wohl bekannteste Beispiel eines Differentialoperators (erster Ordnung) die normale Ableitung einer Funktion in einer Variablen

$$\frac{\partial}{\partial x} : f \mapsto f^{'}$$

ist. Dicht gefolgt von der gewöhnlichen partiellen Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Zwei weitere bekannte Beispiele für Differentialoperatoren sind die sogenannten **Wirtinger Ableitungen**

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \textit{und} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{3.1}$$

In der Funktionentheorie bekannt u.a. für ihre Nützlichkeit mit ihnen Funktionen auf Holomorphie überprüfen zu können, werden wir sie (bzw. nur eine davon) hauptsächlich zwecks ihrer hilfreichen Darstellung komplexer Ableitungen verwenden. Für mehr Informationen sowie Rechenregeln für die Wirtinger-Ableitungen sei auf [8, S.24/25] verwiesen.

Natürlich könnte man sich seitenweise mit weiteren interessanten und nützlichen Differentialoperatoren beschäftigen, aber wir möchten uns auf diese beschränken, die auch tatsächlich in dieser Arbeit auftreten und daher nun zum Wesentlichen übergehen. Für die vorliegende Arbeit sind zwei Typen von Differentialoperatoren von besonderem Interesse,

- die nicht-holomorphen **Maaß-Shimura Differentialoperatoren** und
- die bilinearen holomorphen **Rankin-Cohen Differentialoperatoren**.

Diese möchten wir nachfolgend kurz beschreiben.

Rankin-Cohen Differentialoperatoren Der geschichtlichen Zusammenfassung von D. Zagier aus [22, S.57] folgend, wurde bereits im Jahr 1956 von R. A. Rankin eine allgemeine Beschreibung von Differentialoperatoren untersucht, die Modulformen auf Modulformen abbilden. 21 Jahre später beschäftigte sich auch H. Cohen mit diesem Thema und definierte für jedes $n \geq 0$ einen bilinearen Differentialoperator, der zwei Modulformen f und g vom Gewicht k und l eine Modulform $[f, g]_n$ vom Gewicht $k + l + 2n$ zuordnet. Dieser ist bekannt unter dem Namen **Rankin-Cohen-Klammer** und für zwei Modulformen wird die n-te Rankin-Cohen-Klammer definiert durch

$$[f,g]_n(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{r+s=n} (-1)^r \binom{k+n-1}{s} \binom{l+n-1}{r} \frac{\partial^r f}{\partial z^r} \frac{\partial^s g}{\partial z^s} \tag{3.2}$$

Für den Fall $n = 1$ ist die Rankin-Cohen-Klammer gerade von der Gestalt

$$[f,g]_1 = \frac{1}{2\pi i}\Big(k\left(f \cdot g'\right) - l\left(f' \cdot g\right)\Big) \tag{3.3}$$

Für mehr Informationen zu Rankin-Cohen-Klammern verweisen wir auf die Arbeiten von R. Rankin [18], H. Cohen [7] oder D. Zagier [22].

Wie bereits erwähnt, werden Modulformen in dieser Arbeit nicht zum Einsatz kommen und daher werden wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit die Rankin-Cohen-Klammer nicht mit Modulformen, sondern stattdessen mit den - in Kapitel 1 definierten - holomorphen Funktionen aus dem Raum $\mathcal{H}_k(\mathbb{H}_n, \mathbb{C})$ bzw. $\mathcal{H}_\rho(\mathbb{H}_n, V_\rho)$ betrachten (vgl. S. 9/10).

Maaß-Shimura Differentialoperatoren Ihren Ursprung haben Maaß-Shimura Operatoren in der Lie-Theorie und können durch diese erklärt werden. Sucht man Informationen hierzu, so wird man sie z.B. in der Arbeit [14] von M. Harris finden. Wir wählen nachfolgend einen etwas anderen Einstieg und um die Maaß-Shimura Differentialoperatoren einführen zu können, benötigen wir zunächst folgende

Definition 3.1.
Eine Funktion $f : \mathbb{H}_n \to V$ heißt ***fast-holomorph*** *genau dann wenn f ein Polynom in den Einträgen von Y^{-1} ($Z = X + iY$) mit V-wertigen beliebigen holomorphen Funktionen als Koeffizienten ist.*

Bezeichnung 3.2.
Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{N}_\rho(\mathbb{H}_n, V) := \{f : \mathbb{H}_n \to V |\, f fast\ holomorph, Polynom\ Grad \leq \nu\ in\ Y^{-1}\}$$

den Raum aller V-wertiger fast-holomorpher Funktionen auf $\mathbb{H}_n$ von Grad $\leq \nu$. Der Index ρ gibt an, dass wir diesen Raum mit der Operation $|_\rho$ von $Sp(n, \mathbb{R})$ ausstatten (vgl. [20, Lemma 8.3]).

Die **Maaß-Shimura Differentialoperatoren** D sind Polynome in den (holomorphen) Ableitungen und den Einträgen von Y^{-1}. Sie operieren auf V_ρ-wertigen Funktionen und bilden diese ab auf $V_{\rho'}$-wertige Funktionen und sie sind äquivariant bezüglich der Operation von $Sp(n, \mathbb{R})$, d.h.

$$D(f \mid_\rho M) = D(f) \mid_{\rho'} M$$

mit $M \in Sp(n, \mathbb{R})$. Der einfachste Fall eines solchen Operators ist der, aus der Theorie der (elliptischen) Modulformen bekannte, Maaß Operator von Grad 1

$$\delta_k^{(1)} = \tfrac{k}{2iy} + \tfrac{\partial}{\partial z}$$

Detaillierte Informationen zur Äquivarianzeigenschaft, Iteration u.s.w. sind beispielsweise in G. Shimuras [20, III,§ 8] zu finden.

Auch im Fall der Maaß Shimura Operatoren werden wir später etwas von der gerade eingeführten „gewöhnlichen" Beschreibung abweichen und in Abschnitt 3.3 eine Definition betrachten, die ohne fast-holomorphe Funktionen auskommt. Auch Shimuras konkrete Konstruktion eines solchen Differentialoperators werden wir in 3.3. kennenlernen.

3.2 Der Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial Y}$

Dieser Abschnitt ist eine sehr kurze Zusammenfassung der, für uns, relevanten Aussagen von E. Freitag aus [9, S.209-201] über den Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial Y}$.

Wir betrachten unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$. Wir sind interessiert an den Differentialoperatoren

$$\partial_{i,j} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \delta_{i,j}\right) \tfrac{\partial}{\partial y_{i,j}} \tag{3.4}$$

mit $1 \le i, j \le n$ und $\delta_{i,j}$ = Kronecker-Delta. Diese können wir zu einer Matrix von Operatoren zusammenfassen

$$\partial := \frac{\partial}{\partial Y} := \left(\partial_{i,j}\right). \tag{3.5}$$

Die Operatoren $\partial_{i,j}$ sind untereinander vertauschbar, d.h. sie erzeugen einen kommutativen Ring in der Algebra aller Operatoren. Man kann insbesondere Unterdeterminanten von ∂ betrachten und diese in der p-ten äußeren Potenz zusammenfassen:

$$\partial^{[p]} = (|\partial|_b^a)_{\substack{a,b\subset\{1,\ldots,n\} \\ |a|=|b|=p}}$$

mit $|\partial|_b^a := det\left(\partial_{i,j}\right)_{i\in a, j\in b}$. Da wir für diese Arbeit nur den unkomplizierten Fall $p = 1$ benötigen, können wir auf die Einführung des formalen Apparat der multilinearen Algebra in diesem Kontext verzichten. Bei Interesse kann dieser aber in [9, S.205-209] nachgelesen werden.

Wenn wir die Matrix $\partial^{[1]}$ auf eine C^∞-Funktion $f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ anwenden, so ist diese natürlich komponentenweise zu verstehen

$$\partial^{[1]} f = (|\partial|_b^a f).$$

Wir wollen für $\partial^{[1]}$ nachfolgend zwei Rechenregeln nennen und beginnen zunächst mit der Produktformel

Satz 3.3. *[9, Hilfssatz 6.4 für $h = 1$]*
Für die beiden C^∞-Funktionen $f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ gilt

$$\partial^{[1]}(fg) = \left(\partial^{[1]} f\right) g + \left(\partial^{[1]} g\right) f.$$

Als Zweites interessiert uns die Wirkung von $\partial^{[1]}$ auf Potenzen der Determinante von Y. Auch hier interessiert uns nur der einfache Fall erster Ableitungen.

Satz 3.4. *[9, Satz 6.9, für $h = 1$]*
Es gilt

$$\partial^{[1]}\, det(Y)^\alpha = \alpha \cdot det(Y)^\alpha \cdot Y^{-1}.$$

Auf beide Resultate werden wir später zurückgreifen.

Abschließend sei noch angemerkt, dass man auch die, aus den komplexen

Ableitungen gebildete, Operatorenmatrix

$$\partial := (\partial_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \qquad\qquad \partial_{i,j} = \tfrac{1}{2}\,(1+\delta_{i,j})\,\tfrac{\partial}{\partial z_{i,j}}$$

betrachten kann und sich die, im reellen bewiesenen Resultate, auf den komplexen Fall übertragen [9, S.215].

3.3 Differentialoperator - G. Shimura

Dieser Abschnitt dient der Einführung eines Maas-Shimura Differentialoperators aus der Arbeit von G. Shimura, der in Kapitel 5 zur Konstruktion holomorpher Differentialoperatoren verwendet wird. Die hierfür benötigten Notationen und Grundlagen, den Differentialoperator selbst sowie seine - für uns relevanten - Eigenschaften werden aus [19, Kapitel III] wiedergegeben, daher wird auf Beweise in diesem Abschnitt größtenteils verzichtet.

Einleitung Zunächst werden wieder einige Bezeichnungen sowie etwas Darstellungstheorie von $GL(n,\mathbb{C})$ benötigt. Mit ρ bezeichnen wir wieder eine Darstellung $\rho : GL(n,\mathbb{C}) \to GL(X)$ der Gruppe $GL(n,\mathbb{C})$.

Es sei

$$T := Sym_n(\mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{C}^{n\times n} |\ X = X^t\}$$

die Menge der symmetrischen $n \times n$-Matrizen.

Es seien X, Y endlich-dimensionale $\mathbb{C}$-Vektorräume und $p \in \mathbb{N}_0$. Dann bezeichnet

$$Ml_p(Y,X) := \{f : Y \times \cdots \times Y \to X |\ f\ ist\ multilinear\}$$

den Vektorraum aller $\mathbb{C}$-multilinearer Abbildungen von $Y \times \cdots \times Y$ (p Kopien) nach X und

$$S_p(Y,X) := \{f : Y \to X |\ f\ ist\ polynomial\ ,\ homogen\ Grad\ p\}$$

den Vektorraum aller homogener polynomialer Abbildungen von Y nach X von Grad p. Für Grad 1 ist daher $S_1(Y,X) = Ml_1(Y,X) = Hom_{\mathbb{C}}(Y,X)$ der Vektorraum aller $\mathbb{C}$-linearer Abbildungen von Y nach X. Des Weiteren setzen wir $S_0(Y,X) = Ml_0(Y,X) = X$ und $S_p(Y) = S_p(Y,\mathbb{C})$.

Ausgangspunkt sei nun eine Darstellung $\rho : GL(n,\mathbb{C}) \to GL(X)$. Wir definieren eine neue Darstellung (vgl. [19, (12.7a) für p=1])

$$\rho \otimes \tau : GL(n,\mathbb{C}) \to GL(Ml_1(T,X))$$

durch

$$(\rho \otimes \tau)(g)(h)(u) = \rho(g)(h(g^t ug))$$

wobei $g \in GL(n,\mathbb{C})$ sowie $h \in Ml_1(T,X) = S_1(T,X)$ und $u \in T$.

Einen Spezialfall der obigen Darstellung erhält man wenn ρ die triviale Darstellung ist und $X = \mathbb{C}$. Dann bekommt man eine Darstellung τ von $GL(n,\mathbb{C})$ auf $S_1(T)$ durch

$$\tau(g)(h)(u) = h(g^t ug)$$

mit $g \in GL(n,\mathbb{C})$ sowie $h \in S_1(T)$ und $u \in T$.

An dieser Stelle sei noch ein Resultat zu $S_1(T,X)$ zu erwähnen.

Satz 3.5. *[19, S.94, (12.19)]*
Wir können $S_1(T,X)$ mit $S_1(T) \otimes X$ identifizieren durch

$$(h \otimes x)(u) = h(u)x$$

für $h \in S_1(T)$, $x \in X$ und $u \in T$.

Darüber hinaus halten wir folgende Beobachtung fest:

Beobachtung 3.6.
Man kann $S_1(T)$ mit Sym^2, $GL(n,\mathbb{C})$ äquivariant, identifizieren.

Diese Beobachtung werden wir am Ende des Abschnittes beweisen.

Differentialoperator Sei ρ bzw. ρ' eine Darstellung $\rho : GL(n,\mathbb{C}) \to GL(X)$ bzw. $\rho' : GL(n,\mathbb{C}) \to GL(X')$ und $\mathcal{N}_\rho(\mathbb{H}_n, X)$ bzw. $\mathcal{N}_{\rho'}(\mathbb{H}_n, X')$ der Raum der fast-holomorphen Funktionen. Die Gruppe $Sp(n,\mathbb{R})$ operiert auf $\mathcal{N}_\rho(\mathbb{H}_n, X)$ durch $|_\rho$ (s. [20, Lemma 8.3]). Wie in 3.1 eingeführt, nennen wir einen äquivarianten Differentialoperator

$$\mathcal{M} : \mathcal{N}_\rho(\mathbb{H}_n, X) \to \mathcal{N}_{\rho'}(\mathbb{H}_n, X')$$

mit Polynomen in den Einträgen von Y^{-1} (und holomorphen Ableitungen) einen **Maaß-Shimura Differentialoperator**.

Bemerkung 3.7.
Man kann einen Maaß-Shimura Differentialoperator aber auch allgemeiner auf C^∞-Funktionen definieren. Man betrachtet dann anstelle des Raumes der fast-holomorphen Funtionen $\mathcal{N}_\rho(\mathbb{H}_n, X)$ den Raum $C^\infty_\rho(\mathbb{H}_n, X)$. Dies werden wir im folgenden auch tun.

Shimura konstruiert ihn aus folgendem Differentialoperator ([19, (12.12 a)])

$$D : C^\infty_\rho(\mathbb{H}_n, X) \to C^\infty_{\rho\otimes\tau}(\mathbb{H}_n, S_1(T, X))$$

$$D(f)(u) = \sum_{i,j} u_{i,j} \frac{\partial f}{\partial z_{i,j}}$$

mit $1 \leq i \leq j \leq n$ und $\frac{n(n+1)}{2}$ Möglichkeiten ein Index-Paar i, j zu bilden. Außerdem ist $z \in \mathbb{H}_n$ sowie $u \in T = Sym_n(\mathbb{C}^{n\times n})$. Df ist damit Element von $C^\infty_{\rho\otimes\tau}(\mathbb{H}_n, S_1(T, X))$, wenn $f \in C^\infty_\rho(\mathbb{H}_n, X)$.

Beispiel 3.8.
Für $n = 2$ lautet der Operator:

$$D(f)(u) = u_{1,1} \frac{\partial f}{\partial z_{1,1}} + u_{1,2} \frac{\partial f}{\partial z_{1,2}} + u_{2,2} \frac{\partial f}{\partial z_{2,2}}.$$

Nun fehlt uns noch eine weitere Definition sowie die Äquivarianzeigenschaft des Differentialoperators. Hierfür benötigen wir folgenden

Satz 3.9. *[19, (12.18 & 12.10, e=1)]*
Für $\rho : GL(n, \mathbb{C}) \to GL(X)$ und eine $\mathbb{C}^\infty$-Funktion $f : \mathbb{H}_n \to X$ definiert man nun ein $D_\rho f \in \mathbb{C}^\infty_{\rho\otimes\tau}(\mathbb{H}_n, S_1(T, X))$ durch

$$D_\rho(f)(u) := \rho(Y)^{-1} D\left[\rho(Y)f\right](u).$$

Für $M \in Sp(n, \mathbb{R})$ erfüllt der Operator

$$D_\rho(f \mid_\rho M) = D_\rho(f) \mid_{\rho\otimes\tau} M.$$

Abschließend benötigen wir noch folgendes

Lemma 3.10. *[19, 13.17. für e=1]*
Seien $\rho : GL(n,\mathbb{C}) \to GL(X)$ und $\sigma : GL(n,\mathbb{C}) \to GL(Y)$ zwei Darstellungen von $GL(n,\mathbb{C})$ und sei $f \in C^\infty_\rho(\mathbb{H}_n, X)$ und $g \in C^\infty_\sigma(\mathbb{H}_n, Y)$. Dann gilt

$$D_{\rho\otimes\sigma}\left(f\otimes g\right) = D_\rho\left(f\right)\otimes g + f\otimes D_\sigma\left(g\right). \tag{3.6}$$

Damit wäre der Differentialoperator beschrieben und wir kommen noch einmal zurück zur Beobachtung 3.6, deren Beweis noch aussteht.

Behauptung: Man kann $S_1(T)$ mit Sym^2, $GL(n,\mathbb{C})$-äquivariant, identifizieren.

Warum ist diese Beobachtung überhaupt von Interesse für uns? Wir wissen, dass $D(f)$ ein Element von $\mathbb{C}^\infty_{\rho\otimes\tau}(\mathbb{H}_n, S_1(T,X))$ ist. Wir schauen somit auf eine Darstellung $\rho\otimes\tau$. Wir interessieren uns für eine multiplizitätenfreie Zerlegung dieses Tensorproduktes und für $\rho\otimes Sym^2$ haben wir eine solche - mit der Regel von Pieri - sogar schon kennengelernt. Um Sym^2 zu beschreiben, müssen wir demnach von den $u_{i,j}$ aus T zu Polynomen von Grad zwei übergehen. Wir haben somit zwei Realisierungen, die der symmetrischen Matrizen benötigen wir aufgrund von G. Shimuras Theorie und die Realisierung in Termen des Raumes der homogenen Polynome benötigen wir, um die Regel von Pieri anwenden zu können.

Beweis. (Beobachtung 3.6)
Zunächst sei $S_1(T) \cong T$. Eine Identifizierung ψ von T mit Sym^2 im Fall $GL(n,\mathbb{C})$ ist gegeben durch

$$\psi : \begin{cases} T \to \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_2 \\ u \mapsto xux^t \end{cases}$$

mit $x = (x_1,\ldots,x_n)$. Die Identifizierung erhalten wir durch

$$\left(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j\ldots,x_n\right)\begin{pmatrix} u_{1,1} & \ldots & u_{1,i} & \ldots & u_{1,j} & \ldots & u_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{1,i} & \ldots & u_{i,i} & \ldots & u_{i,j} & \ldots & u_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ u_{1,j} & \ldots & u_{i,j} & \ldots & u_{j,j} & \ldots & u_{j,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1,n} & \ldots & u_{i,n} & \ldots & u_{j,n} & \ldots & u_{n,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

und ausmultipliziert ist dies gerade die Summe

$$= \sum_{r=1}^{n} u_{r,r} x_r^2 + \sum_{r=1}^{n} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^{n} 2u_{r,s} x_r x_s \tag{3.7}$$

Wir identifizieren also ein $u_{r,r}$ aus T mit dem Polynom x_r^2 ein $u_{r,s}$ aus T mit dem Polynom $2x_r x_s$.

Wir behaupten, dass es sich hierbei gerade um einen äquivarianten Homomorphismus handelt und wollen außerdem nachrechnen, dass wir den Faktor 2 tatsächlich in der Definition von ψ benötigen. Den Beweis erbringen wir für die Erzeugenden von $GL(n, K)$. Dies sind die beiden Elementarmatrizen a) und b), die in Kapitel 2 eingeführt wurden.

Beginnen wir mit der **Elementarmatrix - Fall a)**. Zunächst benötigen wir

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_i & \dots & x_j & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & t_{i,i} & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & t_{i,i}x_i & \dots & x_j & \dots & x_n \end{pmatrix}.$$

Nun wird $t_{i,i}x_i =: x_i^{neu}$ in (3.7) eingesetzt. Dadurch erhält man eine Summe der Gestalt

$$\sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{n} u_{r,r} x_r^2 + u_{i,i}(t_{i,i}x_i)^2 + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{n} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i \\ s \neq r}}^{n} 2u_{r,s} x_r x_s + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{n} 2u_{r,i} x_r (t_{i,i}x_i). \tag{3.8}$$

Andererseits betrachtet man $\psi(gug^t)$ mit $g \in GL(n, K)$ und $u \in T$

$$\psi\left(\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & t_{i,i} & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} & \dots & u_{1,i} & \dots & u_{1,j} & \dots & u_{1,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ u_{1,i} & \dots & u_{i,i} & \dots & u_{i,j} & \dots & u_{i,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ u_{1,j} & \dots & u_{i,j} & \dots & u_{j,j} & \dots & u_{j,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ u_{1,n} & \dots & u_{i,n} & \dots & u_{j,n} & \dots & u_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & t_{i,i} & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Nach Matrizenmultiplikation folgt

$$\psi\left(\begin{pmatrix} u_{1,1} & \dots & t_{i,i}u_{1,i} & \dots & u_{1,j} & \dots & u_{1,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ t_{i,i}u_{1,i} & \dots & t_{i,i}^2 u_{i,i} & \dots & t_{i,i}u_{i,j} & \dots & t_{i,i}u_{i,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ u_{1,j} & \dots & t_{i,i}u_{i,j} & \dots & u_{j,j} & \dots & u_{j,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ u_{1,n} & \dots & t_{i,i}u_{i,n} & \dots & u_{j,n} & \dots & u_{n,n} \end{pmatrix}\right).$$

Durch Anwenden von ψ, also $x(...)x^t$ erhält man die Summe

$$\sum_{\substack{r=1\\r\neq i}}^{n} u_{r,r}x_r^2 + t_{i,i}^2 u_{i,i}x_i^2 + \sum_{\substack{r=1\\r\neq i}}^{n}\sum_{\substack{s=1\\s\neq i\\r\neq s}}^{n} 2u_{r,s}x_r x_s + \sum_{\substack{r=1\\r\neq i}}^{n} 2t_{i,i}u_{r,i}x_r x_i \tag{3.9}$$

(3.8) und (3.9) stimmen also überein. Der Beweis für die Elementarmatrix im Fall a) ist somit abgeschlossen.

Nun folgt die gleiche Vorgehensweise für die **Elementarmatrix - Fall b)**. Zunächst benötigen wir wieder

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_i & \dots & x_j & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & t_{i,j} & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_i & \dots & t_{i,j}x_i + x_j & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

Nun wird $t_{i,j}x_i + x_j =: x_j^{neu}$ eingesetzt in (3.7). Dadurch erhält man

$$\sum_{\substack{r=1\\r\neq i,j}}^{n} u_{r,r}x_r^2 + u_{i,i}x_i^2 + u_{j,j}(t_{i,j}x_i + x_j)^2 + \sum_{\substack{r=1\\r\neq i,j}}^{n}\sum_{\substack{s=1\\s\neq i,j\\r\neq s}}^{n} 2u_{r,s}x_r x_s + \sum_{\substack{r=1\\r\neq i}}^{n} 2u_{r,i}x_r x_i$$
$$+ \sum_{\substack{r=1\\r\neq j}}^{n} 2u_{r,j}x_r(t_{i,j}x_i + x_j) + 2u_{i,j}x_i(t_{i,j}x_i + x_j)$$

Durch weitere Umformung erhält man eine Summe der Form

$$= \sum_{\substack{r=1\\r\neq i,j}}^{n} u_{r,r}x_r^2 + u_{j,j}x_j^2 + x_i^2(u_{i,i} + t_{i,j}^2 u_{j,j} + 2t_{i,j}u_{i,j}) + \sum_{\substack{r=1\\r\neq i}}^{n}\sum_{\substack{s=1\\s\neq i\\r\neq s}}^{n} 2u_{r,s}x_rx_s + \sum_{\substack{r=1\\r\neq i}}^{n} 2x_rx_i(t_{i,j}u_{r,j} + u_{r,i}) \tag{3.10}$$

Andererseits berechnet man wieder $\psi(gug^t)$:

$$\psi\left(\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 1 &&&&&& \\ && \ddots &&&&& \\ &&& 1 &&&& \\ &&&& 1 & t_{i,j} && \\ &&&&& 1 && \\ &&&&&& \ddots & \\ &&&&&&& 1 \\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} & \dots & u_{1,i} & \dots & u_{1,j} & \dots & u_{1,n} \\ \vdots &&&&&& \vdots \\ u_{1,i} & \dots & u_{i,i} & \dots & u_{i,j} & \dots & u_{i,n} \\ \vdots &&&&&& \vdots \\ u_{1,j} & \dots & u_{i,j} & \dots & u_{j,j} & \dots & u_{j,n} \\ \vdots &&&&&& \vdots \\ u_{1,n} & \dots & u_{i,n} & \dots & u_{j,n} & \dots & u_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 1 &&&&&& \\ && \ddots &&&&& \\ &&& 1 &&&& \\ &&&& 1 &&& \\ &&&&& 1 && \\ &&&& t_{j,i} && \ddots & \\ &&&&&&& 1 \\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix}\right)$$

(Es gilt $t_{i,j} = t_{j,i} = t$, der Index gibt nur die Postion des Elementes t an.)

Nach Matrizenmultiplikation folgt

$$\psi\left(\begin{pmatrix} u_{1,1} & \dots & u_{1,i}+tu_{1,j} & \dots & u_{1,j} & \dots & u_{1,n} \\ \vdots &&&&&& \vdots \\ u_{1,i}+tu_{1,j} & \dots & u_{i,i}+tu_{i,j}+t(u_{i,j}+tu_{j,j}) & \dots & u_{i,j}+tu_{j,j} & \dots & u_{i,n}+tu_{j,n} \\ \vdots &&&&&& \vdots \\ u_{1,j} & \dots & u_{i,j}+tu_{j,j} & \dots & u_{j,j} & \dots & u_{j,n} \\ \vdots &&&&&& \vdots \\ u_{1,n} & \dots & u_{i,n}+tu_{j,n} & \dots & u_{j,n} & \dots & u_{n,n} \end{pmatrix}\right)$$

Anwenden von ψ, also $x(...)x^t$ führt zu

$$\sum_{\substack{r=1\\r\neq i}}^{n} u_{r,r}x_r^2 + x_i^2(u_{i,i} + t^2u_{j,j} + 2tu_{i,j}) + \sum_{\substack{r=1\\r\neq i}}^{n}\sum_{\substack{s=1\\s\neq i\\s\neq r}}^{n} 2u_{r,s}x_rx_s + \sum_{\substack{r=1\\r\neq i}}^{n} 2x_rx_i(tu_{r,j} + u_{r,i}) \tag{3.11}$$

Auch in diesem Fall stimmen (3.10) und (3.11) überein. Somit ist der Beweis abgeschlossen. □

3.4 Differentialoperator - S. Böcherer, T. Satoh und T. Yamazaki

Dieser Abschnitt dient dazu, den Differentialoperator aus der gemeinsamen Arbeit von S. Böcherer, T. Satoh und T. Yamazaki einzuführen. Die hierfür benötigten Notationen und Grundlagen, den Differentialoperator selbst, sowie seine - für uns relevanten - Eigenschaften werden aus [2, S.1-4] wiedergegeben. Auf Beweise werden wir daher auch in diesem Abschnitt verzichten. Der Differentialoperator ist für die vorliegende Arbeit von größerer Bedeutung, da er in Kapitel 4 zur Konstruktion holomorpher Differentialoperatoren verwendet wird.

Einleitung Wieder sei ρ eine Darstellung von $GL(n, \mathbb{C})$ mit einem Darstellungsraum W und f eine W-wertige C^∞-Funktion auf $\mathbb{H}_n$. Der Raum dieser Funktionen wird wieder mit der Operation $f \mid_\rho M$ für $M \in Sp(n, \mathbb{R})$ versehen und mit $C_\rho^\infty(\mathbb{H}_n, W)$ bezeichnet. Wenn wir für ρ eine Darstellung $det^k \otimes Sym^l$ wählen, dann schreiben wir $|_\rho$ als $|_{det^k \otimes Sym^l}$ oder platzsparender als $|_{k,l}$. Den Raum $C_\rho^\infty(\mathbb{H}_n, W)$ schreiben wir als $C_{det^k \otimes Sym^l}^\infty(\mathbb{H}_n, W)$ oder $C_{k,l}^\infty(\mathbb{H}_n, W)$.

Für einen Vektorraum W bezeichnen wir mit $W^{(l)}$ das l-te symmetrische Tensorprodukt und identifizieren $W^{(0)}$ mit $\mathbb{C}$. Sei $x = (x_1, \dots, x_n)$ Zeilenvektor bestehend aus n Unbestimmten. Wir setzen $V = \mathbb{C}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}x_n$ und identifizieren $V^{(l)}$ mit $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{(l)}$, wobei der Index (l) für homogene Polynome von Grad l steht. Dann operiert $GL(n, \mathbb{C})$ auf $V^{(l)}$ durch

$$(gv)(x) = det(g)^k v(xg)$$

für $g \in GL(n, \mathbb{C})$ und $v \in V^{(l)}$. Das ist isomorph zu $det^k \otimes Sym^l$ und wir nutzen diese Realisierung. Außerdem identifizieren wir $C^\infty(\mathbb{H}_n, V^{(l)})$ mit $C^\infty(\mathbb{H}_n)[x_1, \dots, x_n]_{(l)}$.

Differentialoperator Sei $Z = (z_{i,j})$ eine Variable auf $\mathbb{H}_n$. Für eine ganze Zahl $l \geq 0$ und eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{H}_n, V^{(l)})$ setzen wir

$$Df = \left(\tfrac{1}{2\pi i}\tfrac{\partial}{\partial Z}f\right)[x]$$

$$Nf = \left(-\tfrac{1}{4\pi}(\operatorname{Im} Z)^{-1}f\right)[x]$$

$$\delta_k f = kNf + Df.$$

Hier sei $\frac{\partial}{\partial Z} = \left(\frac{1+\delta_{ij}}{2}\frac{\partial}{\partial z_{i,j}}\right)_{1\leq i,j\leq n}$, wobei δ_{ij} das Kronecker-Delta bezeichnet und $\operatorname{Im} Z = Y$. Des Weiteren sei $A[x] = xAx^t$.

Df, Nf und $\delta_k f$ sind dann $V^{(l+2)}$-wertige Funktionen und der Differentialoperator erfüllt die folgende Äquivarianzeigenschaft:

Lemma 3.11. *[2, Lemma 2.1]*
Der Operator δ_{k+l} erfüllt

$$(\delta_{k+l}f)\mid_{k,l+2} M = \delta_{k+l}\,(f\mid_{k,l} M)$$

für $f \in C^\infty(\mathbb{H}_n, V^{(l)})$ und $M \in Sp(n,\mathbb{R})$. Insbesondere bildet er $C^\infty_{k,l}(\mathbb{H}_n, V^{(l)})$ auf $C^\infty_{k,l+2}(\mathbb{H}_n, V^{(l+2)})$ ab. (Außerdem ist der Operator iterierbar).

Somit haben wir nun alles, was wir benötigen, um mit der Konstruktion holomorpher Differentialoperatoren beginnen zu können. Dennoch möchten wir mit folgendem Abschnitt noch einen kleinen Umweg gehen und eine wissenswerte Verbindung dieses Differentialoperators zu dem Operator von G. Shimura festhalten.

3.5 Zusammenhang der Differentialoperatoren

In diesem Abschnitt möchten wir einen interessanten Zusammenhang zwischen dem Differentialoperator von Shimura (aus Abschnitt 3.3) und dem Differentialoperator Satoh-Yamazaki-Böcherer (aus Abschnitt 3.4) herstellen.

Grundlegend ist folgende

Beobachtung 3.12.
Es gibt einen explizit angebbaren nichttrivialen äquivarianten Homomorphismus

$$\psi(\mu,\nu) : Sym^{\mu} \otimes Sym^{\nu} \to Sym^{\mu+\nu}$$

gegeben durch

$$\begin{aligned}\left(\sum a_{r_1,\dots,r_n} x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}\right) &\otimes \left(\sum b_{s_1,\dots,s_n} x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n}\right) \\ &\mapsto \left(\sum a_{r_1,\dots,r_n} x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}\right) \cdot \left(\sum b_{s_1,\dots,s_n} x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n}\right).\end{aligned}$$

Somit kann man $\psi(\mu,\nu)$ als Beschreibung der höchsten Pieri-Komponente verstehen (Regel von Pieri - Satz 2.14.).

Satz 3.13.
Der Operator Satoh-Yamazaki-Böcherer beschreibt die (irreduzible) Pieri- Komponente in Shimuras Differentialoperator D_ρ für $\rho = Sym^{\mu}$.

Beweis.
Für den Spezialfall $\rho = Sym^{\mu}$ bildet der Shimura Differentialoperator D_ρ Funktionen f mit Werten in $\mathbb{C}^{\infty}_{Sym^{\mu}}(\mathbb{H}_n, V)$ ab auf Funktionen $D_\rho(f)$ mit Werten in $\mathbb{C}^{\infty}_{Sym^{\mu}\otimes Sym^2}(\mathbb{H}_n, V)$. (Dies ergibt sich durch Beobachtung 3.6 und Satz 3.5). Betrachten wir nun

$$\psi(\mu,2) \circ \underbrace{D_\rho(f).}_{\rho(Y)^{-1}\sum u_{u,v}\frac{\partial}{\partial z_{u,v}}[\rho(Y)f]}$$

Mit $\rho = Sym^\mu$ ist dies von der Gestalt

$$\psi(\mu, 2) \circ \Big(Sym^\mu(Y)^{-1} \sum_{1 \le u \le v \le n} u_{u,v} \tfrac{\partial}{\partial z_{u,v}} \left[Sym^\mu(Y) f\right]\Big).$$

Mittels der Identifikation aus Bemerkung 3.6. schreiben wir

$$\psi(\mu, 2) \circ \Big(Sym^\mu(Y)^{-1} \sum_{1 \le u \le v \le n} e_{u,v}\, x_u x_v \tfrac{\partial}{\partial z_{u,v}} \left[Sym(Y)^\mu f\right]\Big)$$

mit e bzw. $e_{u,v} = 2$ falls $u \neq v$ und $e_{u,v} = 1$ falls $u = v$. Nach Anwenden der Produktregel erhalten wir

$$\begin{aligned}\psi(\mu, 2) \circ \Big[\Big(Sym^\mu(Y)^{-1} &\sum_{1 \le u \le v \le n} e\, x_u x_v \tfrac{\partial}{\partial z_{u,v}} Sym^\mu(Y)\Big) f \\ &+ \Big(Sym^\mu(Y)^{-1} \sum_{1 \le u \le v \le n} e\, x_u x_v \tfrac{\partial}{\partial z_{u,v}} f\Big) Sym^\mu(Y)^{-1}\Big]\end{aligned}$$

und schließlich

$$\psi(\mu, 2) \circ \Big[\underbrace{\Big(Sym^\mu(Y)^{-1} \sum_{1 \le u \le v \le n} e\, x_u x_v \tfrac{\partial}{\partial z_{u,v}} Sym^\mu(Y)\Big) f}_{nicht-holomorpher\ Anteil} + \underbrace{\sum_{1 \le u \le v \le n} e\, x_u x_v \tfrac{\partial}{\partial z_{u,v}} f}_{\substack{holomorpher \\ Anteil}}\Big].$$

Betrachten wir nun zunächst den holomorphen Anteil und versuchen diesen besser zu verstehen. Zwei Punkte sind hier zu erwähnen:

- Die Funktion f, genauer $f : \mathbb{H}_n \to V_\rho$ mit $\rho = Sym^\mu$, können wir auffassen als etwas mit Werten in Sym^μ. Somit ist f von der Gestalt

  $$\sum_{m_1 + \cdots + m_{2n} = \nu} f_{1 \ldots 2n}\ x_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot x_{2n}^{m_{2n}}.$$

  (Darauf werden wir in Kapitel 4, Bez. 4.6., nochmal eingehen.)

- Die Elemente $x_u x_v$ sind Bestandteile des Shimura Differentialoperators.

Wir erinnern uns aus Abschnitt 3.3 daran, dass wir den Wertebereich des Differentialoperators von Shimura als Tensorprodukt interpretieren können. Wenden wir nun also $\psi(\mu, 2)$ auf den obigen holomorphen Anteil des

Shimura Operators an, so entspricht dieser genau dem holomorphen Anteil des Differentialoperators von S. Böcherer, T. Satoh & T. Yamazaki aus Abschnitt 3.4.

In einem nächsten Schritt betrachten wir nun die Differenz des Differentialoperators von S. Böcherer, T. Satoh & T. Yamazaki und des Audrucks $\psi(\mu, 2) \circ D_\rho(f)$.

Da wir gerade gesehen haben, dass die holomorphen Anteile gleich sind, hat diese Differenz demnach keine holomorphen Ableitungen mehr. Betrachten wir nun also, was beim Bilden einer solchen Differenz, noch übrig bleibt:

$$\begin{aligned}\psi(Y)(f \mid_\mu M)(Z) &= \psi(Y)\rho_\mu(CZ+D)^{-1}f(M\langle Z\rangle)\\ &= \rho_{\mu+2}(CZ+D)^{-1}\psi(M\langle Z\rangle)f(M\langle Z\rangle).\end{aligned}$$

Wir folgen [9, S.69] und nehmen an, dass $Z = i1_n$, so dass M im Stabilisator von $i1_n$ liegt. Die Zuordnung

$$M = \left(\begin{smallmatrix} A & -B \\ B & A \end{smallmatrix}\right) \mapsto U := A + iB$$

definiert dann einen Isomorphismus $Sp(n, \mathbb{R}) \cap O(2n, \mathbb{R}) \rightarrow U(n)$, wobei $U(n)$ die unitäre Gruppe bezeichnet. Für uns ergibt sich somit

$$\psi(i1_n)\rho_\mu(Ci+D)^{-1}f(i1_n) = \rho_{\mu+2}(Ci+D)^{-1}\psi(i1_n)f(i1_n)$$

mit $\rho(Ci + D)$ als Darstellung der unitären Gruppe $U(n, \mathbb{C})$.

Aus der Darstellungstheorie wissen wir, dass die Restriktion einer irreduziblen Darstellungen von $GL(n, \mathbb{C})$ auf $U(n, \mathbb{C})$ irreduzibel bleibt. Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus H. Weyls „Unitärem Trick“ (s. [12, § 3.3.4]).

Außerdem ist ψ ein $U(n, \mathbb{C})$-äquivarianter Homomorphismus zwischen Sym^μ und $Sym^{\mu+2}$ und nach dem Lemma von Schur (s. [11, S.7]) folgt somit

$$\psi(i1_n) = 0.$$

Folglich ist auch

$$\psi(Y) = 0.$$

Denn wählen wir M von der Gestalt $\begin{pmatrix} A^t & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$ so bekommt man zunächst

$$\psi(Y)\rho_\mu(A^{-1})^{-1}f(A^tZA) = \rho_{\mu+2}(A^{-1})^{-1}\psi(A^tZA)f(A^tZA).$$

Speziell für $f(Z) = v = const$ und $Z = i1_n$ gibt das

$$0 = \rho_{\mu+2}(A^{-1})^{-1}\psi(A^tAi)(v)$$

und dann ist auch $\psi(A^tAi)(v) = 0$ für alle v, also $\psi(A^tAi) = 0$. Jedes Y ist aber von der Gestalt $Y = A^tA$ mit einem $A \in GL(n, \mathbb{R})$.

Wir können den Differentialoperator Satoh-Yamazaki-Böcherer jetzt bereits als holomorphes Bild eines Shimura-Differentialoperators beschreiben.

Darüber hinaus wissen wir aber sogar, nach der Regel von Pieri, dass $Sym^{\mu+2}$ in $Sym^\mu \otimes Sym^2$ genau einmal vorkommt. Die Regel von Pieri dürfen wir anwenden, da wir mit Sym^μ und Sym^2 gerade zwei Darstellungen haben, die beide durch einzeilige Diagramme beschrieben werden können. Mit $\mu = (\mu, 0, ..., 0)$ und $\nu = (2, 0, ..., 0)$ ergeben sich somit nach der Regel von Pieri die möglichen Diagramme zu $\lambda = (\mu + 2, 0, ..., 0)$ (entspricht gerade $Sym^{\mu+2}$) sowie $\lambda = (\mu + 1, 1, 0, ..., 0)$ und $\lambda = (\mu, 2, 0, 0, ..., 0)$ (diese beiden interessieren uns im Moment nicht) unter der gewohnten Bedingung $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq ... \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n \geq 0$.

Somit beschreibt der Operator Satoh-Yamazaki-Böcherer die (irreduzible) Pieri-Komponente in Shimuras Differentialoperator D_ρ für $\rho = Sym^\mu$. $\square$

Mit diesem interessanten Zusammenhang endet das Kapitel der Differentialoperatoren und wir fassen nachfolgend noch einmal die wichtigsten Erkenntnisse aus diesem Kapitel zusammen.

Resumé Was sollte man aus diesem Kapitel mitnehmen? In **Abschnitt 3.3** wurde ein nicht-holomorpher und äquivarianter Differentialoperator

$$D : \mathbb{C}_\rho^\infty(\mathbb{H}_n, X) \to \mathbb{C}_{\rho\otimes\tau}^\infty(\mathbb{H}_n, S_1(T, X))$$

eingeführt und definiert durch

$$D(f)(u) := \sum_{1\leq i\leq j\leq n} u_{i,j} \frac{\partial f}{\partial z_{i,j}}$$

sowie

$$D_\rho(f)(u) := \rho(Y)^{-1} D[\rho(Y) f](u).$$

Diesen werden wir in Kapitel 5 zur Konstruktion holomorpher Differentialoperatoren verwenden und uns hauptsächlich für den Fall $\rho = Sym^1 \otimes det^k$ interessieren. Relevant ist außerdem die zu Beginn des Abschnittes definierte Darstellung in $S_1(T, X)$ sowie die Identifizierung mit $S_1(T) \otimes X$ im Anschluss. Ferner wurde die Beobachtung festgehalten, dass man $S_1(T)$ identifizieren kann mit Sym^2.

In **Abschnitt 3.4** wurde ein nicht-holomorpher und äquivarianter Differentialoperator

$$\delta_k : C_{l,k}^\infty(\mathbb{H}_n, V^{(l)}) \to C_{l+2,k}^\infty(\mathbb{H}_n, V^{(l+2)})$$

eingeführt und definiert durch

$$\delta_k f := k\left(-\tfrac{1}{4\pi} Y^{-1} f\right)[x] + \left(\tfrac{1}{2\pi i} \tfrac{\partial}{\partial Z} f\right)[x]\,.$$

Diesen werden wir in dem nun folgenden Kapitel 4 zur Konstruktion holomorpher Differentialoperatoren verwenden.

4 Konstruktion äquivarianter und holomorpher Differentialoperatoren - Vorgehensweise I

In diesem Kapitel werden wir holomorphe und äquivariante Differentialoperatoren konstruieren, ausgehend von dem nicht-holomorphen, äquivarianten Differentialoperator δ_k aus der Arbeit von S. Böcherer, T. Satoh und T. Yamazaki ([2]), der in Kapitel 3 eingeführt wurde.

Es werden im Folgenden auf zwei Arten neue Differentialoperatoren konstruiert. Zunächst wird im ersten Abschnitt 4.1 die Differenz

$$\boxed{k \cdot \delta_{k+l}\ (g \cdot f) - (k+l) \cdot\ \delta_k(f) \cdot g}$$

betrachtet, ausgehend von einem f mit vektorwertigem Automorphiefaktor und einem skalarwertigen g. Wir werden sehen, dass wir auf diese Weise einen bilinearen, holomorphen & äquivarianten Differentialoperator erhalten werden und somit können wir bereits am Ende des Abschnittes ein erstes Ergebnis formulieren.

Auf dieser Konstruktion aufbauend wird in Abschnitt 4.2, durch das Einsetzen einer konkreten Funktion für g, ein linearer (und iterierbarer), holomorpher & äquivarianter Differentialoperator konstruiert. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird der Abschnitt 4.2 in drei Unterabschnitte aufgeteilt. 4.2.1 dient der Entwicklung des Minuenden der Konstruktion, 4.2.2 der Entwicklung des Subtrahenden und in Unterabschnitt 4.2.3 wird der Differentialoperator schließlich vollständig betrachtet und analysiert. Abschließend dient der Abschnitt 4.3 der Veranschaulichung der neu konstruierten Differentialoperatoren mit Hilfe eines Beispiels für den Fall $n = 4$.

4.1 Bilinearer, holomorpher Differentialoperator - Konstruktion

Wir nehmen ein f aus $C^{\infty}_{Sym^{\nu}\otimes det^{k}}(\mathbb{H}_n, V^{(\nu)})$ und g aus $C^{\infty}_{det^{l}}(\mathbb{H}_n, \mathbb{C})$ und betrachten die Differenz

$$\boxed{k \cdot \delta_{k+l}(g \cdot f) - (k+l) \cdot \delta_k(f) \cdot g}$$

Diese Differenz dürfen wir bilden, da es sich hierbei gerade um eine Differenz von Funktionen handelt, die beide Werte im Raum

$$C^{\infty}_{Sym^{\nu+2}\otimes det^{k+l}}(\mathbb{H}_n, V^{(\nu+2)})$$

haben und auf denen die gleiche Operation angewendet wird.

Wir leiten den Abschnitt zunächst mit einer Erinnerung, aus Kapitel 3, ein.

Erinnerung 4.1.
Für eine Variable Z aus $\mathbb{H}_n$ und ein f aus $\mathbb{C}^{\infty}_{Sym^{\nu}\otimes det^{k}}(\mathbb{H}_n, V^{(\nu)})$ wird der Differentialoperator δ_k definiert durch

$$\delta_k f = k\Big(-\tfrac{1}{4\pi}(\operatorname{Im} Z)^{-1} f\Big)\,[x] + \Big(\tfrac{1}{2\pi i}\tfrac{\partial}{\partial Z} f\Big)\,[x]$$

mit $\frac{\partial}{\partial Z} = \left(\frac{1+\delta_{ij}}{2}\frac{\partial}{\partial z_{i,j}}\right)_{1\leq i,j\leq n}$. Hierbei bezeichnet δ_{ij} das Kronecker-Delta und $\operatorname{Im} Z = Y$. Des Weiteren sei $A[x] = xAx^t$ wobei x selbst Zeilenvektor $(x_1, \ldots, x_n)$ ist.

Nun können wir mit der Konstruktion des Differentialoperators beginnen. Wir bilden die Differenz

$$k \cdot \delta_{k+l}(g \cdot f) - (k+l) \cdot \delta_k(f) \cdot g \tag{4.1}$$

Nach dem Einsetzen des Differentialoperators δ aus der Arbeit von S. Böcherer, T. Satoh & T. Yamazaki erhält man:

$$k\Big(\Big(-\tfrac{(k+l)}{4\pi}Y^{-1}(gf)\Big)[x]+\Big(\tfrac{1}{2\pi i}\tfrac{\partial}{\partial Z}(gf)\Big)[x]\Big)-(k+l)\Big(\big(-\tfrac{k}{4\pi}Y^{-1}f\big)[x]+\big(\tfrac{1}{2\pi i}\tfrac{\partial}{\partial Z}f\big)[x]\Big)g.$$

Ein klein wenig mehr Übersichtlichkeit erreicht man durch Multiplikation der Terme mit den Koeffizienten und dies führt zu einer Differenz der Gestalt

$$\Big(-\tfrac{k(k+l)}{4\pi}Y^{-1}(gf)\Big)[x]+\Big(\tfrac{k}{2\pi i}\tfrac{\partial}{\partial Z}(gf)\Big)[x]+\Big(\big(\tfrac{k(k+l)}{4\pi}Y^{-1}f\big)[x]\Big)g-\Big(\big(\tfrac{(k+l)}{2\pi i}\tfrac{\partial}{\partial Z}f\big)[x]\Big)g.$$

Man beachte, dass g skalarwertig ist und kann somit direkt erkennen, dass die beiden Imaginärteile von der gleichen Gestalt (mit unterschiedlichen Vorzeichen) sind und somit wegfallen. Übrig bleibt

$$\tfrac{k}{2\pi i}\Big(\tfrac{\partial}{\partial Z}(gf)\Big)[x]-\tfrac{(k+l)}{2\pi i}\Big(\big(\tfrac{\partial}{\partial Z}f\big)\,[x]\Big)g.$$

Nach Anwenden der Produktformel (Abschnitt 3.2, Satz 3.3.) erhält man:

$$\tfrac{k}{2\pi i}\Big(\big(\tfrac{\partial}{\partial Z}g\big)f+\big(\tfrac{\partial}{\partial Z}f\big)g\Big)[x]-\tfrac{(k+l)}{2\pi i}\Big(\big(\tfrac{\partial}{\partial Z}f\big)[x]\Big)g.$$

Zuletzt sieht man noch, dass $\frac{k}{2\pi i}\big(\big(\frac{\partial}{\partial Z}f\big)g[x]\big)$ im Minuend sowie im Subtrahend vorkommt und somit wegfällt. So bleibt schließlich noch eine Differenz der Form

$$\tfrac{k}{2\pi i}\Big(\big(\tfrac{\partial}{\partial Z}g\big)f\Big)[x]-\tfrac{l}{2\pi i}\Big(\big(\tfrac{\partial}{\partial Z}f\big)[x]\Big)g \tag{4.2}$$

stehen. Dies ist unser erster konstruierter Differentialoperator und es ergibt sich folgendes

Erstes Ergebnis Fassen wir die Beobachtungen dieses Abschnittes zusammen. Nach Einsetzten des Differentialoperators δ in die Differenz (4.1) konnte man erkennen, dass sowohl der Minuend als auch der Subtrahend aus zwei Teilen, einem nicht-holomorphen und einem holomorphen, bestehen. Der Imaginärteil (nicht-holomorpher Teil) beider Seiten war von der gleichen Gestalt und fiel somit vollständig weg. Somit blieben in unserer Konstruktion nur noch holomorphe Anteile übrig und daher ist der konstruierte Differentialoperator **holomorph**.

Des Weiteren ist unser Differentialoperator **äquivariant** bzgl. der symplektischen Gruppe $Sp(n,\mathbb{R})$, da wir die Differenz zweier nicht-holomorpher, äquivarianter Differentialoperatoren δ betrachten (vgl. Abschnitt 3.4, Lemma 3.11.) und die Äquivarianz hierbei natürlich erhalten bleibt.

Bleibt noch die Frage zu klären, ob unsere Konstruktion (4.2) ungleich Null ist. Für ein beliebiges g erkennt man direkt, dass die Differenz nicht Null werden kann. Auf der rechten Seite stehen die holomorphen Ableitungen von f und auf der linken Seite kommen keine Ableitungen von f vor, sondern nur f selbst. Für $k, l \neq 0$ kann die Differenz somit im allgemeinen nicht Null werden und somit formulieren wir folgendes

Theorem 4.2.
Es wird durch

$$[*,*] : \begin{cases} \mathcal{H}_{Sym^{\nu}\otimes det^{k}}(\mathbb{H}_n, V^{(\nu)}) \times \mathcal{H}_{det^{l}}(\mathbb{H}_n, \mathbb{C}) \to \mathcal{H}_{Sym^{\nu+2}\otimes det^{k+l}}(\mathbb{H}_n, V^{(\nu+2)}) \\ \\ \qquad (f,g) \quad \mapsto \quad \frac{k}{2\pi i}\Big(\big(\frac{\partial}{\partial Z} g\big) f\Big)[x] - \frac{l}{2\pi i}\Big(\big(\frac{\partial}{\partial Z} f\big)[x]\Big) g \end{cases}$$

ein bilinearer und holomorpher Differentialoperator gegeben, der für alle Funktionen $f \in \mathcal{H}_{Sym^{\nu}\otimes det^{k}}(\mathbb{H}_n, V^{(\nu)})$ und $g \in \mathcal{H}_{det^{l}}(\mathbb{H}_n, \mathbb{C})$ die Äquivarianzeigenschaft

$$\big[f \mid_{Sym^{\nu}\otimes det^{k}} M, g \mid_{det^{l}} M\big] = \big[f, g\big] \mid_{Sym^{\nu+2}\otimes det^{k+l}} M$$

für $M \in Sp(n,\mathbb{R})$ erfüllt. Die Konstruktion ist Null nur für den Fall $k = l = 0$.

Anmerkung 4.3.
Dieser Typ an Differentialoperator kommt uns natürlich bekannt vor. Es handelt sich hierbei um die, in Kapitel 3 eingeführte, Rankin-Cohen-Klammer.

Nun ist der obige Differentialoperator bilinear und leider nicht iterierbar. Um unsere Chancen zu verbessern einen linearen und iterierbaren Differentialoperator zu konstruieren, werden wir daher im nächsten Abschnitt unsere geforderten Eigenschaften etwas abschwächen. Genauer gesagt werden wir die Äquivarianzforderung auf die Untergruppe $Sp(n,\mathbb{R}) \times Sp(n,\mathbb{R})$ von $Sp(2n,\mathbb{R})$ einschränken. Dies wird unsere Situation deutlich verbessern und uns den Weg zu einem holomorphen, linearen und iterierbaren Differentialoperator ermöglichen.

4.2 Linearer, holomorpher Differentialoperator - Konstruktion

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Frage, wie wir ausgehend vom dem bilinearen Differentialoperator (4.2)

$$\underbrace{\tfrac{k}{2\pi i}\left(\left(\tfrac{\partial}{\partial Z}g\right)f\right)[x]}_{=:\mathbf{L}_\delta} - \underbrace{\tfrac{l}{2\pi i}\left(\left(\tfrac{\partial}{\partial Z}f\right)[x]\right)g}_{=:\mathbf{R}_\delta}$$

einen linearen Differentialoperator gewinnen können. Ausgangspunkt sei wieder $f \in C^\infty_{Sym^\nu \otimes det^k}(\mathbb{H}_{2n}, V^{(\nu)})$ und $g \in C^\infty_{det^l}(\mathbb{H}_{2n}, \mathbb{C})$ (beachte: Grad $2n$), nur dass wir diesmal für g eine konkrete Funktion einsetzen werden. Diese Vorgehensweise wurde bereits im skalarwertigen Fall mit Erfolg von S. Böcherer (s. [3]) umgesetzt und soll nun auch uns zum gewünschten Ergebnis verhelfen.

Zunächst benötigen wir aber noch ein paar Informationen, die von S. Böcherer bereits in [3] behandelt wurden und geben diese im Folgenden wieder. Wie in [3] und [4] bereits behandelt und auch in Kapitel 1 eingeführt, betrachten wir nun die natürliche (diagonale) Einbettung

$$\iota_n : Sp(n,\mathbb{R}) \times Sp(n,\mathbb{R}) \hookrightarrow Sp(2n,\mathbb{R}).$$

Für $M \in Sp(n,\mathbb{R})$ schreiben wir $M^\uparrow$ anstelle von $\iota_n(M, 1_{2n})$.

Des Weiteren zerlegen wir $Z \in \mathbb{H}_{2n}$ in Blockmatrizen der Größe n und verwenden die Bezeichnung

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2^t & Z_4 \end{pmatrix} \text{ mit } Z_1, Z_4 \in \mathbb{H}_n \text{ und } Z_2, Z_2^t \in \mathbb{C}^{(n,n)}.$$

Nun stellen wir uns die folgende Frage.

Was sollte die Funktion g erfüllen? Ausgangspunkt sei der bilineare, holomorphe Differentialoperator $[*,*]$ aus Theorem 4.2. $(\rho, det^l \mapsto \rho^{'})$. Wir möchten einen linearen Differentialoperator

$$\mathcal{D} : C^\infty_\rho(\mathbb{H}_n, V_\rho) \to C^\infty_{\rho^{'}}(\mathbb{H}_n, V_{\rho^{'}})$$

vermöge

$$\mathcal{D}(f) := [\, f,\ \phi\,]$$

erhalten. Wir suchen nach einer holomorphen Funktion $\phi : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ und fordern, dass

$$\mathcal{D}(f \mid_\rho M) \stackrel{!}{=} \mathcal{D}(f) \mid_{\rho^{'}} M$$

für $M \in Sp(n,\mathbb{R}) \times Sp(n,\mathbb{R}) \subset Sp(2n,\mathbb{R})$ erfüllt sein soll, d.h. es soll

$$\underbrace{[\, f \mid_\rho M,\ \phi\,]}_{\substack{=\left[\, f \mid_\rho M\,,\,(\phi \mid_l M^{-1}) \mid_l M\,\right] \\ =\left[\, f\,,\,\phi \mid_l M^{-1}\right]}} \quad \stackrel{!}{=} \quad [\, f,\ \phi\,] \mid_{\rho^{'}} M$$

gelten. Folglich suchen wir nach einer holomorphen Funktion $\phi : \mathbb{H}_{2n} \to \mathbb{C}$, die die Bedingung

$$\phi \mid_l M^{-1} = \phi$$

für alle M aus $Sp(n,\mathbb{R}) \times Sp(n,\mathbb{R})$ erfüllt.

Des Weiteren hängt eine solche Funktion nicht von den Realteilen von Z_1 und Z_4 (und somit auch nicht von Z_1 und Z_4) ab, denn für die Translation $M = \begin{pmatrix} 1_{2n} & \begin{smallmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_4 \end{smallmatrix} \\ 0_{2n} & 1_{2n} \end{pmatrix}$ mit B_1, B_4 aus $Sym_n(\mathbb{R})$ ist

$$\phi\begin{pmatrix} Z_1+B_1 & Z_2 \\ Z_2^t & Z_4+B_4 \end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2^t & Z_4 \end{pmatrix}.$$

Sucht man nun eine Funktion ϕ mit obigen Eigenschaften, die nur noch von Z_2 abhängt, dann bleibt uns für diese nur noch eine Wahl. Somit formulieren wir, wie auch schon S. Böcherer in [3], folgende

Bemerkung 4.4. *[3, S.25, Remark 1]*
Für $l \in \mathbb{Z}$ definieren wir die Funktion

$$\phi_l : \begin{cases} \mathbb{H}_{2n} \to \mathbb{C} \\ Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2^t & Z_4 \end{pmatrix} \mapsto det(Z_2)^l \end{cases}$$

Dann ist ϕ_l eine symmetrische Funktion von Gewicht $-l$ für $Sp(n,\mathbb{R})^\uparrow$ und $Sp(n,\mathbb{R})^\downarrow$, d.h. für alle $M \in Sp(n,\mathbb{R})$ gilt:

$$\phi_l \mid_{-l} M^\uparrow = \phi_l \quad , \quad \phi_l \mid_{-l} M^\downarrow = \phi_l \quad \textit{und} \quad \phi_l(V\langle Z\rangle) = \phi_l(Z)$$

mit $V\langle Z\rangle = Z\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} Z_4 & Z_2' \\ Z_2 & Z_1 \end{pmatrix}$.

Diese Funktion ist sogar - bis auf eine Konstante - eindeutig. Dies möchten wir nachfolgend begründen.

Wir behaupten, dass jede Funktion ψ, die die obigen Eigenschaften erfüllt, von der Gestalt $\psi = c \cdot det^l$ ist, mit einer Konstanten c (diese ist gleich $\psi(1_n)$). Möchten wir nun die Gleichheit zweier holomorpher Funktionen auf $\mathbb{C}^{(n,n)}$ (entspricht der Variablen Z_2 von oben) zeigen, so brauchen wir dies nur auf reellen Matrizen Z zu tun, genauer gesagt auf invertierbaren reellen Matrizen $Z = X \in GL(n,\mathbb{R})$ (s. [10, S.310]). Jetzt hat ψ aber unter

$$\begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} X & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} X^{-t} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{pmatrix}$$

ein Transformationsverhalten und dieses führt zu

$$\psi(X) = \psi(X \cdot 1_n) = det(X)^l \cdot \psi(1_n).$$

Somit sind wir fertig mit unseren Überlegungen zu einer geeigneten Funktion g und können nun nachfolgend die Funktion $\phi_l(Z) := det(Z_2)^l$ für g in unseren bilinearen, holmorphen Differentialoperator (4.2) einsetzen.

4.2.1 Entwicklung von L_δ

In diesem Teilabschnitt wird der Ausdruck

$$\mathbf{L}_\delta := \tfrac{k}{2\pi i}\left(\left(\tfrac{\partial}{\partial Z}g\right)f\right)[x]$$

der Konstruktion (4.2), nach dem Einsetzen der Funktion $det(Z_2)^l$ für g, betrachtet.

Hierzu benötigen wir zunächst noch zwei Bezeichnungen.

Bezeichnung 4.5.
Für $g : \mathbb{H}_{2n} \to \mathbb{C}$ mit $Z \mapsto det(Z_2)^l$ können wir (nach Erinnerung 4.1) die Ableitungen schreiben als

$$\tfrac{\partial}{\partial Z}g = \left(\tfrac{1+\delta_{ij}}{2}\tfrac{\partial}{\partial z_{i,j}}g\right)_{1\leq i,j\leq 2n} = \left(\tfrac{1+\delta_{ij}}{2}\tfrac{\partial}{\partial z_{i,j}}det(Z_2)^l\right)_{1\leq i,j\leq 2n}.$$

Diese partiellen Ableitungen werden mit $\partial^{det}_{i,j}$ bezeichnet.

Bezeichnung 4.6.
Sei $f : \mathbb{H}_{2n} \to V_\rho$ gegeben mit der ν-ten symmetrischen Potenz $\rho = Sym^\nu \otimes det^k$ als Darstellung. Diese können wir mit dem Vektorraum der homogenen Polynome von Grad ν in $2n$ Variablen identifizieren, daher schreiben wir im folgenden für f

$$\sum_{m_1+\cdots+m_{2n}=\nu} f_{1\ldots 2n}\ x_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot x_{2n}^{m_{2n}}.$$

Die Summe wird von nun an mit $\tilde{f}$ bezeichnet.

Nun sind die benötigten Bezeichnungen eingeführt und wir können mit der Entwicklung von $\mathbf{L}_\delta$ beginnen. Den Ausdruck

$$\tfrac{k}{2\pi i}\left(\left(\tfrac{\partial}{\partial Z}g\right)f\right)[x]$$

können wir schreiben als

$$\frac{k}{2\pi i}\left(\begin{pmatrix}\tilde{x_1} & \tilde{x_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial^{det}_{1,1} & \ldots & \partial^{det}_{1,n} & \partial^{det}_{1,n+1} & \ldots & \partial^{det}_{1,2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \partial^{det}_{n,1} & \ldots & \partial^{det}_{n,n} & \partial^{det}_{n,n+1} & \ldots & \partial^{det}_{n,2n}\\ \partial^{det}_{1,n+1} & \ldots & \partial^{det}_{n,n+1} & \partial^{det}_{n+1,n+1} & \ldots & \partial^{det}_{n+1,2n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial^{det}_{1,2n} & \ldots & \partial^{det}_{n,2n} & \partial^{det}_{2n,n+1} & \ldots & \partial^{det}_{2n,2n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x_1}\\ \tilde{x_2}\end{pmatrix}\right)\tilde{f}$$

Hierbei bezeichnet $\begin{pmatrix} \tilde{x_1} & \tilde{x_2} \end{pmatrix}$ die Matrix der Größe $1 \times 2n$ (bzw. den Zeilenvektor) mit $\tilde{x_1} = x_1 \dots x_n$ und $\tilde{x_2} = x_{n+1} \dots x_{2n}$ und $\begin{pmatrix} \tilde{x_1} \\ \tilde{x_2} \end{pmatrix}$ die entsprechende transponierte Matrix der Größe $2n \times 1$ (bzw. den Spaltenvektor).

Die partiellen Ableitungen der Funktion $det(Z_2)^l$ auf den Diagonalblöcken Z_1 und Z_4 sind null und somit ergibt sich für $\mathbf{L}_\delta$ folgender Ausdruck:

$$\frac{k}{2\pi i} \left(\begin{pmatrix} \tilde{x_1} & \tilde{x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \partial^{det}_{1,n+1} & \dots & \partial^{det}_{1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \partial^{det}_{n,n+1} & \dots & \partial^{det}_{n,2n} \\ \partial^{det}_{1,n+1} & \dots & \partial^{det}_{n,n+1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^{det}_{1,2n} & \dots & \partial^{det}_{n,2n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x_1} \\ \tilde{x_2} \end{pmatrix} \right) \tilde{f}.$$

Nach Matrizenmultiplikation erhält man

$$\frac{k}{2\pi i} \Big(\partial^{det}_{1,n+1} x_1 x_{n+1} + \dots + \partial^{det}_{1,2n} x_1 x_{2n} + \dots + \partial^{det}_{n,n+1} x_{n+1} x_n + \dots + \partial^{det}_{n,2n} x_{2n} x_n$$
$$+ \partial^{det}_{1,n+1} x_1 x_{n+1} + \dots + \partial^{det}_{n,n+1} x_n x_{n+1} + \dots + \partial^{det}_{1,2n} x_1 x_{2n} + \dots + \partial^{det}_{n,2n} x_n x_{2n} \Big) \tilde{f}.$$

Die doppelten Einträge der Summe können zusammengefasst werden

$$\frac{k}{2\pi i} \Big(\left(2\, \partial^{det}_{1,n+1}\right) x_1 x_{n+1} + \dots + \left(2\, \partial^{det}_{n,n+1}\right) x_n x_{n+1}$$
$$+ \dots + \left(2\, \partial^{det}_{1,2n}\right) x_1 x_{2n} + \dots + \left(2\, \partial^{det}_{n,2n}\right) x_n x_{2n} \Big) \tilde{f}$$

und schließlich, kurz und übersichtlich, kann $\mathbf{L}_\delta$ in folgender Form ausgedrückt werden:

$$\frac{k}{2\pi i} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n+1}^{2n} \left(2\, \partial^{det}_{i,j}\right) \; x_i x_j \right) \tilde{f}.$$

Bemerkung 4.7.
Da die Ableitungen auf der Diagonale null sind, haben wir in der obigen Summe nur noch partielle Ableitungen $\partial^{det}_{i,j}$ mit $i \neq j$ und daher ist

$$2\, \partial^{det}_{i,j} = \partial^{det}_{i,j} + \partial^{det}_{i,j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z_{i,j}} det(Z_2)^l + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z_{i,j}} det(Z_2)^l = \frac{\partial}{\partial z_{i,j}} det(Z_2)^l \, .$$

Mit Hilfe der Bemerkung 4.7. erhalten wir für $\mathbf{L}_\delta$ den Ausdruck

$$\tfrac{k}{2\pi i}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{2n}\left(\tfrac{\partial}{\partial z_{i,j}}det(Z_2)^l\right)\ x_i x_j\right)\tilde{f}.$$

Damit ist die linke Seite fast beschrieben. Es fehlt nur noch die Berechnung der partiellen Ableitungen von $det(Z_2)^l$. Diese Ableitungen wollen wir nun nachfolgend genauer betrachten.

Bemerkung 4.8.
Mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatz (Entwicklung nach der i-ten Zeile) kann die Determinante einer $n \times n$-Matrix Z_2 geschrieben werden als

$$det(Z_2)^l = \left(\sum_{j=1}^{n}(\text{-}1)^{i+j}\cdot z_{i,j}\cdot det(Z_{i,j})\right)^l$$

wobei $Z_{i,j}$ die $(n-1)\times(n-1)$ Untermatrix von Z_2 ist, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. $(\text{-}1)^{i+j}$ bezeichnet den Vorzeichenfaktor und $z_{i,j}$ den Wert der i-ten Zeile und j-ten Spalte. Für die Ableitung ergibt sich daher

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial}{\partial z_{i,j}}det(Z_2)^l &= \tfrac{\partial}{\partial z_{i,j}}\left(\sum_{j=1}^{n}(\text{-}1)^{i+j}\cdot z_{i,j}\cdot det(Z_{i,j})\right)^l\\
&= l\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}(\text{-}1)^{i+j}\cdot z_{i,j}\cdot det(Z_{i,j})\right)^{l-1}\cdot\big((\text{-}1)^{i+j}\cdot det(Z_{i,j})\big)\\
&= l\cdot det(Z_2)^{l-1}\cdot\big((\text{-}1)^{i+j}\cdot det(Z_{i,j})\big)\,.
\end{aligned}$$

Setzt man das Ergebnis der Bemerkung 4.8. in $\mathbf{L}_\delta$ ein, so erhält man schließlich den Ausdruck

$$\tfrac{k\,l}{2\pi i}\cdot det(Z_2)^{l-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{2n}\big((\text{-}1)^{i+j}det(Z_{i,j})\big)\cdot x_i x_j\right)\tilde{f}. \tag{4.3}$$

Somit ist $\mathbf{L}_\delta$ beschrieben.

4.2.2 Entwicklung von R_δ

In diesem Teilabschnitt wird der Ausdruck

$$\mathbf{R}_\delta := \tfrac{l}{2\pi i}\left(\left(\tfrac{\partial}{\partial Z} f\right)[x]\right) g$$

der Konstruktion (4.2), nach dem Einsetzen der Funktion $det(Z_2)^l$ für g, betrachtet.

Hierzu wird zunächst wieder eine Bezeichnung eingeführt.

Bezeichnung 4.9.
Es sei $f : \mathbb{H}_{2n} \to V_\rho$ mit $\rho = Sym^\nu \otimes det^k$ und analog zu Bezeichnung 4.5. schreiben wir die Ableitungen als

$$\left(\tfrac{\partial}{\partial Z}\tilde{f}\right) = \left(\tfrac{1+\delta_{ij}}{2}\tfrac{\partial}{\partial z_{i,j}}\tilde{f}\right)_{1\leq i,j\leq 2n}.$$

Diese partiellen Ableitungen werden im Folgenden mit $\partial_{i,j}^{\tilde{f}}$ bezeichnet.

Analog zur Vorgehensweise in vorigem Abschnitt wird nun $\mathbf{R}_\delta$ entwickelt. Wir können

$$\tfrac{l}{2\pi i}\left(\left(\tfrac{\partial}{\partial Z} f\right)[x]\right)\cdot g$$

in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{l}{2\pi i}\left(\begin{pmatrix} \tilde{x_1} & \tilde{x_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_{1,1}^{\tilde{f}} & \cdots & \partial_{1,n}^{\tilde{f}} & \partial_{1,n+1}^{\tilde{f}} & \cdots & \partial_{1,2n}^{\tilde{f}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_{n,1}^{\tilde{f}} & \cdots & \partial_{n,n}^{\tilde{f}} & \partial_{n,n+1}^{\tilde{f}} & \cdots & \partial_{n,2n}^{\tilde{f}} \\ \partial_{1,n+1}^{\tilde{f}} & \cdots & \partial_{n,n+1}^{\tilde{f}} & \partial_{n+1,n+1}^{\tilde{f}} & \cdots & \partial_{n+1,2n}^{\tilde{f}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{1,2n}^{\tilde{f}} & \cdots & \partial_{n,2n}^{\tilde{f}} & \partial_{2n,n+1}^{\tilde{f}} & \cdots & \partial_{2n,2n}^{\tilde{f}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x_1} \\ \tilde{x_2}\end{pmatrix}\right) det(Z_2)^l$$

Wieder bezeichnet $\left(\begin{smallmatrix} \tilde{x_1} & \tilde{x_2}\end{smallmatrix}\right)$ den Zeilenvektor mit $\tilde{x_1} = x_1 \ldots x_n$ und $\tilde{x_2} = x_{n+1}\ldots x_{2n}$ und $\left(\begin{smallmatrix} \tilde{x_1} \\ \tilde{x_2}\end{smallmatrix}\right)$ die Transponierte bzw. den entsprechenden Spaltenvektor.

Nach Matrizenmultiplikation erhält man für $\mathbf{R}_\delta$:

$$\frac{l \cdot det(Z_2)^l}{2\pi i}\Big(x_1^2\partial_{1,1}^{\tilde f} + \ldots + x_1x_n\partial_{n,1}^{\tilde f} + x_1x_{n+1}\partial_{1,n+1}^{\tilde f} + \ldots + x_1x_{2n}\partial_{1,2n}^{\tilde f} + \ldots +$$
$$x_nx_1\partial_{1,n}^{\tilde f} + \ldots + x_n^2\partial_{n,n}^{\tilde f} + x_nx_{n+1}\partial_{n,n+1}^{\tilde f} + \ldots + x_nx_{2n}\partial_{n,2n}^{\tilde f} + \ldots +$$
$$x_1x_{n+1}\partial_{1,n+1}^{\tilde f} + \ldots + x_nx_{n+1}\partial_{n,n+1}^{\tilde f} + x_{n+1}^2\partial_{n+1,n+1}^{\tilde f} + \ldots + x_{2n}x_{n+1}\partial_{2n,n+1}^{\tilde f} +$$
$$x_1x_{2n}\partial_{1,2n}^{\tilde f} + \ldots + x_nx_{2n}\partial_{n,2n}^{\tilde f} + x_{n+1}x_{2n}\partial_{n+1,2n}^{\tilde f} + \ldots + x_{2n}^2\partial_{2n,2n}^{\tilde f}\Big).$$

Zusammengefasst ergibt sich somit für $\mathbf{R}_\delta$ die Gestalt

$$\frac{l}{2\pi i} \cdot det(Z_2)^l \cdot \Bigg(\underbrace{\sum_{i=1}^{2n} x_i^2 \overbrace{\frac{\partial}{\partial z_{i,i}}\tilde f}^{\partial_{i,i}^{\tilde f}}}_{(Ableitungen\ der\ Diagonale)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{2n} x_ix_j \overbrace{\frac{\partial}{\partial z_{i,j}}\tilde f}^{2\partial_{i,j}^{\tilde f}}}_{(Ableitungen\ aus\ Z_2\ und\ Z_2^t)}$$
$$+ \underbrace{\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_{i,j}}\tilde f + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_{j,i}}\tilde f\right)}_{(Ableitungen\ aus\ Z_1\ ohne\ Diagonale)} \tag{4.4}$$
$$+ \underbrace{\sum_{n+1\le i<j\le 2n} x_ix_j\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_{i,j}}\tilde f + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_{j,i}}\tilde f\right)}_{(Ableitungen\ aus\ Z_4\ ohne\ Diagonale)}\Bigg)$$

(Anmerkung: Damit es zu keiner Verwechslung kommt sei erwähnt, dass die Nummerierung (4.4) sich auf den gesamten Ausdruck $\mathbf{R}_\delta$ bezieht und nicht nur auf die zweite Zeile.)

Somit ist $\mathbf{R}_\delta$ beschrieben und wir können nun den gesamten Differentialoperator betrachten.

4.2.3 Die Differenz $(\mathbf{L}_\delta - \mathbf{R}_\delta)$

In diesem Unterabschnitt betrachten wir nun schließlich die gesamte Differenz

$$\underbrace{\tfrac{k}{2\pi i}\big(\big(\tfrac{\partial}{\partial Z}g\big)f\big)[x]}_{\mathbf{L}_\delta\ (4.3)} - \underbrace{\tfrac{l}{2\pi i}\big(\big(\tfrac{\partial}{\partial Z}f\big)[x]\big)g}_{\mathbf{R}_\delta\ (4.4)}.$$

Man erhält einen Operator der Gestalt

$$\begin{aligned}
&\tfrac{kl}{2\pi i}\cdot det(Z_2)^{l-1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{2n} x_ix_j\cdot\big((-1)^{i+j}det(Z_{i,j})\big)\right)\tilde{f}\\
&-\tfrac{l}{2\pi i}\cdot det(Z_2)^{l}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\left(\tfrac{\partial}{\partial z_{i,i}}\tilde{f}\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{2n} x_ix_j\ \left(\tfrac{\partial}{\partial z_{i,j}}\tilde{f}\right)\right.\\
&\qquad+\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j\left(\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial z_{i,j}}\tilde{f}+\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial z_{j,i}}\tilde{f}\right)\\
&\qquad\left.+\sum_{n+1\le i<j\le 2n} x_ix_j\left(\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial z_{i,j}}\tilde{f}+\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial z_{j,i}}\tilde{f}\right)\right)
\end{aligned}\tag{4.5}$$

Dies ist unser zweiter konstruierter Differentialoperator $\mathcal{D}$ und wir formulieren ein

Zweites Ergebnis Fassen wir die Beobachtungen dieses Abschnittes zusammen. Das Einsetzen der Funktion $\phi_l(Z) := det(Z_2)^l$ für g in den Differentialoperator (4.2) hat uns einen linearen Differentialoperator (4.5)

$$\mathcal{D} := \big[\,*\,, det(Z_2)^l\big]$$

geliefert, der nur noch von der Funktion f abhängt. Aus $g = det(Z_2)^l$ wurden, von Z_2 abhängige, Koeffizienten des Operators und leider sind diese nicht-konstanten Koeffizienten auch der Preis, den wir zahlen müssen, für das Erhalten eines linearen und iterierbaren Differentialoperators.

Des Weiteren ist der Operator noch immer **holomorph**, daran hat sich natürlich auch nach dem Einsetzen von $det(Z_2)^l$ für g nichts geändert. Auch die geforderte **Äquivarianz** ist wieder erfüllt, jedoch nur noch bzgl. der Untergruppe $Sp(n,\mathbb{R}) \times Sp(n,\mathbb{R}) \subset Sp(2n,\mathbb{R})$.

Abschließend bleibt wieder die Frage zu klären, ob die Konstruktion (4.5) auch ungleich Null ist. Da es sich hier um die Differenz zweier Monome unterschiedlichen Grades (l und $l-1$) handelt, können wir die Frage für $k, l \neq 0$ mit ja beantworten und formulieren schließlich folgendes

Theorem 4.10.
Mit der Konstruktion (4.5) gibt es zu einer Darstellung $Sym^\nu \otimes det^k$ einen linearen und holomorphen Differentialoperator

$$\mathcal{D} : \mathcal{H}_{Sym^\nu \otimes det^k}(\mathbb{H}_{2n}, V^{(\nu)}) \to \mathcal{H}_{Sym^{\nu+2} \otimes det^k}(\mathbb{H}_{2n}, V^{(\nu+2)})$$

vermöge

$$\mathcal{D} := \left[\, * \,, det(Z_2)^l \right]$$

der für alle $f \in \mathcal{H}_{Sym^\nu \otimes det^k}(\mathbb{H}_{2n}, V^{(\nu)})$ die Äquivarianzeigenschaft

$$\mathcal{D}(f \mid_{Sym^\nu \otimes det^k} M^\uparrow) = \mathcal{D}(f) \mid_{Sym^{\nu+2} \otimes det^k} M^\uparrow$$
$$\mathcal{D}(f \mid_{Sym^\nu \otimes det^k} M^\downarrow) = \mathcal{D}(f) \mid_{Sym^{\nu+2} \otimes det^k} M^\downarrow$$

und

$$\mathcal{D}(f \mid_{Sym^\nu \otimes det^k} V) = \mathcal{D}(f) \mid_{Sym^{\nu+2} \otimes det^k} V$$

für alle $M \in Sp(n,\mathbb{R})$ und $V = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \in Sp(2n,\mathbb{R})$ erfüllt. Die Konstruktion ist Null nur für den Fall $k = l = 0$.

Beobachtung 4.11.
Iteriert man den Operator $\mathcal{D}$ und betrachtet ihn in Verbindung mit der Restriktion $Z_2 = 0$, so wird dieser zu null. Da wir in unserer Konstruktion nur Ableitungen erster Ordnung bilden, kann $det(Z_2)^l$ nie zu einer Konstanten werden. Der Differentialoperator bleibt sets von Z_2 abhängig und fällt somit weg im Fall $Z_2 = 0$.

Bemerkung 4.12.
Die Konstruktionen in diesem Kapitel (s. Theorem 4.2. & 4.10.) haben jeweils eine Variante für holomorphe Funktionen und eine für C^∞-Funktionen. Der Grund dafür ist, dass die Transformationseigenschaft dieser Operatoren herrührt von der Kettenregel für die holomorphe Transformation $Z \mapsto (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$ und von der Art und Weise, wie sich der Imaginärteil transformiert.

4.3 Beispiel: Der Fall n=4.

Gegeben sei $f \in C^{\infty}_{Sym^1 \otimes det^k}(\mathbb{H}_4, V^{(1)})$ und $g \in C^{\infty}_{det^l}(\mathbb{H}_4, \mathbb{C})$ und

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2^t & Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} & z_{1,3} & z_{1,4} \\ z_{2,1} & z_{2,2} & z_{2,3} & z_{2,4} \\ z_{1,3} & z_{2,3} & z_{3,3} & z_{3,4} \\ z_{1,4} & z_{2,4} & z_{4,3} & z_{4,4} \end{pmatrix}$$

Analog zum allgemeinen Fall (n beliebig) ergibt sich natürlich für $n = 4$ der gleiche bilineare Differentialoperator

$$\underbrace{\tfrac{k}{2\pi i}\big(\big(\tfrac{\partial}{\partial Z}g\big)f\big)[x]}_{\mathbf{L}_\delta} - \underbrace{\tfrac{l}{2\pi i}\big(\big(\tfrac{\partial}{\partial Z}f\big)[x]\big)g}_{\mathbf{R}_\delta}$$

mit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Sei nun wieder $g : \mathbb{H}_4 \to \mathbb{C}$ mit $Z \mapsto det(Z_2)^l$, so ergibt sich für $\mathbf{L}_\delta$:

$$\frac{k}{2\pi i}\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^{det}_{1,1} & \partial^{det}_{1,2} & \partial^{det}_{1,3} & \partial^{det}_{1,4} \\ \partial^{det}_{2,1} & \partial^{det}_{2,2} & \partial^{det}_{2,3} & \partial^{det}_{2,4} \\ \partial^{det}_{1,3} & \partial^{det}_{2,3} & \partial^{det}_{3,3} & \partial^{det}_{3,4} \\ \partial^{det}_{1,4} & \partial^{det}_{2,4} & \partial^{det}_{4,3} & \partial^{det}_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 \end{pmatrix}.$$

Die Ableitungen auf den Blöcken Z_1 und Z_4 sind null und wir erhalten

$$\frac{k}{2\pi i}\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial^{det}_{1,3} & \partial^{det}_{1,4} \\ 0 & 0 & \partial^{det}_{2,3} & \partial^{det}_{2,4} \\ \partial^{det}_{1,3} & \partial^{det}_{2,3} & 0 & 0 \\ \partial^{det}_{1,4} & \partial^{det}_{2,4} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 \end{pmatrix}.$$

Ausmultipliziert ergibt dies für $\mathbf{L}_\delta$ den Ausdruck

$$\tfrac{k}{2\pi i} \left[\, x_1x_3 \, 2\partial^{det}_{1,3} + x_1x_4 \, 2\partial^{det}_{1,4} + x_2x_3 \, 2\partial^{det}_{2,3} + x_2x_4 \, 2\partial^{det}_{2,4} \, \right] \sum_{i=1}^{4} f_i x_i.$$

Analog zur allgemeinen Vorgehensweise müssen wir auch an dieser Stelle die partiellen Ableitungen der Determinante von Z_2 berechnen. Hierzu betrachten wir folgende

Nebenrechnung 4.13.
Es sei $det(Z_2) = det\left(\begin{smallmatrix} z_{1,3} & z_{1,4} \\ z_{2,3} & z_{2,4} \end{smallmatrix}\right) = z_{1,3}z_{2,4} - z_{1,4}z_{2,3}$. Wir benötigen folgende partielle Ableitungen der Determinante:

$$\frac{\partial \, det(Z_2)}{\partial z_{1,3}} = z_{2,4} \; , \quad \frac{\partial \, det(Z_2)}{\partial z_{1,4}} = -z_{2,3} \; , \quad \frac{\partial \, det(Z_2)}{\partial z_{2,3}} = -z_{1,4} \; , \quad \frac{\partial \, det(Z_2)}{\partial z_{2,4}} = z_{1,3} \; .$$

Diese Ableitungen, aus der Nebenrechnung 4.13, können wir nun einsetzen und erhalten für $\mathbf{L}_\delta$ den Ausdruck

$$\frac{k\,l\,det(Z_2)^{l-1}}{2\pi i}\,[x_1x_3(z_{2,4}) + x_1x_4(-z_{2,3}) + x_2x_3(-z_{1,4}) + x_2x_4(z_{1,3})]\sum_{i=1}^{4} f_ix_i.$$

Somit ist $\mathbf{L}_\delta$ für $n = 4$ beschrieben.

Nun betrachten wir $\mathbf{R}_\delta$. Für den Fall $n = 4$ erhält man den Ausdruck

$$\frac{l}{2\pi i}\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial^{\tilde f}_{1,1} & \partial^{\tilde f}_{1,2} & \partial^{\tilde f}_{1,3} & \partial^{\tilde f}_{1,4} \\ \partial^{\tilde f}_{2,1} & \partial^{\tilde f}_{2,2} & \partial_{2,3} & \partial^{\tilde f}_{2,4} \\ \partial^{\tilde f}_{1,3} & \partial^{\tilde f}_{2,3} & \partial^{\tilde f}_{3,3} & \partial^{\tilde f}_{3,4} \\ \partial^{\tilde f}_{1,4} & \partial^{\tilde f}_{2,4} & \partial^{\tilde f}_{4,3} & \partial^{\tilde f}_{4,4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right)\; det(Z_2)^l\;.$$

Auch hier folgt nach Matrizenmultiplikation

$$\begin{aligned}\frac{l\,det(Z_2)^l}{2\pi i}\,\Big[\, x_1^2\; \overbrace{\partial^{\tilde f}_{1,1}}^{\frac{\partial \tilde f}{\partial z_{1,1}}} + x_1x_2\;\overbrace{(\partial^{\tilde f}_{1,2} + \partial^{\tilde f}_{2,1})}^{\frac{1}{2}\frac{\partial \tilde f}{\partial z_{1,2}} + \frac{1}{2}\frac{\partial \tilde f}{\partial z_{2,1}}} + x_1x_3\; 2\partial^{\tilde f}_{1,3} + x_1x_4\; 2\partial^{\tilde f}_{1,4} + x_2^2\;\partial^{\tilde f}_{2,2} \\ + x_2x_3\; 2\partial^{\tilde f}_{2,3} + x_2x_4\; 2\partial^{\tilde f}_{2,4} + x_3^2\;\partial^{\tilde f}_{3,3} + x_3x_4\;(\partial^{\tilde f}_{3,4} + \partial^{\tilde f}_{4,3}) + x_4^2\;\partial^{\tilde f}_{4,4}\,\Big].\end{aligned}$$

Somit ist $\mathbf{R}_\delta$ für $n = 4$ beschrieben und wir können schließlich wieder die gesamte Differenz betrachten.

Für den Fall $n = 4$ lautet der Operator (4.5) daher

$$\begin{aligned}&\frac{k\,l\,det(Z_2)^{l-1}}{2\pi i}\Big[z_{2,4}\,x_1x_3 - z_{2,3}\,x_1x_4 - z_{1,4}\,x_2x_3 + z_{1,3}\,x_2x_4\Big]\sum_{i=1}^{4} f_ix_i \\ &- \frac{l\,det(Z_2)^l}{2\pi i}\Big[x_1^2\frac{\partial \tilde f}{\partial z_{1,1}} + x_1x_2\,\big(\tfrac{1}{2}\frac{\partial \tilde f}{\partial z_{1,2}} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \tilde f}{\partial z_{2,1}}\big) + x_1x_3\frac{\partial \tilde f}{\partial z_{1,3}} + x_1x_4\frac{\partial \tilde f}{\partial z_{1,4}} + x_2^2\frac{\partial \tilde f}{\partial z_{2,2}} \\ &\qquad + x_2x_3\frac{\partial \tilde f}{\partial z_{2,3}} + x_2x_4\frac{\partial \tilde f}{\partial z_{2,4}} + x_3^2\frac{\partial \tilde f}{\partial z_{3,3}} + x_3x_4\,\big(\tfrac{1}{2}\frac{\partial \tilde f}{\partial z_{3,4}} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \tilde f}{\partial z_{4,3}}\big) + x_4^2\frac{\partial \tilde f}{\partial z_{4,4}}\Big].\end{aligned}$$

5 Konstruktion äquivarianter und holomorpher Differentialoperatoren - Vorgehensweise II

In diesem Kapitel werden wir holomorphe und äquivariante Differentialoperatoren konstruieren, ausgehend von dem nicht-holomorphen, äquivarianten Differentialoperator D_ρ aus der Arbeit von G. Shimura ([19]), der in Kapitel 3 eingeführt wurde.

Auch in diesem Kapitel werden wir anfänglich wieder auf zwei Arten Differentialoperatoren direkt & explizit konstruieren. Zunächst wird im folgenden Abschnitt 5.1 die Differenz

$$\boxed{l \cdot D_{Sym^1 \otimes det^k}(f) \cdot g - \mathcal{L} \circ (f \otimes D_{det^l}(g))}$$

gebildet, ausgehend von einem f mit vektorwertigem Automorphiefaktor, genauer f aus $C^\infty_{Sym^1 \otimes det^k}(\mathbb{H}_n, X)$ und einem skalarwertigen g aus $C^\infty_{det^l}(\mathbb{H}_n, \mathbb{C})$. Diese Differenz dürfen wir bilden, da es sich hierbei gerade um eine Differenz von Funktionen handelt, die beide Werte im Raum

$$C^\infty_{Sym^1 \otimes Sym^2 \otimes det^{k+l}}(\mathbb{H}_n, S_1(T, X))$$

haben und auf denen die gleiche Operation angewendet wird. Hinter $\mathcal{L}$ verbirgt sich die Zerlegung in irreduzible Teile des Tensorproduktes $\rho \otimes \tau$ bzw. in unserem Fall $Sym^1 \otimes Sym^2$. (In Unterabschnitt 5.1.4 gehen wir darauf genau ein). Auf diese Weise werden wir einen bilinearen, holomorphen & äquivarianten Differentialoperator erhalten. Dies erfordert jedoch deutlich mehr Aufwand als das in Kapitel 4 der Fall war, da der Imaginärteil hier nicht durch eine einfache Differenzbildung wegfällt.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird der Abschnitt 5.1 in vier Unterabschnitte aufgeteilt. Unterabschnitt 5.1.1 dient der Entwicklung des Minuenden $D_{Sym^1 \otimes det^k}(f)g$ der Konstruktion (ohne l), 5.1.2 beinhaltet die notwendigen Nebenrechnungen für die Entwicklung des Minuenden, 5.1.3 dient der Entwicklung des Subtrahenden $f \otimes D_{det^l}(g)$ der Konstruktion (zunächst ohne $\mathcal{L}$) und in Unterabschnitt 5.1.4 wird die Differenz schließlich vollständig betrachtet.

Auf dieser Konstruktion aufbauend wird in Abschnitt 5.2, durch das Einsetzen einer Funktion für g, ein linearer, holomorpher & äquivarianter Differentialoperator konstruiert. Den Abschnitt 5.3 werden wir nutzen um eine, über die beiden expliziten Konstruktionen hinausgehende, Beobachtung festzuhalten und schließlich Differentialoperatoren zu jeder beliebigen irreduziblen Darstellung ρ zu erhalten. Abschließend dient Abschnitt 5.4 der Veranschaulichung der neu konstruierten Differentialoperatoren mit Hilfe eines Beispiels für den Fall $n = 2$.

5.1 Bilinearer, holomorpher Differentialoperator - Konstruktion

Wir starten den Abschnitt mit einer Erinnerung aus Kapitel 3 und beginnen dann direkt mit der Konstruktion des Differentialoperators.

Erinnerung 5.1.
Für $f \in C^\infty_\rho(\mathbb{H}_n, X)$ definieren wir $Df \in C^\infty_{\rho\otimes\tau}(\mathbb{H}_n, S_1(T, X))$ durch

$$D(f)(u) = \sum_{u,v} u_{u,v} \frac{\partial f}{\partial z_{u,v}}$$

mit $1 \leq u \leq v \leq n$ und $u \in T = Sym_n(\mathbb{C}^{n\times n})$. Des Weiteren definieren wir $D_\rho f \in \mathbb{C}^\infty_{\rho\otimes\tau}(\mathbb{H}_n, S_1(T, X))$ durch

$$D_\rho(f)(u) := \rho(Y)^{-1} D[\rho(Y)f](u).$$

Bezeichnung 5.2.
Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, werden wir für $\sum\limits_{u,v} u_{u,v} \frac{\partial f}{\partial z_{u,v}}$ die etwas kürzere und einfachere Schreibweise $\sum\limits_{u,v} u \frac{\partial f}{\partial z}$ wählen.

Nun können wir mit der Konstruktion unseres Differentialoperators beginnen. Wir starten zunächst mit einem etwas naiveren Ansatz - ohne Einbezug von $\mathcal{L}$ - und arbeiten uns zu einer raffinierteren Lösung, die die Zerlegung des Tensorproduktes in irreduzible Teile berücksichtigt, vor. Ausgangspunkt sei die Differenz

$$l \cdot \underbrace{D_{Sym^1 \otimes det^k}(f)g}_{\mathbf{L}_D} - \mathcal{L} \circ \underbrace{(f \otimes D_{det^l}(g))}_{\mathbf{R}_D}, \tag{5.1}$$

wobei wir zunächst nur an den Ausdrücken $\mathbf{L}_D$ und $\mathbf{R}_D$ interessiert sind. Diese werden nun getrennt voneinander entwickelt.

5.1.1 Entwicklung von $\mathbf{L}_D$

Allgemein formuliert betrachten wir die Funktion

$$D_\rho(f)g.$$

Nach Einsetzen der Definition von D und D_ρ ist dies

$$\rho(Y)^{-1} \sum_{u,v} u \tfrac{\partial}{\partial z} \left[\rho(Y) f \right] g$$

und für die Darstellung $\rho = Sym^1 \otimes det^k$ erhält man für $\mathbf{L}_D$ den Ausdruck

$$Sym^1(Y)^{-1} \otimes det(Y)^{-k} \sum_{u,v} u \tfrac{\partial}{\partial z} \Big[\big(Sym^1(Y) \otimes det(Y)^k\big) f \Big] g.$$

Bemerkung 5.3.
Analog zu Bezeichnung 4.6. in Kapitel 4 kann man auch hier die Funktion f als Summe der Form

$$\sum_{m_1+\dots+m_n=\nu} f_{1\dots n}\, x_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{m_n}$$

schreiben. Da wir in diesem Kapitel nur Sym^1 und somit $\nu = 1$ betrachten, ergibt sich eine Summe (mit nur noch einem Index) der Form $\sum_{d=1}^{n} f_d x_d$.

Mit dieser Bemerkung 5.3. erhalten wir für $\mathbf{L}_D$ den Ausdruck

$$Sym^1(Y)^{-1} \otimes det(Y)^{-k} \sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(Sym^1(Y) \otimes det(Y)^k\right)\sum_{d=1}^{n} f_d x_d\right] g.$$

Weiter ist $Sym^1(Y) = Y$ und wir erhalten

$$(Y)^{-1} \otimes det(Y)^{-k} \sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z}\left[\left((Y) \otimes det(Y)^k\right)\sum_{d=1}^{n} f_d x_d\right] g.$$

(Y) bzw. Y bezeichnet eine symmetrische $n \times n-$Matrix.

Bemerkung 5.4.
Aus der Algebra wissen wir, dass man die Inverse einer Matrix mit Hilfe der Adjunkten berechnen kann (s. Cramersche Regel). Es gilt

$$Y^{-1} = \tfrac{1}{det(Y)} \cdot Adj(Y)$$

mit $det(Y) \neq 0$. Mit $Adj(Y)$ wird die Adjunkte der Matrix Y, also die Transponierte der Kofaktormatrix $Cof(Y)^t$, bezeichnet. Die Kofaktoren werden mit $a_{i,j}$ bezeichnet und wie üblich durch die Formel $a_{i,j} = (-1)^{i+j} det(Y_{i,j})$ definiert. Hierbei bezeichnet $det(Y_{i,j})$ gerade die Determinante der Untermatrix von Y, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Mit dieser Bemerkung 5.4. erhalten wir für $\mathbf{L}_D$:

$$\tfrac{1}{det(Y)^{k+1}} \cdot Adj(Y) \sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z}\left[\left((Y) \otimes det(Y)^k\right)\sum_{d=1}^{n} f_d x_d\right] g.$$

Wir können die endliche Summe $\sum_{d=1}^{n} f_d x_d$ als Produkt aus einem Zeilenvektor und einem Spaltenvektor schreiben. Dies ermöglicht die Berechnung des Ausdrucks

$$\tfrac{1}{det(Y)^{k+1}} \cdot Adj(Y) \sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\begin{smallmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{smallmatrix} \right) \begin{pmatrix} y_{1,1} & \dots & y_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1,n} & \dots & y_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} det(Y)^k\right] g$$

durch Matrizenmultiplikation. Bevor wir das tun, müssen wir zunächst die Produktregel anwenden und erhalten somit für $\mathbf{L}_D$ die Summe

$$\frac{1}{det(Y)^{k+1}} \cdot \underbrace{Adj(Y) \left[\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1,n} & \cdots & y_{n,n} \end{pmatrix} \left(\sum_{u,v} u \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \right) det(Y)^k \right]}_{Nebenrechnung\ 1} g +$$

$$\frac{1}{det(Y)^{k+1}} \cdot \underbrace{Adj(Y) \left[\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \left(\sum_{u,v} u \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1,n} & \cdots & y_{n,n} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} det(Y)^k \right]}_{Nebenrechnung\ 2} g +$$

$$\frac{1}{det(Y)^{k+1}} \cdot \underbrace{Adj(Y) \left[\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1,n} & \cdots & y_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \left(\sum_{u,v} u \frac{\partial}{\partial z} det(Y)^k \right) \right]}_{Nebenrechnung\ 3} g.$$

Diese Nebenrechnungen werden im nachfolgenden Unterabschnitt 5.1.2 berechnet. Für eine bessere Übersichtlichkeit, greifen wir aber etwas vor und setzen die Ergebnisse der drei Nebenrechnungen schon jetzt ein. Auf diese Weise müssen wir die Entwicklung des Ausdrucks $\mathbf{L}_D$ an dieser Stelle nicht unterbrechen. Für $\mathbf{L}_D$ erhalten wir somit den Ausdruck

$$\frac{1}{det(Y)^{k+1}} \underbrace{\left[\sum_{q=1}^{n} \left(\sum_{u,v} u \tfrac{\partial}{\partial z} f_q \right) x_q \cdot det(Y)^{k+1} \right]}_{(5.3)\ Ergebnis\ Nebenrechnung\ 1} g +$$

$$\frac{1}{det(Y)^{k+1}} \underbrace{\left[-\frac{i}{2} \sum_{q=1}^{n} f_q \left(\sum_{s=1}^{n} u_{q,s} \left(\sum_{r=1}^{n} x_r a_{s,r} \right) \right) \cdot det(Y)^k \right]}_{(5.4)\ Ergebnis\ Nebenrechnung\ 2} g +$$

$$\frac{1}{det(Y)^{k+1}} \underbrace{\left[-\frac{ik}{2} \left(\left(\sum_{q=1}^{n} f_q x_q \right) \cdot det(Y)^k \right) \cdot \left(\sum_{u,v} e_{u,v} u_{u,v} a_{u,v} \right) \right]}_{(5.5)\ Ergebnis\ Nebenrechnung\ 3} g$$

mit Kofaktoren $a \in Adj(Y)$, mit $u \in T$ und $e_{u,v} = \begin{cases} 1\ falls\ u = v \\ 2\ falls\ u \neq v. \end{cases}$

Durch Wegkürzen des Faktors $det(Y)^k$ bzw. $det(Y)^{k+1}$ erhält man für $\mathbf{L}_D$ schließlich

$$\begin{aligned}&\underbrace{\left[\sum_{q=1}^{n}\left(\sum_{u,v} u \frac{\partial}{\partial z} f_q\right) x_q\right] g}_{\mathbf{L}_{Hol}} + \\ &\underbrace{-\frac{i}{2}\frac{1}{det(Y)}\left[\left(\sum_{q=1}^{n} f_q \sum_{s=1}^{n} u_{q,s} \sum_{r=1}^{n} x_r a_{s,r}\right) + k\left(\sum_{q=1}^{n} f_q x_q \sum_{u,v} e_{u,v} u_{u,v} a_{u,v}\right)\right] g}_{\mathbf{L}_{Nicht-Hol}}\end{aligned} \tag{5.2}$$

Somit ist $\mathbf{L}_D$ beschrieben und wir halten fest, dass der Ausdruck aus zwei Termen besteht, einem holomorphen Anteil $\mathbf{L}_{Hol}$ und einem nicht- holomorphen Anteil (Imaginärteil) $\mathbf{L}_{Nicht-Hol}$.

Im folgenden Unterabschnitt 5.1.2 werden nun die drei Nebenrechnungen nachgereicht und detailliert aufgeführt. Die Entwicklung von $\mathbf{R}_D$ ist im darauffolgenden Unterabschnitt 5.1.3 zu finden.

5.1.2 Nebenrechnungen zur Entwicklung von L_D

Nebenrechnung 1

Die erste Nebenrechnung lautet

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Adj(Y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \end{pmatrix} \left(\sum_{u,v} u \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \right) det(Y)^k \right].$$

Als $n \times n-$Matrizen betrachtet kann man diese schreiben als

$$\underbrace{(x_1 \ \dots \ x_i \dots \ x_n) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,i} & \dots & a_{i,i} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & \dots & a_{i,n} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}}_{Adj(Y)}}_{(*^1)} \begin{pmatrix} y_{1,1} & \dots & y_{1,i} & \dots & y_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ y_{1,i} & \dots & y_{i,i} & \dots & y_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1,n} & \dots & y_{i,n} & \dots & y_{n,n} \end{pmatrix} \left(\sum_{u,v} u \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \right) det(Y)^k .$$

Bevor wir mit der Rechnung beginnen, benötigen wir noch folgende

Bemerkung 5.5.
Man kann leicht nachprüfen, dass die Adjunkte $Adj(Y)$ einer symmetrischen Matrix Y wieder symmetrisch ist. Es gilt daher

$$Adj(Y) = Cof(Y)^t = Cof(Y)$$

und für einen Kofaktor mit beliebigem Index i, j gilt $a_{i,j} = a_{j,i}$.

Nun können wir mit der Rechnung beginnen. Man erhält für die erste Matrizenmultiplikation $(*^1)$ die folgende $1 \times n-$Matrix:

$$\begin{aligned} (*^1) &= ((x_1 a_{1,1} + \dots + x_i a_{1,i} + \dots + x_n a_{1,n}), \dots, (x_1 a_{1,i} + \dots + x_i a_{i,i} + \dots + x_n a_{i,n}), \dots, (x_1 a_{1,n} + \dots + x_i a_{i,n} + \dots + x_n a_{n,n})) \\ &= \left(\sum_{r=1}^{n} x_r a_{1,r} \ , \dots , \sum_{r=1}^{n} x_r a_{i,r} \ , \dots , \sum_{r=1}^{n} x_r a_{n,r} \right). \end{aligned}$$

Nach Einsetzen von $(*^1)$ in die Nebenrechnung

$$\underbrace{(\qquad\qquad)}_{(*^1)} \begin{pmatrix} y_{1,1} & \dots & y_{1,i} & \dots & y_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ y_{1,i} & \dots & y_{i,i} & \dots & y_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1,n} & \dots & y_{i,n} & \dots & y_{n,n} \end{pmatrix} \left(\sum_{u,v} u \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \right) det(Y)^k$$

und Multiplikation der Matrizen erhält man:

$$\begin{aligned}
&\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z} f_1 \Big[\ (x_1a_{1,1} +\cdots+ x_ia_{1,i} +\cdots+ x_na_{1,n})\, y_{1,1} +\cdots+ \\
&\qquad (x_1a_{1,i} +\cdots+ x_ia_{i,i} +\cdots+ x_na_{i,n})\, y_{1,i} +\cdots+ \\
&\qquad (x_1a_{1,n} +\cdots+ x_ia_{i,n} +\cdots+ x_na_{n,n})\, y_{1,n} \Big]\, det(Y)^k \qquad (Term\ 1) \\
&\qquad +\cdots+ \\
&\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z} f_i \Big[\ (x_1a_{1,1} +\cdots+ x_ia_{1,i} +\cdots+ x_na_{1,n})\, y_{i,1} +\cdots+ \\
&\qquad (x_1a_{1,i} +\cdots+ x_ia_{i,i} +\cdots+ x_na_{i,n})\, y_{i,i} +\cdots+ \\
&\qquad (x_1a_{1,n}+\cdots+x_ia_{i,n}+\cdots+x_na_{n,n})\, y_{i,n} \Big]\, det(Y)^k \qquad (Term\ i) \\
&\qquad +\cdots+ \\
&\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z} f_n \Big[\ (x_1a_{1,1} +\cdots+ x_ia_{1,i} +\cdots+ x_na_{1,n})\, y_{1,n} +\cdots+ \\
&\qquad (x_1a_{1,i} +\cdots+ x_ia_{i,i} +\cdots+ x_na_{i,n})\, y_{i,n} +\cdots+ \\
&\qquad (x_1a_{1,n} +\cdots+ x_ia_{i,n} +\cdots+ x_na_{n,n})\, y_{n,n} \Big]\, det(Y)^k \qquad (Term\ n)
\end{aligned}$$

In einem ersten Schritt zusammengefasst ist dies gerade

$$\begin{aligned}
&\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z} f_1 \left[\left(\sum_{r=1}^{n} x_ra_{1,r}\right)y_{1,1}+\cdots+\left(\sum_{r=1}^{n} x_ra_{i,r}\right)y_{1,i}+\cdots+\left(\sum_{r=1}^{n} x_ra_{n,r}\right)y_{1,n}\right]det(Y)^k \quad (Term\ 1) \\
&+\cdots+ \\
&\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z} f_i \left[\left(\sum_{r=1}^{n} x_ra_{1,r}\right)y_{1,i}+\cdots+\left(\sum_{r=1}^{n} x_ra_{i,r}\right)y_{i,i}+\cdots+\left(\sum_{r=1}^{n} x_ra_{n,r}\right)y_{i,n}\right]det(Y)^k \quad (Term\ i) \\
&+\cdots+ \\
&\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z} f_n \left[\left(\sum_{r=1}^{n} x_ra_{1,r}\right)y_{1,n}+\cdots+\left(\sum_{r=1}^{n} x_ra_{i,r}\right)y_{i,n}+\cdots+\left(\sum_{r=1}^{n} x_ra_{n,r}\right)y_{n,n}\right]det(Y)^k \quad (Term\ n)
\end{aligned}$$

und weiteres Zusammenfassen als Summe führt zu

$$\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z} f_1 \left[\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{n} x_ra_{s,r}\right)y_{1,s}\right]+\cdots+\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z} f_i \left[\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{n} x_ra_{s,r}\right)y_{i,s}\right]+\cdots+\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z} f_n \left[\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{n} x_ra_{s,r}\right)y_{n,s}\right].$$

Schließlich erhalten wir den Ausdruck der Form

$$\sum_{q=1}^{n}\sum_{u,v} u_{u,v}\frac{\partial}{\partial z_{u,v}} f_q \left[\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{n} x_ra_{s,r}\right)y_{q,s}\right].$$

Nun könnte man sich mit dieser zusammengefassten Summenschreibweise zufrieden geben und diese als Ergebnis der Nebenrechnung 1 nutzen, aber wir möchten nochmal einen kleinen Schritt zurück gehen und eine alternative Sortierung der Elemente betrachten. Hierzu nehmen wir einen beliebigen Term i her und schauen uns diesen in folgender Bemerkung genau an.

Bemerkung 5.6.

$$\begin{aligned}\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z} f_i \Big[\; & x_1 y_{i,1} a_{1,1} + \dots + x_i y_{i,1} a_{1,i} + \dots + x_n y_{i,1} a_{1,n} + \dots + \\ & x_1 y_{i,i} a_{1,i} + \dots + x_i y_{i,i} a_{i,i} + \dots + x_n y_{i,i} a_{i,n} + \dots + \\ & x_1 y_{i,n} a_{1,n} + \dots + \underbrace{x_i y_{i,n} a_{i,n}}_{\uparrow} + \dots + x_n y_{i,n} a_{n,n} \;\Big]\, det(Y)^k\end{aligned}$$

Versucht man den Term dieses mal nicht „zeilenweise“ zu lesen, sondern „spaltenweise“, so fällt auf, dass die Elemente in der i-ten „Spalte“ (siehe Pfeil) genau der Summe $x_i\left(\sum_{j=1}^n y_{i,j}a_{i,j}\right)$ entsprechen. Nach dem Entwicklungssatz von Laplace und einer Entwicklung nach der i-ten Zeile ist $\sum_{j=1}^n y_{i,j}a_{i,j}$ genau die Determinante von Y. Entsprechend sieht man, dass alle anderen „Spalten“ gerade der Entwicklung einer Determinante, mit Kofaktoren einer anderen Zeile, entsprechen. Da die Entwicklung einer Determinante (nach der i-ten Zeile), mit Kofaktoren einer anderen Zeile, den Wert null ergibt, folgt somit für den i-ten Term:

$$\begin{aligned} & \sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z} f_i \left[x_1 \sum_{j=1}^n y_{i,j} a_{1,j} + \dots + x_i \sum_{j=1}^n y_{i,j} a_{i,j} + \dots + x_n \sum_{j=1}^n y_{i,j} a_{n,j}\right] det(Y)^k \\ = & \sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z} f_i \left[x_1 \cdot 0 + \dots + x_i \cdot det(Y) + \dots + x_n \cdot 0\right] det(Y)^k \\ = & \sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z} f_i \left[x_i \cdot det(Y)\right] det(Y)^k \ .\end{aligned}$$

Mit dieser Bemerkung 5.6. erhalten wir für Nebenrechnung 1 die Summe

$$\left(\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z} f_1\right) x_1 det(Y)^{k+1} + \dots + \left(\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z} f_i\right) x_i det(Y)^{k+1} + \dots + \left(\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z} f_n\right) x_n det(Y)^{k+1} \ .$$

Dies können wir weiter zusammenfassen und erhalten somit als Ergebnis für **Nebenrechnung 1** den Ausdruck

$$\sum_{q=1}^n \left(\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z} f_q\right) x_q \, det(Y)^{k+1}. \tag{5.3}$$

Nebenrechnung 2

Die zweite Nebenrechnung lautet

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Adj(Y) \end{pmatrix}\left(\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} y_{1,1} & \dots & y_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1,n} & \dots & y_{n,n} \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} det(Y)^k\right].$$

Als $n \times n-$Matrizen betrachtet schreibt man sie als

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_i \dots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,i} & \dots & a_{i,i} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & \dots & a_{i,n} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}}_{(*^1)\ analog\ zu\ Nebenrechnung\ 1}\left(\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} y_{1,1} & \dots & y_{1,i} & \dots & y_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ y_{1,i} & \dots & y_{i,i} & \dots & y_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1,n} & \dots & y_{i,n} & \dots & y_{n,n} \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} det(Y)^k$$

Bevor wir mit der Matrizenmultiplikation beginnen, benötigen wir noch folgende

Bemerkung 5.7.

Betrachten wir die Summe der partiellen Ableitungen der symmetrischen $n \times n-$ Matrix Y genauer. Wir behaupten, dass

$$\left(\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} y_{1,1} & \dots & y_{1,i} & \dots & y_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ y_{1,i} & \dots & y_{i,i} & \dots & y_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1,n} & \dots & y_{i,n} & \dots & y_{n,n} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}u_{1,1} & \dots & -\frac{i}{2}u_{1,i} & \dots & -\frac{i}{2}u_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{i}{2}u_{1,i} & \dots & -\frac{i}{2}u_{i,i} & \dots & -\frac{i}{2}u_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{i}{2}u_{1,n} & \dots & -\frac{i}{2}u_{i,n} & \dots & -\frac{i}{2}u_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Warum ist dies so? Betrachtet man die Summe der partiellen Ableitungen für einen beliebigen Eintrag $y_{i,j}$ der Matrix Y so erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{u,v} u_{u,v}\frac{\partial}{\partial z_{u,v}}y_{i,j} &= u_{1,1}\frac{\partial}{\partial z_{1,1}}y_{i,j}+\dots+u_{1,n}\frac{\partial}{\partial z_{1,n}}y_{i,j}+\dots+u_{i,j}\frac{\partial}{\partial z_{i,j}}y_{i,j}+\dots+u_{n,n}\frac{\partial}{\partial z_{n,n}}y_{i,j} \\ &= 0+\dots+0+\dots+u_{i,j}\frac{\partial}{\partial z_{i,j}}y_{i,j}+\dots+0 \\ &= -\frac{i}{2}\,u_{i,j}\end{aligned}$$

Der Faktor $-\frac{i}{2}$ entsteht durch die Wirtinger Ableitung $\frac{\partial}{\partial z}$.

Diese Bemerkung 5.7. setzen wir in unsere Nebenrechnung 2 ein.

Zusätzlich geben wir noch zwei weitere Indizes j,k in der Matrix an. Das scheint jetzt noch nicht relevant, wird aber zu einem späteren Zeitpunkt hilfreich sein. Wir berechnen

$$\underbrace{(\qquad\qquad)}_{(*^1)} \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}u_{1,1} & \cdots & -\frac{i}{2}u_{1,i} & \cdots & -\frac{i}{2}u_{1,j} & \cdots & -\frac{i}{2}u_{1,k} & \cdots & -\frac{i}{2}u_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\frac{i}{2}u_{1,i} & \cdots & -\frac{i}{2}u_{i,i} & \cdots & -\frac{i}{2}u_{i,j} & \cdots & -\frac{i}{2}u_{i,k} & \cdots & -\frac{i}{2}u_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\frac{i}{2}u_{1,j} & \cdots & -\frac{i}{2}u_{i,j} & \cdots & -\frac{i}{2}u_{j,j} & \cdots & -\frac{i}{2}u_{j,k} & \cdots & -\frac{i}{2}u_{j,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \\ -\frac{i}{2}u_{1,k} & \cdots & -\frac{i}{2}u_{i,k} & \cdots & -\frac{i}{2}u_{j,k} & \cdots & -\frac{i}{2}u_{k,k} & \cdots & -\frac{i}{2}u_{k,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \\ -\frac{i}{2}u_{1,n} & \cdots & -\frac{i}{2}u_{i,n} & \cdots & -\frac{i}{2}u_{j,n} & \cdots & -\frac{i}{2}u_{k,n} & \cdots & -\frac{i}{2}u_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_k \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} det(Y)^k \, .$$

Nach Matrizenmultiplikation folgt

$$-\frac{i}{2}f_1\left[u_{1,1}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{1,r} + \cdots + u_{1,i}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{i,r} + \cdots + u_{1,j}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{j,r} + \cdots + u_{1,k}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{k,r} + \cdots + u_{1,n}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{n,r}\right] det^k$$

$$+ \ldots +$$

$$-\frac{i}{2}f_i\left[u_{1,i}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{1,r} + \cdots + u_{i,i}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{i,r} + \cdots + u_{i,j}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{j,r} + \cdots + u_{i,k}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{k,r} + \cdots + u_{i,n}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{n,r}\right] det^k$$

$$+ \ldots +$$

$$-\frac{i}{2}f_j\left[u_{1,j}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{1,r} + \cdots + u_{i,j}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{i,r} + \cdots + u_{j,j}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{j,r} + \cdots + u_{j,k}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{k,r} + \cdots + u_{j,n}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{n,r}\right] det^k$$

$$+ \ldots +$$

$$-\frac{i}{2}f_k\left[u_{1,k}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{1,r} + \cdots + u_{i,k}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{i,r} + \cdots + u_{j,k}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{j,r} + \cdots + u_{k,k}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{k,r} + \cdots + u_{k,n}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{n,r}\right] det^k$$

$$+ \ldots +$$

$$-\frac{i}{2}f_n\left[u_{1,n}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{1,r} + \cdots + u_{i,n}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{i,r} + \cdots + u_{j,n}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{j,r} + \cdots + u_{k,n}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{k,r} + \cdots + u_{n,n}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{n,r}\right] det^k \, .$$

Das können wir wieder zusammenfassen und erhalten schließlich für **Nebenrechnung 2** den Ausdruck

$$(-\frac{i}{2})\sum_{q=1}^{n} f_q \left[\sum_{s=1}^{n} u_{q,s}\left(\sum_{r=1}^{n} x_r a_{s,r}\right)\right] det(Y)^k. \tag{5.4}$$

(Hinweis zu (5.4): Für ein beliebiges Indexpaar i,j mit $i \neq j$ zu einem Element $u \in T$ betrachtet man einerseits $u_{i,j}$ und somit $(-\frac{i}{2})f_i\left[u_{i,j}\left(\sum_{r=1}^{n} x_r a_{j,r}\right)\right]det(Y)^k$ und andererseits auch $u_{j,i}$ und somit $(-\frac{i}{2})f_j\left[u_{j,i}\left(\sum_{r=1}^{n} x_r a_{i,r}\right)\right]det(Y)^k$.)

Nebenrechnung 3
Die dritte und letzte Nebenrechnung lautet

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Adj(Y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \left(\sum_{u,v} u \frac{\partial}{\partial z} det(Y)^k \right) \right].$$

Wir schreiben diese wieder als

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_i \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,i} & \dots & a_{i,i} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & \dots & a_{i,n} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,1} & \dots & y_{1,i} & \dots & y_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ y_{1,i} & \dots & y_{i,i} & \dots & y_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1,n} & \dots & y_{i,n} & \dots & y_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \left(\sum_{u,v} u \frac{\partial}{\partial z} det(Y)^k \right).$$

Die Matrizenmultiplikation erfolgt analog zu Nebenrechnung 1. Man erhält

$$\left(\left(\sum_{q=1}^{n} f_q x_q \right) det(Y) \right) \cdot \left(\sum_{u,v} u \frac{\partial}{\partial z} det(Y)^k \right).$$

Schließlich müssen wir noch die partiellen Ableitungen von $det(Y)^k$ berechnen. Wir benötigen hierzu folgende

Bemerkung 5.8.
Unter Anwendung der Wirtinger Ableitung $\frac{\partial}{\partial z}$ und mit Hilfe von Satz 3.4. aus Kapitel 3, erhalten wir für eine beliebige Komponente die Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} det(Y)^k &= -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y} det(Y)^k &&= -\frac{i}{2} \cdot k \cdot det(Y)^k \, Y^{-1} \\ & &&= -\frac{i}{2} \cdot k \cdot det(Y)^k det(Y)^{-1} Adj(Y) \\ & &&= -\frac{i}{2} \cdot k \cdot det(Y)^{k-1} Adj(Y) \end{aligned}$$

Wir bilden die Ableitung für jede Komponente und erhalten somit für die Summe der partiellen Ableitungen

$$\sum_{u,v} u_{u,v} \frac{\partial}{\partial z_{u,v}} det(Y)^k = -\frac{i}{2} \cdot k \cdot det(Y)^{k-1} \sum_{u,v} e_{u,v} u_{u,v} a_{u,v}$$

mit $u \in T$ und Kofaktoren $a \in Adj(Y)$. Außerdem $e_{u,v} = 2$ falls $u \neq v$ und $e_{u,v} = 1$ falls $u = v$.

Das Ergebnis von **Nebenrechnung 3** lautet somit

$$-\frac{ik}{2} \left(\left(\sum_{q=1}^{n} f_q x_q \right) \cdot det(Y)^k \right) \cdot \left(\sum_{u,v} e_{u,v} u_{u,v} a_{u,v} \right). \tag{5.5}$$

5.1.3 Entwicklung von R_D

Allgemein formuliert betrachten wir die Funktion

$$f \otimes D_\rho(g).$$

Nach Einsetzen der Definition von D und D_ρ ist dies

$$f \otimes \rho(Y)^{-1} \sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z} \left[\, \rho(Y)g \,\right]$$

und für die Darstellung $\rho = det^l$ erhält man den Ausdruck $\mathbf{R}_D$:

$$\sum_{d=1}^{n} f_d x_d \otimes det(Y)^{-l} \sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z} \left[\, det(Y)^l g \,\right].$$

Nach Anwenden der Produktregel folgt für $\mathbf{R}_D$ der Ausdruck

$$\sum_{d=1}^{n} f_d x_d \otimes det(Y)^{-l} \left[\left(\sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z} det(Y)^l \right) g + \left(\sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z} g \right) det(Y)^l \right].$$

Nun sind wir schon fast fertig mit der Entwicklung von $\mathbf{R}_D$ und müssen nur noch die Ableitungen der Determinante $det(Y)^l$ berechnen. Dies funktioniert analog zu Bemerkung 5.8. und somit erhalten wir für $\mathbf{R}_D$

$$\sum_{d=1}^{n} f_d x_d \otimes det(Y)^{-l} \left[\left(-\tfrac{il}{2} \cdot det(Y)^{l-1} \sum_{u,v} e_{u,v} u_{u,v} a_{u,v} \right) g + \left(\sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z} g \right) det(Y)^l \right]$$

mit $e_{u,v} = 2$ falls $u \neq v$ und $e_{u,v} = 1$ falls $u = v$ sowie Kofaktoren $a \in Adj(Y)$ und $u \in T$. Wegkürzen der $det(Y)^l$ ergibt schließlich

$$\underbrace{-\tfrac{il}{2} \tfrac{1}{det(Y)} \left[\sum_{d=1}^{n} f_d x_d \otimes \left(\sum_{u,v} e_{u,v} u_{u,v} a_{u,v} \right) g \right]}_{\mathbf{R}_{Nicht-Hol}} + \underbrace{\left[\sum_{d=1}^{n} f_d x_d \otimes \sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z} g \right]}_{\mathbf{R}_{Hol}} \qquad (5.6)$$

Somit ist $\mathbf{R}_D$ beschrieben. Auch hier können wir festhalten, dass der Ausdruck aus zwei Termen besteht, einem holomorphen Anteil $\mathbf{R}_{Hol}$ und einem nicht-holomorphen Anteil $\mathbf{R}_{Nicht-Hol}$.

5.1.4 Die Differenz ($l \cdot \mathbf{L}_D - \mathcal{L} \circ \mathbf{R}_D$)

Fassen wir die bisherigen Erkenntnisse kurz zusammen. Wir wissen aus Formel (5.2), dass der Ausdruck

$$\underbrace{D_{Sym^1 \otimes det^k}(f)g}_{\mathbf{L}_D = \mathbf{L}_{Hol} + \mathbf{L}_{Nicht-Hol}}$$

als Summe aus einem holomophen Anteil

$$\underbrace{\left[\sum_{q=1}^{n}\left(\sum_{u,v} u_{u,v}\frac{\partial}{\partial z_{u,v}} f_q\right) x_q\right] g}_{\mathbf{L}_{Hol}}$$

und einem nicht-holomorphen Anteil der Gestalt

$$\underbrace{-\frac{i}{2}\frac{1}{det(Y)}\left[\left(\sum_{q=1}^{n} f_q \sum_{s=1}^{n} u_{q,s}\sum_{r=1}^{n} x_r a_{s,r}\right) + k\left(\sum_{q=1}^{n} f_q x_q \sum_{u,v} e_{u,v} u_{u,v} a_{u,v}\right)\right] g}_{\mathbf{L}_{Nicht-Hol}}$$

geschrieben werden kann. Analog wissen wir aus (5.6), dass der Ausdruck

$$\underbrace{f \otimes D_{det^l}(g)}_{\mathbf{R}_D = \mathbf{R}_{Hol} + \mathbf{R}_{Nicht-Hol}}$$

als Summe aus einem holomophen Anteil

$$\underbrace{\left[\sum_{d=1}^{n} f_d x_d \otimes \sum_{u,v} u_{u,v}\frac{\partial}{\partial z_{u,v}} g\right]}_{\mathbf{R}_{Hol}}$$

und einem nicht-holomorphen Anteil der Gestalt

$$\underbrace{-\frac{il}{2}\frac{1}{det(Y)}\left[\sum_{d=1}^{n} f_d x_d \otimes \left(\sum_{u,v} e_{u,v} u_{u,v} a_{u,v}\right) g\right]}_{\mathbf{R}_{Nicht-Hol}}$$

geschrieben werden kann. Was fällt uns nun auf, wenn wir die beiden Ausdrücke $\mathbf{L}_D$ und $\mathbf{R}_D$ betrachten?

Wir schauen zunächst auf die nicht-holomorphen Anteile. Vergleichen wir diese miteinander so sieht man schnell, dass diese - im Gegensatz zu Kapitel 4 - nicht durch eine einfache Differenzbildung wegfallen würden. Es sind daher ein paar mehr Arbeitsschritte notwendig, um das Problem in den Griff zu bekommen.

Erinnern wir uns daran, dass wir mit (5.1) eine Differenz von Funktionen haben mit Werten in $C^{\infty}_{Sym^1 \otimes Sym^2 \otimes det^{k+l}}(\mathbb{H}_n, S_1(T, X))$. Für das Tensorprodukt $Sym^1 \otimes Sym^2$ haben wir, mit Hilfe der Regel von Pieri, eine Zerlegung in (zwei) irreduzible Komponenten kennengelernt. Für beide Komponenten, genannt Pieri-Komponente und Anti-Pieri-Komponente, haben wir bereits in Kapitel 2, Abschnitt 2.2 eine geeignete Basis (-Transformation) eingeführt. Diese möchten wir nun auf $\mathbf{L}_D$ und $\mathbf{R}_D$ anwenden. Zum Zwecke der Übersichtlichkeit und um einen Vergleich der beiden Seiten zu erleichtern, betrachten wir in einem ersten Schritt die Auswirkungen auf die nicht-holomorphen Anteile $\mathbf{L}_{Nicht-Hol}$ und $\mathbf{R}_{Nicht-Hol}$ und in einem zweiten Schritt die Auswirkungen auf die holomorphen Anteile $\mathbf{L}_{Hol}$ und $\mathbf{R}_{Hol}$.

Nicht-holomorpher Anteil: Pieri-Komponente Wir erinnern uns an die Basiselemente der Pieri-Komponente aus Abschnitt 2.2.1. Diese lauten

Typ I	$x_i \otimes y_i^2$	für $i \in \{1, \dots, n\}$
Typ II	$x_i \otimes 2y_iy_j + x_j \otimes y_i^2$	für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und $i \neq j$
Typ III	$x_i \otimes 2y_jy_k + x_j \otimes 2y_iy_k + x_k \otimes 2y_iy_j$	für $1 \leq i < j < k \leq n$

Zusätzlich erinnern wir uns daran, dass wir nach Beobachtung 3.6 aus Kapitel 3 von den Elementen $u \in T := Sym_n(\mathbb{C})$ zu Polynomen von Grad zwei übergehen können. Somit können wir beispielsweise $u_{i,i}$ mit y_i^2 identifizieren und $u_{i,j}$ mit $2y_iy_j$. Letztlich rufen wir uns noch den Hinweis zu (5.4) (Ergebnis der Nebenrechnung 2) von Seite 79 in Erinnerung.

Die zur Pieri-Komponente dazugehörigen Koeffizienten aus $\mathbf{L}_{Nicht-Hol}$ und $\mathbf{R}_{Nicht-Hol}$ lauten somit:

	Koeffizienten aus $\mathbf{L}_{Nicht-Hol}$	Koeffizienten aus $\mathbf{R}_{Nicht-Hol}$
Typ I	$(-\frac{i}{2} - \frac{ik}{2})f_i a_{i,i}$	$(-\frac{il}{2})f_i a_{i,i}$
Typ II	$(-i - ik)f_i a_{i,j} + (-\frac{i}{2} - \frac{ik}{2})f_j a_{i,i}$	$(-il)f_i a_{i,j} + (-\frac{il}{2})f_j a_{i,i}$
Typ III	$(-i - ik)f_i a_{j,k} + (-i - ik)f_j a_{i,k}$ $+(-i - ik)f_k a_{i,j}$	$(-il)f_i a_{j,k} + (-il)f_j a_{i,k}$ $+(-il)f_k a_{i,j}$

Es gelten die Forderungen an die Indizes i, j, k für Typ I,II & III der Pieri-Basis.

In der linken Spalte der Tabelle sehen wir nun die Elemente der Pieri- Komponente aus $\mathbf{L}_{Nicht-Hol}$ oder anders formuliert: die linke Spalte beschreibt die Pieri-Komponente aus $\mathbf{L}_{Nicht-Hol}$ und wir bezeichnen diese von nun an mit $\mathbf{L}^P_{Nicht-Hol}$. Die rechte Spalte der Tabelle beschreibt die Pieri-Komponente aus $\mathbf{R}_{Nicht-Hol}$, diese wird mit $\mathbf{R}^P_{Nicht-Hol}$ bezeichnet. Wählen wir nun die Koeffizienten

$$c_1^P = \left(-\frac{il}{2}\right) \quad \text{und} \quad c_2^P = \left(-\frac{i}{2} - \frac{ik}{2}\right)$$

so ist

$$c_1^P \cdot \mathbf{L}^P_{Nicht-Hol} - c_2^P \cdot \mathbf{R}^P_{Nicht-Hol} = 0.$$

Um detailliert zu zeigen, warum das so ist, benötigen wir folgende

Nebenrechnung 5.9.
Wir rechnen nach für Basiselemente von Typ I, II und III:

$$\begin{aligned}
Typ\ I\ &: c_1^P(-\tfrac{i}{2} - \tfrac{ik}{2})f_i a_{i,i} - c_2^P(-\tfrac{il}{2})f_i a_{i,i} = 0\\
Typ\ II\ &: c_1^P(-i - ik)f_i a_{i,j} + c_1^P(-\tfrac{i}{2} - \tfrac{ik}{2})f_j a_{i,i} - (c_2^P(-il)f_i a_{i,j} + c_2^P(-\tfrac{il}{2})f_j a_{i,i})\\
&\quad = \left(-\tfrac{l}{4} - \tfrac{kl}{4}\right)(2f_i a_{i,j} + f_j a_{i,i} - 2f_i a_{i,j} - f_j a_{i,i}) = 0\\
Typ\ III\ &: c_1^P(-i - ik)f_i a_{j,k} + c_1^P(-i - ik)f_j a_{i,k} + c_1^P(-i - ik)f_k a_{i,j}\\
&\qquad - c_2^P(-il)f_i a_{j,k} - c_2^P(-il)f_j a_{i,k} - c_2^P(-il)f_k a_{i,j}\\
&\quad = \left(-\tfrac{l}{2} - \tfrac{kl}{2}\right)(f_i a_{j,k} + f_j a_{i,k} + f_k a_{i,j} - f_i a_{j,k} - f_j a_{i,k} - f_k a_{i,j}) = 0.
\end{aligned}$$

Somit ist die Nebenrechnung abgeschlossen.

Für die Differenz

$$c_1^P \cdot \underbrace{D_{Sym^1 \otimes det^k}(f)g}_{\mathbf{L}_D} - c_2^P \cdot \underbrace{(f \otimes D_{det^l}(g))}_{\mathbf{R}_D}$$

bedeutet das Einsetzen der Koeffizienten c_1^P und c_2^P (mit $l \neq 0$, $k \neq$ -1) ein Wegfallen der Pieri-Komponente des Imaginärteils. Analog gehen wir nun für die Anti-Pieri-Komponente vor.

Nicht-holomorpher Anteil: Anti-Pieri-Komponente Wir erinnern uns an die Basiselemente der Anti-Pieri-Komponente aus Abschnitt 2.2.2. Diese lauten

Typ II a	$-\frac{1}{2}(x_i \otimes 2y_iy_j) + x_j \otimes y_i^2$	$\text{für } i,j=\{1,\dots,n\}\ ,\ i \neq j$
Typ III a	$-\frac{1}{2}(x_i \otimes 2y_jy_k) + (-\frac{1}{2})(x_j \otimes 2y_iy_k) + x_k \otimes 2y_iy_j$	$\text{für } 1 \leq i < j < k \leq n$
Typ III b	$-\frac{1}{2}(x_i \otimes 2y_jy_k) + x_j \otimes 2y_iy_k + (-\frac{1}{2})(x_k \otimes 2y_iy_j)$	$\text{für } 1 \leq i < j < k \leq n$

Die zur Anti-Pieri-Komponente dazugehörigen Koeffizienten aus $\mathbf{L}_{Nicht-Hol}$ und $\mathbf{R}_{Nicht-Hol}$ lauten somit:

	Koeffizienten aus $\mathbf{L}_{Nicht-Hol}$	Koeffizienten aus $\mathbf{R}_{Nicht-Hol}$
Typ II a	$(-\frac{i}{4} + \frac{ik}{2})f_ia_{i,j} + (\frac{i}{4} - \frac{ik}{2})f_ja_{i,i}$	$\frac{il}{2}f_ia_{i,j} + (-\frac{il}{2})f_ja_{i,i}$
Typ III a	$(-\frac{i}{4} + \frac{ik}{2})f_ia_{j,k} + (-\frac{i}{4} + \frac{ik}{2})f_ja_{i,k}$ $+(\frac{i}{2} - ik)f_ka_{i,j}$	$\frac{il}{2}f_ia_{j,k} + \frac{il}{2}f_ja_{i,k}$ $+(-il)f_ka_{i,j}$
Typ III b	$(-\frac{i}{4} + \frac{ik}{2})f_ia_{j,k} + (\frac{i}{2} - ik)f_ja_{i,k}$ $+(-\frac{i}{4} + \frac{ik}{2})f_ka_{i,j}$	$\frac{il}{2}f_ia_{j,k} + (-il)f_ja_{i,k}$ $+\frac{il}{2}f_ka_{i,j}$

Forderungen an die Indizes i, j, k für Typ IIa,IIIa & b gemäß der Anti-Pieri-Basis.

Die linke Spalte der Tabelle beschreibt die Anti-Pieri-Komponente aus $\mathbf{L}_{Nicht-Hol}$ und wir bezeichnen diese mit $\mathbf{L}_{Nicht-Hol}^{AP}$. Die rechte Spalte der Tabelle beschreibt die Anti-Pieri-Komponente aus $\mathbf{R}_{Nicht-Hol}$, diese wird mit $\mathbf{R}_{Nicht-Hol}^{AP}$ bezeichnet. Wählen wir nun die Koeffizienten

$$c_1^{AP} = \frac{il}{2} \quad \text{und} \quad c_2^{AP} = \left(-\frac{i}{4} + \frac{ik}{2}\right)$$

so ist

$$c_1^{AP} \cdot \mathbf{L}_{Nicht-Hol}^{AP} - c_2^{AP} \cdot \mathbf{R}_{Nicht-Hol}^{AP} = 0$$

und für die Differenz

$$c_1^{AP} \cdot \underbrace{D_{Sym^1 \otimes det^k}(f)g}_{\mathbf{L}_D} - c_2^{AP} \cdot \underbrace{(f \otimes D_{det^l}(g))}_{\mathbf{R}_D}$$

bedeutet das Einsetzen der Koeffizienten c_1^{AP} und c_2^{AP} (mit $l \neq 0$, $k \neq \frac{1}{2}$) ein Wegfallen der Anti-Pieri-Komponente des Imaginärteils.

Bilden wir nun eine Linearkombination, in der sowohl die Koeffizienten c_1^P und c_2^P als auch die Koeffizienten c_1^{AP} und c_2^{AP} enthalten sind, so gilt

$$c_1^P \cdot \mathbf{L}_{Nicht-Hol}^P + c_1^{AP} \cdot \mathbf{L}_{Nicht-Hol}^{AP} - c_2^P \cdot \mathbf{R}_{Nicht-Hol}^P - c_2^{AP} \cdot \mathbf{R}_{Nicht-Hol}^{AP} = 0$$

und der gesamte nicht-holomorphe Anteil von $\mathbf{L}_D$ und $\mathbf{R}_D$ fällt weg.

Mit dem Wegfall des nicht-holomorphen Anteils haben wir nun einen ersten Meilenstein in diesem Kapitel erreicht und wissen nun, dass wir mit der Differenz (5.1) (s. Seite 71) einen bilinearen **holomorphen** Operator erhalten. Was wir jetzt noch nicht wissen ist, wie die holomorphen Anteile, aufgeteilt in Pieri- und Anti-Pieri-Komponente, aussehen und ob unsere Konstruktion letztlich überhaupt ungleich Null ist. Beides wollen wir nachfolgend klären.

Völlig analog zur Vorgehensweise bei den Imaginärteilen, betrachten wir daher nachfolgend auch die Pieri-Komponente und Anti-Pieri-Komponente für die holomorphen Anteile $\mathbf{L}_{Hol}$ und $\mathbf{R}_{Hol}$.

Holomorpher Anteil: Pieri-Komponente Die zur Pieri-Komponente dazugehörigen Koeffizienten aus $\mathbf{L}_{Hol}$ und $\mathbf{R}_{Hol}$ lauten:

	Koeffizienten aus $\mathbf{L}_{Hol}$	Koeffizienten aus $\mathbf{R}_{Hol}$
Typ I	$\left(\frac{\partial}{\partial z_{i,i}} f_i\right) g$	$f_i \left(\frac{\partial}{\partial z_{i,i}} g\right)$
Typ II	$\left(\frac{\partial}{\partial z_{i,j}} f_i\right) g + \left(\frac{\partial}{\partial z_{i,i}} f_j\right) g$	$f_i \left(\frac{\partial}{\partial z_{i,j}} g\right) + f_j \left(\frac{\partial}{\partial z_{i,i}} g\right)$
Typ III	$\left(\frac{\partial}{\partial z_{j,k}} f_i\right) g + \left(\frac{\partial}{\partial z_{i,k}} f_j\right) g + \left(\frac{\partial}{\partial z_{i,j}} f_k\right) g$	$f_i \left(\frac{\partial}{\partial z_{j,k}} g\right) + f_j \left(\frac{\partial}{\partial z_{i,k}} g\right) + f_k \left(\frac{\partial}{\partial z_{i,j}} g\right)$

Forderungen an Indizes i, j, k für Typ I, II & III der Pieri-Basis.

Die linke Spalte (bzw. die rechte Spalte) beschreibt die Pieri-Komponente aus $\mathbf{L}_{Hol}$ (bzw. $\mathbf{R}_{Hol}$) und wir bezeichnen diese mit $\mathbf{L}^P_{Hol}$ (bzw. $\mathbf{R}^P_{Hol}$). Mit unseren Koeffizienten c^P_1 und c^P_2 ist

$$c^P_1 \cdot \mathbf{L}^P_{Hol} - c^P_2 \cdot \mathbf{R}^P_{Hol}$$

$$= c^P_1 \cdot \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in I_P} \left(\frac{\partial}{\partial z_{\alpha,\beta}} f_\gamma\right) g - c^P_2 \cdot \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in I_P} f_\gamma \left(\frac{\partial}{\partial z_{\alpha,\beta}} g\right).$$

Hier bezeichnet I_P die Indexmenge, in der alle Tupel (α, β, γ) bzw. „Index-Kombinationen“ aus der Basis der Pieri-Komponente enthalten sind, wie sie auch in der obigen Tabelle abzulesen sind, genauer

$$I_P = \{\underbrace{(i,i,i)}_{Typ\ I}, \underbrace{(i,i,j),(i,j,i)}_{Typ\ II}, \underbrace{(i,j,k),(j,k,i),(i,k,j)}_{Typ\ III}\}.$$

Holomorpher Anteil: Anti-Pieri-Komponente Die zur Anti-Pieri- Komponente dazugehörigen Koeffizienten aus $\mathbf{L}_{Hol}$ und $\mathbf{R}_{Hol}$ lauten:

	Koeffizienten aus $\mathbf{L}_{Hol}$	Koeffizienten aus $\mathbf{R}_{Hol}$
Typ II a	$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_{i,j}} f_i\right) g + \left(\frac{\partial}{\partial z_{i,i}} f_j\right) g$	$-\frac{1}{2} f_i \left(\frac{\partial}{\partial z_{i,j}} g\right) + f_j \left(\frac{\partial}{\partial z_{i,i}} g\right)$
Typ III a	$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_{j,k}} f_i\right) g + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z_{i,k}} f_j\right) g + \left(\frac{\partial}{\partial z_{i,j}} f_k\right) g$	$-\frac{1}{2} f_i \left(\frac{\partial}{\partial z_{j,k}} g\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) f_j \left(\frac{\partial}{\partial z_{i,k}} g\right) + f_k \left(\frac{\partial}{\partial z_{i,j}} g\right)$
Typ III b	$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_{j,k}} f_i\right) g + \left(\frac{\partial}{\partial z_{i,k}} f_j\right) g + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z_{i,j}} f_k\right) g$	$-\frac{1}{2} f_i \left(\frac{\partial}{\partial z_{j,k}} g\right) + f_j \left(\frac{\partial}{\partial z_{i,k}} g\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) f_k \left(\frac{\partial}{\partial z_{i,j}} g\right)$

Es gelten die Forderungen an die Indizes i, j, k für Typ IIa, IIIa & b der Anti-Pieri-Basis.

Die linke Spalte (bzw. rechte Spalte) beschreibt die Anti-Pieri-Komponente aus $\mathbf{L}_{Hol}$ (bzw. $\mathbf{R}_{Hol}$) und wir bezeichnen diese mit $\mathbf{L}_{Hol}^{AP}$ (bzw. $\mathbf{R}_{Hol}^{AP}$). Mit unseren Koeffizienten c_1^{AP} und c_2^{AP} ist

$$c_1^{AP} \cdot \mathbf{L}_{Hol}^{AP} - c_2^{AP} \cdot \mathbf{R}_{Hol}^{AP}$$

$$= c_1^{AP} \cdot \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in I_{AP}} \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial z_{\alpha,\beta}} f_\gamma\right) g - c_2^{AP} \cdot \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in I_{AP}} \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}\, f_\gamma \left(\frac{\partial}{\partial z_{\alpha,\beta}} g\right)$$

mit $\epsilon_{i,j,i} = -\frac{1}{2}$, $\epsilon_{i,i,j} = 1$, $\epsilon_{i,j,k} = \frac{1}{2}$, $\epsilon_{j,k,i} = -1$ und $\epsilon_{i,k,j} = \frac{1}{2}$.

Hierbei bezeichnet I_{AP} die Indexmenge, in der alle Tupel (α, β, γ) bzw. „Index-Kombinationen“ aus der Basis der Anti-Pieri-Komponente enthalten sind, wie sie auch in der obigen Tabelle abzulesen sind, genauer

$$I_{AP} = \{\underbrace{(i,j,i), (i,i,j)}_{Typ\ II\ a}, \underbrace{(i,j,k), (j,k,i), (i,k,j)}_{Typ\ III\ a,\ III\ b}\}.$$

Betrachten wir nun unsere Differenz (5.1), so erhalten wir letztlich einen **bilinearen, holomorphen Differentialoperator**, der sich in **zwei Komponenten (Pieri & Anti-Pieri)** aufteilen lässt:

$$\begin{gathered}\underbrace{c_1^P \cdot \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in I_P} \left(\frac{\partial}{\partial z_{\alpha,\beta}} f_\gamma\right) g \;-\; c_2^P \cdot \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in I_P} f_\gamma \left(\frac{\partial}{\partial z_{\alpha,\beta}} g\right)}_{Pieri-Komponente\, des\, Differentialoperators} \\ + \\ \underbrace{c_1^{AP} \cdot \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in I_{AP}} \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial z_{\alpha,\beta}} f_\gamma\right) g \;-\; c_2^{AP} \cdot \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in I_{AP}} \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}\, f_\gamma \left(\frac{\partial}{\partial z_{\alpha,\beta}} g\right).}_{Anti-Pieri-Komponente\, des\, Differentialoperators}\end{gathered} \tag{5.7}$$

Dies ist unser erster konstruierter Differentialoperator in diesem Kapitel und wir formulieren folgendes

Erstes Ergebnis Allgemein formuliert haben wir es geschafft zu zeigen, dass es für eine Darstellung $\rho = Sym^1 \otimes det^k$ einen äquivarianten Automorphismus $\mathcal{L}$ von $X \otimes S_1(T)$ gibt derart, dass die Differenz (5.1)

$$l \cdot \underbrace{D_\rho(f)g}_{\mathbf{L}_D} - \mathcal{L} \circ \underbrace{(f \otimes D_{det^l}(g))}_{\mathbf{R}_D}$$

holomorph wird. Hinter $\mathcal{L}$ verbirgt sich gerade die Zerlegung des Tensorproduktes $Sym^1 \otimes Sym^2$ in irreduzible Teile (Pieri & Anti-Pieri).

Wir wissen bereits aus (5.2) und (5.6), dass sowohl $\mathbf{L}_D$ als auch $\mathbf{R}_D$ aus zwei Termen, einem holomorphen und einem nicht-holomorphen, besteht. Von den nicht-holomorphen Anteilen wissen wir jetzt, dass sie wegfallen. Darüber hinaus wissen wir, dass der holomorphe Anteil von $\mathbf{L}_D$ aus den holomorphen Ableitungen von f multipliziert mit g besteht. Von dem holomorphen Term von $\mathbf{R}_D$ wissen wir, dass er aus f selbst, multipliziert mit den Ableitungen von g, besteht. Folglich kann die Differenz dieser holomorphen Terme nicht zu null werden und auch die Aufteilung der holomorphen Terme in Pieri- & Anti-Pieri-Komponente hat daran nichts geändert. Kritisch zu begutachten ist natürlich, ob die Elemente von gleicher Gestalt (die partiellen Ableitungen von f mit gleichem Index-Tripel) aus der Anti-Pieri-Komponente und der Pieri-Komponente sich gegenseitig aufheben und zu einem verschwinden des Differentialoperators führen könnten. Man kann aber leicht nachrechnen, dass dies nicht der Fall ist. Auch kann man schnell sehen, dass die Elemente von Typ I nur in der Pieri-Komponente vorkommen und sich somit niemals durch Elemente aus der Anti-Pieri-Komponente aufheben lassen und der Differentialoperator auch schon deshalb nicht null werden kann, sofern $l \neq 0$ und $k \neq -1$.

Auch die irreduziblen Komponenten werden im allgemeinen nicht zu Null. Einzige Ausnahme ist der Fall $l = 0$ & $k = -1$, für den die Pieri-Komponente wegfällt und der Fall $l = 0$ & $k = \frac{1}{2}$, für den die Anti-Pieri-Komponente wegfällt.

Bleibt noch die Frage zu klären, ob unser Differentialoperator äquivariant bezüglich der symplektischen Gruppe $Sp(n, \mathbb{R})$ ist. Diese Frage können wir schnell mit einem Ja beantworten, denn die Äquivarianz liegt darin begründet, dass wir mit (5.1) gerade die Differenz zweier nicht-holomorpher, äquivarianter Differentialoperatoren D_ρ (s. Satz 3.9.) betrachten und die Äquivarianz hierbei natürlich erhalten bleibt.

Nun haben wir alle notwendigen Informationen und formulieren folgendes

Theorem 5.10.
Mit Konstruktion (5.7) gibt es zu einer Darstellung $\rho = Sym^1 \otimes det^k$ einen bilinearen, holomorphen Differentialoperator

$$\big[*, *\big] : \mathcal{H}_{Sym^1 \otimes det^k}(\mathbb{H}_n, X) \times \mathcal{H}_{det^l}(\mathbb{H}_n, \mathbb{C}) \to \mathcal{H}_{Sym^1 \otimes Sym^2 \otimes det^{k+l}}(\mathbb{H}_n, S_1(T, X))$$

der für alle $f \in \mathcal{H}_{Sym^1 \otimes det^k}(\mathbb{H}_n, X)$ und $g \in \mathcal{H}_{det^l}(\mathbb{H}_n, \mathbb{C})$ die Äquivarianzeigenschaft

$$\big[f \mid_{Sym^1 \otimes det^k} M, g \mid_{det^l} M\big] = \big[f, g\big] \mid_{Sym^1 \otimes Sym^2 \otimes det^{k+l}} M$$

für $M \in Sp(n, \mathbb{R})$ erfüllt. Die Pieri-Komponente der Konstruktion ist Null nur für den Fall $l = 0$ & $k = -1$ und die Anti-Pieri-Komponente ist Null nur für den Fall $l = 0$ & $k = \frac{1}{2}$.

5.2 Linearer, holomorpher Differentialoperator

Der Übergang von unserem bilinearen Differentialoperator zu einem linearen Operator gestaltet sich hier ebenso wie in Kapitel 4. Für Details verweisen wir daher auf Abschnitt 4.2.

Völlig analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 4.2 können wir daher auch in den bilinearen Differentialoperator aus diesem Kapitel für g die Funktion $det(Z_2)^l$ einsetzen. Nach Berechnung der partiellen Ableitungen von $det(Z_2)^l$ (s. Bemerkung 4.8.) erhalten wir den Ausdruck

$$c_1^P \cdot det(Z_2)^l \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in I_P} \left(\frac{\partial}{\partial z_{\alpha,\beta}} f_\gamma\right) - c_2^P \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in I_P} f_\gamma \underbrace{\left(\frac{\partial\, det(Z_2)^l}{\partial z_{\alpha,\beta}}\right)}_{l\cdot det(Z_2)^{l-1}\cdot((-1)^{\alpha+\beta} det(Z_{\alpha,\beta}))}$$
$$+$$
$$c_1^{AP} \cdot det(Z_2)^l \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in I_{AP}} \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial z_{\alpha,\beta}} f_\gamma\right) - c_2^{AP} \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in I_{AP}} \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}\, f_\gamma \underbrace{\left(\frac{\partial\, det(Z_2)^l}{\partial z_{\alpha,\beta}}\right)}_{analog} \tag{5.8}$$

Das Einsetzen der Funktion $det(Z_2)^l$ für g in den Differentialoperator liefert uns auch hier einen linearen Differentialoperator, der nur noch von der Funktion f abhängt. Aus $g = det(Z_2)^l$ wurden, von Z_2 abhängige, Koeffizienten des Operators und da es sich wieder um die Differenz zweier Monome unterschiedlichen Grades handelt, ist die Konstruktion auch hier ungleich Null, sofern $l \neq 0$. Wie in Kapitel 4 schon der Fall, sind die nichtkonstanten Koeffizienten ein Nachteil, den wir hinnehmen müssen, für das Erhalten eines linearen und iterierbaren Differentialoperators.

Wenn man Kapitel 4, Abschnitt 4.2. ausführlich gelesen hat, so beinhaltet dieser Abschnitt 5.2. natürlich keine Überraschungen mehr. Einer einheitlichen Vorgehensweise zuliebe formulieren wir aber auch hier ein **zweites Ergebnis** und fassen dies zusammen in folgendem

Theorem 5.11.
Mit Konstruktion (5.8) gibt es zu einer Darstellung $\rho = Sym^1 \otimes det^k$ einen linearen und holomorphen Differentialoperator

$$\mathcal{D} : \mathcal{H}_{Sym^1 \otimes det^k}(\mathbb{H}_{2n}, X) \to \mathcal{H}_{Sym^1 \otimes Sym^2 \otimes det^k}(\mathbb{H}_{2n}, S_1(T, X))$$

vermöge

$$\mathcal{D} := \left[*, det(Z_2)^l\right]$$

der für alle $f \in \mathcal{H}_{Sym^1 \otimes det^k}(\mathbb{H}_{2n}, X)$ die Äquivarianzeigenschaft

$$\mathcal{D}(f \mid_{Sym^1 \otimes det^k} M^{\uparrow}) = \mathcal{D}(f) \mid_{Sym^1 \otimes Sym^2 \otimes det^k} M^{\uparrow}$$
$$\mathcal{D}(f \mid_{Sym^1 \otimes det^k} M^{\downarrow}) = \mathcal{D}(f) \mid_{Sym^1 \otimes Sym^2 \otimes det^k} M^{\downarrow}$$

und

$$\mathcal{D}(f \mid_{Sym^1 \otimes det^k} V) = \mathcal{D}(f) \mid_{Sym^1 \otimes Sym^2 \otimes det^k} V$$

für alle $M \in Sp(n, \mathbb{R})$ und $V = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \in Sp(2n, \mathbb{R})$ erfüllt. Die Konstruktion ist Null nur für den Fall $l = 0$.

Bemerkung 5.12.
Wie schon in Kapitel 4, haben auch die Konstruktionen in diesem Kapitel jeweils eine Variante für holomorphe Funktionen und eine für C^∞-Funktionen.

Warum haben wir in diesem Kapitel nun diesen enormen Aufwand einer weiteren Konstruktion auf uns genommen, um einen Differentialoperator zu einer Darstellung $\rho = Sym^1 \otimes det^k$ zu erhalten, obwohl wir in Kapitel 4 bereits einen Differentialoperator zu einer Darstellung $\rho = Sym^\nu \otimes det^k$ explizit konstruiert hatten? Das Ergebnis des nachfolgenden Abschnittes wird eine Antwort auf die Frage liefern und zeigen, warum sich die Mühe gelohnt hat.

5.3 Bonus: Differentialoperatoren zu einer beliebigen irreduziblen Darstellung

Wir haben die Differentialoperatoren in diesem Kapitel entwickelt unter der Voraussetzung, dass wir eine Darstellung $\rho = Sym^1 \otimes det^k$ betrachten. Hierfür haben wir unsere Differentialoperatoren explizit konstruiert. Nun möchten wir unsere Überlegungen weiterführen und abstrakt begründen, warum wir sogar einen Differentialoperator zu einer beliebigen irreduziblen Darstellung ρ erhalten können.

Wir sagen, dass die Darstellung $\rho : GL(n, \mathbb{C}) \to GL(X)$ die **Eigenschaft** $\star$ erfüllt, wenn es einen äquivarianten Automorphismus $\mathcal{L}$ von $X \otimes S_1(T)$ gibt derart, dass

$$l \cdot D_\rho(f)g - \mathcal{L} \circ (f \otimes D_{det^l}(g))$$

holomorph ist. Für $\rho = Sym^1 \otimes det^k$ haben wir in Abschnitt 5.1 gezeigt, dass **Eigenschaft** $\star$ gilt. Wir betrachten jetzt nur noch den Fall $k = 0$, folglich die Darstellung $\rho = id = Sym^1$.

Nun benötigen wir zunächst folgende

Bemerkung 5.13.
Die ***Eigenschaft*** $\star$ *ist mit Tensorprodukten verträglich, d.h. wenn* ρ *und* $\rho^{'}$ *zwei Darstellungen von* $GL(n, \mathbb{C})$ *sind, die* ***Eigenschaft*** $\star$ *erfüllen, dann tut es auch das Tensorprodukt* $\rho \otimes \rho^{'}$.

Beweis.
Im folgenden verwenden wir $\sim$ für die Gleichheit bis auf holomorphe Funktionen. Es gilt

$$\begin{aligned} D_\rho(f) \cdot g &\sim \mathcal{L}_{\rho \otimes \tau}(f \otimes D_{det^l}(g)) \\ D_{\rho^{'}}(f^{'}) \cdot g &\sim \mathcal{L}_{\rho^{'} \otimes \tau}(f^{'} \otimes D_{det^l}(g)) \end{aligned} \tag{5.9}$$

Nach Lemma 3.10. aus Kapitel 3 folgt dann

$$D_{\rho\otimes\rho'}(f\otimes f^{'})\cdot g=(D_\rho(f)\otimes f^{'}+f\otimes D_{\rho'}(f^{'}))\cdot g$$
$$\overset{g\ skalarwertig}{=}(D_\rho(f)\cdot g)\otimes f^{'}+f\otimes(D_{\rho'}(f^{'})\cdot g)$$

und somit ist

$$D_{\rho\otimes\rho'}(f\otimes f^{'})\cdot g\ \sim\ \mathcal{L}_{\rho\otimes\tau}(f\otimes D_{det^l}(g))\otimes f^{'}+f\otimes\mathcal{L}_{\rho'\otimes\tau}(f^{'}\otimes D_{det^l}(g)).$$

Nun haben wir fast, was wir benötigen, nur die Reihenfolge im zweiten Term ist noch nicht wie gewünscht. Man braucht statt (5.9)

$$D_{\rho'}(f^{'})\cdot g\sim\mathcal{L}_{\tau\otimes\rho'}(D_{det^l}(g)\otimes f^{'}). \tag{5.10}$$

Mit dieser modifizierten Reihenfolge (s. hierzu untenstehenden Hinweis), haben wir dann

$$\mathcal{L}_{\rho\otimes\tau}(f\otimes D_{det^l}(g))\otimes f^{'}+f\otimes\mathcal{L}_{\tau\otimes\rho'}(D_{det^l}(g)\otimes f^{'})$$

und das können wir auch schreiben als

$$\tilde{\mathcal{L}}(f\otimes D_{det^l}(g)\otimes f^{'})$$

mit $\tilde{\mathcal{L}}:=\mathcal{L}_{\rho\otimes\tau}\otimes id_{X'}+id_X\otimes\mathcal{L}_{\tau\otimes\rho'}$.

Die Summe zweier äquivarianter Isomorphismen ist wieder äquivariant, jedoch haben wir hier keinen Isomorphismus mehr, sondern nur noch einen Homomorphismus.

Somit sind wir mit dem Beweis der Bemerkung 5.13. fertig und möchten nachfolgend nur noch einen kurzen Hinweis, zur veränderten Reihenfolge von Formel (5.9) auf (5.10), geben.

Hinweis:
Warum konnten wir diese „Reihenfolge“ in Formel (5.10) einfach so ändern? Grundlegend ist der Isomorphismus $S_1(T,X)\sim S_1(T)\otimes X$ (aus Satz 3.5.).

Hierbei kommt es nicht auf die Reihenfolge an und wir dürfen $S_1(T) \otimes X$ mit $X \otimes S_1(T)$ identifizieren. Betrachten wir nun auch nochmal Lemma 3.10 aus Kapitel 3 (und dessen Anwendung in diesem Abschnitt), so steht auf der linken Seite der Gleichung eine $S_1(T, X \otimes Y)$-wertige Funktion und rechts die Summe einer $S_1(T,X) \otimes Y$-wertigen und einer $X \otimes S_1(T,Y)$-wertigen Funktion. Alle drei sind zu interpretieren als Funktionen mit Werten in Abbildungen von T nach $X \times Y$ (s. auch [19, (13.29)]). Entsprechend kommt es, in unserem Kontext, auch bei den Tensorprodukten von Abbildungen nicht auf die Reihenfolge an. Insbesondere ist die Reihenfolge der Argumente in $\mathcal{L}_{\rho' \otimes \tau}(f' \otimes D_{det^l}(g))$ irrelevant und obige Begründung funktioniert mit $\tilde{\mathcal{L}} := \mathcal{L}_{\rho \otimes \tau} \otimes id_{X'} + id_X \otimes \mathcal{L}_{\tau \otimes \rho'}$, angewandt auf $f \otimes D_{det^l}(g) \otimes f'$.

$\square$

Mit Hilfe dieser Bemerkung 5.13. und dem Wissen, dass $\rho = id = Sym^1$ die **Eigenschaft** $\star$ für $GL(n,\mathbb{C})$ erfüllt, ist nun auch klar, dass **Eigenschaft** $\star$ auch für jedes Tensorprodukt $\rho^{\otimes m}$ für dieses ρ gilt. Dann gilt **Eigenschaft** $\star$ auch für jede irreduzible Teildarstellung von $\rho^{\otimes m}$. Andererseits kommt jede irreduzible Darstellung in einem geeigneten $\rho^{\otimes m}$ vor (s. schwache Version von Satz von Weyl 2.13.), also gilt **Eigenschaft** $\star$ für jede irreduzible Darstellung von $GL(n,\mathbb{C})$ wenn es nur für $\rho = Sym^1$ gilt.

Sei ρ nun eine beliebige irreduzible Darstellung $\rho : GL(n,\mathbb{C}) \to GL(X)$, so wird die Differenz

$$l \cdot D_\rho(f) \cdot g - \mathcal{L} \circ (f \otimes D_{det^l}(g)) \tag{5.11}$$

demnach holomorph und wir stellen uns wieder die folgende Frage.

Ist diese Konstruktion ungleich null? Wir behaupten ja und möchten dies nachfolgend begründen. Hierzu betrachten wir in einem ersten Schritt den Ausdruck $D_\rho(f) \cdot g$ der Differenz und erinnern uns (s. Unterabschnitt

5.1.1) daran, dass

$$\begin{aligned} D_\rho(f)\cdot g =& \rho(Y)^{-1}\sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z}\left[\rho(Y)f\right]\cdot g \\ =& \rho(Y)^{-1}\rho(Y)\left(\sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z} f\right)\cdot g + \rho(Y)^{-1} f\left(\sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z}\rho(Y)\right)\cdot g \\ =& \underbrace{\left(\sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z} f\right)\cdot g}_{holomorpher\ Teil} + \underbrace{\rho(Y)^{-1} f\left(\sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z}\rho(Y)\right)\cdot g}_{nicht-holomorpher\ Teil} \end{aligned}$$

Man sieht, dass $D_\rho(f)\cdot g$ aus zwei Termen besteht. Der holomorphe Term besteht aus den holomorphen Ableitungen von f multipliziert mit g und der andere Term ist der Nicht-holomorphe. Als nächstes betrachtet man den Ausdruck $f\otimes D_{\det^l}(g)$ genauer (s. Unterabschnitt 5.1.3):

$$\begin{aligned} f\otimes D_{\det^l}(g) =& f\otimes \det(Y)^{-l}\sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z}\left(\det(Y)^l g\right) \\ =& \underbrace{f\otimes\left(\sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z} g\right)}_{holomorpher\ Teil} + \underbrace{f\otimes det(Y)^{-l}\left(\sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z} det(Y)^l\right) g}_{nicht-holomorpher\ Teil} \end{aligned}$$

Auch hier erhalten wir wieder zwei Terme, wobei der holomorphe Term aus den Ableitungen von g multipliziert mit f selbst besteht.

Bilden wir nun die Differenz (5.11), so bleiben auf beiden Seiten nur noch die holomorphen Anteile (und ein äquivarianter Homomorphismus auf der rechten Seite) stehen. Da auf der linken Seite die holomophen Ableitungen von f stehen und auf der rechten Seite keine Ableitungen von f vorkommen, sondern nur f selbst, kann die linke Seite $l\cdot D_\rho(f)\cdot g$ für $l\neq 0$ somit nicht zu Null werden und folglich wird auch der Differentialoperator nicht zu Null.

Wir können sogar noch eine weitere Aussage treffen und formulieren die

Beobachtung 5.14.
Es ist auch keine irreduzible Komponente von $D_\rho(f)$ gleich null.

Beweis.
Dafür reicht es, spezielle Funktionen f zu finden, so dass $D_\rho(f)$ - ausgewertet an einer festen Stelle - den ganzen Raum $S_1(T,X)$ erzeugen.

Es sei $X = \mathbb{C}^m$. Der Raum $S_1(T,X)$ hat die Dimension $dim(T) \cdot m$. Eine Basis von $S_1(T,X)$ bekommen wir auf folgende Weise:

Ein Basiselement $e_{i,j}$ von T [5] wird auf 1 in der t-ten Komponente von X abgebildet und auf 0 in jeder anderen Komponente. Jedes andere Basiselement $e_{i',j'}$ von T geht in jeder Komponente von X auf 0. So bekommen wir Basiselemente $\psi(i,j,t)$.

Sei nun (i,j,t) gegeben. Wir definieren eine X-wertige Funktion $f(i,j,t)$ auf $\mathbb{H}_n$ durch

$$f(i,j,t)(Z) = \begin{cases} 0 & auf\ Komponente\ t'\ falls\ t' \neq t \\ z_{i,j} & auf\ Komponente\ t \end{cases}$$

Dann ist $D(f(i,j,t)) = \psi(i,j,t)$, denn

$$\begin{aligned} D(f(i,j,t))(u) &= \sum_{1\leq i\leq j\leq n} u_{i,j} \frac{\partial\, f(i,j,t)}{\partial z_{i,j}} \\ &= \begin{cases} 0 & auf\ t'\ falls\ t' \neq t \\ u_{i,j} \cdot 1 & auf\ t \end{cases} \\ &= \psi(i,j,t)(u). \end{aligned}$$

Insbesondere folgt dann, dass man durch $D_\rho(f)(Z)$, wenn man alle X- wertigen holomorphen Funktionen auf $\mathbb{H}_n$ durchläuft und alle Elemente Z von $\mathbb{H}_n$, den gesamten Raum $S_1(T,X)$ erhält. □

[5] Aufgrund der Symmetrie gilt $e_{i,j} = e_{j,i}$ mit $1 \leq i \leq j \leq n$.

Drittes Ergebnis Nun haben wir alle notwendigen Erkenntnisse vorliegen und formulieren nachfolgend ein letztes und merkenswertes Theorem in dieser Arbeit.

Theorem 5.15.
Es gibt zu jeder beliebigen irreduziblen Darstellung ρ einen bilinearen, holomorphen Differentialoperator

$$\big[*,*\big] : \mathcal{H}_\rho(\mathbb{H}_n, X) \times \mathcal{H}_{det^l}(\mathbb{H}_n, \mathbb{C}) \to \mathcal{H}_{\rho\otimes Sym^2\otimes det^l}(\mathbb{H}_n, S_1(T, X))$$

der für alle Funktionen $f \in \mathcal{H}_\rho(\mathbb{H}_n, X)$ und $g \in \mathcal{H}_{det^l}(\mathbb{H}_n, \mathbb{C})$ die Äquivarianzeigenschaft

$$\big[f \mid_\rho M, g \mid_{det^l} M\big] = \big[f, g\big] \mid_{\rho\otimes Sym^2\otimes det^l} M$$

für $M \in Sp(n, \mathbb{R})$ erfüllt. Die Konstruktion ist Null nur für den Fall $l = 0$.

Des Weiteren gibt es zu jeder beliebigen irreduziblen Darstellung ρ einen linearen und holomorphen Differentialoperator

$$\mathcal{D} : \mathcal{H}_\rho(\mathbb{H}_{2n}, X) \to \mathcal{H}_{\rho\otimes Sym^2}(\mathbb{H}_{2n}, S_1(T, X))$$

der für alle Funktionen $f \in \mathcal{H}_\rho(\mathbb{H}_{2n}, X)$ die Äquivarianzeigenschaft

$$\mathcal{D}(f \mid_\rho M^\uparrow) = \mathcal{D}(f) \mid_{\rho\otimes Sym^2} M^\uparrow$$
$$\mathcal{D}(f \mid_\rho M^\downarrow) = \mathcal{D}(f) \mid_{\rho\otimes Sym^2} M^\downarrow$$

für $M \in Sp(n, \mathbb{R})$ erfüllt. Die Konstruktion ist Null nur für den Fall $l = 0$.

Wir schließen das Kapitel 5 und somit diese Arbeit nachfolgend ab mit einem Beispiel für den Fall $n = 2$ zur Veranschaulichung des, in Abschnitt 5.1, konstruierten Differentialoperators.

5.4 Beispiel: Der Fall n=2.

Gegeben sei f aus $C^\infty_{Sym^1 \otimes det^k}(\mathbb{H}_2, X)$ und g aus $C^\infty_{det^l}(\mathbb{H}_2, \mathbb{C})$. Wir gehen vor wie im allgemeinen Fall und bilden die Differenz (5.1). Auch entwickeln wir wieder $\mathbf{L}_D$ und $\mathbf{R}_D$ getrennt voneinander.

Entwicklung von $\mathbf{L}_D$

Für $n = 2$ und $\rho = Sym^1 \otimes det^k$ erhalten wir für $\mathbf{L}_D$ den Ausdruck

$$Sym^1\begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{1,2} & y_{2,2} \end{pmatrix}^{-1} \otimes det(Y)^{-k} \sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z}\Big[Sym^1\begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{1,2} & y_{2,2} \end{pmatrix} \sum_{d=1}^{2} f_d x_d \, det(Y)^k\Big] g$$

$$= \frac{1}{det(Y)^{k+1}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_{2,2} & -y_{1,2} \\ -y_{1,2} & y_{1,1} \end{pmatrix}}_{Adj(Y)} \sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z}\Big[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{1,2} & y_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} det(Y)^k\Big] g$$

Nach Anwenden der Produktregel erhält man für $\mathbf{L}_D$ die Summe

$$\frac{1}{det(Y)^{k+1}} \underbrace{\Big[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{2,2} & -y_{1,2} \\ -y_{1,2} & y_{1,1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{1,2} & y_{2,2} \end{pmatrix}\Big(\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z}\Big)\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} det(Y)^k\Big]}_{Nebenrechnung\ 1\ (s.\ folgende\ Seite)} g \, +$$

$$\frac{1}{det(Y)^{k+1}} \underbrace{\Big[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{2,2} & -y_{1,2} \\ -y_{1,2} & y_{1,1} \end{pmatrix}\Big(\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{1,2} & y_{2,2} \end{pmatrix}\Big)\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} det(Y)^k\Big]}_{Nebenrechnung\ 2\ (s.\ folgende\ Seite)} g \, +$$

$$\frac{1}{det(Y)^{k+1}} \underbrace{\Big[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{2,2} & -y_{1,2} \\ -y_{1,2} & y_{1,1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{1,2} & y_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z} det(Y)^k\Big]}_{Nebenrechnung\ 3\ (s.\ folgende\ Seite)} g.$$

Nach Einsetzen der Ergebnisse aus Nebenrechnung 1-3 erhält man für $\mathbf{L}_D$

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z} f_1\Big)x_1 + \Big(\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z} f_2\Big)x_2 \\
&+ \frac{1}{det(Y)}\Big[(-\tfrac{i}{2} - \tfrac{ik}{2})f_1 y_{2,2} x_1 u_{1,1} + ((\tfrac{i}{2} + ik)f_1 y_{1,2} - \tfrac{i}{2} f_2 y_{2,2})x_1 u_{1,2} \\
&\qquad + ((\tfrac{i}{2} f_2 y_{1,2} - \tfrac{ik}{2} f_1 y_{1,1})x_1 u_{2,2}) + ((\tfrac{i}{2} f_1 y_{1,2} - \tfrac{ik}{2} f_2 y_{2,2})x_2 u_{1,1}) \\
&\qquad + ((\tfrac{i}{2} + ik)f_2 y_{1,2} - \tfrac{i}{2} f_1 y_{1,1})x_2 u_{1,2} + (-\tfrac{i}{2} - \tfrac{ik}{2})f_2 y_{1,1} x_2 u_{2,2} \quad \Big] g
\end{aligned}$$

und wir sehen, dass $\mathbf{L}_D$ aus einem holomorphen und einem nicht- holomorphen Teil besteht.

Nebenrechnungen für $\mathbf{L}_D$

Für $n = 2$ gilt: $\sum\limits_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z} = u_{1,1}\frac{\partial}{\partial z_{1,1}} + u_{1,2}\frac{\partial}{\partial z_{1,2}} + u_{2,2}\frac{\partial}{\partial z_{2,2}}$.

Nebenrechnung 1 lautet:

$$\Big[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{2,2} & -y_{1,2} \\ -y_{1,2} & y_{1,1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{1,2} & y_{2,2}\end{pmatrix}\Big(\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2\end{pmatrix}\Big)\ det(Y)^k\Big]$$

Ausmultipliziert ergibt dies

$$= \sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z} f_1(x_1(\underbrace{y_{1,1}y_{2,2} - y_{1,2}^2}_{det(Y)}))det(Y)^k + \sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z} f_2(x_2(\underbrace{y_{1,1}y_{2,2} - y_{1,2}^2}_{det(Y)}))det(Y)^k$$
$$= \big(\sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z} f_1\big)x_1 det(Y)^{k+1} + \big(\sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z} f_2\big)x_2 det(Y)^{k+1}.$$

Nebenrechnung 2 lautet:

$$\Big[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{2,2} & -y_{1,2} \\ -y_{1,2} & y_{1,1}\end{pmatrix}\Big(\sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{1,2} & y_{2,2}\end{pmatrix}\Big)\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2\end{pmatrix}\ det(Y)^k\Big].$$

Ausmultipliziert ergibt dies

$$\begin{aligned} =&(-\tfrac{i}{2})\ f_1\big(u_{1,1}x_1y_{2,2} + u_{1,1}x_2(-y_{1,2}) + u_{1,2}x_1(-y_{1,2}) + u_{1,2}x_2y_{1,1}\big)\ det(Y)^k \\ &+ (-\tfrac{i}{2})\ f_2\big(u_{1,2}x_1y_{2,2} + u_{1,2}x_2(-y_{1,2}) + u_{2,2}x_1(-y_{1,2}) + u_{2,2}x_2y_{1,1}\big)\ det(Y)^k. \end{aligned}$$

Nebenrechnung 3 lautet:

$$\Big[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{2,2} & -y_{1,2} \\ -y_{1,2} & y_{1,1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{1,2} & y_{2,2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2\end{pmatrix}\big(\sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z} det(Y)^k\big)\Big].$$

Mit Hilfe von Nebenrechnung 1 folgt hier

$$= f_1x_1\ det(Y)^k \sum_{u,v} u\frac{\partial}{\partial z}\underbrace{det(Y)^k}_{(y_{11}y_{22}-2y_{12}^2)^k} + f_2x_2\ det(Y)^k \sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z} det(Y)^k$$
$$= (f_1x_1 + f_2x_2)((-\tfrac{ik}{2})(u_{1,1}y_{2,2} - 2u_{1,2}y_{1,2} + u_{2,2}y_{1,1}))\ det(Y)^k.$$

Somit sind die Nebenrechnungen abgeschlossen und wir können weiter zur Entwicklung von $\mathbf{R}_D$.

Entwicklung von R_D

Für $n = 2$ und $\rho = Sym^1 \otimes det^k$ erhalten wir für $\mathbf{R}_D$ den Ausdruck

$$
\begin{aligned}
&(f_1x_1 + f_2x_2) \otimes det(Y)^{-l} \sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z}\Big[det(Y)^l g\Big] \\
&= (f_1x_1 + f_2x_2) \otimes det(Y)^{-l}\Big[g \sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z} det(Y)^l + det(Y)^l \sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z} g\Big] \\
&= (f_1x_1 + f_2x_2) \otimes \sum_{u,v} u\tfrac{\partial}{\partial z} g \\
&\quad + (-\tfrac{il}{2})\tfrac{1}{det(Y)}\Big[(f_1x_1 + f_2x_2) \otimes (u_{1,1}y_{2,2} - 2u_{1,2}y_{1,2} + u_{2,2}y_{1,1})\Big]g.
\end{aligned}
$$

Auch $\mathbf{R}_D$ besteht aus einem holomorphen & einem nicht-holomorphen Teil.

Wie im allgemeinen Fall möchten wir die Imaginärteile von $\mathbf{L}_D$ und $\mathbf{R}_D$ entfernen. Um dies zu erreichen benötigen wir, in einem ersten Schritt, wieder die Basiselemente der Pieri-Komponente. Für $GL(2, \mathbb{C})$ lauten diese:

$$x_1 \otimes y_1^2, \quad x_1 \otimes 2y_1y_2 + x_2 \otimes y_1^2, \quad x_2 \otimes 2y_1y_2 + x_1 \otimes y_2^2 \quad und \quad x_2 \otimes y_2^2.$$

Die Basiselemente der Anti-Pieri-Komponente für $GL(2, \mathbb{C})$ lauten:

$$(-\tfrac{1}{2})(x_1 \otimes 2y_1y_2) + x_2 \otimes y_1^2 \quad und \quad (-\tfrac{1}{2})(x_2 \otimes 2y_1y_2) + x_1 \otimes y_2^2.$$

Nach Bemerkung 3.6. identifizieren wir y_1^2 mit $u_{1,1}$, y_2^2 mit $u_{2,2}$ und $2y_1y_2$ mit $u_{1,2}$. Wir führen die Basistransformation in einem ersten Schritt für $\mathbf{L}_D$ durch und im zweiten Schritt für $\mathbf{R}_D$.

Nach der Basistransformation erhält man für $\mathbf{L}_D$ die folgende Aufteilung

$$
\begin{aligned}
&(Pieri) \\
&(\tfrac{\partial}{\partial z_{1,1}} f_1)g + (\tfrac{\partial}{\partial z_{1,2}} f_1)g + (\tfrac{\partial}{\partial z_{1,1}} f_2)g + (\tfrac{\partial}{\partial z_{1,2}} f_2)g + (\tfrac{\partial}{\partial z_{2,2}} f_1)g + (\tfrac{\partial}{\partial z_{2,2}} f_2)g \\
&\quad + \tfrac{1}{det(Y)}\Big[(-\tfrac{i}{2} - \tfrac{ik}{2})f_1y_{2,2} + (i + ik)f_1y_{1,2} + (-\tfrac{ik}{2} - \tfrac{i}{2})f_2y_{2,2} \\
&\qquad + (i + ik)f_2y_{1,2} + (-\tfrac{ik}{2} - \tfrac{i}{2})f_1y_{1,1} + (-\tfrac{i}{2} - \tfrac{ik}{2})f_2y_{1,1}\Big]g + \\
&(Anti - Pieri) \\
&((-\tfrac{1}{2})(\tfrac{\partial}{\partial z_{1,2}} f_1)g + (\tfrac{\partial}{\partial z_{1,1}} f_2)g) + ((-\tfrac{1}{2})(\tfrac{\partial}{\partial z_{1,2}} f_2)g + (\tfrac{\partial}{\partial z_{2,2}} f_1)g) \\
&\quad + \tfrac{1}{det(Y)}\Big[(\tfrac{i}{4} - \tfrac{ik}{2})(f_1y_{1,2} + f_2y_{2,2}) + (\tfrac{i}{4} - \tfrac{ik}{2})(f_2y_{1,2} + f_1y_{1,1})\Big]g.
\end{aligned}
$$

Nach der Basistransformation erhält man für $\mathbf{R}_D$ die Aufteilung

$$(Pieri)$$
$$f_1(\frac{\partial}{\partial z_{1,1}}g) + f_1(\frac{\partial}{\partial z_{1,2}}g) + f_2(\frac{\partial}{\partial z_{1,1}}g) + f_2(\frac{\partial}{\partial z_{1,2}}g) + f_1(\frac{\partial}{\partial z_{2,2}}g) + f_2(\frac{\partial}{\partial z_{2,2}}g) +$$
$$\frac{1}{det(Y)}\Big[(-\frac{il}{2})f_1y_{2,2} + (ilf_1y_{1,2} - \frac{il}{2}f_2y_{2,2}) + (ilf_2y_{1,2} - \frac{il}{2}f_1y_{1,1}) + (-\frac{il}{2})f_2y_{1,1}\Big]g +$$
$$(Anti - Pieri)$$
$$(-\frac{1}{2})f_1(\frac{\partial}{\partial z_{1,2}}g) + f_2(\frac{\partial}{\partial z_{1,1}}g) + (-\frac{1}{2})f_2(\frac{\partial}{\partial z_{1,2}}g) + f_1(\frac{\partial}{\partial z_{2,2}}g) +$$
$$-\frac{il}{2}\frac{1}{det(Y)}\Big[(-\frac{il}{2})(f_1y_{1,2} + f_2y_{2,2}) + (-\frac{il}{2})(f_2y_{1,2} + f_1y_{1,1})\Big]g.$$

Wenn wir nun Koeffizienten

$$c_1^P = (-\tfrac{il}{2}) \quad \text{und} \quad c_2^P = (-\tfrac{i}{2} - \tfrac{ik}{2})$$

wählen (mit $l \neq 0,\ k \neq -1$), dann kann man nachrechnen, dass nur die Pierikomponente des Imaginärteils wegfällt. Wenn wir für die Koeffizienten die Werte

$$c_1^{AP} = (\tfrac{il}{2}) \quad \text{und} \quad c_2^{AP} = (-\tfrac{i}{4} + \tfrac{ik}{2})$$

wählen (mit $l \neq 0,\ k \neq \frac{1}{2}$) , dann fällt nur die Anti-Pieri-Komponente des Imaginärteils weg. Mit einer Linearkombination aus beiden Koeffizienten(paaren) fällt der gesamte Imaginärteil für die Differenz (5.1) für $n = 2$ weg und übrig bleibt ein holomorpher Differentialoperator, der sich in zwei Komponenten (Pieri & Anti-Pieri) aufteilen lässt:

$$\begin{array}{lrcl}
\textbf{Pieri} & c_1^P((\frac{\partial}{\partial z_{1,1}}f_1)g) & - & c_2^P(f_1(\frac{\partial}{\partial z_{1,1}}g)) + \\
 & c_1^P((\frac{\partial}{\partial z_{1,2}}f_1)g + (\frac{\partial}{\partial z_{1,1}}f_2)g) & - & c_2^P(f_1(\frac{\partial}{\partial z_{1,2}}g) + f_2(\frac{\partial}{\partial z_{1,1}}g)) + \\
 & c_1^P((\frac{\partial}{\partial z_{1,2}}f_2)g + (\frac{\partial}{\partial z_{2,2}}f_1)g) & - & c_2^P(f_2(\frac{\partial}{\partial z_{1,2}}g) + f_1(\frac{\partial}{\partial z_{2,2}}g)) + \\
 & c_1^P((\frac{\partial}{\partial z_{2,2}}f_2)g) & - & c_2^P(f_2(\frac{\partial}{\partial z_{2,2}}g)) \\
 & & + & \\
\textbf{Anti-} & c_1^{AP}(-\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial z_{1,2}}f_1)g + (\frac{\partial}{\partial z_{1,1}}f_2)g) & - & c_2^{AP}(-\frac{1}{2}f_1(\frac{\partial}{\partial z_{1,2}}g) + f_2(\frac{\partial}{\partial z_{1,1}}g)) + \\
\textbf{Pieri} & c_1^{AP}(-\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial z_{1,2}}f_2)g + (\frac{\partial}{\partial z_{2,2}}f_1)g) & - & c_2^{AP}(-\frac{1}{2}f_2(\frac{\partial}{\partial z_{1,2}}g) + f_1(\frac{\partial}{\partial z_{2,2}}g)).
\end{array}$$

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$	Menge natürlicher, ganzer, rationaler, reeller Zahlen
$GL(n, K)$ bzw. $GL_n(K)$	Allgemeine lineare Gruppe von Grad n über Körper K
$K^{m,n}$ bzw. $K^{m\times n}$ oder $M(m \times n, K)$	Menge aller $m \times n-$ Matrizen mit Einträgen in K
$M(n, K)$	Menge aller $n \times n-$ Matrizen mit Einträgen in K
K^* bzw. $K^\times$	Körper K ohne das Nullelement
$dim(V)$	Dimension des Vektorraumes V
E_n bzw. 1_n	$n \times n-$ Einheitsmatrix
0_n	$n \times n-$ Nullmatrix
A^t	Die zu A transponierte Matrix
A^{-1}	Die Inverse einer Matrix A
$det(A)$ bzw. $\|A\|$	Determinante einer Matrix A
S_k	Symmetrische Gruppe aller Permutationen auf $\{1, 2, ..., k\}$
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$i^2 = -1$	Imaginäre Einheit
$\mathrm{Im}\, z$	Imaginärteil y einer komplexen Zahl $z = x + iy$
$\mathrm{Re}\, z$	Realteil x einer komplexen Zahl $z = x + iy$
$\delta_{i,j}$	Kronecker-Delta
$R[x_1, ...x_n]$	Polynomring über R in n Veränderlichen $x_1, ..., x_n$
$Sp(n, R)$	Symplektische Gruppe von Grad n über R
$\mathbb{H}_n$	Siegelscher (oberer) Halbraum von Grad n
$\|_k$ bzw. $\|_\rho$	(Peterssonscher) Strichoperator
$\circ$	Kreisoperator
$\otimes$	Tensorprodukt
$\mathcal{H}_k(\mathbb{H}_n, \mathbb{C})$ bzw. $\mathcal{H}_{det^k}(\mathbb{H}_n, \mathbb{C})$	Raum komplexwertiger holomorpher Funktionen auf $\mathbb{H}_n$ mit der Operation $\|_k$
$C^\infty_k(\mathbb{H}_n, \mathbb{C})$ bzw. $C^\infty_{det^k}(\mathbb{H}_n, \mathbb{C})$	Raum der komplexwertigen C^∞ Funktionen auf $\mathbb{H}_n$ mit der Operation $\|_k$

Literatur

[1] G. Bol: Invarianten linearer Differentialgleichungen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 16 (1949), 1-28. MR0033411.

[2] S. Böcherer, T. Satoh, T. Yamazaki: On the pullback of a Differential Operator and Its Application to Vector Valued Eisenstein Series. Commentarii mathematici Universitatis Sancti Pauli, Vol. 41, No. 1 (1992)

[3] S. Böcherer: Holomorphic differential operators with iteration. Proceedings of the 7th Autumn Workshop on Number Theory. "Differential Operators on Modular Forms and Application ". (Hakuba, Japan. October 2004) Editor: T. Ibukiyama. Printed by Ryushi-do, March 2005.

[4] S. Böcherer: Über die Fourier-Jacobi Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen II. Math.Z.189, 81-100 (1985)

[5] S. Böcherer, S. Das: On holomorphic differential operators equivariant for the inclusion Sp(n,R) in U(n,n). Int. Math. Res. Not. (IMRN) Vol. 2013, No. 11, 2534-2567

[6] Y. Choie, H. Kim: An analogy of Bol's result on Jacobi forms and Siegel modular forms. J. Math. Anal. Appl. 257 (2001), no. 1, 79-88.

[7] H. Cohen: Sums involving the values at negative integers of L functions of quadratic characters, Math. Ann. 217 (1975) 271-285

[8] W. Fischer, I. Lieb: Funktionentheorie: Komplexe Analaysis in einer Veränderlichen. 9. Auflage. Vieweg Verlag. (2005)

[9] E. Freitag, Siegelsche Modulfunktionen. Springer Verlag Berlin Heidelberg NewYork (1983)

[10] E. Freitag, Funktionentheorie 2. Springer Verlag (2009)

[11] W. Fulton, J. Harris: Representation Theory - A first course. Springer Verlag (1991)

[12] R. Goodman, N.R. Wallach: Symmetry, Representations and Invariants. Springer Verlag (2009)

[13] R. C. Gunning: Differential operators preserving relations of automorphy. Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 326-352.

[14] M. Harris: Special values of zetra functions attached to Siegel modular forms. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 14 (1981), no. 1, 77-120.

[15] T. Ibukiyama: On differential operators on automophic forms and pluriharmonic polynomials. Comm.Math.Univ.St.Pauli 48, 103-118 (1999)

[16] H. Klingen, Introductory lectures on Siegel modular forms. Cambridge University Press (1990)

[17] S. Lang: Algebra. Springer Verlag (2002)

[18] R.A. Rankin: The construction of automorphic forms from the derivatives of a given form, J. Indian Math. Soc. 20 (1956) 103-11

[19] G. Shimura: Arithmeticity in the Theory of Automorphic Forms. Mathematical Surveys and Monographs Volume 82. American Mathematical Society (2000)

[20] G. Shimura: Elementary Dirichlet Series and Modular Forms. Springer Monographs in Mathematics (2000)

[21] Richard .P. Stanley: Enumerative Combinatorics: Volume 2. Cambridge University Press (1997)

[22] D. Zagier: Modular forms and differential operators. Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), Vol 104, No. 1, February 1994, pp.57-75.